UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

O VOLUME DOS PRINCIPAIS POLIEDROS:
Metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas

MAURO SERGIO SANTANA

Barra do Garças
2014

MAURO SERGIO SANTANA

O VOLUME DOS PRINCIPAIS POLIEDROS:
Metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), na Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva

Barra do Garças
2014

Santana, Mauro Sergio

O volume dos principais poliedros: metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas / Mauro Sergio Santana, Mato Grosso - 2014.
140f.: ibl.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Mato Grosso. Centro Universitário do Araguaia, Barra do Garças, 2014.
Inclui bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Geometria espacial. 2. Volumes. 3. Poliedros. 4. Resolução de problemas.

MAURO SERGIO SANTANA

O VOLUME DOS PRINCIPAIS POLIEDROS:
Metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas

Aprovada em 24 de Outubro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

Adilson A. Berlatto

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Membro interno
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

Kellcio O. Araujo

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo
Membro externo
Universidade de Brasília (UnB)

Barra do Garças
2014

Ao meu, querido, forte, exemplo de honestidade e caráter, e sempre admirado, "papai".

"A questão primordial do que sabemos, não é o que sabemos, mas como sabemos".

(Aristóteles)

"O conhecimento é a salvação. É sábio quem busca a salvação".

(Lucas 11:52)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder essa vitória, sendo fiel em responder aos que O clamam.

Agradeço à minha família pelo apoio e compreensão por minha ausência em vários momentos dedicado ao curso.

Agradeço aos professores do Curso por se engajarem em trazer esse projeto do PROFMAT para UFMT. Aos Drs Carlos e Adilson por serem sinceros amigos e exemplos de conhecimento, orientações didáticas e de profissionalismo.

Agradeço aos doutores membros da banca, a Dra Lennie Ariete e ao Ms Renato pelas contribuições na complementação deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de Curso pelo nosso companheirismo, amizade e vários momentos de descontração e alegria. Ao Geraldo por nos representar em vários assuntos do Curso. A todos os outros colegas, Adão, Daniel, Jhonatan, Júlio, Kélia, Neto, Tiago e Raquel pelos momentos agradáveis em nossas reuniões de estudo e nos momentos de descontração.

Agradeço aos amigos e irmãos, que me apoiaram nos momentos de incertezas no Curso.

Agradeço ao meu Orientador Dr. Carlos Rodrigues, pelas suas orientações didáticas no curso e na estruração geral deste trabalho. Pelas palavras de apoio e confiança, mesmo após passar por momentos familiares difíceis, demonstrando exemplo de amizade e profissionalismo.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, por nos oferecer esse programa de Mestrado e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Agradeço à Secretaria de Educação de Mato Grosso, pela licença parcial concedida para esse aprimoramento profissional.

Lista de Figuras

Sumário

Resumo

Neste trabalho, propôs-se uma abordagem didática para o cálculo de volume dos principais sólidos vistos no Ensino Médio, numa linguagem acessível aos estudantes e mantendo um certo rigor matemático. Procurou-se enriquecê-la com atividades concretas e com aplicações em situações-problema do cotidiano, buscando estimular a motivação e despertar o interesse do educando pelo tema. Nas aplicações concretas, os estudantes podem manipular ou mesmo criar os objetos de estudo. Nas do cotidiano, ressaltou-se fatos interessantes, curiosos e desafiadores relativos aos conceitos vistos. Apresenta-se as atividades em dois momentos do estudo: algumas na introdução dos conceitos, buscando despertar a ideia intuitiva do que será tratado, e outras, após a apresentação dos conceitos, buscando afirmação, reforço e aplicação do que fora tratado. Trabalhou-se as definições e os aspectos mais relevantes de aprendizagem significatica e da motivação do educando, fator determinante para esse tipo de aprendizagem. Apresenta-se também as etapas da metodologia de resolução de problemas esquematizada por Goerge Polya, a qual foi adotada na resolução de alguns problemas, oferecendo, com isso, um modelo para que os educandos possam seguí-lo em situações-problema semelhantes. Ao tratar-se dos conceitos da Geometria Espacial referentes ao cálculo de volumes, seguiu-se as recomendações e procedimentos vistos no Programa de Mestrado do PROFMAT, o qual defendeu a seguinte metodologia para trabalhar esse tema no Ensino Médio: partir sempre de resultados particulares e estendê-los para resultados mais gerais. Mescla-se também, procedimentos e reflexões didáticas, adquiridas na experiência como professor da rede pública do Estado. É uma proposta metodológica que visa tornar o enfoque desse tópico da Geometria Espacial mais interessante e motivadora de uma aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Geometria Espacial; Volumes; Poliedros; Resolução de problemas.

Abstract

This paper proposed a didactic approach to the calculation of volume of solid main visas in high school students an accessible and keeping a certain mathematical rigor language. Sought to enrich it with concrete activities and applications in problem situations of daily life, seeking to stimulate motivation and arouse the interest of the student in the subject. In practical applications, students can manipulate or even create objects of study. In everyday, we highlight interesting, challenging and curious facts relating to visas concepts. We present the activities at two times during the study: the introduction of some concepts, seeking to awaken the intuitive idea that will be treated, and others, after the presentation of the concepts, seeking affirmation, reinforcement and application of what he had been treated. Worked the definitions and the most relevant aspects of significatica learning and motivation of the learner, crucial to this type of learning factor. We also present the steps of problem solving methodology outlined by Polya Goerge, which was adopted in solving some problems offering thereby a model so that the students can follow it in similar problem situations. When dealing with the concepts of spatial geometry of the calculation of volumes, followed the recommendations and visa procedures in the Masters Program of PROFMAT, which advocated the following methodology to work this subject in high school: always from particular outcomes and extend them to more general results. Blends also, procedures and didactic reflections, experience acquired as public school teachers in the state. It is a methodology that aims to make this topic the focus of spatial geometry more interesting and motivating a significant learning.
Keywords: Space Geometry; Volumes; Polyhedra; Troubleshooting.

Introdução

David Ausubel (1982) afirma que uma aprendizagem satisfatória acontece quando o educando consegue integrar o que lhe é oferecido pela instituição escolar, de forma conceitual e abstrata, com o que está estritamente ligado ao meio em que vive, porque é nesse meio, continua ele, que o educando relaciona e constrói os modelos concretos e representativos do que aprendeu. Nesse aspecto, foi apresentado uma abordagem metodológica de um tópico da Geometria Espacial (o cálculo de volume para poliedros), focada em resolução de problemas, aplicados em situações cotidianas mais próximas possíveis da realidade vivida pelo estudante.

Destaca-se os aspectos mais relevantes na abordagem didática e conceitual desse assunto: reflexões didáticas, definições, fórmulas, técnicas de resolução, curiosidades e propostas de atividades. A metodologia adotada apresenta certo rigor matemático mas numa linguagem acessível aos estudantes do Ensino Médio (EM).

Ao propor situações-problema com fatos ligados ao cotidiano do estudante, visa-se uma didática de motivação e de despertamento do interesse do estudante, aspectos considerados como facilitadores de sua aprendizagem. Com isso, procura-se fazer com que o estudante tenhan uma percepção da Geometria Espacial um pouco além dos aspectos numéricos e algébricos, uma vez que essa noção está constantemente presente na sua vida, pois o homem vive num mundo tridimensional.

Buscou-se aplicar os conceitos em situações-problema, das quais os estudantes tenham exemplos no dia a dia, estimulando o seu aprendizado e restringindo um pouco a aversão que alguns apresentam em relação à matemática, justamente por essa distância que, às vezes, há entre o que se aprende na escola com a realidade em que se vive fora dela.

Seguiu-se os conceitos e recomendações sobre Geometria Espacial tratados no curso de Mestrado do PROFMAT, com apoio de alguns livros didáticos descritos na bibliografia. Apresentou-se uma linguagem acessível aos estudantes do EM e seguindo o esquema apresentado por George Polya (1995) para resolução de alguns problemas, buscando sempre os pontos relevantes de motivação do estudante para uma aprendizagem crítica e significativa.

É uma metodologia que segue o que é recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para Ensino de Geometria, os quais reforçam sobre a importância dos seus conceitos no Ensino Básico (EB) e que por meio deles "o estudante desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". (BRASIL, 1998, p.49). Os PCN defendem que a Geometria "é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente". (BRASIL, 1998, p.49) .

As reflexões didáticas desenvolvidas ao longo de uma experiência como professor do EM, balizaram toda a abordagem e metodologia apresentada neste trabalho. Fez-se uma análise do que seria mais adequado para os estudantes nessa fase do ensino, ressaltando os aspectos mais relevantes na busca de uma aprendizagem satisfatória.

São propostas de atividades e aplicações no cotidiano relativas a cada tópico trabalhado no cálculo de volume dos principais poliedros. Trabalhou-se a determinação desses volumes, destacando os conceitos, as reflexões didáticas, as definições, as fórmulas e curiosidades visando a motivação do estudante.

Foi apresentado um projeto desenvolvido pelos professores da Escola Estadual Irmã Diva Pimentel no município de Barra do Garças - MT. Esse projeto oportunizou a aplicação do cálculo de volumes quando houve a necessidade de tapar uns buracos em alguns painéis decorativos nas paredes das salas para a instalação dos condicionadores de ar. Foi interessante e uma verdadeira aplicação dos conceitos estudados em Geometria Espacial.

Em todos os capítulos em que tratou-se dos conceitos matemáticos, foram apresentadas propostas de atividades que retratassem aplicações concretas ou do cotidiano, objetivando dois aspectos, de acordo com o momento em que os conceitos foram trabalhados: despertar o interesse e a motivação do estudante para uma percepção intuitiva do será visto; buscar afirmação e reforço dos conceitos abordados.

Foi feito também, ao longo de cada tópico tratado, a recomendação de algumas atividades a serem desenvolvidas no laboratório de informática, como apresentado na Escola Estadual Dr. Rubens Correia Aguirre, no município de Aragarças-GO. Nessa atividade utilizou-se alguns programas: Geometria da Cidade, um programa no *site* do Ministério da Educação (MEC), no RIVED (um *site* dedicado aos professores da Educação Básica), que permite trabalhar os conceitos e características de alguns poliedros e o reconhecimento de suas formas no cotidiano de uma cidade virtual; Geometry 2.1 PC, que permite confirmar os cálculos do volume do principais sólidos vistos no Curso; Geogebra e SketchUp da Google, que possibilita construir e manipular os principais sólidos vistos no curso, em 3D.

São propostas de atividades na tentativa de trazer para o estudante um olhar diferente da Geometria Espacial em situações presentes no seu cotidiano.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para o ensino de Geometria Espacial no EM. Afinal é uma tentativa de restinguir certa aversão que alguns estudantes apresentam em relação à matemática, diminuindo um pouco a distância que há entre o que se aprende na escola e o que se vive fora dela. É uma proposta metodológica com uma linguagem acessível aos estudantes do EM e enriquecida com aplicações em situações cotidianas interessantes, curiosas e desafiadoras que podem despertar a motivação e o interesse do esdutante para esse tema.

Capítulo 1

Aprendizagem significativa e resolução de problemas

Nos PCN (Brasil, 1999), as Orientações Curriculares para Ensino de Matemática, defendem a ideia da construção ativa dela pelo estudante. Sobre esse assunto, David Ausubel (1982) afirma que a abstração e compreensão adequadas sobre um novo conceito que se pretende apresentar, devem ser precedidas da construção de um exemplo do objeto tratado, pois, desta forma, será garantida a existência desse objeto para o estudante. Esses são aspectos do que ele caracteriza como uma **aprendizagem significativa**.

Com relação a aprendizagem, sabe-se que é na escola que o estudante tem contato com seus diferentes tipos: conceitual, verbal, social, de fatos, de procedimentos e de condutas. Mas essa aprendizagem oferecida pela instituição escolar não constitui, obviamente, a forma global e única de se aprender. Ela interage com o meio que o educando convive e se relaciona.

Segundo David Ausubel (1982), uma aprendizagem é dita significativa quando o conhecimento pelo indivíduo se dá a partir da ação dele, com os esquemas ou estruturas que já traz, sobre o meio físico ou social, onde abstrai deste meio o que é do seu interesse e em seguida reconstrói o que já tem, por força dos elementos novos que acaba de abstrair. Dessa forma, trabalhar com a metodologia de resolução de problemas, busca-se promover/despertar esse tipo de atitude, levando o educando a adaptar resultados que já internalizou em situações-problema vivenciadas e, integrá-las como procedimentos a serem adotadas em situações semelhantes.

Ressalta-se aqui, aspectos importantes dessa aprendizagem ao se propor atividades que colocam os estudantes em situações de desafio, despertando sua curiosidade, motivação e interesse em querer saber sobre os conceitos envolvidos. São várias situações-problema e questionamentos que valorizam a didática de perguntas ao invés de respostas tentando promover, em sala de aula, uma interação entre conteúdo, professor e estudante, podendo, com isso, resultar em uma aprendizagem mais crítica e menos passiva.

1.1 O aprendizado

Moreira (1999) considera que o fato de os seres humanos viverem numa sociedade de constante aprendizagem, faz com que o processo de aprendizagem aconteça por meio do exercício cognitivo nas diversas atividades de interação sociocultural. E nesse processo desenvolve-se ações e operações para se informar, compreender, criar, solucionar problemas e avaliar os resultados.

> Na aprendizagem significativa, o aprendiz não é um receptor passivo, ele faz uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos. Nesse processo, ao mesmo tempo em que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e diferenças e reorganizar seu conhecimento. Em contraposição à aprendizagem significativa, em outro extremo de um contínuo, está a aprendizagem mecânica, na qual novas informações são memorizadas de maneira arbitrária, literal, não significativa. Esse tipo de aprendizagem, bastante estimulado na escola, serve para "passar"nas avaliações, mas tem pouca retenção, não requer compreensão e não dá conta de situações novas (MOREIRA, 1999, p. 4).

Portanto, estamos constantemente experimentando, ensaiando, acertando e errando e nesse processo a atenção, a percepção, o pensamento, a imaginação, a motivação e outros fatores se articulam de diversas formas para uma verdadeira aprendizagem. E, na escola, deve-se buscar, como uma prática didática, todos esses aspectos ao tratar de qualquer assunto.

É fundamental que o professor exerça o papel de mediador dessa aprendizagem, observando a individualidade e o contexto dos educandos, pois cada um constrói e organiza sua própria forma de aprender, mediante sua percepção do meio. No entanto, o estudante precisa se envolver no processo de construção do conhecimento, pois na junção da vontade e decisão de querer aprender com a mediação do professor é que a aprendizagem se concretiza.

Entretanto, nem sempre os estudantes estão motivados para aprender certos conteúdos, principalmente, aqueles que não fazem sentido a eles. Sobre esse aspecto, Moreira (1999) sugere que os professores podem intervir e propor, em suas aulas, a integração dos conteúdos e das disciplinas, sempre que possível, a situações vivenciadas no cotidiano, criando, assim, o desejo no estudante de apropriar-se do conhecimento pelo prazer de saber, e não pela obrigação.

Quando o estudante encontra fatos relevantes do que aprendeu na escola, que podem ser estendidos a outros ambientes do coditiano, ele se interessa mais pelo conteúdo e percebe que o ambiente escolar é parte fundamental na construção do saber. Dessa forma, o estudante tem a sensação de que o que está aprendendo lhe está sendo útil em algum momento.

1.2 Motivação

Na prática docente depara-se com muitos estudantes que revelam ter uma boa capacidade intelectual, mas obtêm resultados muito baixos no seu desempenho escolar. Isso pode está reclaionado à motivação e não à capacidade intelectual. Mostrar a aplicabilidade da Matemática na resolução de muitas situações-problema do seu cotidiano, nas diferentes atividades humanas, desperta um fator importante para o aprendizado: o interesse e, em consequência, a motivação.

A relação entre a motivação e a aprendizagem é evidente, pois, sem motivação, não há aprendizagem. Aprende-se aquilo que corresponde a uma necessidade ou a um interesse. Um estudante motivado foca sua atenção e seu interesse e intensifica sua atividade aumentando sua energia e poder de concentração, e então orienta os seus atos em direção à meta que pretende atingir.

Motivar o estudante é criar condições para que ele desenvolva a capacidade de transferência de conhecimentos e habilidades a novas situações de forma que sintam que estão fazendo progressos.

Na estratégia de resolução de problemas, há um esquema com etapas que, quando adotadas pelos estudantes, constitui uma ferramenta, por meio de procedimentos metodológicos que os farão perceber esse progresso em sua aprendizagem.

1.3 Metodologia de resolução de problemas

A todo momento na vida se é inquirido a tomadas de decisões, seja em situações simples ou mais complicadas do cotidiano. Nesses momentos, geralmente, busca-se o melhor caminho para se chegar a solução. Percebe-se, então, que a resolução de problemas é uma constante no dia a dia. Assim, tanto na vida cotidiana, quando se depara com problemas práticos, quanto na matemática escolar, que apresenta problemas perfeitamente formulados, deve-se considerar todas as condicionantes envolvidas na busca da solução. Nas duas situações, o processo de resolver o problema faz criar uma metodologia de ações e procedimentos que acaba se tornando uma prática da qual adota-se sempre que se deparar com situações semelhantes no futuro.

A busca pela solução de um problema é facilitada quando procura-se, de forma racional e, às vezes, natural, seguir etapas próprias da resolução de um problema: compreensão, planejamento, execução e verificação do resultado. É nisso que se resume a metodologia de resolução de problemas esquematizada por Polya (1995). Quando se apropria de tais procedimentos, a compreensão de todo o processo envolvido na situação dará a oportunidade de aprimorar e amadurecer tal metodologia, permitindo reforçar ou reformular o método.

Nesse aspecto, a Matemática fornece, com sua linguagem, um padrão e um rigor característico na tomada de decisão. E defender esse caráter prático da Matemática no cotidiano deve ser uma constante na didática do professor do EM. É a defesa de um aspecto que muitos já tem da Matemática de ser um conjunto de teorias gerais e abstratas que se aplica a uma situação concreta.

Polya (1995) descreve, de forma bem detalhada, todos os aspectos da metodologia de resolução de problemas. Ele trabalha a técnica de resolução em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano de resolução, execução do plano e uma revisão dos resultados.

1.3.1 Problema

Considera-se problema como uma dificuldade a ser superada, uma situação imprevisível que força a adoção de uma estratégia de resolução. Mas o que parece ser um problema para uma pessoa, pode não ser para outra, pois a dificuldade encontrada na situação tem o seu grau de complexidade maior ou menor, conforme o conhecimento prévio da pessoa sobre o assunto.

Dante (2004) define problema como qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-lo.

Para Pereira (1980), problema é toda situação na qual o indivíduo necessita obter novas informações e estabelecer relações entre elementos conhecidos e os contidos num objetivo a que se propõe a realizar para atingi-lo.

Azevedo (2002) fala que problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.

Pode ser considerado que cada vez que há uma pergunta, há um problema, pois, para responder a qualquer pergunta, é necessário esforço cognitivo.

1.3.2 Problema matemático

Problema matemático, para Dante (2004), é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.

O que diferencia um problema matemático de um problema prático é que o matemático vem perfeitamente formulado, ficando mais fácil o levantamento dos dados relevantes e, então, parte-se de conceitos matemáticos claros, que estão razoavelmente ordenados na mente; já o problema prático apresenta uma multiplicidade de condicionantes e, geralmente, parte-se de ideias não muito claras em sua relevância de consideração.

1.3.3 Classificação dos problemas

Para Dante (2004) os problemas matemáticos tem uma classificação que resumi-se da seguinte forma:

1. **Exercício de reconhecimento**: seu objetivo é fazer com que o estudante reco-

nheça, identifique ou se lembre de um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade, etc.

2. **Exercícios de algoritmos**: são aqueles resolvidos passo a passo. Geralmente, no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais.

3. **Problemas-padrão**: sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos, e não exige qualquer estratégia. A solução do problema já está contida no próprio enunciado, bastando apenas identificar as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo.

4. **Problemas-processo ou heurísticos**: são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do estudante um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução.

5. **Problemas de aplicação**: são aqueles que retratam situações reais do dia a dia. São também chamados de situações-problema. Por meio de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, procura-se associar um modelo matemático a uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc.

6. **Problemas de quebra-cabeça**: são problemas que envolvem e desafiam grande parte dos estudantes. Geralmente, constituem a chamada Matemática recreativa e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, que é a chave da solução.

George Polya (1995) descreve um esquema de resolução de problemas, as quais destacam-se, a seguir, os aspectos mais relevantes em cada etapa.

1.3.4 Compreensão do problema

Polya (1995) afirma ser incoerente responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. O estudante precisa compreender o problema identificando os seguintes pontos: Qual é a incógnita? Quais os dados? Qual a condicionante (fatores a serem observados como condição na busca da solução)? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é redundante? Ou é contraditória?

Familiarizar-se com o problema gravando na mente seu objetivo, faz parte dessa etapa de resolução. Por onde começar? É preciso começar pelo enunciado, pelo exame das partes principais do problema, e quando o estudante compreender e ter em sua mente o escopo geral do problema terá uma memória mais receptiva e não correrá o risco de perder o foco durante o processo de resolução.

1.3.5 Estabelecimento de um plano

Um plano, segundo Polya (1995), equivale à elaboração de estratégias para saber quais as contas, os cálculos ou desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. Conseguir uma boa ideia de resolução não é fácil, ela pode surgir gradualmente ou após algumas tentativas infrutíferas. Essa boa ideia depende fortemente do que conhecemos do assunto (conhecimento previamente adquiridos), de concentração em conectar os dados relevantes e a incógnita do problema e, às vezes, de uma boa intuição. Na concepção de um plano, às vezes, é preciso considerar problemas correlatos mais acessíveis que já tenhamos resolvidos antes do qual possamos usar seu método; reformular o problema de várias maneiras, voltando às definições; resolver uma parte do problema; variar a incógnita ou os dados ou ambos; começar de trás para frente, numa tentativa de que fatos antecedentes possam ser deduzidos do resultado desejado. Enfim, são considerações que podem dar partida à correta sequência de ideias para o estabelecimento de um plano de resolução do problema.

1.3.6 Execução do plano

Executar o plano, destaca Polya (1995), é mais fácil do que planejar, mas exige alto grau de paciência para se verificar, claramente, se cada passo da resolução está correto. É possível que a concepção do problema seja incompleta no começo, mas depois de feito algum progresso, a perspectiva se amplia e é modificada até chegar a solução. Readaptar o plano, inserindo mais detalhes para que fique mais claro a cada passo é uma constante nessa etapa de execução.

É importante que o estudante tenha preparado o plano com influência mínima do professor, para que não esqueça de detalhes de sua execução muito comum quando o estudante apenas recebe o plano de fora e o aceita. Praticar bastante, observar e imitar procedimentos e bons hábitos quando resolvemos problemas, aprende-se a resolvê-los e cria-se um hábito e um interesse mental para esse tipo de desafio.

1.3.7 Reflexão ou retrospecto

Essa é a etapa de exame da solução obtida. É a verificação, do resultado, do argumento e do caminho adotado na resolução e da viabilidade da utilização desse método, em algum outro problema. Nessa retrospectiva, o estudante tem a oportunidade de aperfeiçoar o método adotado na resolução para validar o conhecimento adquirido no processo aprimorando sua capacidade de resolver problemas.

Cada uma destas etapas, se seguidas adequadamente pelo estudante, frequentemente o ajudará. Em comum, elas apresentam a característica do bom senso, pois, às vezes, surgem naturalmente e podem ocorrer ao próprio estudante. É geralmente inútil o estudante atirar-se a fazer cálculos e traçar figuras sem ter compreendido o problema, ou executar detalhes sem perceber a conexão entre eles ou sem ter feito um plano. Muitos erros podem ser evitados, e na prática como acadêmico no Curso de Mestrado no PROFMAT, muitas dificuldades poderíam ter sido evitadas em resolver alguns problemas se não tivesse saltado etapas desse esquema de resolução.

Capítulo 2

Poliedros

2.1 Reflexões sobre Geometria Espacial

Silva (2005) considera que o surgimento da Geometria, na história da humanidade, se deu pela necessidade do homem em medir as terras e definir o limite das propriedades. A chamada geometria demonstrativa tem sua origem no início do século VI a.C creditada por Silva (2005) a, Tales de Mileto. Surgiu, segundo ele, como argumentos lógicos necessários para que certas afirmações fossem aceitas como verdadeiras. Seu método, rigor e sistematização foi notadamente estruturada por Euclides de Alexandria no século III a.C. que expõe a geometria partindo de axiomas e postulado não-demonstráveis, mas essenciais para a estrutura desse estudo, tendo importante papel em vários campos da ciência.

Como vivemos num mundo tridimensional, estamos rodeados de objetos de estudo da Geometria Espacial. Temos modelos em várias formas na natureza: da composição molecular de algumas substâncias, de vírus e de cristais; nas formas dos objetos sólidos comuns no cotidiano; na harmonia geométrica revelada pelas obras de arte e nos grandes projetos arquitetônicos e paisagísticos. Enfim, todos temos contato com formas e objetos de estudo da Geometria.

A Geometria Espacial consiste de interpretações corretas das relações de conceitos básicos de Geometria: o ponto, a reta e o plano. Ela inclui, aos seus axiomas e postulados próprios, os axiomas da Geometria Plana. Assim, muitas noções de geometria no espaço, podem consistir apenas numa extensão natural dos conceitos básicos de geometria no plano. Um exemplo disso é a analogia que há de polígono no plano e poliedro no espaço.

Lima et al. (2006, vol. 1) ressalta que o grande desafio de ensinar Geometria é levar o estudante a fazer a transição do plano para o espaço. Entretanto, essa dificuldade de transcrição de objetos tridimensionais no plano é natural e ressalta que não só os cálculos, mas também o desenho faz parte da Geometria Espacial. Familiariza-se com a representação espacial do sólido e sua perspectiva, sua projeção e sua planificação no plano é fundamental nesse estudo.

Uma consideração que pode ser feita sobre o ensino de Geometria na Educação Básica é que, para uma boa atuação do professor nesse tema, deve-se ampliar o espaço dado a Geometria nos Cursos de Licenciatura. Dessa forma, evita-se que os futuros professores cheguem com deficiências tanto de conteúdo como de metodologia nessa área. Considera-se que alguns professores podem ensinar de forma inadequada ou mesmo não ensinar Geometria Espacial em suas aulas, por não terem uma boa didática ou conhecimento adequado no assunto.

2.2 Definição de poliedro

No estudo de poliedros é mais eficiente adotar uma definição que cumpra os teoremas e as propriedades trabalhados numa etapa inicial do ensino e em outras etapas, se precisar, acrescenta-se algo a essa definição. O importante é não dificultar a percepção do estudante, que a partir do conhecimento de Geometria Plana, pode compreender aquela extensão para a Geometria Espacial, numa verdadeira analogia entre esses dois tópicos. Uma vez dada uma definição, o estudante deve sempre segui-la ao ter que detectar se um sólido é ou não um poliedro.

Lima et al. (2006, vol. 2) define poliedro da seguinte forma:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

2. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

3. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem

passar por nenhum vértice, (ou seja, passando só por arestas).

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo (contém todo o segmento com extremidades no seu interior).

Uma adoção útil equivalente a essa para poliedro convexo é a que foi adotada no Curso de Mestrado do PROFMAT, que resumimos: um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

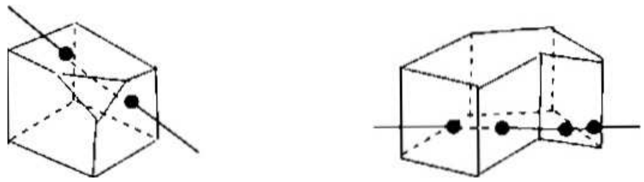


Figura 2.1: *Poliedro convexo e poliedro não convexo*

Portanto, no poliedro:

- As regiões poligonais que formam o poliedro são chamadas **"faces do poliedro"**;
- Cada lado de uma face qualquer é chamada **"aresta do poliedro"**;
- Cada vértice de uma face qualquer é chamada **"vértice do poliedro"**;

Um poliedro que tenha como faces apenas polígonos regulares, todos idênticos, e que possui todos os ângulos poliédricos iguais é um **poliedro regular**.

2.3 Atividade 1: Minicurso para construção de poliedros

Uma atividade eficiente e bastante motivadora foi um Minicurso oferecido aos professores da rede Pública no Centro de Formação Profissional (CEFAPRO-MT), no município de Barra do Garças, pela professora Wanderleya Nara e desenvolvido depois pelos acadêmicos de Matemática da UFMT, em parceria com os bolsistas do Programa Institucional de Bolsa para Iniciação a Docência (PIBID). Elaboraram uma apostila com planificação de alguns poliedros (apêndice A) para que os estudantes do EM pudessem recortar, colar e formar os poliedros mais comuns do estudo.

Outra atividade com esse mesmo objetivo, é um Minicurso de origami direcionado a criação dos poliedros. Alguns bolsistas do PIBID dominam essa técnica e podem ajudar nesse projeto.

São atividades próprias para o ensino de Geometria Espacial em várias etapas da Educação Básica. Os estudantes percebem as limitações existentes na construção de alguns poliedros e que a escolha de certos polígonos não é totalmente livre, principalmente, quando os poliedros são regulares. É uma proposta que demonstra os aspectos de uma aprendizagem significativa, uma vez que o estudante trabalha sobre o concreto e, literalmente, constrói seu conhecimento sobre o objeto estudado.

2.4 Algumas relações

As relações entre vértices, faces e arestas de um poliedro, importante para avançarmos no estudo de poliedros, foram ressaltas por Lima et al. (2006, vol 2), as quais são interpretadas a seguir.

Considere um poliedro e represente: V o número de vértices; A o número de arestas e F o número de faces. Como as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por $F_n \quad (n \geq 3)$, o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e observe que, pelo item 2 da definição do poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. Portanto, há a seguinte relação:

$$F = F_3 + F_4 + ... + F_n \quad e \quad V = V_3 + V_4 + ... + V_n$$

Para contar as arestas desse poliedro, basta multiplicar o número de lados de cada polígono que o compõe: o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim por diante. Depois deve-se somar os resultados. Como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n$$

Pode-se também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se em cada vértice contar quantas arestas nele concorrem, somar os resultados, obtem-se também o dobro do número de arestas (porque cada aresta terá sido contada duas vezes: em um extremo e no outro). Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... + nV_n$$

Dessas relações entre os elementos de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades:

1. $2A \geq 3F$ e

2. $2A \geq 3V$

Observe a justificativa da primeira:

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... + nF_n \\ &= 3(F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_n) + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n \\ &= 3F + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n \\ &\geq 3F \end{aligned}$$

Repare que a igualdade somente vale se $F_4 = F_5 = ... = F_n = F_{n+1} = 0$, $(n > 3)$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. A segunda desigualdade se justifica de forma análoga e, nesse caso, a igualdade ocorrerá apenas quando em todos os vértices concorrerem 3 arestas.

2.5 Teorema (Euler)

Em Lima et al. (2006, vol 2) pode ser encontrado o teorema de Euler para poliedros:

Em todo poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.

Esse enunciado deve ser explorado seu resultado em desenhos de poliedros ou em objetos do cotidiano nessa linha da aprendizagem significativa.

Justificativa da Fórmula

Uma justificativa desse teorema dada por Nilson (1989), apresenta um caráter mais intuitivo se sustentando matematicamente pela ideia que dá do Princípio de Indução Matemática (PIM), pois consiste em compor por justaposição as faces uma a uma e, a cada passo, calcular o número $V - A + F$.

Tomando o primeiro polígono (face), qualquer que seja ela, se tiver m vértices, terá exatamente m arestas. Assim,

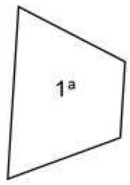


Figura 2.2: *1º Polígono do poliedro*

$$\begin{cases} V = m \\ A = m \\ F = 1 \end{cases}$$

Daí, $V - A + F = 1$

Tomando o segundo polígono (segunda face), ao grudá-la à primeira, o número de faces fica aumentado de 1. Nessa operação, se acrescentadas n arestas, serão acrescentadas $n - 1$ vértices em relação ao que havia anteriormente. Assim, obteremos:

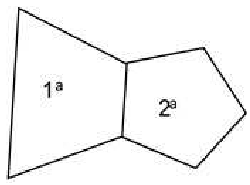


Figura 2.3: *1º e 2º Polígonos do poliedro*

$$\begin{cases} V = m + (n - 1) \\ A = m + n \\ F = 2 \end{cases}$$

Daí, $V - A + F = 1$

Observe agora que, se grudarmos outra face de modo a ter uma ou duas arestas comuns com a figura anterior, em qualquer dos casos, o número de arestas acrescentadas é 1 a mais que o número de vértices acrescentados, como sugere a figura 2.4.

Assim, $V - A$ diminui de 1 e F aumenta de 1, de modo que $V - A + F$ permanece constante e igual a 1.

Logo, a relação $V - A + F = 1$ é válida se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície, ou seja, é válida para toda superfície poliédrica convexa aberta. Continuando dessa forma, até colocarmos a penúltima face. Ao grudar a última face não alteraremos

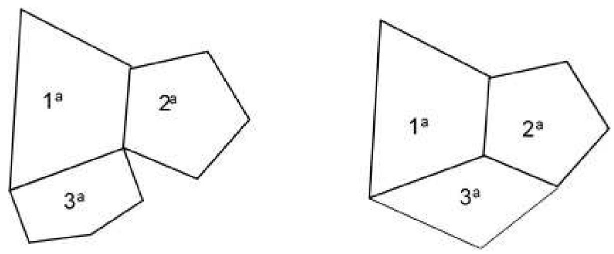


Figura 2.4: *1º, 2º e 3º Polígonos do poliedro*

o número de vértices, nem o de arestas, apenas acrescentando F de 1. Assim, ao inserir a última face, ficaremos com $V - A + F = 2$.

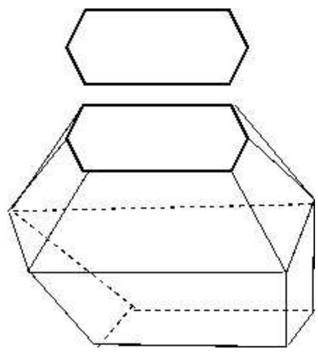


Figura 2.5: *Poliedro fechado*

Podemos observar também que em uma superfície poliédrica convexa aberta, vale a relação $V - A + F = 1$.

Observações:

1. Todo poliedro que satisfaz a fórmula de Euler diz-se que é um poliedro eureliano;

2. Existem poliedros não convexos que são eurelianos.

3. Todas as relações que encontramos são apenas condições necessárias. Isso quer dizer que não basta que os três números A, V e F satisfaçam a elas para que se tenha certeza da existência de um poliedro com essas características.

2.6 Poliedros regulares

Em Lima (2006) encontra-se a seguinte definição e teorema:

Definição: Dizemos que um poliedro convexo é regular quando:

- Todas as faces são polígonos regulares iguais;

- De todos os vértices partem o mesmo número de arestas.

Teorema: Existem apenas cinco poliedros regulares convexo.

Para demonstrar, seja n o número de lados de cada face e r o número de arestas que concorrem em cada vértice. Cada aresta é comum a duas faces, então, $nF = 2A$;

Cada aresta tem extremidades em dois vértices, então, $rV = 2A$.

Esses fatos, juntamente com a fórmula de Euler, nos leva à seguinte conclusão relativo aos poliedros regulares:

$$\begin{cases} F = \dfrac{2A}{n} \\ A = \dfrac{2A}{r} \qquad \rightarrow \dfrac{2A}{r} - A + \dfrac{2A}{n} \rightarrow A = \dfrac{2nr}{2r + 2n - nr} \\ V - A + F = 2 \end{cases}$$

Como $A > 0$, $n \geq 3$, $r \geq 3$, devemos ter $2r + 2n - nr > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > r$$

Essas relações só se verificam em cinco casos, pois como $r \geq 3$ teremos $n < 6$. Calculando, em cada caso, obtemos:

1º) $n = 3$, $r = 3 \rightarrow A = 6$, $F = 4$ e $V = 4$, Tetraedro - 4 faces triangulares

2º) $n = 3$, $r = 4 \rightarrow A = 12$, $F = 8$ e $V = 6$, Octaaedro - 8 faces triangulares

3º) $n = 3$, $r = 5 \rightarrow A = 30$, $F = 20$ e $V = 12$, Icosaedro - 20 faces triangulares

4º) $n = 4$, $r = 3 \rightarrow A = 12$, $F = 6$ e $V = 8$, Hexaedro - 6 faces quadrangulares

5º) $n = 5$, $r = 3 \rightarrow A = 30$, $F = 12$ e $V = 20$, Dodecaedro - 12 faces pentagonais

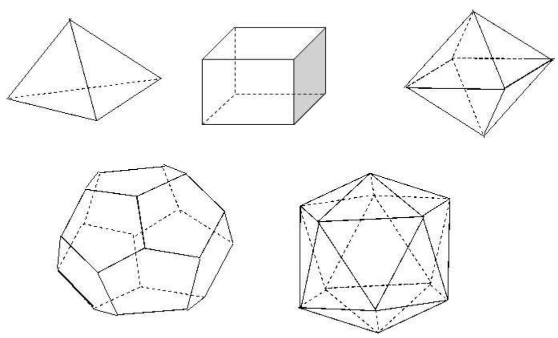


Figura 2.6: *Poliedros regulares*

2.7 Atividade 2: Problema do silo em forma de bola

Nesse exercício, seguiu-se o esquema de resolução de problemas como modelo para os demais apresentados nas atividades seguintes.

1. (UFPei-RS, 2007) Na região onde hoje é o México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocada sobre a base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais. Com base no texto, quantas arestas e vértices tem o silo?

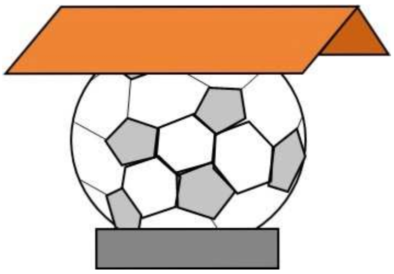


Figura 2.7: *Silo em forma de bola*

Resolução:

Esse é um problema simples mas, seguiremos as etapas de resolução de problemas como um modelo do uso desse esquema:

Compreensão:

Qual a incógnita? O número de arestas e de vértices.

Quais são os dados? As quantidades de placas hexagonais e pentagonais.

Adotando uma noção adequada, qual letra representará a incógnita e os dados? A e V para incógnita e F_n para os dados.

Qual a condicionante que relaciona a incógnita e os dados? A são as aresta, V são os vértices e F_n as faces do silo, onde n é o número de lados de cada face.

Plano: Nesse problema basta sabermos a relação entre aresta e face de cada tipo de polígono e a relação de Euler. Portanto está fácil o estabelecimento do plano, pois usaremos todas os dados e condicionantes e não precisaremos de um problema correlato mais fácil.

Execução: Nesse problema o aluno já tem a ideia da resolução bastando apenas calcular a correta relação entre aresta e faces, usando a denotação correta para a incógnita e os dados. De acordo com a notação, temos: $F_5 = 12$, $F_6 = 20$, logo:

Número de faces,

$$F = 12 + 20 = 32$$

Números de arestas,

$$2A = 5F_5 + 6F_6 = 5.12 + 6.20 = 180$$

$$A = 90$$

Números de vértices,

$$V - A + F = 2$$

$$V - 90 + 32 = 2$$

$$V = 60$$

Portanto, o silo tem 90 arestas e 60 vértices.

Retrospecto: Nesse problema podemos rever que usamos todos os dados corretamente; que esse foi realmente o melhor caminho para se chegar a solução e que esse método é o que será utilizado em outros problemas semelhantes.

2.8 Atividade 3: Exercícios diversos

Em Lima et al. (2006, vol. 2) podem ser encontrados alguns exercícios recomendados no material do Curso de Mestrado do PROFMAT para esse tema. São exercícos que têm o caráter da aprendizagem significativa tratada no capítulo 1. Alguns exigem que o estudante calcule a quantidade de arestas, faces e vértices dos poliedros, analisando algumas possibilidades e, em muitos casos, desenhando-as. Nessas etapas tem-se o enfoque da construção ativa do educando requerida para que se tenha aquele tipo de aprendizagem. São exercícios nos quais os estudantes não terão dificuldades em resolvê-los, principalmente se seguirem o esquema de resolução de problemas.

1. Descreva e mostre uma possibilidade para o desenho de um poliedro convexo que

possui 13 faces e 20 arestas.

Solução:

Imediatamente antes de concluir a desigualdade $2A \leq 3F$ tem-se a relação,

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$$

ou seja,

$$2A - 3F = F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$$

Como $A = 20$ e $F = 13$, temos $1 = F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$, $(n > 3)$, o que só é possível se $F_4 = 1$ e $F_5 = F_6 = ... = F_n = F_{n+1} = 0$, $(n > 4)$, . Isto quer dizer que este poliedro deve possuir uma única face quadrangular e todas as outras 12 faces triangulares. Como pela relação de Euler ele deve possuir 9 vértices, um desenho possível é o que está abaixo.

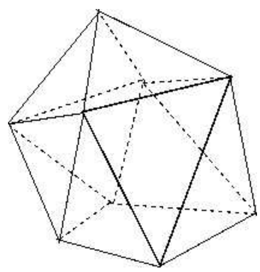


Figura 2.8: *Resposta do Exercício 2*

2. Mostre que para todo poliedro convexo valem as desigualdades

   a) $A + 6 \leq 3F$

   b) $A + 6 \leq 3V$

3. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces.

4. Descreva todos os poliedros que possuem 10 arestas.

Soluções:

1. *(Solução do 2)* Sabe-se que valem as desigualdades: $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$. Da relação de Euler temos

$$A + 2 = F + V$$

$$3A + 6 = 3F + 3V \leq 3F + 2A$$

Daí, $A + 6 \leq 3F$ e a outra é análoga.

2. *(Solução do 3)* Reunindo a desigualdade $2A \geq 3F$ com o exercício anterior tem-se que

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$

Se $A = 10$ então, $16 \leq 3F \leq 20$ e, portanto, $F = 6$.

3. *(Solução do 4)* Já sabe-se, pelo exercício anterior, que um poliedro com 10 arestas possui 6 faces. Temos $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n$, $(n > 3)$, logo $F_4 + 2F_5 + ... + (n-3)F_n = 2$,.

   Porém, isto só é possível em dois casos:

   a) $F_4 = 2$, $F_5 = F_6 = ... = F_n = F_{n+1} = 0$ e, portanto, $F_3 = 4$

   b) $F_5 = 1$, $F_4 = F_6 = ... = F_n = F_{n+1} = 0$ e, portanto, $F_3 = 5$

   Existem poliedros de dois tipos: um com duas faces quadrangulares e quatro triangulares e outro com uma face pentagonal e cinco triangulares podendo facilmente fazer o desenho.

2.9 Atividade 4: Laboratório de informática

2.9.1 Rived: Geometria da cidade e classificação de poliedros

No laboratório de informática, em visita ao *site* do MEC no Rived, tem-se algumas atividades de Geometria Espacial: Geometria na Cidade, Classificação dos poliedros e Reconhecendo Formas. São programas onde os estudantes interagem reconhecendo os objetos de estudo da Geometria Espacial numa cidade virtual, classificando seus elementos e suas propriedades. São atividades que têm por objetivo motivar os educandos a estudar as formas espaciais levando-os a um olhar diferente do cotidiano e permitindo-lhes, concomitatimente, revisarem os conceitos e conteúdos abordados em séries anteriores.

Apresenta-se a seguir um modelo do Plano de Aula Prática (PAP) que desenvolvemos para essa atividade. É apenas um exemplo simples mas que pode ser bastante melhorado pelo professor que se dispor a realizar uma destas atividades propostas nesse trabalho.

PAP - Plano de Aula Prática

Instituição: Col. Estadual Dr. Rubens C. Aguirre

Turma: 3º Ano EM **Turno**: Matutino

Data: 01/10/2012 **Duração**: 1 hora/aula

Professor: Mauro Sergio Santana

Disciplina: Matemática

Conteúdo: Geometria Espacial - Poliedros

Objetivo Geral: Compreender e perceber as formas geométricas planas e espaciais como parte integrante do cotidiano, sendo capaz de identificar sua presença nas construções arquitetônicas.

Objetivo específico: Reconhecer na cidade os objetos de estudo da Geometria Espacial, destacando seus elementos e propriedades.

Competências e habilidades que se pretende desenvolver:

- Perceber as formas geométricas planas e espaciais nas construções;
- Desenvolver a capacidade de posicionamento e orientação no espaço;

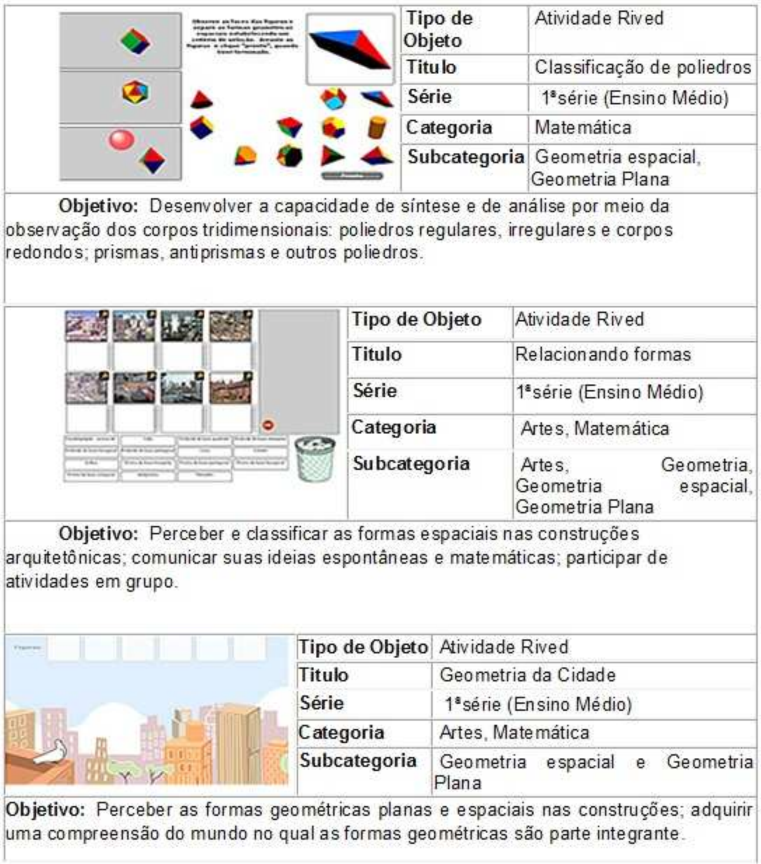
Conceitos envolvidos: Poliedros - composição, classificação, propriedades, elementos e características.

Pré-requisitos: Reconhecer e classificar as figuras planas.

Ações:

- No preparo da atividade, solicitamos aos estudantes várias formas geométricas que possam identificar numa cidade em imagens de revistas e fotos;
- Divisão da turma em grupos de dois estudantes;
- Interação com o programa Geometria da Cidade, onde os estudantes clicam no menu principal o nome da atividade indicada na descrição das telas abaixo;
- Interferência do professor sempre que achar conveniente quanto à utilização do programa;
- Os estudantes deveriam anotar as informações desconhecidas ou que acharem convenientes.

Descrição das telas vistas no programa:



Tipo de Objeto	Atividade Rived
Titulo	Classificação de poliedros
Série	1ªsérie (Ensino Médio)
Categoria	Matemática
Subcategoria	Geometria espacial, Geometria Plana

Objetivo: Desenvolver a capacidade de síntese e de análise por meio da observação dos corpos tridimensionais: poliedros regulares, irregulares e corpos redondos; prismas, antiprismas e outros poliedros.

Tipo de Objeto	Atividade Rived
Titulo	Relacionando formas
Série	1ªsérie (Ensino Médio)
Categoria	Artes, Matemática
Subcategoria	Artes, Geometria, Geometria espacial, Geometria Plana

Objetivo: Perceber e classificar as formas espaciais nas construções arquitetônicas; comunicar suas ideias espontâneas e matemáticas; participar de atividades em grupo.

Tipo de Objeto	Atividade Rived
Titulo	Geometria da Cidade
Série	1ªsérie (Ensino Médio)
Categoria	Artes, Matemática
Subcategoria	Geometria espacial e Geometria Plana

Objetivo: Perceber as formas geométricas planas e espaciais nas construções; adquirir uma compreensão do mundo no qual as formas geométricas são parte integrante.

Figura 2.9: *Telas do Rived*

Avaliação

Podem ser avaliados os seguintes aspectos:

- O interesse e o desempenho das duplas na utilização do programa.
- O nível e rigor das percepção das formas encontradas no programa com o conteúdo estudado, relacionando todas as características dos poliedros.
- Relatório das informações que acharam convenientes nos programas;
- Avaliação do que a atividade contribuiu na construção e desenvolvimento da capacidade de abstração dos conceitos envolvidos.

Bibliografia

RIVED - Rede Internacional Virtual de Educação. Disponível em: `http://rived.mec.gov.br/` (Acessado em 01 de outubro de 2012).

2.9.2 GeoGebra e SketchUp

Uma outra atividade é o uso do software GeoGebra, no laboratório de informática. Os estudantes podem interagir construindo os principais poliedros, manipulando-os em 3D na versão 5.0 Beta do programa. É uma atividade simples, mas que pode ser bastante melhorada quando se vai aprimorando no conhecimento dos recursos desse software.

Um outro programa nessa mesma proposta do GeoGebra, é o SkechUp da Google: um editor gráfico que permite modelagem virtual em 3D, onde o usuário constrói e visualiza os desenhos de diferentes ângulos. São oportunidades para os estudantes vencerem a dificuldade que às vezes têm da percepção desses sólidos no espaço, pois nesses programas, podem manipular esses sólidos em 3D.

Esse programa está recomendado em alguns livros didático mais recentes, justamente ao tratarem desse tópico de poliedro em Geometria Espacial, devido a essas possibilidades de interação e e manipulações oferecidas.

Apresenta-se uma das telas dos programas:

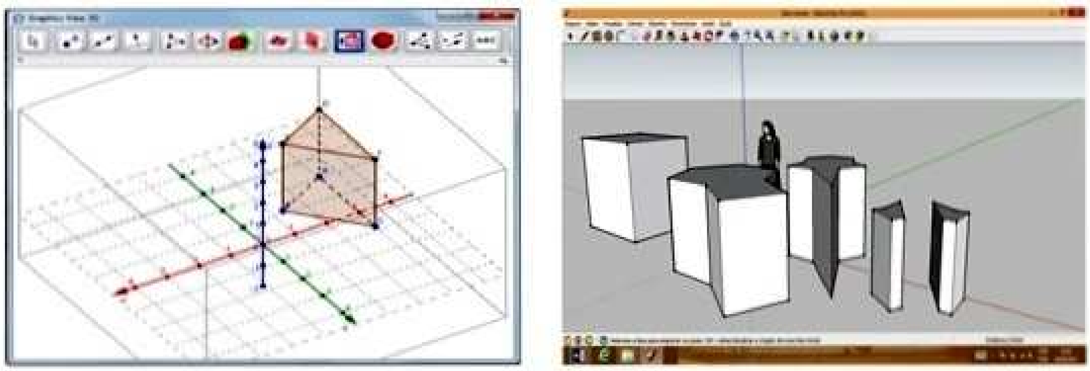


Figura 2.10: *Telas do GeoGebra e SketchUp*

Capítulo 3

O cálculo do volume

Áreas e volumes são as primeiras noções geométricas a despertarem o interesse do homem com a necessidade que tinham em medir as terras e definir o limite das propriedades. É um assunto rico em sua aplicabilidade no cotidiano e em trabalhos com objetos concretos. Várias situações do cotidiano nos apresentam a indagação sobre a capacidade volumétrica de algo. Talvez, por esses aspectos, a maioria dos estudantes demonstram enorme interesse quando é tratado esse assunto no Ensino Médio. E esse interesse deve ser mantido pelo professor ao introduzir esse conceito. Apresentar as definições conceituais e regras sob forma de receita para calcular volume, como, às vezes, é feito em alguns livros didáticos, pode desmotivar o interesse do estudante pelo tema. Se, de início, apresentar uma ideia intuitiva de volume e ir aguçando a curiosidade do estudante com atividades com objetos sólidos de várias formas, nas quais eles possam comparar e decidirem qual tem maior ou menor volume, pode ser mais próprio, motivador e mantém a curiosidade. Nesse sentido o estudante, sentindo a dificuldade de uma análise mais adequada nessas comparações, se interesse pelas formas de se determinar o volume desses sólidos.

Para um estudo mais aprofundado de volume, inevitavelmente, tem-se que usar o recurso do cálculo infinitesimal (Limites, Derivadas e Integrais), que é uma linguagem muito rigosa para o Ensino Médio. Talvez, por essa razão, alguns autores de livros didáticos, tentando evitar essa linguagem, às vezes, pecam por apresentarem as fórmulas de forma direta, sem se preocuparem em mostrar como foram obtidas.

3.1 Método para o cálculo do volume

Para uma conceituação de volume tem-se algumas alternativas nos métodos de demonstração das fórmulas, interpretadas da descrição dada em Lima (2006):

1) Passagem ao limite

Trabalha-se a ideia do infinito. É uma abordagem clássica, na qual o volume dos "corpos redondos"(cilindro, cone e esfera) é obtido por aproximações do volume de outros sólidos. O volume da esfera, por exemplo, é obtido por rotações em torno do diâmetro de um círculo equatorial circunscrito a polígonos regulares.

Nesse método usa-se a ideia intuitiva dada pela função volume (que veremos mais a frente), a qual se calcula o volume por aproximações que, passando o limite, faz-se o número de lados dos polígonos considerados nessas aproximações aumentar indefinidamente.

2) O conceito de Integral

É um estudo mais avançado e próprio para volumes. A integral de funções elementares é mais eficiente na dedução das fórmulas e no cálculo do volume de sólidos. Tem a vantagem da variedade de aplicações em outras áreas como em Física, mas tem a desvantagem de ser uma linguagem muito rigorosa e de difícil acesso no EM.

O Cálculo Integral e Diferencial já fez parte do currículo do Ensino Médio, mas foi abandonado justamente pela linguagem pouco acessível nessa fase do ensino. Nos Trabalhos de Conclusão de Curso de Mestrado do PROFMAT, na minha turma, um dos temas busca introduzir o Cálculo no Ensino Médio em uma linguagem mais suave, tentando passar justamente essas vantagens de se trabalhar com integrais no cálculo de áreas e volumes.

3) O Princípio de Cavalieri

É um princípio de enunciado simples, de fácil acesso aos estudantes do EM, permitindo trabalhar de forma mais intuitiva e mantendo um certo rigor matemático. É a melhor alternativa para as justificativas das fórmulas de volume dos principais sólidos estudados no EM.

3.2 Definição de volume

A ideia intuitiva de volume é a seguinte:

Volume é a medida de espaço ocupado por um sólido.

Para uma definição mais formal de volume, partiremos da *função volume*, dada em Lima (2006):

Função volume é uma função que a cada sólido X associa um número real $v(X)$, com as seguintes propriedades:

i) $v(X) > 0$;

ii) $v(X)$ é invariante de movimento do sólido;

iii) Se X é um cubo de aresta unitária, então $v(X) = 1$;

iv) Se o sólido for decomposto como reunião de duas partes, X_1 e X_2, de tal modo que a parte comum entre elas seja uma superfície, então:

$$v(X) = v(X_1) + v(X_2)$$

.

Daí resulta que se, $X_1 \subset X_2$ então, $v(X_1) < v(X_2)$.

Dessa função, pode-se definir volume como sendo:

> Um número real cujas aproximações por falta são volumes dos poliedros retangulares contidos nele.

Dessa forma, reduz-se a determinação do volume de um sólido qualquer ao do bloco retangular, o qual decorre da simples noção de proporcinalidade entre suas dimensões e as dimensões do cubo unitário.

3.3 Proporcionalidade

3.3.1 Atividade 5: Blocos de madeira e recipientes com base horizontal

Como a noção de proporcionalidade é fundamental na determinação do volume do bloco retangular que veremos a seguir, pode-se induzí-la ao estudante, usando exemplos concretos com blocos retangulares de madeira, nos quais o estudante pode perceber a relação do volume desses blocos com cada uma de suas dimensões.

Usando recipientes cujas bases horizontais sejam sempre as mesmas em todo o recipiente, como um copo cilíndrico, por exemplo, e enchendo-os com água, pode levar o estudante a percepção natural de que o volume é proporcional à altura do recipiente. É uma boa forma de induzí-lo a perceber a ideia que o volume de alguns sólidos pode ser calculado comparando-os com o volume de sólidos mesma base e mesma altura, porém mais simples de calcular o volume. É também uma boa oportunidade de mostrar ao estudantes a ideia que Arquimedes teve de calcular o volume de alguns sólidos maciços, por imersão comparando o deslocamento proporcional da altura do líquido no recipiente.

Proporcionalidade é um dos conceitos mais antigos e mais importantes da matemática elementar. Um erro comum é pensar que duas grandezas crescentes entre si são proporcionais, o que nem sempre é verdade.
Duas grandezas, x e y, são proporcionais quando existe uma correspondência que associa a cada valor de x de uma, um valor y a outra, de tal forma que:

1. Quanto maior for x, maior será y.

2. Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor de y será dobrado, triplicado, etc.

Com essa noção de proporcionalidade, inicialmente definida para números naturais (ou até mesmos racionais), pode-se determinar o volume do bloco retangular. Estender essa noção para números reais requer a utilização do recurso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. O professor pode usá-lo como um fato, deixando sua demonstração para outro momento. Esse Teorema diz o seguinte:
Teorema: Sejam x e y duas grandezas positivas. Se x e y estão relacionados por uma função crescente f tal que para todo natural n, $f(nx) = nf(x)$, então, para todo real r, tem-se $f(rx) = rf(x)$.

3.4 Bloco retangular

Da função volume e da noção de proporcionalidade, pode-se determinar o volume do bloco retangular no esquema a seguir.

Considere um paralelepípedo cujas arestas são mutualmente perpendiculares e volume V como função de suas coordenadas no espaço, sendo $V(x, y, z)$.

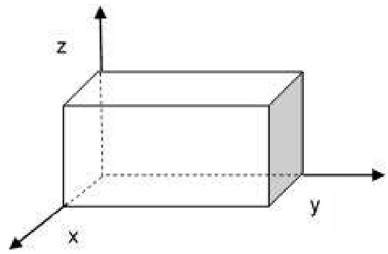


Figura 3.1: *Coordenadas no bloco retangular*

Fixando duas de suas coordenadas, por exemplo y e z, o volume V é proporcional a x. A expressão matemática dessa proporcionalidade, para cada coordenada, é uma função linear $v(x) = ax$, onde a é fator de proporcionalidade. Tomando $a = 1$, temos:

$$V(x, y, z) = V(1.x, y, z) = xV(1, y, z)$$

Assim por diante, para as coordenadas y e z.

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= xV(1, 1.y, z) \\ &= xyV(1, 1, z) \\ &= xyV(1{,}1, 1.z) \\ &= xyzV(1, 1, 1) \\ &= xyz.1 \\ &= xyz \end{aligned}$$

$V(1, 1, 1)$ é definido como volume 1, volume do paralelepípedo tomado por $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ (cubo de aresta de uma medida de unidade).

Com o auxílio do Teorema Fundamental da Proporcionalidade o fator de proporcionalidade a é um número real. Assim o volume de um bloco retangular é proporcional a cada uma de suas coordenadas com relação ao cubo unitário.

Em resumo:

O volume do bloco retangular é uma composição de blocos unitários (cubo de aresta de medida uma unidade de comprimento), sendo, respectivamente, proporcional a cada uma de suas dimensões (comprimento, largura e altura). De uma forma mais direta: se dobrar, triplicar, etc. uma de suas dimensões, o volume dobra, triplica, etc.

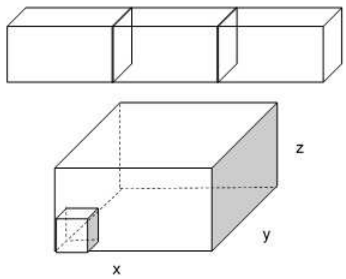


Figura 3.2: *Proporcionalidade do volume do bloco retangular*

Dominado esse assunto de obter o volume dos blocos retangulares, pode-se avançar para o volume de os outros sólidos. Para isso, define-se volume como sendo um número real sujas aproximações por falta são volumes dos poliedros retangulares nele contidos, cujos volumes já sabemos determinar. Veja no esquema da figura 3.3.

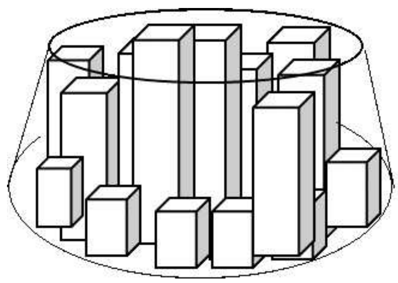


Figura 3.3: *Aproximações por poliedros retangulares*

O problema dessa definição está em não consegui, em alguns poliedros, realizar esse processo utilizando uma quantidade finita de peças. Isso força, inevitavelmente, o uso o cálculo infinitesimal numa interpretação mais geral de volume. Pode-se, no entanto, recorrer a uma forma também simples e muito forte em sua conceituação matemática, o Princípio de Cavalieri. É um princípio que decorre do Cálculo mas numa linguagem acessível aos alunos do EM. Esse princípio será visto no capítulo 4.

3.5 Atividades para bloco retangular

Neste momento do estudo já se pode propor problemas onde o conceito de volume seja aplicado a paralelepípedo retangular, bem como aplicar todas os outros conceitos da Geometria Espacial, características desse sólido: Relação de Euler para esse poliedro, diagonais etc.

Dessa forma, propõe-se problemas que focam a contextualização, fator importante na motivação para uma boa aprendizagem. No problema 1 da atividade 6, que envolve as diagonais do bloco retangular, segue-se o esquema de resolução de problemas detalhado por Polya (1995), como um exemplo para a resolução de demais.

3.5.1 Atividade 6: Diagonal do paralelepípedo

1. Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

   Resolução:

   No esquema de resolução de problemas, temos:

   Compreensão:

   Qual a incógnita? O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.

   Quais os dados? O comprimento, a largura e altura do paralelepípedo.

   Adotando uma notação adequada. Qual letra representará a incógnita e os dados? x para incógnita e a, b e c para os dados.

   Qual a condicionante entre a, b e c com x? x é a diagonal do paralelepípedo no qual a, b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.

   A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Sim, se conhecermos a, b e c, conheceremos o paralelepípedo e sua diagonal poderá ser determinada.

   Plano: Neste problema basta conhecer o teorema de Pitágoras e algumas das aplicações à Geometria Plana e um conhecimento mesmo que superficial de Geometria Espacial. Um desenho indicativo explicita a ideia de resolução que é a introdução de um triângulo retângulo destacada na figura 3.4.

   Execução: Tem-se já a ideia da resolução. É fácil perceber que já se tem o triângulo retângulo no qual x é a hipotenusa e c é um do catetos; o outro cateto é a diagonal de

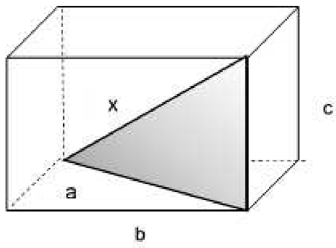


Figura 3.4: *Diagonal do paralelepípedo*

uma face, a qual denotamos por y. Dessa forma está-se introduzindo um problema auxiliar cuja a incógnita é y. Calculando um triângulo após o outro teremos:

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

E daí, eliminando a incógnita auxiliar y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Retrospecto: Nesse problema pode-se apresentar várias indagações numa revisão sobre possíveis falhas no resultado e também para aproveitar para explorar questões relevantes para conceitos futuros ou mesmo em problemas semelhantes. Exemplos dessas indagações:

- Utilizou todos os dados? Todos os dados aparecem na fórmula que exprime a diagonal?
- O comprimento, largura e altura desempenham funções no problema? A diagonal é simétrica em relação a a, b e c?
- Conforme aumenta ou diminui c a diagonal aumento ou diminui também?
- Se substituir a, b e c por $2a$, $2b$ e $2c$ a diagonal também será multiplicada por 2?
- Se a, b e c estiverem expressas em metros a diagonal também será expressa em metros?

3.5.2 Atividade 7: Aproveitamento da água da chuva

Foram escolhidos alguns problemas envolvendo volume mas que também possam envolver outros conceitos matemáticos ou de outras disciplinas.

O problema a seguir cumpre o aspecto da aplicação no cotidiano e envolve outros conceitos matemáticos além de volume, como a interpretação de gráficos e o cálculo de porcentagem.

1. (VUNESP - 2010) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir uma cisterna fechada que acumule toda a água proveniente da chuva que cai sobre o telhado de sua casa, ao longo do período de um ano. As figuras e o gráfico representam as dimensões do telhado da casa, a forma da cisterna a ser construída e a quantidade medida mensal de chuva na região onde o agricultor possui a casa.

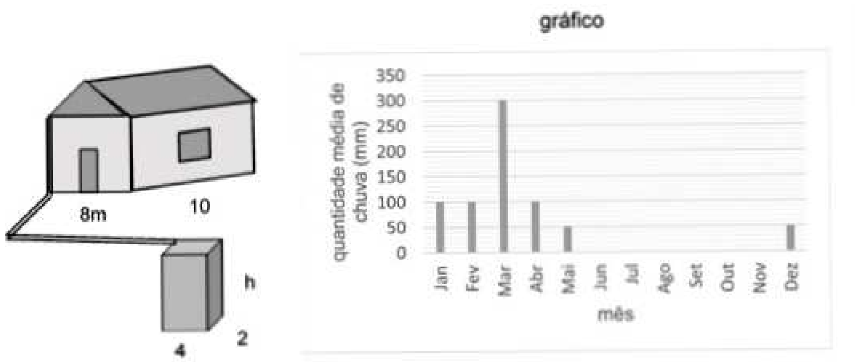


Figura 3.5: *Aproveitamento da água da chuva*

Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em um superfície plana horizontal (perspectiva do topo) de 1 metro quadrado, determine a profundidade (h) da cisterna para que ela comporte todo o volume de água da chuva armazenada durante um ano, acrescida de 10% desse volume (aproximadamente o que a cisterna absorve do solo).

Solução;

O total de precipitação de chuva no ano considerado, de acordo com o gráfico, foi de:

$$100 + 100 + 300 + 100 + 50 + 50 = 700 \quad mm$$

De acordo com o enunciado, cada 100 mm de chuva equivale ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana de 1 m^2. Como a área da superfície horizontal correspondente ao telhado é de:

$$8.10 = 80 \quad m^2$$

Essa chuva representa um volume de: $700.80 = 56000$ litros de água.

Portanto, na cisterna estarão armazenados:

$$56000 + 10\% \quad de \quad 56000 = 56000 + 560 = 61600 \quad litros$$

Se $\quad l = 1 \quad dm^3$, logo $1000l = 1 \quad m^3$, assim: $61600l = 61{,}6 \quad m^3$.

Com isso, como $V = 4.2.h$, a altura h é tal que:

$$4.2.h = 61{,}6$$

$$8.h = 61{,}6$$

$$h = \frac{61.6}{8}$$

$$h = 7{,}7 \quad m$$

Assim, profundidade da cisterna é 7,7 m.

3.5.3 Atividade 8: Concentração de cloro na água da piscina

O problema a seguir envolve, além dos conceitos matemáticos de volume, regra de três, função tipo exponencial (em sua caracterização) e noção de derivada (taxa de variação), envolve também o conceito da Física (velocidade de vazão), e da Química (concentração de cloro). É, portanto, uma atividade interdisciplinar.

1. (IMPA - 2009) Uma piscina tem capacidade para 100 m^3 de água. Quando está cheia é colocado 1 kg de cloro. A água pura continua a ser colocada com uma vazão constante, sendo o excesso eliminado na mesma vazão. Sabe-se que após uma hora, restam 900 g de cloro. Pergunta-se:

    a) Qual a concentração de cloro após dez horas?

b) Qual concentração de cloro após meia hora?

c) Qual a concentração de cloro após t horas?

Solução:

Para cada instante t, tem-se um volume de água v. Na figura 3.6 tem-se o esquema da divisão do tempo em intervalos constantes Δt para os estágios: entrada de água pura, mistura e água retirada.

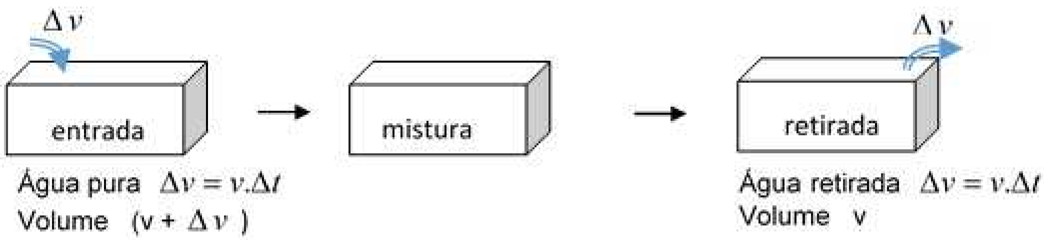


Figura 3.6: *Esquema dos estágios da água na piscina*

A quantidade de cloro retirada é proporcional a quantidade Δv de água misturada que sai em função do tempo.

	Quantidade de cloro	Volume da água
Antes da saída	$c(t)$	$v + \Delta v$
Depois da saída	$c(t + \Delta t)$	v

Assim

$$\frac{c(t+\Delta t)}{v} = \frac{c(t)}{v+\Delta v}$$

logo

$$c(t+\Delta t) = c(t).\frac{v}{v+\Delta v}$$

A variação Δc de cloro no intervalo Δt é dada por, $\Delta c = c(t+\Delta t) - c(t)$, logo:

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t).\frac{v}{v+\Delta v} - c(t)$$

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t).\left(\frac{v}{v+\Delta v} - 1\right)$$

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{c(t)} = \frac{-v.\Delta t}{v+\Delta v}$$

Portanto a variação relativa de cloro $\left(\dfrac{-v.\Delta t}{v+\Delta v}\right)$ é constante e depende só do incremento Δt é não de instante t em que é medida, o que caracteriza a função $c(t)$ como sendo do tipo exponencial. Logo,

$$c(t) = c_0.a^t$$

onde c_o é a **quantidade inicial** de cloro e a é a **taxa de variação** da concentração de cloro no instante t.

Assim:

a) Como no instante inicial $t = 0$ a quantidade de cloro era 1000 g, temos, então $c_o = 1000$. Assim para o instante $t = 1 \quad h$, temos $c(t) = 900 \quad g$, logo a taxa de variação será:

$$c(t) = c_0.a^t$$

$$c(1) = 1000.a^1$$

$$900 = 1000.a$$

$$a = \frac{900}{1000}$$

$$a = 0{,}9$$

Assim,

$$c(t) = 1000.(0{,}9)^t$$

Para o instante $t = 10 \quad h$, teremos

$$c(10) = 1000.(0{,}9)^{10}$$

$$c(10) = 1000.(0{,}349)$$

$$c(10) = 349 \quad g$$

b) Para o instante $t = 0{,}5 \quad h$, teremos

$$c(0{,}5) = 1000.(0{,}9)^{0{,}5}$$

$$c(10) = 1000.(0{,}948)$$

$$c(10) = 948 \quad g$$

c) Para o instante t, teremos

$$c(t) = 1000.(0{,}9)^{t}$$

3.5.4 Atividade 9: Desafio de trazer água do rio

Um problema envolvendo volume na forma de um desafio, tornando-o interessante pode ser proposto em qualquer fase do ensino. É um exemplo de problema em que a estratégia de inverter o processo de resolução, começando de trás para frente, se mostrou o melhor caminho.

1. Como é possível retirar de um rio exatamente seis litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois recipientes, com quatro e nove litros de capacidade?

   Solução:

   Pelos dados do problema, imagina-se com clareza os instrumentos que se dispõe: os dois recipientes. Admitindo que são vasos retangulares, de bases quadradas de 1 dm de comprimento cujas alturas são 9 dm e 4 dm conforme a figura 3.7. Assim tem-se recipientes com as capacidades do enunciado

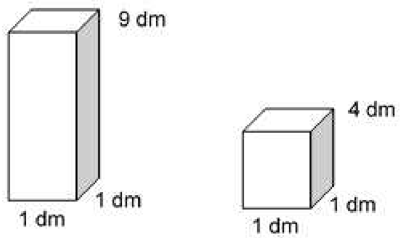


Figura 3.7: *Recipientes de 9 e 4 litros*

Como não se sabe medir 6 litros, tenta-se começar com os recipientes vazios, experimentar isto e aquilo, enchendo e esvaziando, e quando não consegue, recomeça por tentar alguma outra coisa, caminhando para frente, dos dados para a incógnita e acidentalmente, ter bom êxito. No entanto, pode-se, numa reversão da situação, imaginar o vaso maior já com 6 litros e o menor vazio (figura 3.8) e tentar obter situações antecedentes dessa situação final.

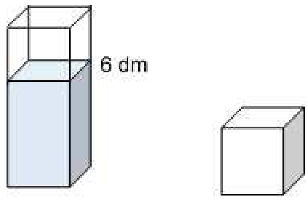


Figura 3.8: *Recipiente com 6 litros*

Pode-se encher o vaso maior o que significa completá-lo com 3 litros. Para conseguir isso deve-se ter exatamente 1 litro de água no vaso menor, o que é uma situação antecedente mais fácil de se chegar (figura 3.9).

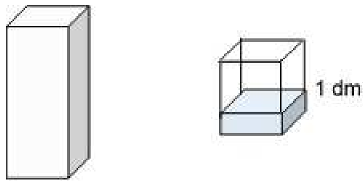


Figura 3.9: *Recipiente com 1 litro*

Chegar nessa situação são passos facilmente reconhecidos, pois podemos obter 1 litro enchendo o vaso maior de 9 litros e desejando a água no vaso menor de 4 litros duas vezes seguidas ($1 = 9-4-4$). Assim teremos a situação desejada que é ilustrada na figura 4.9, bastando encher o vaso de 9 litros e transferir a água para o vaso menor contendo 1 litro, restando, assim, 6 litros no vaso maior ($6 = 9 - 3$).

Nesse momento do estudo pode-se propor exercícios mais usuais para a fixação dos conceitos envolvidos no bloco retangular (paralelepípedos retangulares, mais precisamente), para os cálculos de volume e demais características da Geometria Espacial envolvidas nesse sólido: diagonais, Relação de Euler e outras curiosidades e desafios.

Capítulo 4

O Princípio de Cavalieri

Para seguir na determinação do volume precisa-se desta ferramenta adicional que ajudará, reduzindo os argumentos na obtenção das fórmulas para alguns sólidos: o Princípio de Cavalieri. Deve-se adotar esse princípio como axioma no EM, uma vez que tê-lo como um teorema, requeria conceitos do Cálculo Integral em suas demonstrações o que fugiria do conteúdo ensinado nessa fase do ensino.

4.1 Atividade 11: Sólidos formados por folhas de papel

Antes do enunciado do Princípio de Cavalieri, apresentamos uma experiência motivadora, sugerida em Lima et al. (2006, vol 2), que induz ideia intuitiva desse Princípio. Usando uma pilha de folhas ou cartas de baralho para formar um bloco retangular (figura 4.1 a). Inclinando o bloco obliquamente com uma régua transformamos o bloco retângulo em oblíquo (figura 4.1 b) ou, usando as mãos, pode-se moldar sólidos de formatos bem diferentes (figura 4.1 c). Sabe-se que os três sólidos têm volumes iguais. O estudante, nessas comparações, pode perceber a ideia que esse princípio traz, onde o volume de alguns sólidos mais diferentes pode ser calculado comparando-os com o volume de sólidos mais simples de mesma base e de mesma altura, porém mais fáceis de serem calculados.

Essa é a intuição que conduz o Princípio de Cavalieri. A situação vista nessa experiência constitui um caso particular desse princípio. Cada folha, são fatias de mesma área que estão na mesma altura nos três sólidos, portanto, formam sólidos diferentes mas com *mesmo volume*.

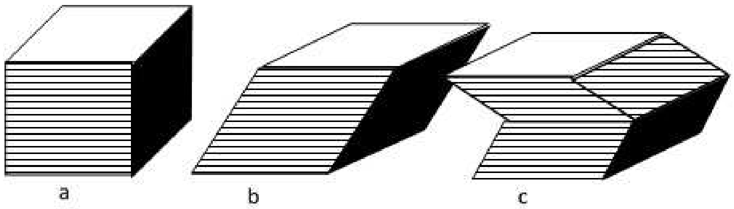


Figura 4.1: *Sólido formado por pilha de papel*

Numa situação mais geral, considerando dois sódios quaisquer A e B (figura 4.2), se as duas fatias que estiverem na mesma altura tiverem também mesma área, então, como possuem mesma espessura, terão muito aproximadamente volumes iguais. Tanto mais aproximado quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes das respectivas fatias, e a aproximação entre os volumes das fatias podendo tornar-se tão precisa quanto se deseje, concluímos que os volumes de A e B são iguais.

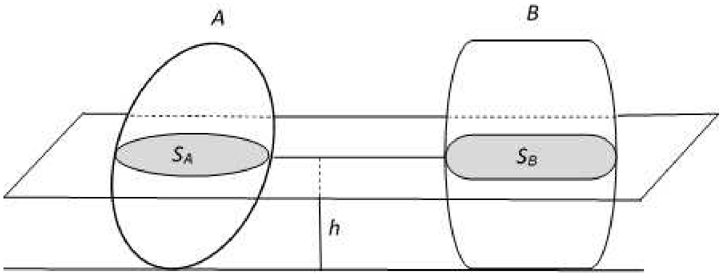


Figura 4.2: *Seções planas de dois sólidos*

4.2 Enunciado do Princípio de Cavalieri

Em Lima et al. (2006, vol. 2) é enunciado o Princípio de Cavalieri, que diz o seguinte:
Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas de mesma área, então, estes sólidos têm volumes iguais.

Esse princípio, na verdade, é um teorema, mas, como dissemos no início, será adotado como um axioma, porém os argumentos anteriores são bastante intuitivos e convincentes de que esse princípio é verdadeiro.

Nos capítulos de 5 a 9, veremos que o Princípio de Cavalieri diminui bastante os argumentos no cálculo do volume de alguns sólidos, pois reduz o cálculo de volume ao cálculo de áreas.

4.3 Atividade 12: Manipulação de sólidos no GoeGebra e no SketchUp

Uma atividade interessante nesse sentido de introdução e de despertar a intuição que o Princípio de Cavalieri conduz é, novamente, o uso dos programas GeoGebra 5.0 JOGL e do SketchUp do Google. Os estudantes interagem manipulando os sólidos e criando formas diferentes para os sólidos em 3D. Percebem, com isso, que quando mantida as áreas das bases constantes nos sólidos, seus volumes não se alteram. É uma atividade simples mas que pode ser bastante melhorada quando se vai aprimorando o conhecimento dos recursos desses softwares, pincipalmente para aplicações no cálculo do volume dos sólidos que veremos nos capítulos de 4 a 9, tais como prisma, pirâmides, cilindros, cones etc.

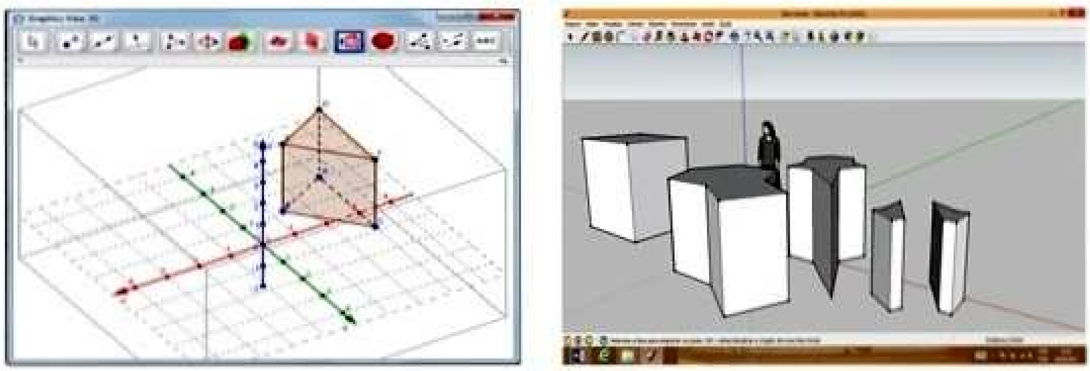


Figura 4.3: *Tela do GeoGebra e do SketchUp*

Capítulo 5

Volume de um prisma qualquer

Dominado o assunto de obter o volume dos blocos retangulares, o avanço na determinação do volume para os outros sólidos, será bem mais facilitado com a noção de semelhança na ideia dada pelo Princípio de Cavalieri. Veremos que os argumentos para o cálculo se reduzirão ao cálculo de áreas.

Como todo prisma é formado por duas figuras paralelas e iguais chamadas bases e por arestas paralelas e iguais, que ligam essas bases, o seu volume pode ser facilmente calculado pelo Princípio de Cavalieri usando, para comparação nas congruências das áreas das bases, o bloco retangular do qual já sabemos calcular o volume.

Assim, seja um prisma P de altura h, possuindo como base um polígono de área A contida em um plano horizontal α. Contamos com um bloco retangular (paralelepípedo retângulo, prisma reto de base retangular) com base em α, com altura h onde sua base seja um retângulo de área A, conforme figura 5.1.

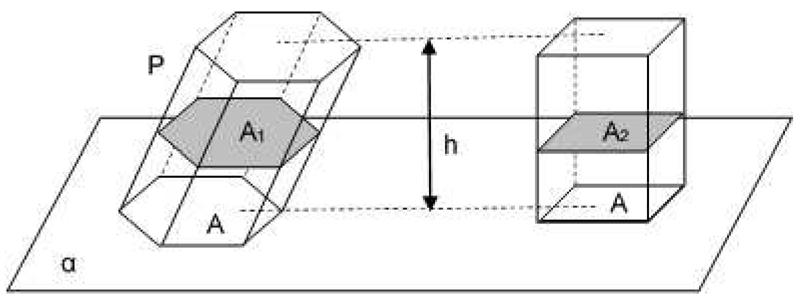


Figura 5.1: *Princípio de Cavalieri para prismas*

Supondo um plano paralelo a α, corte os prismas em secções de áreas A_1 no prisma P e A_2 no bloco retangular. Como no prisma toda secção paralela à base é congruente com ela, as secções têm áreas iguais.

$$A_1 = A = A_2$$

Pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume V do bloco retangular é dado por $V = A.h$, o volume do prisma é também o produto da área da base pela altura.

$$V_{prisma} = A_{base}.h$$

5.1 Atividades para prismas quaisquer

Várias atividades que foram propostas para os conceitos vistos anteriormente são próprias agora mas voltadas para o cálculo de volume de um prisma qualquer, agora que já o determinamos.

5.1.1 Atividade 13: Minicurso, GoeGebra e SketchUp

Ao tratar de cada sólido novo, propomos retomar seus aspectos trabalhados no Mini Curso oferecidos pelo acadêmicos de Matemática da UFMT na parceria do projeto PIBID. Nesse momento a planificação e a construção dos diversos prismas fará o estudante perceber as relações entre áreas e volumes envolvidas nos itens característicos dos prismas: áreas laterais e das bases, altura etc. É uma atividade motivadora e propulsora da aprendizagem significativa por ser uma construção concreta dos referidos poliedros.

No laboratório de informática poderemos retomar o uso dos programas GoeGebra, SketchUp e Geometry 2.0. No GeoGebra, podemos construir e manipular, sobre vários aspectos, os diversos prismas. No SketchUp da Google, podemos modelar ambientes virtuais em 3D usando os diversos sólidos já trabalhados. São ótimas oportunidades para os estudantes vencerem a dificuldade que, às vezes, têm de perceberem esses sólidos no espaço. No programa Geometry, os estudantes podem calcular o volume dos prismas apresentados no programa e verificar os resultados dos cálculos feitos em sala.

Na figura 5.2, apresentamos algumas telas desses programas.

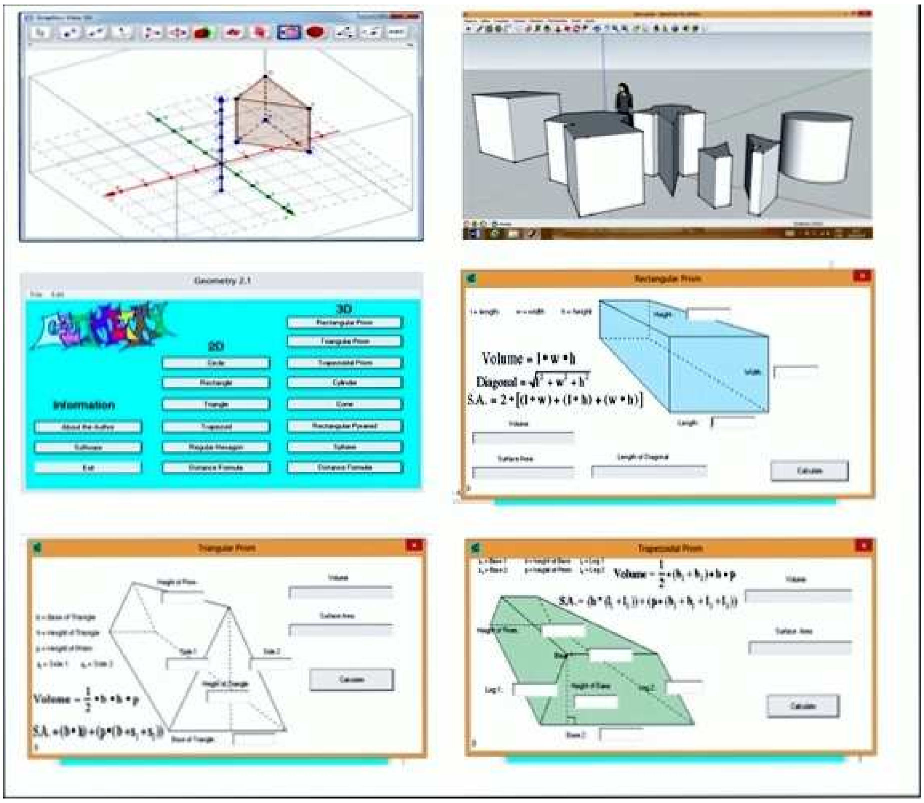


Figura 5.2: *Telas do GeoGebra, SketchUp e Geometryc 2.0*

5.1.2 Atividade 14: Volume da piscina com profundidades diferentes

O seguinte problema, apresentado em Telcurso aula 67 (2014), envolve o cálculo de volume de prismas e tem esse caráter da aplicação em situações cotidianas defendidas nesse trabalho.

1. Na figura 5.3, vê-se uma piscina de 10 m de comprimento por 6 m de largura. Existe uma parte rasa, com 1,20 m de profundidade, uma descida e uma parte funda, com 2 m de profundidade. Com as medidas que aparecem no desenho, calcule o volume da piscina.

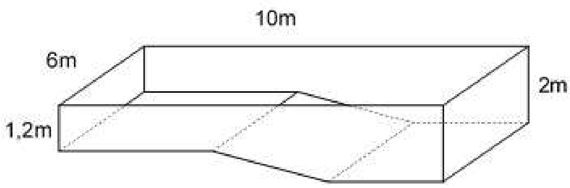


Figura 5.3: *Piscina com duas profundidades*

Solução:

Inicialmente, pode-se constatar que essa piscina é um prisma. Por quê? Vamos recordar: todo prisma é formado por duas figuras paralelas e iguais chamadas bases e, por arestas paralelas e iguais, que ligam essas bases. Observe que a piscina está de acordo com essa definição. A figura que aparece na frente é uma das bases e qualquer uma das arestas de comprimento 6 m é a altura, porque elas são perpendiculares às bases. O volume do prisma é igual a área da base multiplicada pela altura. Como, no nosso caso, a altura é igual a 6 m, só nos falta calcular a área de uma das bases. Para isso, pode ser dividida em figuras menores, como mostrado na figura 5.4.

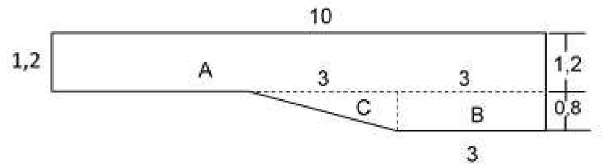


Figura 5.4: *Divisão da base da piscina*

A base do nosso prisma foi dividida em três partes: um retângulo (A), um retângulo menor (B) e um triângulo retângulo (C). Com as medidas que estão no desenho, poderemos facilmente calcular as áreas das três partes:

$$S_A = 10.(1{,}2) = 12 \quad m^2$$

$$S_B = 3.(0{,}8) = 2{,}4 \quad m^2$$

$$S_C = \frac{3.(0{,}8)}{2} = 1{,}2 \quad m^2$$

A soma das áreas das três partes é $12 + 2{,}4 + 1{,}2 = 15{,}6 \quad m^2$. Essa é a área da base do nosso prisma. Como o volume é o produto da área da base pela altura 6 m, tem-se que o volume da piscina é:

$$V = (15{,}6).6 = 93{,}6 \quad m^3$$

Conclui-se, então, que cabem dentro dessa piscina 93,6 m^3 de água, ou seja, 93 600 litros.

Foi considerado que alguns exercícios recomendados no material do Curso de Mestrado do PROFMAT, para esse tema, têm esse caráter de uma aprendizagem significativa, pois alguns exigem que o aluno calcule o volume de alguns prisma envolvendo também outros conceitos de matemática, como porcentagem, ângulos, proporções, etc e, em muitos casos, um desenho esquemático do problema, ou dos resultados, caracterizando as etapas do esquema de resolução de problemas vista nesse trabalho.

Os exercícios usuais dos livros didáticos relacionados a esse tópico também cumprem o caráter de serem exercícios de reconhecimento e de algoritmos. Faz com que o estudante relembre, aplique e reforçe os conceitos vistos. São vários exercícios e de fácil acesso a qualquer professor, por isso relatamos apenas os problemas anteriores para os quais percebemos algum caráter daquela aprendizagem dita significativa trabalhada no capítulo 1.

Capítulo 6

Volume do cilindro

Um aspecto interessante sobre cilindro, que raramente é dito nos livros didáticos, é o fato da base desse prisma ser qualquer figura plana e não só um círculo como é, frequetemente, trabalhado nesses livros. O cilindro cuja a base é um círculo é um caso bem particular da sua definição.

6.1 Definição do cilindro

Em Lima (2006) é dada a seguinte definição de cilindro:
Cilindro C é formado por uma figura plana F, base do cilindro, e da reunião dos segmentos tomados, por cada ponto de F, paralelos e do mesmo comprimento e de um segmento g, geratriz do cilindro, não paralela ao plano da base (figura 6.1).

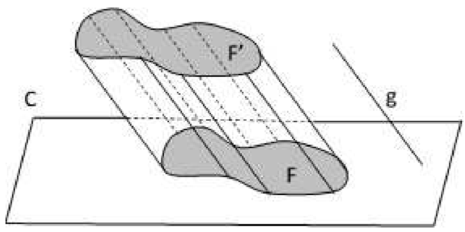


Figura 6.1: *Cilindro*

O argumento do capítulo 5, usado para determinar o volume do prisma, pode ser generalizado para o volume do cilindro. O prisma é um caso particular de cilindro quando sua base é um polígono ficando o sólido C limitado por faces planas. Dessa forma as deduções feitas anteriormente para prisma podem ser particularizadas para cilindro, utilizando para isso o bloco retangular ao lado de um cilindro, ambos com área da base A e altura h (figura 6.2). Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se, que o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura.

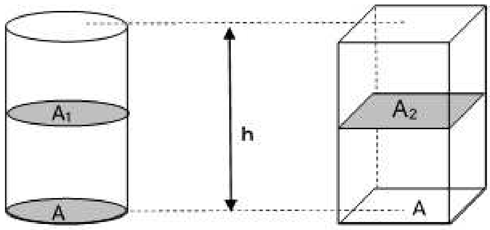


Figura 6.2: *Princípio de Cavalieri para cilindro*

$$V_{cilindro} = A_{base}.h$$

Essa opção de se determinar o volume do prisma e estender o resultado para o caso mais geral do cilindro, é o caminho adotado pela a maioria dos professores do Ensino Médio. Em Lima (2006), há concordância com esses professores, justificando que os estudantes dessa fase do ensino, em seu primeiro contato com a Geometria Espacial, sente-se mais seguro quando compreende bem os resultados obtidos em situações particulares, para depois estendê-las em casos mais gerais.

6.2 Cubicar ou cubar a madeira

Para a proposição de algumas atividades para explorar esse assunto de volume do cilindro apresenta-se um curioso método praticado por alguns madeireiros no cálculo do volume da tora obtida de uma árvore. É um método prático e que alguns costumam chamá-lo de "cubar"ou "cubicar"a madeira.

Para cubar a madeira, ou seja, obter o volume da tora em m^3, mede-se o "rodo"da árvore (circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m)), sua altura e usa-se a fórmula:

$$V = rodo^2.altura.(0{,}06)$$

Observações:

1. O rodo e altura da árvore deverão ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

2. Nessa fórmula teremos uma diferença no volume das toras quando feito num cálculo geométrico, no qual o volume da tora é aproximado pelo volume de um cilindro, a partir de um ponto central da tora, com o feito num cálculo usando o rodo da árvore. Essa diferença é dada por:

$$\begin{aligned}
Erro \quad entre \quad os \quad volumes &= V_{formal} - V_{rodo} \\
&= \pi.r^2.h - rodo^2.h.(0{,}06) \\
&= (3{,}14).r^2.h - (2.\pi.r)^2.h.(0{,}06) \\
&= (3{,}14).r^2.h - 4.(3{,}14)^2.r^2.h.(0{,}06) \\
&= 0{,}78m^3 \quad por \quad tora
\end{aligned}$$

3. Essa diferença no volume de uma tora parece grande quando comprada ao cálculo geométrico do volume do cilindro. Na prática, em uma floresta, não se mostra tão grande. Na fórmula usando o rodo, a altura da árvore é relativa a tora que será aproveitada e, geralmente, não tem um formato uniforme. Já no cálculo geométrico, o cilindro considerado é, por definição, uniforme. Dessa forma a compensação dessa diferença é dada, experimentalmente, pelo coeficiente 0,06.

Esse método prático para se calcular o volume da tora de uma árvore a partir do rodo tem uma "formalização"semelhante no chamado método de Francon. Nele aparece a origem da relação de 0,78 entre os cálculos geométricos descrito acima e cálculo em que se usa o rodo das árvores.

Esse método também consiste em medir o rodo da tora da árvore na parte central de onde se vai aproveitá-la como tora, sua respectiva altura e aplica-se a fórmula:

$$V = \left(\frac{rodo}{4}\right)^2.h$$

Daí se dá a origem da palavra cubar o cubicar a madeira, pois, nesse método, o cálculo do volume da tora (forma cilíndrica) é feito transformando-a, intuitivamente, em um prisma reto de base quadrada (bloco retangular), conforme a ilustração na figura 6.3.

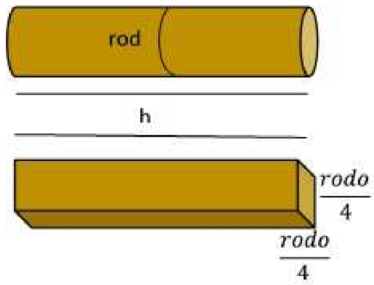


Figura 6.3: *Tora*

6.3 Atividades para cilindro

6.3.1 Atividade 15: Minicurso, GoeGebra e SketchUp

Ao tratar de cada sólido novo, propomos retomar seus aspectos trabalhados no Mini Curso oferecidos pelo acadêmicos de Matemática da UFMT na parceria do projeto PIBID. Nesse momento, a planificação e a construção dos diversos prismas fará o estudante perceber as relações entre áreas e volumes envolvidas nos itens característicos dos prismas: áreas laterais e das bases, arestas laterais e das bases, altura etc. É uma atividade motivadora e propulsora da aprendizagem significativa por ser uma construção concreta dos referidos poliedros.

No laboratório de informática poderemos retomar o uso dos programas GeoGebra, SketchUp e Geometry 2.0. No GeoGebra, podemos construir e manipular, sobre vários aspectos, os diversos prismas. No SketchUp da Google, podemos modelar ambientes virtuais em 3D usando os diversos sólidos já trabalhados. Como foi dito, são oportunidades para os estudantes vencerem a dificuldade que, ás vezes, têm de perceberem esses sólidos no espaço. No programa Geometry, os estudantes podem calcular o volume dos prismas apresentados no programa e verificar os resultados dos cálculos feitos em sala.

6.3.2 Atividade 16: Manejo florestal

Como exemplo do uso desse método prático para cubar a tora e onde o conceito de volume e densidade é também aplicado, propomos o seguinte problema:

1. Um técnico em manejo florestal recebe a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo:

    - 3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/ m^3

- 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/ m^3

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente, quantas toneladas?

Solução:

Cálculo do volume e da massa da tora da espécie I:

Rodo = 3 m, altura = comprimento = 12 m

$$V_1 = 3^2.12.(0{,}06) = 6{,}48 \quad m^3$$

Sendo 3 toras, o volume total das toras de espécie I é:

$$3.(6{,}48) = 19{,}44 \quad m^3$$

Como a densidade das toras de espécie I é 0,77 $\quad toneladas/m^3$

$$D_1 = \frac{m_1}{V_1} \longrightarrow m_1 = 0{,}77.(19{,}44) = 14{,}9688 \quad toneladas$$

Cálculo do volume e da massa da tora da espécie II:

Rodo = 4 m, altura = comprimento = 10 m

$$V_1 = 4^2.10.(0{,}06) = 9{,}6 \quad m^3$$

Sendo 2 toras, o volume total das toras de espécie II é:

$$2.(9{,}6) = 19{,}2 \quad m^3$$

Como a densidade das toras de espécie II é 0,78 $\quad toneladas/m^3$

$$D_2 = \frac{m_2}{V_2} \longrightarrow m_2 = 0{,}78.(19{,}2) = 14{,}976 \quad toneladas$$

Portanto a carga a ser transportada é de:

$$14{,}9688 + 14{,}976 = 29{,}9448 \quad toneladas$$

Aproximadamente 30 toneladas de toras para transportar.

6.3.3 Atividade 17: O volume de um cilindro inclinado

Um exercício interessante que envolve volume do cilindro e porcentagem, exigindo também paralelismo e congruência de triângulos num raciocínio mais prático de resolução, é proposto em Lima et al. (2006, vol. 4), interpretado a seguir.

1. Um copo cilíndrico tem 6 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água o copo é inclinado até que o plano de sua base faça 45° com o plano horizontal. Calcule o volume de água que permaneceu no copo.

   Solução:

   No copo inclinado imaginamos uma seção paralela a base pelo ponto P, médio da geratriz (figura 6.4). Como fica dividido em dois cilindros iguais, um dos quais está metade vazio, o volume de água que permanece no copo é $\frac{3}{4}$ do volume original, ou seja,

$$V = \frac{3}{4}A_{base}.h = \frac{3}{4}\pi 3^2.12 = 81\pi \quad cm^2$$

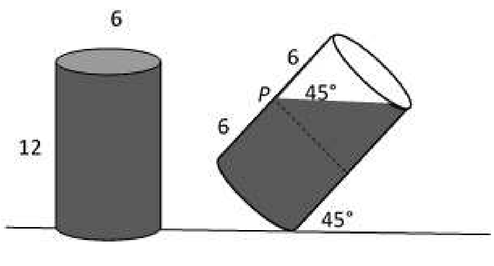


Figura 6.4: *Copo derramando água*

6.3.4 Atividade 18: O peso de cano de ferro

Um exercício muito bom envolvendo volume do cilindro e densidade do ferro, para o cálculo do peso de um cano de duas polegadas é apresentado em Telecurso aula 67 (2004). É uma atividade excelente na linha da interdisciplinaridade e da aplicação em situações do cotidiano. Como veremos na solução, envolveu o fato da realidade do cano ser oco, em que não basta considerar o diâmetro externo, pois o seu interior não será considerado no cálculo do peso e o fato de ter-se sempre as "bitolas"(diâmetro) dadas em polegadas, contraponto com comprimento em metro e densidade em g/cm^3, necessitando de transformação de unidades.

1. Na construção de um prédio, para levar a água da cisterna até à caixa superior, foram usados canos de ferro de duas polegadas (figura 6.5). Quanto pesa um desses canos, considerando os dados seguintes?

   Diâmetro externo = 2 polegadas

   Diâmetro interno = 1,7 polegadas

   Comprimento = 6 m

   Densidade do ferro = 7,8 g/cm^3

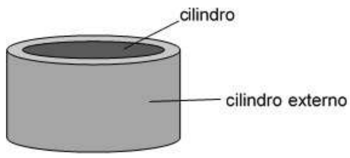
   

   Figura 6.5: *Cano de ferro*

   Solução:

   A densidade de um objeto feito de um mesmo material é dado pelo quociente entre o seu volume pela sua massa. Assim, para obtermos a massa do cano precisamos calcular seu volume, pois temos já temos a densidade do cano já que ele é feito de ferro cuja a densidade é 7,8.

   O cano tem a forma de um cilindro oco, cujo o espaço vazio no seu interior tem a forma de um outro cilindro. Logo o volume de ferro nesse cano é a diferença entre os volumes de dois cilindro: um externo, de raio $R \simeq 2{,}5 \quad cm$ (1 polegada) e um interno de raio $r \simeq 2{,}2 \quad cm$ (0,85 polegada). A altura dos dois cilindro é

$h = 6 \quad m = 600 \quad cm.$

$$\begin{aligned} Volume \quad de \quad ferro &= (cilindro \quad externo) - (cilindro \quad interno) \\ &= \pi.R^2.h - \pi.r^2.h \\ &= 3{,}14.(2{,}5)^2.600 - 3{,}14(2{,}2)^2.600 \\ &= 2656{,}44 \quad cm^3 \end{aligned}$$

Esse é o volume de ferro que há em um cano. A sua massa será então:

$$\begin{aligned} Massa \quad do \quad ferro &= (densidade).(volume) \\ &= 7{,}8.(2656{,}44) \\ &\simeq 20720 \quad g \quad (20{,}72 \quad kg) \end{aligned}$$

Capítulo 7

O volume da pirâmide

O volume da pirâmide é um assunto que considerou-se ter mais falhas na abordagem dadas pelos livros didáticos no Ensino Médio. A maioria deles apresenta apenas as fórmulas não se preocupando em dar mais detalhes sobre como foram obtidas. Consideramos não ser muito difícil uma abordagem, como feita aqui, na qual, adotamos o procedimento de definir o volume a partir do bloco retangular e ir avançando nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas dos demais volumes, onde o Princípio de Cavalieri, os simplificam notavelmente.

Para o volume de uma pirâmide seguiremos a abordagem dada em Lima et al. (2006, vol. 2) onde os pontos mais relevantes formaram uma sequência de argumentos para que o estudante possa entender o processo na determinação de tal volume. Seguiu-se o caminho de partir de uma situação particular e estender os resultados para um caso mais geral. É o que faremos na abordagem adotada na seção 7.3.

7.1 Atividade 19: Sólidos de madeira, GeoGebra e SketchUp

Uma atividade introdutória para as demonstrações dos teoremas que seguirão nesse capítulo é trabalhar com sólidos de madeira em forma de pirâmides e do prisma triangular. São sólidos seccionados em pirâmides triangulares nas formas que faremos na demonstração dos teoremas sobre esse tema. É uma forma do estudante perceber concretamente concreto aquelas implicações que serão trabalhadas. Não são tão difíceis de se obter esses sólidos em papelarias ou lojas de matérias didáticos.

No mesmo sentido dessa atividade, a retomada do uso do GeoGebra e do SketchUp no laboratório de informática é importantíssimo. A compreensão das demonstrações do teoremas desse capítulo ficam bem mais facilitadas, na medida em que os estudantes podem manipular, no GeoGebra, o vértice da pirâmide em um plano paralelo e verificar, mais fortemente, as implicações resultantes desse fato. Podem também, manipular as pirâmides e o prisma triangular em 3D e seccioná-lo em pirâmides triangulares naquela forma feita na demonstração dos teoremas, verificando mais facilmente aquelas implicações.

7.2 A pirâmide

A pirâmide é o sólido formado pelo conjunto dos segemntos que têm extremidade em um polígono convexo, contido num plano α, e em um ponto V fora de α.

Um resultado importante relacionado em Lima et al. (2006, vol. 2) é o de ter-se a certeza de que o volume da pirâmide não se altera quando se move o vértice dessa pirâmide em um plano paralelo à base. Isso decorre da relação de semelhança, que trataremos com mais detalhes no capítulo 10, onde os seguintes resultados se apresentam:

1. Um plano paralelo a base de uma pirâmide de altura H (figura 7.1), ao seccioná-la em uma altura h, produz nela uma seção, onde:

   a) A seção e a base são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\dfrac{h}{H}$.

   b) A razão entre as suas áreas é o quadrado da razão de semelhança.

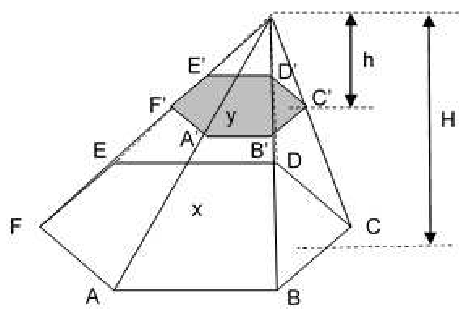


Figura 7.1: *Pirâmides hexagonais semelhantes*

2. **Teorema**: Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

   Na figura 7.2 temos duas pirâmides de mesma base e mesma altura, em que um plano paralelo a base e distando h dos vértices, produzem seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

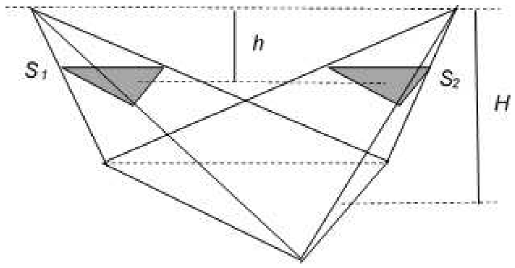


Figura 7.2: *Pirâmides semelhantes*

Sendo A a área da base das pirâmides e A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente, pelos argumentos de 1, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

De onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri as duas pirâmides têm o mesmo volume.

Esse fato de podermos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo sem que seu volume se altere é a base para a demonstração do item 3, seguinte.

3. **Teorema**: O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

   Demonstração: Considere um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, decomposto em três pirâmides, como mostra a figura 7.3.

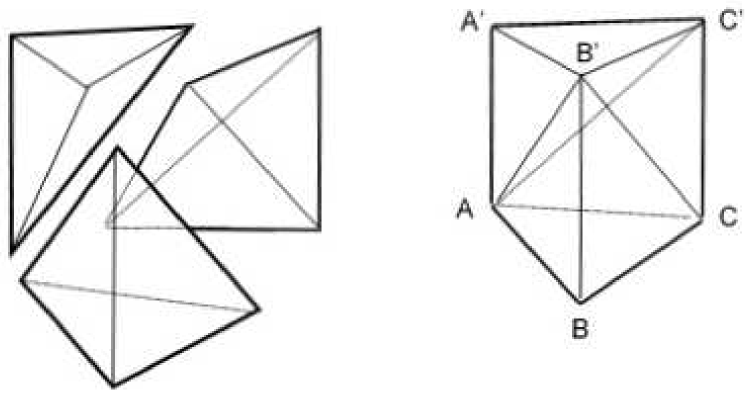


Figura 7.3: *Prisma triangular decomposto em três pirâmides*

Como o volume do prisma é produto da base pela altura, basta mostrar que o volume de cada uma das pirâmides e igual ao da pirâmide $ABCB'$. As três pirâmides são a própria $ABCB'$, a pirâmide $A'B'C'A$ (com base congruente à base da primeira e com mesma altura) e a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruentes à base $AA'C'$ da segunda e cuja altura, a partir do vértice B', e igual à altura da segunda pirâmide $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B'. Isto, por 2, conclui a demonstração.

7.3 Volume de uma pirâmide qualquer

Com o teorema anterior podemos obter um resultado mais geral para volume de pirâmide. O teorema a seguir estende esse resultado para uma pirâmide qualquer.

***Teorema**: O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

A justificativa dada em Lima et al. (2006, vol. 2) é de que uma pirâmide qualquer pode ser dividida em pirâmides triangulares, onde a base dessa pirâmide é dividida em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide (figura 7.4).

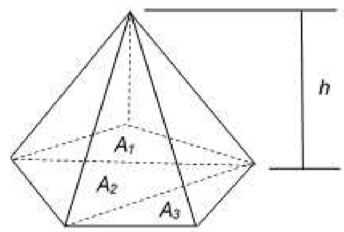


Figura 7.4: *Pirâmide dividida em pirâmides triangulares*

Supondo que a pirâmide tenha altura h e a área da base A, foi dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, \quad A_2, \quad ..., \quad A_n$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que o volume é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + ... + \frac{1}{3}A_nh \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h \\ &= \frac{1}{3}Ah \end{aligned}$$

Assim, fica estabelecido que o volume da pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$V_{piramide} = \frac{1}{3}A_{base}.h$$

7.4 Volume do tronco de pirâmide

Um sólido decorrente da pirâmide cujo o cálculo de seu o volume também decorre da fórmula do volume da pirâmide é o tronco de pirâmide. A determinação do seu volume geralmente é apresentada como uma atividade para os estudantes, mas apresentamos aqui como um item desse capítulo pois, como veremos, as noções de trigonometria que poderiam ser usadas na demonstração podem ser evitadas com o uso da relação da razão de semelhança e área que trabalharemos com mais detalhes no capítulo 10, uma vez que lá veremos todos os aspectos de semelhança de figuras.

Considere o tronco de pirâmide de bases paralelas de altura h, área da base maior A_B e área da base menor A_b, conforme mostra a figura 7.5.

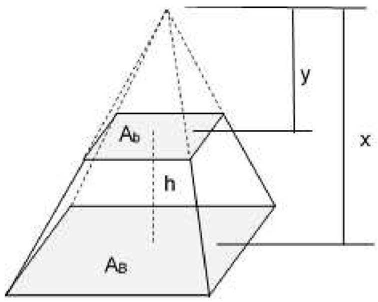


Figura 7.5: *Tronco de pirâmide*

O volume desse tronco será dado pela diferença dos volumes das pirâmides de base maior e altura x pela de base menor e altura y. Assim,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_B.x - \frac{1}{3}A_b.y \\ &= \frac{1}{3}[A_B.x - A_b.(x-h)] \\ &= \frac{1}{3}[A_B.x - A_b.x + A_b.h] \\ &= \frac{1}{3}[(A_B - A_b).x + A_b.h] \qquad (7.1) \end{aligned}$$

Da razão de semelhança de área, temos:

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Logo

$$\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{x}{x-h}$$

Dai

$$x = \frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}$$

De (7.1), temos

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}[(A_B - A_b)\frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} + A_b.h] \\
&= \frac{h}{3}[(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b})(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})\frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} + A_b] \\
&= \frac{h}{3}[(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}).\sqrt{A_b} + A_b] \\
&= \frac{h}{3}(\sqrt{A_B.A_b} + A_B + A_b)
\end{aligned}$$

Assim o volume do tronco de pirâmide de bases paralelas, com área da base maior A_B e área de base menor A_b e altura h é dado por:

$$V = \frac{h}{3}(\sqrt{A_B.A_b} + A_B + A_b)$$

7.5 Atividades para pirâmides

Nesse momento do estudo um grande número de atividades já podem ser propostas, pois já trabalhamos quase todos os poliedros clássicos. Para o caso da pirâmide temos muitos exercícios classificados como de fixação dos conceitos ou exercícios de algoritmos presentes nos vários livros didáticos, nos quais o estudante aplica e reforça os conceitos vistos sobre o assunto. São exercícios que envolvem as noções de trigonometria relacionando os vários itens (apótema, aresta lateral, aresta da base e altura) da pirâmide e do polígono que forma a base. Aplicações em situações do cotidiano estão mais relacionadas aos conceitos do tronco de pirâmide, pois a pirâmide não é uma forma muito relacionada nessas situações.

7.5.1 Atividade 20: Minicurso para construção de pirâmides

Retomar os aspectos relativos a pirâmide trabalhados no Minicurso oferecidos pelo alunos de Matemática da UFMT na parceria do projeto PIBID, como estamos fazendo ao tratar de cada novo sólido definido, é importantíssimo. Nesse momento a planificação e a construção de várias pirâmides pelo estudante é uma atividade motivadora e propulsora da aprendizagem significativa no aspecto da construção concreta do referido poliedro. As características das pirâmides quando planificadas deixa claro as relações das áreas laterais e das bases dos seus respectivos polígonos formados.

7.5.2 Atividade 21: Transporte de entulho e exercícios diversos

A maioria dos livros didáticos traz bastante exercícios ditos de fixação dos conceitos ou exercícios de algoritmos e até mesmo demonstrações de alguns lemas relacionando pirâmides. São exercícios fáceis de serem encontrados nesses livros e no material do PROFMAT. Os exercícios que envolvem as noções de trigonometria nas relações dos vários itens da pirâmide (apótema, aresta lateral, aresta da base e altura) dependendo do polígono que forma a base são bons para a finalidade fixação e reforço dos conceitos. Aplicações em situações do cotidiano, como dissemos, estão mais relacionadas aos conceitos do tronco de pirâmide, pois a pirâmide não é uma forma muito relacionada nessas situações.

Relata-se um exercício adaptado de Souza (2010) numa contextualização com o cotidiano.

1. Lucas contratou um serviço de remoção de entulhos com caçambas estacionárias durante uma reforma em sua casa. A quantidade de entulho gerado na reforma foi transportada em quatro caçambas com forma e dimensões (em cm) representadas na figura 7.6. Quantos metros cúbicos de entulho, no máximo, foram gerados na reforma da casa de Lucas?

   Resolução:

   Como a caçamba pode ser decomposta em duas partes com de paralelepípedo reto retângulo e um tronco de pirâmide de bases paralelas, teremos o volume de uma

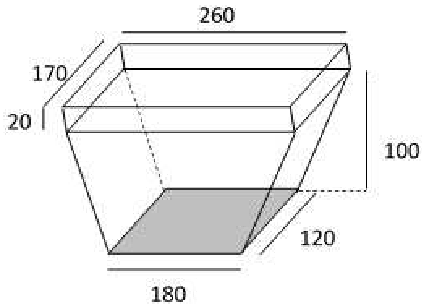


Figura 7.6: *Caçamba para transporte de entulho*

caçamba dado por:

$$\begin{aligned}
V_{total} &= V_{paral.} + V_{tronco}\\
&= a.b.c + \frac{h}{3}(\sqrt{A_B.A_b} + A_B + A_b)\\
&= 20.170.260 + \frac{100}{3}(\sqrt{(170.260)(120.180)} + 170.260 + 120.180)\\
&= 884000 + \frac{100}{3}(\sqrt{954720000} + 44200 + 21600)\\
&= 884000 + \frac{100}{3}(30898{,}5 + 65800)\\
&= 884000 + \frac{100}{3}(96698{,}5)\\
&= 4107283{,}3 \quad cm^3\\
&= 4{,}1 \quad m^3
\end{aligned}$$

Assim para as quatro caçambas transportarão no máximo 16,4 m^3

Capítulo 8

Volume do cone

Da mesma forma como prisma se relaciona com cilindro, a pirâmide se relaciona com cone, ou seja, um é um caso particular do outro. E o cone cuja a base é um círculo é um caso bem particular de sua definição.

8.1 Definição do cone

Em Lima (2006) é dada a seguinte definição de cone:
Um cone C é formado por uma figura plana F, base do cone, e da reunião dos segmentos que ligam cada ponto de F a um ponto fora do plano base, chamado vértice do cone (figura 8.1)

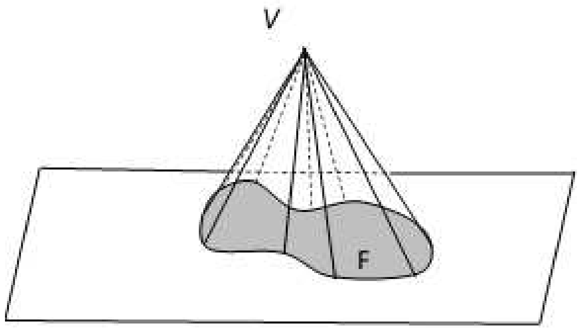


Figura 8.1: *Cone*

Assim a pirâmide é um caso particular de cone, quando a base F é um polígono.

O volume do cone segue, então, o mesmo caminho das deduções feitas anteriormente no cálculo do volume de uma pirâmide. Considerando um cone com altura H e base de área A contida em um plano horizontal ao lado de uma pirâmide de mesma altura e mesma área da base (figura 8.2).

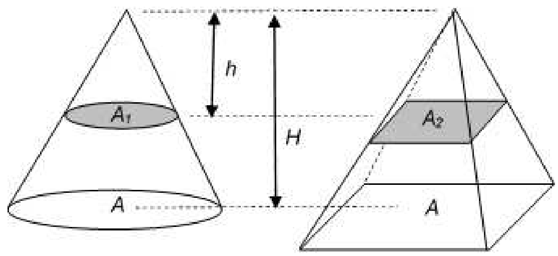


Figura 8.2: *Princípio de Cavalieri para cone*

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo uma figura de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

,

Ou seja, $A_1 = A_2$. O princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos tem o mesmo volume, portanto, concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$V_{pir} = \frac{1}{3}.A_{base}.h$$

8.2 Volume do tronco de cone

Como na pirâmide, tem-se o tronco de pirâmide como um sólido decorrente de sua definição, da mesma forma temos como decorrência do cone, o tronco de cone. Assim como relatamos no capítulo 7, a determinação do volume desse sólido geralmente é apresentada como uma atividade para os estudantes, mas apresento aqui como um item desse capítulo pois, como veremos, as noções de trigonometria que poderiam ser usadas na demonstração, podem ser evitadas com o uso da relação da razão de semelhança e área que trabalharemos com mais detalhes no capítulo 10, uma vez que lá veremos todos os aspectos de semelhança de figuras.

Considere o tronco de cone de bases paralelas de altura h e área da base maior A_B e área da base menor A_b, conforme mostra a figura 8.3.

O volume desse tronco segue o mesmo caminho do traçado no cálculo do tronco de

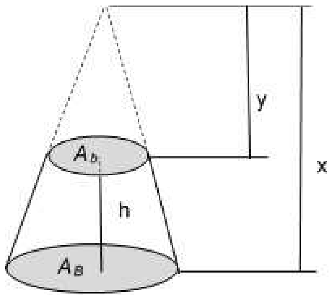


Figura 8.3: *Tronco de cone*

pirâmide, onde a diferença dos volumes dos cones de base maior e altura x pela de base menor e altura y pelas as deduções feitas lá, concluímos que o volume do tronco de cone de base paralelas é dado por:

$$V = \frac{h}{3}(\sqrt{A_B.A_b} + A_B + A_b)$$

No caso das bases serem círculos de raio maior R e raio menor r, teremos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3}(\sqrt{A_B.A_b} + A_B + A_b) \\ &= \frac{h}{3}(\sqrt{\pi R^2.\pi r^2} + \pi R^2 + \pi r^2) \\ &= \frac{h}{3}[\pi Rr + \pi(R^2 + r^2)] \\ &= \frac{\pi h}{3}(Rr + R^2 + r^2) \end{aligned}$$

Assim, o volume do tronco de cone circular de bases paralelas, com raios da base maior R e raio da base menor r e altura h é dado por:

$$V = \frac{\pi h}{3}(Rr + R^2 + r^2)$$

8.3 Atividades para cones

No caso do cone e tronco de cone temos várias aplicações no cotidiano, pois suas formas são largamente encontradas nas formas de diversos objetos no dia a dia: nos copos descartáveis e de diversos recipientes, em funis, nos cones utilizados nas demarcações nas estradas, etc.

8.3.1 Atividade 22: Minicurso, GoeGebra e SketchUp

Como estamos fazendo ao tratar de cada novo sólido definido, poderemos retomar os aspectos relativos ao cone, trabalhados no Minicurso oferecidos pelo alunos de Matemática da UFMT na parceria do projeto PIBID. Nesse momento do estudo a planificação e a construção desse sólido fará o estudante perceber as relações entre áreas e volumes envolvidas nos itens característicos do cone: geratriz, altura, raio da base e setor circular.

No laboratório de informática poderemos retomar o uso dos programas GoeGebra, SketchUp e Geometry 2.0. No GeoGebra, podemos construir e manipular, sobre vários aspectos, os diversos cones. E no SkechUp da Google, modelar ambientes virtuais em 3D usando os diversos sólidos já trabalhados. São oportunidades para o estudante vencer a dificuldade que, ás vezes, tem na percepção desses sólidos no espaço. No programa Geometry, os estudantes podem calcular o volume dos cones e tronco de cones apresentados no programa verificando os resultados dos cálculos feitos em sala.

8.3.2 Atividade 23: Serrando um cone de madeira

Uma atividade que cumpre perfeitamente o aspecto do trabalho com material concreto, ressaltado nos tópicos de uma aprendizagem significativa, é trabalhar com cones de madeira em que os estudantes podem serrá-los de forma a obter tronco de cones e assim aplicar os conceitos trabalhados em sala, tais como:

- confirmar os volumes do cone original baseando-se nos volumes do cone e do tronco de cone obtidos, usando as fórmulas dos respectivos sólidos.
- calcular a massa de cada peça obtida, usando a relação de semelhança e volume dos sólidos obtidos.

É uma ótima experiência e certamente contará com a motivação que buscamos nos estudantes para uma aprendizagem dita mais significativa.

8.3.3 Atividade 24: Exercícios e aplicações diversas

Para o caso de cone e tronco de cone temos muitas aplicações dos conceitos, não só em exercícios classificados como de fixação ou exercícios de algoritmos, em que o estudante reforça esses conceitos. Os livros didáticos, nesse ponto, trazem bastante aplicações em situações do cotidiano. São diversas aplicações no dia a dia, às vezes em simples contextualizações para os exercícios usuais envolvendo, no entanto, noções de trigonometria na obtenção dos dados e muitas vezes em situações cotidianas em que o estudante pode realmente aplicar os conceitos vistos.

Tivemos algumas atividades nesse trabalho onde aplicamos as fórmulas para o cálculo de volume do tronco de cone, como no caso da atividade 28, calculando o volume dos copos de refrigerante para uma análise do volume indicado nos rótulos. No item 11.1 do capítulo 11, no cálculo do volume dos paineis tivemos uma figura na forma do tronco de cone. Apresentamos, então, apenas mais um problema em que o contexto com o concreto é vivenciado.

1. Um cone é feito com um semicírculo de papel de 12 cm de raio, onde serão juntados os extremos do diâmetro AB. Qual o volume desse cone?

   Solução:

   Uma figura representativa dessa situação ajudará no esquema de resolução desse problema (figura 8.4).

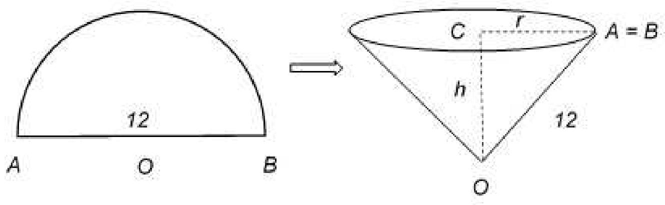


Figura 8.4: *Cone de papel*

Como o perímetro do círculo é $2\pi R$, o perímetro do semicírculo será πR. Quando juntamos os pontos A e B do papel, o semicírculo de raio 12 cm transforma-se em uma circunferência completa de raio r, Temos então:

$$\pi.12 = 2\pi r$$

logo

$$r = 6 \quad cm$$

O cone de papel tem, na base, uma circunferência de centro C e raio r. Assim a altura do cone, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCA, será:

$$12^2 = 6^2 + h^2$$

$$144 = 36 + h^2$$

$$h^2 = 108$$

$$h = \sqrt{108} \simeq 10{,}4 \quad cm$$

Como o volume do cone é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r h \\ &= \frac{1}{3}(3{,}14)6^2(10{,}4) \\ &= 391{,}5 \quad cm^3 \end{aligned}$$

Concluímos, então, com semicírculo de papel de 12 cm de raio formaremos um cone de, aproximadamente, 391,5 cm^3.

Capítulo 9

Volume da esfera

O volume da esfera também será obtido pela aplicação do Princípio de Cavalieri. Consideramos que esse procedimento na determinação desse volume, juntamente com os da pirâmide, sejam uma espécie de consagração desse Princípio no Ensino Médio. De outra forma seria muito difícil uma justificativa que obedecesse o rigor matemático para esses volumes sem recorrer ao Cálculo Integral. O que, se adotado, dificultaria bastante a compreensão pela sua linguagem bastante rigorosa para essa fase do ensino. O caminho adotado nesse trabalho é de razoável compreensão para esses estudantes, uma vez que já sabem calcular os volumes dos sólidos envolvidos nas demonstrações e das noções de trigonometria requeridas.

9.1 A esfera

A definição e teorema sobre esfera dada em Lima et al. (2006, vol. 2) são os seguintes:

Definição: A esfera de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R.

Teorema: O volume da esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Para demonstração interpretada de Lima et al. (2006, vol. 2), deve-se imaginar um certo sólido de volume conhecido tal que, seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham mesma área. Considerando, então, uma esfera de raio R, uma seção dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta também é a área de uma coroa circular limitada por uma circunferência de raios R e h.

Considerando, então, uma esfera de raio R apoiada em um mesmo plano horizontal, e ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro (figura 9.1).

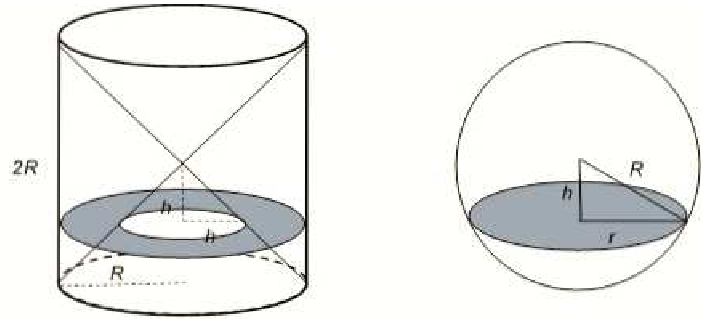


Figura 9.1: *Clépsidra e esfera*

Este sólido C (clépsidra) é tal que, qualquer plano horizontal distando h do centro (ou do centro da esfera que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C.

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que, pelo Princípio de Cavalieri, é o volume da esfera.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

9.2 Volume do segmento esférico de uma base

Da mesma forma como no tronco de cone que decorre do cone, um sólido chamado segmento esférico de uma base, decorre da esfera cujo o caminho para se obter o seu volume também segue o mesmo raciocínio para o volume da esfera. É um sólido formado por uma das partes que se obtém quando cortamos a esfera por plano. Esse sólido, erroneamente, às vezes, é chamado de calota. Mas calota se refere somente à superfície desse sólido.

O volume do segmento esférico de uma base é obtido da mesma forma como fizemos para o volume da esfera, onde consideramos num mesmo plano a esfera de raio R e a clépsidra obtida do cilindro equilátero de altura $2R$, com a diferença que consideramos apenas o sólido C formado na clépsidra, a uma distância x do centro da esfera com seção produzidas pelo plano horizontal e a altura h desse plano, agora, é a distância dessa seção ao plano da base (figura 9.2).

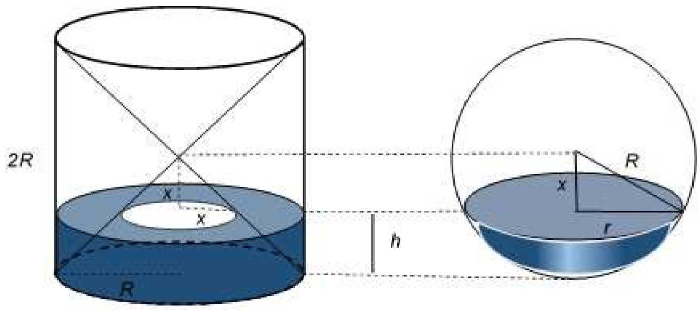


Figura 9.2: *Clépsidra e segmento esférico de uma base*

O volume do segmento esférico de uma base é igual ao volume do sólido C dado pelo volume do cilindro de raio R e altura h subtraído de um tronco de cone de raio da base menor x e raio base maior R e altura h. Assim o volume do sólido C será:

$$V_c = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + x^2 + Rx)$$

Como, $x = R - h$, fazendo as substituições teremos:

$$V_c = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

que, pelo Princípio de Cavalieri, é o volume do segmento esférico de uma base.

$$V_{seg.esf.} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

9.3 Atividades para esfera

Nesse momento do estudo já se pode propor atividades relacionadas a todos os sólidos vistos e, assim, a gama de atividades propostas não sofre as restrições que, às vezes, se tinha quando nos deparávamos com problemas bons, mas que envolviam conceitos de alguns sólidos que não ainda não tínhamos vistos. Às vezes temos vários exemplos de problemas de volumes de objetos compostos de vários outros sólidos nos quais precisamos decompô-los para resolvê-los. Assim, tendo já conhecido as fórmulas de todos eles, esses tipos de exercícios já podem ser propostos.

Considera-se que alguns exercícios recomendados no material do Curso de Mestrado do PROFMAT para o cálculo de volume, têm o caráter de uma aprendizagem significativa, pois alguns envolvem também outros conceitos matemáticos, como porcentagem, ângulos, proporções e exigem, em muitos casos, desenhos esquemáticos do problema ou dos resultados obtidos, tornando-os componentes dessa aprendizagem significativa e crítica.

Os exercícios usuais dos livros didáticos relacionados ao cálculo de volume também cumprem o caráter de serem exercícios de reconhecimento e de algoritmos em que o estudante lembre, aplique e reforce os conceitos vistos. E isso também é importante na aprendizagem. São vários exercícios e de fácil acesso a qualquer professor, por isso relatamos apenas um problema na atividade 27 onde envolveu o volume de esfera em uma aplicação contextualizada de uma situação prática, defendida nesse trabalho como parte de uma aprendizagem significativa e no qual, em sua resolução, retomamos as etapas de resolução de problemas esquematizadas por Polya (1995).

9.3.1 Atividade 25: GeoGebra, SketchUp e Geometry 2.0

Novamente o uso do GeoGebra e do SketchUp no laboratório de informática é uma atividade para que os estudantes possam superarem as dificuldades de visualização desses sólidos no espaço. Podemos rever ou até mesmos refazer o esquema que utilizamos na determinação do volume da esfera e do segmento esférico onde o acompanhamento fica bem mais facilitado com a dinâmica da manipulação permitida por esses softwares. O estudante pode visualizar melhor os cortes feitos na esfera e na clépsidra. Nesse momento do estudo já podemos trabalhar com todos os sólidos vistos, criando uma dinâmica de construção e manipulação desses sólidos em 3D, nos mais variados aspectos. Será uma atividade revisora dos conceitos e características de todos esses sólidos estudados.

No Geometry 2.0 poderemos rever todos os cálculos feitos no curso e confirmar os resultados.

9.3.2 Atividade 26: Problema do peso da esferas maciças na caixa

Utilizando o esquema de resolução de problema proposto por Polya (1995), vamos resolver o seguinte problema apresentado em Schoenfeld (1985):

1. Um fabricante produz bolas maciças em dois tamanhos, mas dispõe de um único modelo de caixa para transportá-las. Felizmente, essa caixa acondiciona perfeitamente uma bola grande, ou 216 pequenas. Sabendo que, independentemente do tamanho, as bolas são feitas do mesmo material, qual a caixa que pesará mais?

   Solução:

   Compreensão

   Qual a incógnita? Qual das caixas pesará mais, a que contém as bolas pequenas ou a bola grande?

   Quais são os dados? Tem-se informação de que uma bola grande é acondicionada perfeitamente dentro de uma caixa; noutra caixa, do mesmo tamanho, cabem 216 bolas pequenas e todas as bolas são maciças e feitas do mesmo material.

   Adotando uma notação adequada, qual letra representará a incógnita e os dados? A para aresta das caixas, R para o raio da esfera maior e r para o raio das esferas menores.

   Plano

   Num desenho representativo do problema encontra-se mais facilmente a ligação entre os dados e a incógnita. Observa-se a distribuição das bolas pequenas no interior de uma das caixas e concluiu-se que:

   - $A = 2R = 2(6r)$;
   - a caixa grande pode ser dividida em 216 caixas pequenas, cada uma acondicionando perfeitamente uma bola pequena.

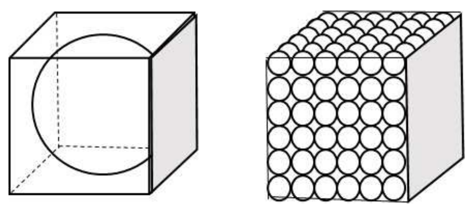


Figura 9.3: *Esferas maciças na caixa*

Percebe-se que existem pelo menos três maneiras distintas de solucioná-lo:

a) utilizando-se proporções (fazendo a comparação entre o volume das esferas e suas respectivas caixas);

b) calculando-se o volume das esferas grande e pequena (aplicando as fórmulas do cálculo do volume);

c) por semelhança (que veremos com mais detalhe no capítulo 10 e, que então, deixaremos para resolver dessa maneira nesse capítulo).

Execução

a) solução: utilizando proporções.

Imaginando-se cada bolinha inscrita em uma caixinha, nota-se que a caixa grande fica dividida em 216 caixinhas imaginárias do mesmo tamanho. Como a razão entre o volume da esfera (bola) grande e o volume da caixa cúbica é a mesma que a razão entre o volume da esfera pequena e o volume da caixinha cúbica imaginária, tem-se:

$$\frac{V_{esf.grande}}{V_{caixa \quad grande}} = \frac{V_{esf.pequena}}{V_{caixa \quad pequena}} = \frac{216}{216}\frac{V_{esf.pequena}}{V_{caixa \quad pequena}} = \frac{216V_{esf.pequena}}{V_{caixa \quad grande}}$$

portanto,

$$\frac{V_{esf.grande}}{V_{caixa \quad grande}} = \frac{216V_{esf.pequena}}{V_{caixa \quad grande}}$$

daí,

$$V_{esf.grande} = 216V_{esf.pequena}$$

Assim, conclui-se que, como todas a bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

b) solução: usando fórmulas.

Aplicando-se a fórmula do volume da esfera calcula-se o volume das esferas grande e pequenas, resultando que:

$$V_{esf.grande} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(6r)^3 = 216\frac{4}{3}\pi r^3 = 216V_{esf.pequena}$$

Como todas as bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

Revisão ou retrospecto

Pode-se verificar o resultado construindo bolas dos dois tamanhos, com material concreto, constatando com isso que a conclusão que se obteve é verdadeira. Podemos rever todas os argumentos e as manipulações algébricas feitas e verificar se houve algum erro.

Nesta etapa pode-se indagar se é possível utilizar o resultado, ou o método, para resolver algum outro problema análogo, quando se fazem alterações no enunciado do problema, como por exemplo, se as bolas fossem ocas de uma espessura x, qual caixa seria mais pesada?

Capítulo 10

Razão de semelhança

Semelhança de figuras é um assunto importantíssimo na Geometria Espacial. É uma das bases para conceituação de áreas e volumes e é consequência da proporcionalidade da área de uma figura e do volume do sólido com relação a cada uma de suas dimensões.

A noção de semelhança de figuras corresponde à ideia de mudança de escala, ou seja, ampliação ou redução onde alteramos o tamanho da figura mantendo suas proporções. É um assunto riquíssimo em aplicações e curiosidades no cotidiano. Pela razão de semelhança que temos, por exemplo, a perfeita harmonia das proporções encontradas em certos objetos quando comparados com suas réplicas em miniatura, na harmonia entre as dimensões e as áreas, volumes e, às vezes, nos preços de alguns produtos que compramos em diferentes embalagens (grande , média e pequena). Essa, aliás, é uma ótima aplicação dessa noção de semelhança. pois podemos verificar se o preço cobrado por um produto é realmente proporcional ao seu volume com relação a cada embalagem apresentada.

Semelhança é um conceito largamente aplicado pelas empresas na fabricação dos seus produtos, em várias situações: na apresentação estética, no aproveitamento de materiais e nas relações preço e volume das embalagens. Em todas essas aplicações necessitam, obviamente, do conhecimento matemático da razão de semelhança. É também uma noção base nos estudos com maquetes de prédios, de pontes, de navios e de outras obras da engenharia. Nesses estudos, precisam avaliar o desempenho da construção, criando situações, nas maquetes, que se refletirão proporcionalmente em sua representação em tamanho real. O sucesso nesses estudos de comportamento depende fortemente dos conhecimentos matemáticos de razão de semelhança.

Esses exemplos, aliás, são ótimas oportunidades de explorarmos as relações da razão de semelhança nos volumes dos sólido, em aplicações práticas. Várias aplicações do cotidiano e vários problemas exigem o conhecimento de proporcionalidade para sua suas corretas justificativas.

Figura 10.1: *Produtos semelhantes*

Por conta da não linearidade da razão de semelhança entre áreas e volumes dos sólidos (é, respectivamente, o quadrado e o cubo da razão de semelhança dos lados, como veremos), temos consequências que se mostram interessantes e curiosas em várias situações vivenciadas no cotidiano dos estudantes. Por exemplo, a possibilidade ou não da vida real de personagens de vários filmes de ficção: gigantes, dinossauros, monstros, máquinas e construções gigantescas. É também uma ótima oportunidade a ser explorada como aplicação desse conceito de semelhança no dia a dia.

Figura 10.2: *Miniatura e monstro em ficção*

Podemos propor várias situações e problemas nos quais esse conceito possa ser explorado envolvendo também vários outros conceitos matemáticos: porcentagens, proporções em ampliações ou reduções de figuras; conceitos de outras disciplinas, como em Física na relação peso-potência dos motores, quando alteramos, proporcionalmente, o tamanho de carro ou barco. Essa noção de semelhança pode ser explorada até mesmo na determinação da área da circunferência e no volume do círculo, pois dois círculos quaisquer, assim como dois quadrados, dois triângulos equiláteros etc, são sempre semelhantes. Enfim o conceito de semelhança é um assunto importantíssimo da Geometria.

10.1 Figuras semelhantes

Tem-se vários exemplos de objetos semelhantes: dois quadrados, duas circunferências, dois cubos, duas esferas etc (objetos matemáticos), miniaturas e maquetes, quando comparadas com suas respectivas representações em escala real. Enfim, temos semelhança sempre que encontramos dois objetos em que um seja uma ampliação ou redução de outro. Essa, aliás, é a ideia natural correspondente a noção de semelhança.

A definição de semelhança interpretada de Lima et al. (2010) é a seguinte:

Definição: Sejam as figuras F e F', do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $\theta : F \longrightarrow F'$, que associa a cada ponto F de uma um ponto F' da outra, tais que:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \theta(X)$, $Y' = \theta(Y)$ são seus correspondentes em F' então

$$\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}$$

A correspondência biunívoca $\theta : F \longrightarrow F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'. Se $X' = \theta(X)$, diz-se que os pontos X e X' são *homólogos*.

Tem-se que:

1. Toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $\theta : F \longrightarrow F'$ é uma semelhança de razão 1, chamada *isometria* e diz-se que F e F' são *congruentes*.

2. Se F é semelhante a F' de razão r então F' é semelhante a F com razão $\frac{1}{r}$ (inversa).

3. Se F é semelhante a F' com razão r e F' é semelhante a F'' com razão r' então F é semelhante a F'' com razão $r.\ r'$ (transitividade).

Descreve-se as propriedades de semelhança interpretadas de Lima (2006):

1. Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.

2. Uma semelhança $\theta : F \longrightarrow F'$, de razão r, transforma:

   a) Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.

   b) Um círculo de raio a contido em F num círculo de raio r.a contido em F'.

   c) Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.

   d) Pontos de contorno de F em pontos de contorno de F'.

   e) Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).

10.2 Homotetia

Um tipo de semelhança particular é homotetia, onde cada figura de um plano Π (ou de um espaço E) é transformada em outra que emana da primeira de acordo com a definição a seguir interpretada de Lima (2006).

Definição: Homotetia de centro O e razão r é a função $\theta : \Pi \longrightarrow \Pi$ (ou $\theta : E \longrightarrow E$) definida do seguinte modo:

1. $\theta(O) = O$

2. Para todo ponto $X \neq O$, $\theta(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX tal que:

$$\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}$$

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja a inversa é a homotetia de mesmo centro O e razão $\frac{1}{r}$.

Duas figuras F e F' chama-se *homotéticas* quando existe uma homotetia θ tal que $\theta(F) = F'$

Se $\theta : F \longrightarrow F'$ é uma semelhança que transforma o segmento AB, contido em F, no segmento $A'B'$, contido em F', estes segmentos se dizem *homólogos*.

Algumas propriedades de homotetia:

1. Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.

2. Toda paralela a um lado de um triângulo determina um triângulo parcial semelhante ao total.

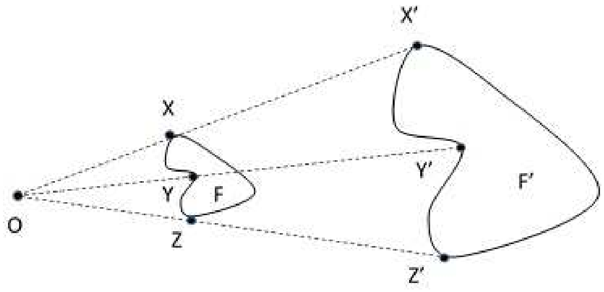


Figura 10.3: *Homotetia*

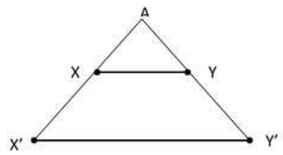


Figura 10.4: *Homotetia no triângulo parcial e total*

3. **(Semelhança de triângulos)** Dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais.

4. **(Semelhança no Círculo)** Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.

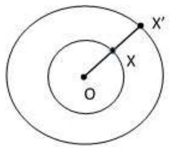


Figura 10.5: *Homotetia no círculo*

10.3 Razão de semelhança e área

Esse é o ponto objetivado nesse capítulo, do qual ressaltamos sua importância nos aspectos da aplicabilidade e curiosidades descritas no início deste capítulo. Juntamente com a relação da razão de semelhança e volume, que detalharemos mais adiante, podemos explorar essas relações.

A relação da razão de semelhança e área resulta imediatamente da fórmula da área do retângulo do qual se obteve a área de um polígono qualquer e deste se chegou a área de uma figura pela definição dada por aproximações da área de polígonos nela inscritos, seguindo os procedimento descrito capítulo 3. Portanto é suficiente obtermos a relação de semelhança e área de figuras semelhantes quaisquer a partir da área do retângulo.

Seja então o retângulo $B(x, y)$ de base x e altura y de área $A(B) = xy$. Se multiplicarmos a base e a altura do retângulo pelo mesmo número positivo r (razão de semelhança) teremos o retângulo semelhante $B'(rx, ry)$ cuja área $A(B') = r^2xy$, que fica multiplicado por r^2 (figura 10.6).

A razão entre as áreas de figuras semelhantes e o quadrado da razão de semelhança.

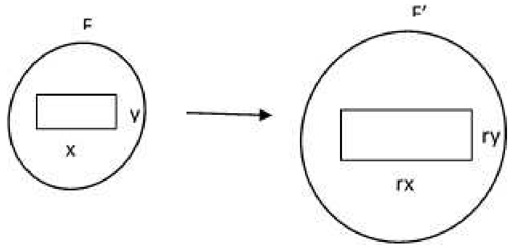


Figura 10.6: *Retângulos semelhantes*

10.4 Razão de semelhança e volume

O mesmo comentário acima é análogo na sua versão tridimensional para sólidos, onde a relação entre semelhança e volume também resulta imediatamente da fórmula para o volume do paralelepípedo (bloco retangular) do qual se obteve o volume de sólido qualquer pelo definição dada pela aproximação do volume do poliedro retangular nele contido, seguindo os procedimentos descritos no capítulo 3. Portanto é suficiente obtermos a relação de semelhança e volume de sólidos semelhantes quaisquer a partir do bloco retangular.

Seja P (x, y, z) um bloco retangular de dimensões x, y e z cujo volume é V(P) = xyz. Se multiplicarmos suas dimensões por um número positivo r (razão de semelhança) teremos o bloco retangular P'(rx, ry, rz) cujo Volume $V(P') = r^3$ xyz, que fica multiplicado por r^3 (figura 10.7).

A razão entre os volumes de sólidos semelhantes é o cubo da razão de semelhança.

Esse é um resultado muito importante no aspecto da aplicabilidade e curiosidades descritas no início deste capítulo. Juntamente com a relação da razão de semelhança e áreas, podemos explorá-la em várias situações do cotidiano. Daremos alguns exemplos

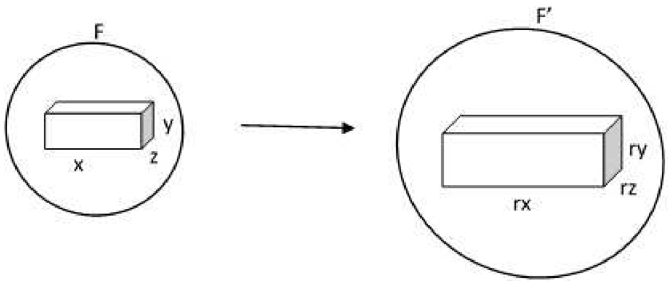


Figura 10.7: *Sólidos semelhantes*

dessa aplicabilidade.

10.5 Atividades para razão de semelhança

Para explorar essas relações da razão de semelhança com a áreas e volumes do objetos semelhantes podemos usar produtos fartamente encontrados no supermercado em que suas embalagens, às vezes de forma intencional dos fabricantes, apresentam uma semelhança. Podemos, então, verificar se essas relações entre semelhança e área e ou volumes do produtos se verificam. É uma ótima oportunidade para explorarmos as fórmulas para o cálculo de áreas e volumes das formas dos sólidos encontradas nesses produtos. Podemos comparar esses resultados, pelo menos para o caso do volume, uma vez que nas embalagens desses vem especificado o volume líquido do produto contido.

10.5.1 Atividade 27: Análise do volume nos copos de refrigerante

Um exercício prático, próprio para essa relação de semelhança:

1. Dois copos com refrigerante, cujas embalagens são sólidos semelhantes, indicam nos rótulos volumes líquidos de 700 ml no maior e de 300 ml no menor conforme a figura 10.8. Tomando alguma medida, em centímetros, em uma das embalagens e comprando com sua medida homóloga na outra, compare os volumes com a razão de semelhança entre as embalagens.

   Solução:

   Como os copos têm a forma de um tronco de cilindro, para o cálculo do volume temos a fórmula dada por:

Figura 10.8: *Copos semelhantes*

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Para o cálculo do volume do copo menor temos, $R = 3{,}5 \quad cm$, $r = 2{,}5 \quad cm$ e $h = 10{,}6 \quad cm$. Logo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(10{,}6)(3{,}14)}{3}[(3{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + 3{,}5 + 2{,}5] \\ &= 11{,}09(12{,}25 + 6{,}25 + 8{,}75) \\ &= 11{,}09(27{,}25) \\ &= 302{,}20 \quad cm^3 \\ &= 302{,}20 \quad ml \end{aligned} \tag{10.1}$$

Para o cálculo do volume do copo maior temos, $R = 4{,}2 \quad cm$, $r = 3 \quad cm$ e $h = 12{,}8 \quad cm$. Logo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{(12{,}8)(3{,}14)}{3}[(4{,}2)^2 + (3)^2 + 4{,}2 + 3] \\ &= 15{,}07(22{,}09 + 11{,}56 + 15{,}98) \\ &= 15{,}07(49{,}63) \\ &= 747{,}9 \quad cm^3 \\ &= 747{,}9 \quad ml \end{aligned} \tag{10.2}$$

Como a razão entre os volumes de sólidos semelhantes é o cubo da razão de semelhança, podemos fazer algumas comparações.

Razão de semelhança k, tomando as alturas:

$$k = \frac{14{,}4}{10{,}2} = 1{,}36$$

Cubo da razão de semelhança $r^3 = 2{,}51$

Volume do copo maior pela razão de semelhança, considerando o rótulo nas embalagens:

$$\begin{aligned} V_{maior} &= 2{,}51V_{menor} \\ &= 2{,}51(300) \\ &= 753 \quad ml \end{aligned}$$

Volume do copo maior pela razão de semelhança, considerando os cálculos geométricos:

$$\begin{aligned} V_{maior} &= 2{,}51V_{menor} \\ &= 2{,}51(302{,}2) \\ &= 758{,}5 \quad ml \end{aligned}$$

Temos uma diferença nos volumes que pode ser analisada nos seguintes aspectos:

a) A semelhança dos copos não obedece a razão de semelhança em todas as dimensões;

b) Por uma aproximação errada nas medições, considerando os copos realmente semelhantes;

c) O volume informado no rótulo considera somente o líquido, o qual não ocupa completamente o copo (que é o mais provável);

d) Por má fé da empresa, que é bastante comum nesses casos.

10.5.2 Atividade 28: Comparação entre volumes de recipientes semelhantes

Vários outros exemplos, como no modelo anterior, podem ser explorados das mais diversas maneiras, analisando os resultados como feito anteriormente, inclusive usando porcentagem nas relações entre os volumes encontrados nos produtos com as embalagens semelhantes. São atividades práticas onde o aluno desenvolve os conceitos matemáticos vistos sobre volume, áreas, porcentagens e outros, como a relação do preço do produto com a respectiva proporcionalidade nos volumes. Na análise dos resultados encontrados pode ser explorado o caráter crítico que leva em conta a honestidade das empresas, pois como vimos quase sempre tem uma diferença entre os volumes informados nas embalagens quando comprado com a real proporção da razão de semelhança.

Exemplos simples de comparação dos volumes dos produtos semelhantes encontrados nos supermercados, sem ter que necessariamente calculá-los, podem ser trabalhados, pois basta aplicar somente a relação de semelhança e volume em uma medida qualquer de suas dimensões homólogas. Veremos um exemplo desse procedimento.

1. Verificar quantas vezes o volume do recipiente maior comporta o volume dos recipientes menores, sabendo que são semelhantes e de diâmetros 20 cm, 12 cm e 9 cm, respectivamente (figura 10.9)?

   Solução:

   Razão de semelhança entre o maior e médio: $k = \dfrac{20}{12} = 1{,}66$

Figura 10.9: *Recipientes semelhantes*

Logo, a razão de semelhança entre os volumes do maior e do médio: $k^3 = (1{,}66)^3 \approx$ **4,57 vezes**

Razão de semelhança entre o maior e menor: $k = \dfrac{20}{9} = 2{,}22$

Logo, a razão de semelhança entre os volumes do maior e do menor: $k^3 = (2{,}22)^3 \approx$ **10,9 vezes**

Podemos, nesse caso, comprovar os resultados fazendo a transposição do líquido dos recipientes menores para o maior e verificar se de fato essas são as relações.

2. Na atividade 26, do peso da esfera maciça na caixa do capítulo 9, deixamos para que resolvêssemos a terceira opção de solução aqui nesse capítulo quando falássemos de razão de semelhança. Voltando então ao problema:

   Um fabricante produz bolas maciças em dois tamanhos, mas dispõe de um único modelo de caixa para transportá-las. Felizmente, essa caixa acondiciona perfeitamente uma bola grande, ou 216 pequenas. Sabendo que, independentemente do tamanho, as bolas são feitas do mesmo material, qual a caixa de bolas que pesará mais?

   Solução:

   Como as esferas são sempre semelhantes, e no desenho representativo do problema (figura 10.10) percebe-se que a relação entre os raios é $R = 6r$, temos então:

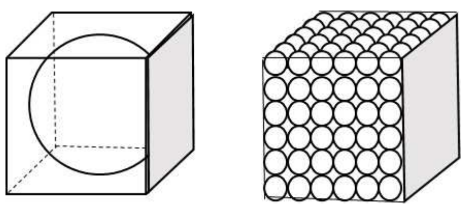


Figura 10.10: *Esferas maciças na caixa*

Razão de semelhança: $k = \dfrac{R}{r} = \dfrac{6r}{r} = 6$

Logo, a razão de semelhança entre os volumes: $k^3 = 6^3 = 216$

Daí,

$$V_{esf.grande} = 216.V_{esf.pequena}$$

Como todas a bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

10.5.3 Atividade 29: Relação peso-potência

Esse procedimento na atividade anterior é rico em aplicações do mesmo modelo e em análise de situações curiosas de semelhança. É um procedimento simples, pois não exige o cálculo de volume por fórmulas às vezes complicadas, pois basta que os objetos em análise sejam semelhantes e, então, obtendo medidas homólogas temos a razão de semelhança entre os objetos e, assim, poderemos obter a relação entre seus volumes ou obter o volume de um, conhecendo o do outro. Podemos também relacionar essa relação de semelhança a massa ou peso dos objetos semelhantes quando esses forem constituídos de mesmo material, pois a relação de densidade terá a mesma razão de semelhança do volume, enriquecendo mais ainda os exemplos de aplicação desse procedimento, pois poderemos, então, considerar a relação de peso e potência de motores de um veículo e assim avaliarmos o desempenho quando alteramos proporcionalmente essa relação. Enfim, são várias as situações onde esse procedimento pode ser aplicado.

Apresenta-se a seguir um exemplo dessa relação peso-potência.

1. Uma caminhonete com uma carroceria de 1,5 m de comprimento, tem um motor que desenvolve uma potência de 120 hp. Foram feitas modificações em sua estrutura aumentando sua carroceria proporcionalmente, ficando com 2 m. Desejando manter seu desempenho, qual será a potência de um novo motor?

   Solução: Razão de semelhança $k = \dfrac{2}{1{,}5} = 1{,}33$

   Assim, a razão de semelhança entre o peso $k^3 = (1{,}33)^3 = 2{,}35$

   Logo o novo motor terá que desenvolver um potência $p = 120.2{,}35 = 282hp$

Ou seja um aumento de 33% no tamanho da carroceria corresponde a um aumento 125% na potência do motor.

10.5.4 Atividade 30: Relação altura-peso

Um curioso exemplo desse procedimento é a relação de semelhança e massa também se aplicar a pessoa aproximadamente semelhantes como pai e filho. Obtém-se obtem resultados muito próximos do real.

1. Um pai que tenha o dobro da altura do filho (razão de semelhança $k = 2$) terá oito vezes o peso dele (cubo da razão de semelhança $k^3 = 8$). Ou num exemplo mais prático, se o pai tem uma altura de 1,8 m e pesa 70 kg, quanto será o peso do filho, em condições normais de crescimento, quando tiver 1,4 m?

   Solução:

   Razão de semelhança $k = \dfrac{1{,}4}{1{,}8} = 0{,}8$

   Assim, a razão de semelhança entre o peso $k^3 = (0{,}8)^3 \approx 0{,}51$

   Logo o peso do filho com 1,4 m de altura será $p = 70.(0{,}51) \approx 36kg$

10.5.5 Atividade 31: Realidade da ficção

Várias outras situações nesse modelo podem ser exploradas e que certamente despertará interesse dos alunos por serem situações curiosas e às vezes surpreendentes, como no exemplo a seguir.

1. Discutir a possibilidade da existência de gigantes nos filmes de ficção, como "King Kong"ou nos desenhos animados, como "João e o pé de feijão", considerando as proporções nas relações de semelhança e área e semelança e volume. Por exemplo, considerando um gigante com 15 metros de altura semelhante a uma pessoa de 1,8 m e de 70 kg.

   Discussão:

   Razão de semelhança entre as alturas $k = 8{,}33$

   Cubo da razão de semelhança $k^3 \approx 578$

   Logo, seu peso terá de ser $p = 578.70 \approx 40 \quad toneladas$

- Assim, se o gigante for constituído das mesmas substância de um ser humano, sua estrutura óssea não suportaria tal peso, pois a área da secção transversal do osso da perna aumentaria no quadrado da razão de semelhança $k^2 \approx 70$ (ou seja, sua estrutura óssea aumenta 70 vezes mais seu peso aumenta 578 vezes, o que fica totalmente desproporcional, contrariando a física da engenharia).
- Essa desproporção no aumento da área com o aumento do volume também se verificaria no que o gigante teria que comer para se manter vivo. Seu seu peso aumentou 578 vezes mas o seu estômago aumentou sua área em apenas 70 vezes, sendo, nessas proporções, impossível a absorção de comida necessária para mantê-lo vivo.
- Poderia existir um gigante com medidas dentro do razoável relacionado aos cálculos que foram feitos e as observações físicas que a sustentam. Por exemplo, um gigante semelhante aos seres humanos é razoável até 5m de altura. Para outras criaturas como elefantes e até mesmo dinossauros, seu peso é suportável por sua estrutura óssea por ter uma forma diferente do ser humano onde seu centro de massa e outras características físicas são proporcionalmente distribuídas ao longo de suas diferentes formas.

10.5.6 Atividade 32: O problema das luas

Um exemplo da aplicação da relação de semelhança e áreas no problemas das "luas"(Problema de Hippocrates), onde se a aplica o teorema de Pitágoras estendido para figuras semelhantes aplicando a relação de semelhança e áreas em figuras semelhantes sob lados de um triângulos retângulos.

1. Três semicircunferências foram construídas com diâmetro iguais aos lados de um triângulo retângulo dado, como na figura 10.11. Mostre que a soma das áreas das suas "luas"é igual a área do triângulo.

   Solução:

   a) Em primeiro lugar vamos estender o teorema de Pitágoras para figuras semelhante sob os lados de um triângulo retângulo. Dado o triângulo retângulo de lados a, b e c, onde são construídas figuras semelhantes conforme indicado na figura 10.12.

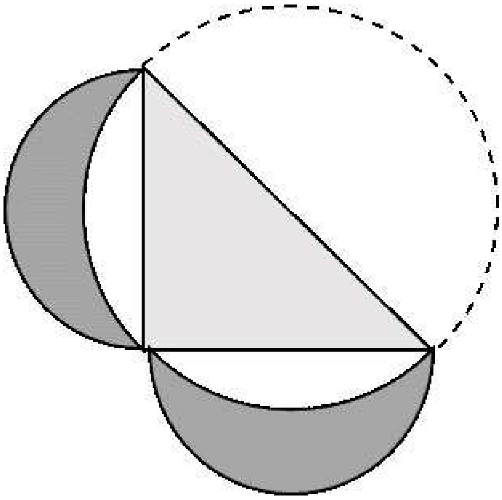


Figura 10.11: *Problemas das luas*

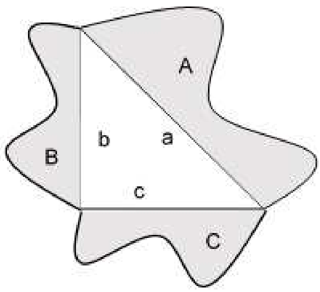


Figura 10.12: *Teorema de Pitágoras para semelhança*

Indicando A, B e C as figuras e suas respectivas áreas, temos então:

Como A, B e C são figuras semelhantes, da relação de semelhança e área temos que:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad e \quad \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

logo,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

assim,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$$

como, pelo teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$, temos: $A = B + C$

b) No esquema da figura 10.13, indicamos por A, B, C, X, Y e T as figuras e suas respectivas áreas.

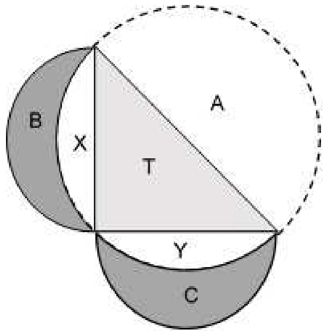


Figura 10.13: *Esquema do problema das luas*

Do teorema de Pitágoras para figuras semelhantes, temos:

$$A = (B + X) + (C + Y) \qquad (1)$$

Do arco capaz descrito pelo triângulo retângulo, onde a hipotenusa é diâmetro, onde A é, então, semicircunferência, temos:

$$A = T + X + Y \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$T = B + C$$

10.5.7 Atividade 33: Exercícios diversos

As atividades propostas nesse trabalho buscaram a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações concretas. São propostas de atividades que despertam o interesse e a intuição do aluno para a introdução de certos conceitos. Elas buscam motivar o aluno e consequente facilitar sua aprendizagem. Se tomadas seguindo um planejamento didático adequado onde os procedimentos de cada passo (objetivo, competências e habilidades que se pretende desenvolver, recursos didáticos, metodologia, conceitos envolvidos, preparo e avaliação) são claramente definidos, podem cumprir seu objetivo.

Vários exercícios podem ser propostos e no material do PROFMAT teve-se vários exercícios usando a relação de semelhança com áreas e volumes. Propõe-se os exercícios dos livros didáticos referidos nesse trabalho bem como os exercícios do material do

PROFMAT relacionados a esse tópico.

1. Conversão de unidades de volumes

   Exercícios básicos envolvendo transformações das unidades de volume são importantes para que o estudantes tenham noção das unidades de volume e saibam trabalhar com elas, pois em muitos problemas terão que converter os dados para as mesmas unidades.

   Apresentando uma tabela de conversão de unidades e aplicando-a em alguns exemplos é suficiente para que o aluno possa resolver os exercícios propostos:

   Tabela de conversão de unidades

Unidade	Símbolo	Equivalência
metro cúbico	m^3	$1 \quad m^3$
litro	l, L	$dm^3 = 10^{-3}m^3$

   Assim:

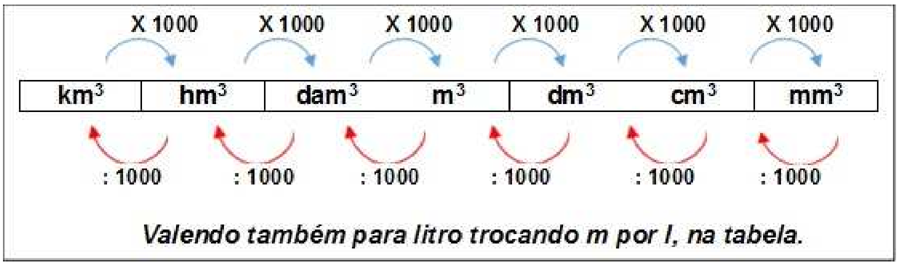


Figura 10.14: *Tabela de conversão de unidades*

Exercícios:

1. Expresse em litros:

   a) $70 \quad dm^3$

   b) $83{,}6 \quad dm^3$

   c) $5 \quad m^3$

   d) $2{,}8 \quad m^3$

   e) $3500 \quad cm^3$

2. Complete:

a) 8 $kl =$ ___ l

b) 2,5 $hl =$___ ml

c) 60000 $cl =$___ hl

d) 48 $cl =$ ___ dal

e) 3,5 $m^3 =$___ dam^3

f) 456 $mm^3 =$___ dm^3

Capítulo 11

Projeto tapa buraco

Na Escola Estadual Irmâ Diva Pimentel, na cidade de Barra do Garças-MT, teve-se a oportunidade de aplicar, na prática, o cálculo de volume num projeto "tapa buraco". Com a instalação dos condicionadores de ar que a escola recebeu do Governo do Estado, houve-se a necessidade da adaptação das salas de aula, pois todas tinham painéis decorativos de concreto vazados nas paredes (figura 11.1), que precisavam ser tapados. Alguns professores se prontificaram, então, a realizar essa operação com a seguinte dúvida: o quanto de material (área, cimento e tijolos) precisa ser comprado?

Figura 11.1: *Corredor da Escola IDP*

Fez-se as medições para o cálculo do volume a ser tapado em cada painel e, então, calculou-se a quantidade de material gasto para todas as salas.

Em cada painel, as figuras das bases internas e externas eram semelhantes mas com dimensões diferentes, formando portanto, um tronco de pirâmide em cada figura. Fez-se os cálculos das bases de cada painel de duas formas: uma mais direta, de forma mais intuitiva, e uma mais precisa, com um cálculo geométrico que foi descrito adiante.

11.1 Cálculo geométrico do volume dos painéis

Cada painel continha nove figuras com três formatos: um círculo, uma simetria de um segmento circular e uma na forma de gota, como na figura 11.2.

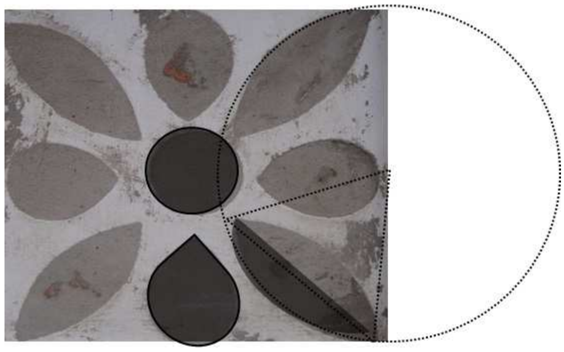


Figura 11.2: *Painel com esquema das figuras*

1. A figura na forma de círculo:

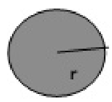


Figura 11.3: *O círculo*

Área do círculo é dado por:

$$\begin{aligned} A_{C(externa)} &= \pi r^2 \\ &= 3{,}14(0{,}05)^2 \\ &= 0{,}00785 \quad m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{C(interna)} &= \pi r^2 \\ &= 3{,}14(0{,}04)^2 \\ &= 0{,}00502 \quad m^2 \end{aligned}$$

2. A figura formada por uma simetria de um segmento circular:

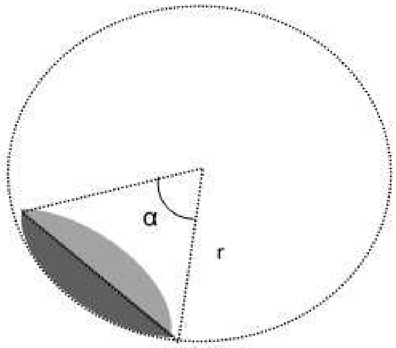


Figura 11.4: *O segmento circular*

Como a área do segmento circular é $\dfrac{(\alpha - sen\alpha)r^2}{2}$, logo a área dessa figura será:

$$\begin{aligned} A_{S(externa)} &= 2\frac{(\alpha - sen\alpha)r^2}{2} \\ &= (70^\circ - sen70^\circ)(0{,}19)^2 \\ &= (1{,}22 - 0{,}939)(0{,}0361) \\ &= 0{,}01014 \quad m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{S(externa)} &= 2\frac{(\alpha - sen\alpha)r^2}{2} \\ &= (50^\circ - sen50^\circ)(0{,}17)^2 \\ &= (0{,}8722 - 0{,}7657)(0{,}0289) \\ &= 0{,}003074 \quad m^2 \end{aligned}$$

3. A figura na forma de gota.

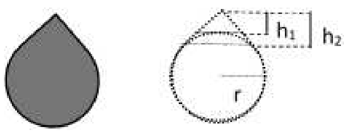


Figura 11.5: *A gota*

Como no cálculo geométrico da área dessa figura há a necessita da aplicação de conceitos de Integral e, para tanto, a função característica da parte em que ela forma o "bico", dificultando bastante o cálculo, procurou-se, num cálculo menos formal, compô-la da área de um de círculo e da média das áreas de dois triângulos isósceles, um com base tangente ao círculo (A_2) e outro com base secante ao círculo (A_3) A_1 - área de círculo:

$$\begin{aligned} A_{1(externa)} &= \pi r^2 \\ &= 3{,}14(0{,}046)^2 \\ &= 0{,}006644 \quad m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1(interna)} &= \pi r^2 \\ &= 3{,}14(0{,}037)^2 \\ &= 0{,}003213 \quad m^2 \end{aligned}$$

A_2 - área do triângulo com base tangente ao círculo:

$$\begin{aligned} A_{2(externa)} &= \frac{b_1 h_1}{2} \\ &= \frac{(0{,}076)(0{,}024)}{2} \\ &= 0{,}000912 \quad m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2(interna)} &= \frac{b_1 h_1}{2} \\ &= \frac{(0{,}057)(0{,}02)}{2} \\ &= 0{,}00057 \quad m^2 \end{aligned}$$

A_3 - área do triângulo com base secante ao círculo:

$$\begin{aligned} A_{3(externa)} &= \frac{b_2 h_2}{2} \\ &= \frac{(0{,}085)(0{,}042)}{2} \\ &= 0{,}001785 \quad m^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{3(interna)} &= \frac{b_2 h_2}{2} \\
&= \frac{(0{,}068)(0{,}03)}{2} \\
&= 0{,}0024 \quad m^2
\end{aligned}
$$

Foi considerado que, dessa forma, aproximou-se bastante da área real da figura. Assim, para a área dessa forma de gota, tem-se:

$$
\begin{aligned}
A_{G(externa)} &= A_1 + \frac{A_2 + A_3}{2} \\
&= 0{,}006644 = \frac{0{,}000912 + 0{,}001785}{2} \\
&= 0{,}0079925 \quad m^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{G(interna)} &= A_1 + \frac{A_2 + A_3}{2} \\
&= 0{,}003215 = \frac{0{,}00057 + 0{,}00204}{2} \\
&= 0{,}00452 \quad m^2
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a área da base de cada painel (A_B), composto de 1 círculo, 4 gotas e 4 segmento circular é dada por:

$$A_{B(externa)} = A_c + 4A_s + 4A_G = 0{,}08038 \quad m^2$$

$$A_{B(interna)} = A_c + 4A_s + 4A_G = 0{,}03538 \quad m^2$$

Como cada painel tem espessura 0,05 m, e cada buraco a ser preenchido tem a forma de um tronco de cone, tem-se o volume (V) para cada painel dado por:

$$
\begin{aligned}
V_{painel} &= \frac{h}{3}(\sqrt{A_{B(externa)}.A_{B(interna)}} + A_{B(externa)}.A_{B(interna)}) \\
&= \frac{0{,}05}{3}(\sqrt{(0{,}08038)(0{,}03538)} + 0{,}08038 + 0{,}03538) \\
&= \frac{0{,}05}{3}(0169090) \\
&= 0{,}00282 \quad m^3
\end{aligned}
$$

Como são 260 painéis, o volume total será:

$$V = (0{,}00282).260 = 0{,}7332 \quad m^3$$

11.2 Cálculo mais direto do volume dos painéis

Cada painel tem como formato da base um quadrado com uma decoração de figuras relativamente simétricas em relação as linhas centrais e em relação aos quadrantes que se dividem essas bases (figura 11.6).

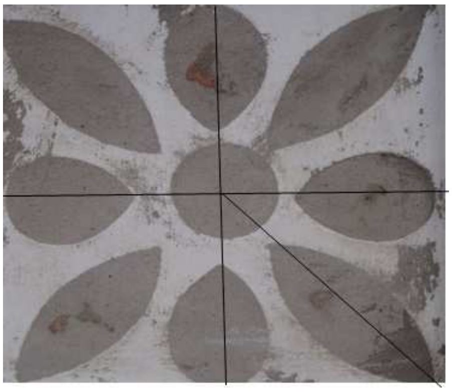


Figura 11.6: *Triangulação do painel*

Dividiu-se um quadrante em dois triângulos congruentes, ficando mais fácil perceber que a área a ser preenchida é aproximadamente igual a área da parte preenchida. Assim a área das figuras de cada painel será metade da área do painel.

Como o painel tem base quadrada, sua área será dado por:

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{l^2}{2} \\ &= \frac{(0{,}38)^2}{2} \\ &= 0{,}0722 \quad m^3 \end{aligned}$$

Assim, cada painel com espessura $h = 0{,}05 \quad m$, terá o volume a ser preenchido dado por:

$$\begin{aligned} V_{painel} &= A_B.h \\ &= 0{,}0722(0{,}05) \\ &= 0{,}00361 \quad m^3 \end{aligned}$$

Como são 260 painéis, o volume total:

$$V = (0{,}00361).260 = 0{,}9386 \quad m^3$$

Com o cálculo do volume pronto, o diretor fez a compra dos materiais: 1 m^3 de areia e 3 sacos de cimento.

Em dois dias conclui-se o projeto. Foi trabalhoso mas muito divertido e todos se dedicaram bastante. Foi proposto à professora de Artes uma participação nesse projeto envolvendo o seus educandos na pintura dos painéis com motivos da Copa do Mundo de 2014. Era uma proposta interdisciplinar, envolvendo: Matemática, no cálculo dos volumes dos paineis; Artes, na pintura dos paineis; Geografia, direcionando uma pesquisa sobre os aspectos geográficos, econômicos e socias dos países envolvidos na Copa. Não foi possível contar com Artes e consequentemente com Geografia, pois a coordenação da escola não permitiu a pintura dos paineis fora das cores padrões do Estado.

Professores envolvidos no projeto: Mauro, Arimathéia, Edlucio, Anicesar, Pedro, Renato, Jonas, Dianatan e Odair.

Figura 11.7: *Professores envolvidos no projeto*

Capítulo 12

Considerações finais

A proposta desse trabalho objetivou apresentar o cálculo de volume dos principais sólidos vistos no EM numa linguagem acessível, mas mantendo um certo rigor matemático e apresentando aplicações dos conceitos em situações problemas focadas no cotidiano. Foi uma tentativa de tornar esse tópico da Geometria Espacial mais interessante e motivador, facilitando o entendimento desse tema. Foram propostas atividades consideradas promotoras de uma aprendizagem significativa, com aplicações concretas ou em situações mais próximas possíveis vivenciadas pelo estudante.

Nos problemas propostos, ao resolvê-los, seguiu-se as etapas esquematizadas por Polya (1995), as quais facilitaram bastante a compreensão e a estratégia na execução do que foi planejado. Serviram de modelos para que os estudantes os adotem como uma ferramenta e uma metodologia de procedimentos em situações-problema semelhantes.

Foram destacados os pontos mais relevantes na determinação desses volumes. Seguiu-se a linha do que foi apresentado no Curso de Mestrado do PROFMAT, na qual partia sempre de resultados particulares para, então, estendê-los para resultados mais gerais. Foi assim quando definiu-se volume partindo do bloco retangular para os demais sólidos. Nesse caminho, o Princípio de Cavalieri foi determinante e facilitou bastante os argumentos, por sua linguagem intuitiva e de fácil acesso aos estudantes do EM, uma vez que reduziu o cálculo de volume ao cálculo de área. É um procedimento apropriado e recomendado para o EM, pois é, concomitantemente simples e forte matematicamente. Tentou-se vencer, de certa forma, a dificuldade desafiadora do ensino de Geometria que é levar o estudante a fazer a transição do plano (do cálculo de área) para o espaço (para o cálculo de volume). Entendeu-se que esse caminho desfruta de uma melhor segurança e aceitação no aprendizado no EM.

Quando buscou-se situações concretas ou virtuais (no laboratório de informática) oportunizou ao estudante a criação ou manipulação dos aspectos relativos aos conceitos trabalhados, o que foi considerado ser determinante na motivação e despertamento do interesse do aluno pelo tema.

Foi apresentado, nesse sentido, situações introdutórias dos conceitos, acreditando que essa manipulação facilita a compreensão dos conceituais que virão. Nas situações propostas para depois dos conceitos, acreditou-se que confirmarão e reforçarão o aprendizado do que foi tratado. Foram situações com fatos interessantes, curiosos e que colocam o estudante em posição de desafio tendo grande chance de fazê-lo querer aprender mais sobre o tema. Considerou-se que essa contextualização é um fator importantíssimo nesse aspecto da aprendizagem.

Foram propostas trinta e três atividades, distribuídas ao longo desse trabalho conforme cada tópico fora sendo abordado e do objetivo que se busca. São propostas de atividades que, quando tomadas seguindo um planejamento didático adequado onde os procedimentos de cada passo da atividade (objetivo, competências e habilidades que se pretende desenvolver, recursos didáticos, metodologia, conceitos envolvidos, preparo e avaliação) são claramente definidos, podem cumprir os seus objetivos.

Considerou-se que a metodologia trabalhada, segue o que orientam os PCN para o ensino de Geometria Espacial no EM e cumpre o que foi exigido no Curso de Mestrado do PROFMAT. Acredita-se ter um impacto na prática didática em sala de aula, uma vez que tenta dar mais firmeza e consistência matemática nos conceitos trabalhados nesse tema no EM.

Constitui-se numa busca de mudança na conduta didática de muitos professores do EM. Tentou-se tornar esse tópico da Geometria Espacial mais interessante, prazeroso e motivador, resultando em um aprendizado mais crítico.

Convém ressaltar, porém, que dinâmicas alternativas não nos obriga a desconsiderar o livro didático, mas tê-lo apenas como mais um dentre vários materiais instrutivos. É buscar valorizar mais a participação ativa do estudante e fugir um pouco do contexto daquela aprendizagem mecânica predominante na escola.

É mais uma ação na tentativa de diminuir a distância do que se ensina na escola com o que é vivido no dia a dia, afastando aquela aversão, tratada na introdução, do o estudante pela matemática e desfazendo a ideia que alguns têm de que a matemática é difícil e para poucos. O que não é verdade, quando adotamos uma metodologia adequada para cada fase de ensino.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

[2] AZEVEDO, E. Q de. **Ensino-aprendizagem das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas**. Rio Claro, SP: Dissertação de Mestrado, 2002.

[3] BRASIL, MEC, SEB. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Orientações**. volume 2, 135 p. Brasília MEC, SEB (1999), disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf` (Acessado em: 12 de maio de 2014).

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Ática, 3.ed. ,2007.IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. Matemática: Ciência e Aplicações. Volumes 1,2 e 3. São Paulo: Atual Editora,2. ed.,2004.

[5] FOSSA, Jhon A. **Ensaios sobre a educação matemática** / Jhon A. Fossa. - 2. Ed. - São Paulo: editora da Física, 2011.

[6] LIMA, Elon Lajes. **Medida e forma em geometria** / Elon Lages Lima. 4.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] LIMA, Elon Lajes. **A matemática do ensino médio** - volume 2 / Elon Lages Lima, Pulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 6. Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] LIMA, Elon Lajes. **A matemática do ensino médio** - volume 4 / Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 6. Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] LIMA, Elon Lajes. **Temas e problemas** / Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[10] LIMA, Elon Lajes, P. C. Carvalho, A. Morgado, E. Wagner, **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 3. SBM.

[11] MACHADO, Antônio dos Santos, **Matemática, Temas e Metas: Áreas e Volumes**, vol. 4, São Paulo, Atual Editora, 1998.

[12] MOREIRA, Marco A. **Aprendizagem significativa**. Editora da UnB. 129 p, 1999.

[13] NILSON, José Machado. **Os poliedros de Platão e os cinco dedos da mão**. Ed. Scipione, 1989.

[14] PEREIRA, W. C. de A. **Resolução de Problemas Criativos - Ativação da Capacidade de Pensar.** Brasília, EMBRAPA-DID, 1980.

[15] POLYA, George **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[16] **RIVED- Rede Internacional Virtual de Educação**. Disponível em: `http://rived.mec.gov.br/` (Acessado em 01 de outubro de 2012).

[17] SCHOENFELD, Alan. **Mathematical Problem Solving**. New York: Academic Press, 1985.

[18] SILVA, Claúdio Xavier da. **Matemática aula por aula** / Claudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho. - 2. ed. renov. - São Paulo: FTD, 2005.

[19] SILVEIRA, Darcy Chaves. **Aritmética e introdução à Álgebra: 1463 problemas resolvidos e explicados: ensino fundamental, ensino médio, vestibular e concurso** / Darcy Silveira, Maria Sueli Gomes Saldanha, Laura de O. Ramalho Misiti, - 1. Ed. - São Paulo: ícone, 2012.

[20] **SOFTWARE GEOGEBRA 5.0 JOGL1 BETA VERSÃO EXPERIMENTAL**, Porto, 2007. Disponível em: `http://www.geogebr.org` (Acessado em 15 de maio de 2014).

[21] **SOFTWARE GEOMETRY 2.0**. Disponível em: http://www.somatematica.com.br (Acessado em 12 de agosto de 2012).

[22] **SOFTWARE SKETCHUP**. Disponível em: http://www.sketchup.com/pt-BR/ (Acessado em 15 de maio de 2014).

[23] SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática** / Joamir Roberto de Souza. - 1. Ed. - São Paulo: FTD, 2010 - (Coleção novo olhar; v. 3).

[24] **TELECURSO AULA 67 - PROBLEMAS E VOLUMES**. Disponível em: http://www.telecurso2000.org.br/matematica-ens-m/. Acessado em 10 de junho de 2014.

Apêndice A

Planificação de poliedros

A.1 Dodecaedro não regular

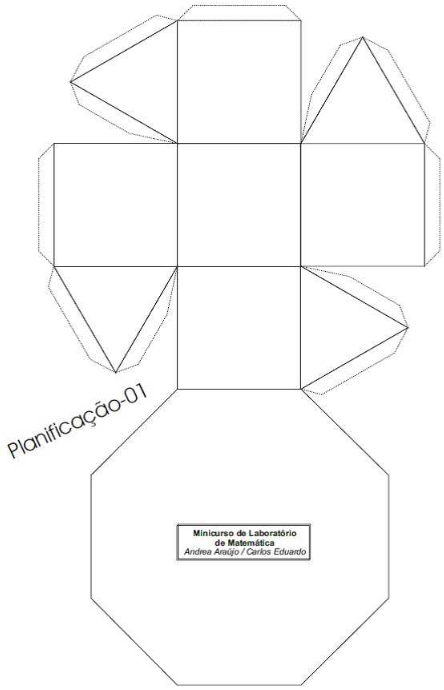


Figura A.1: *Dodecaedro não regular*

A.2 Octaedro regular

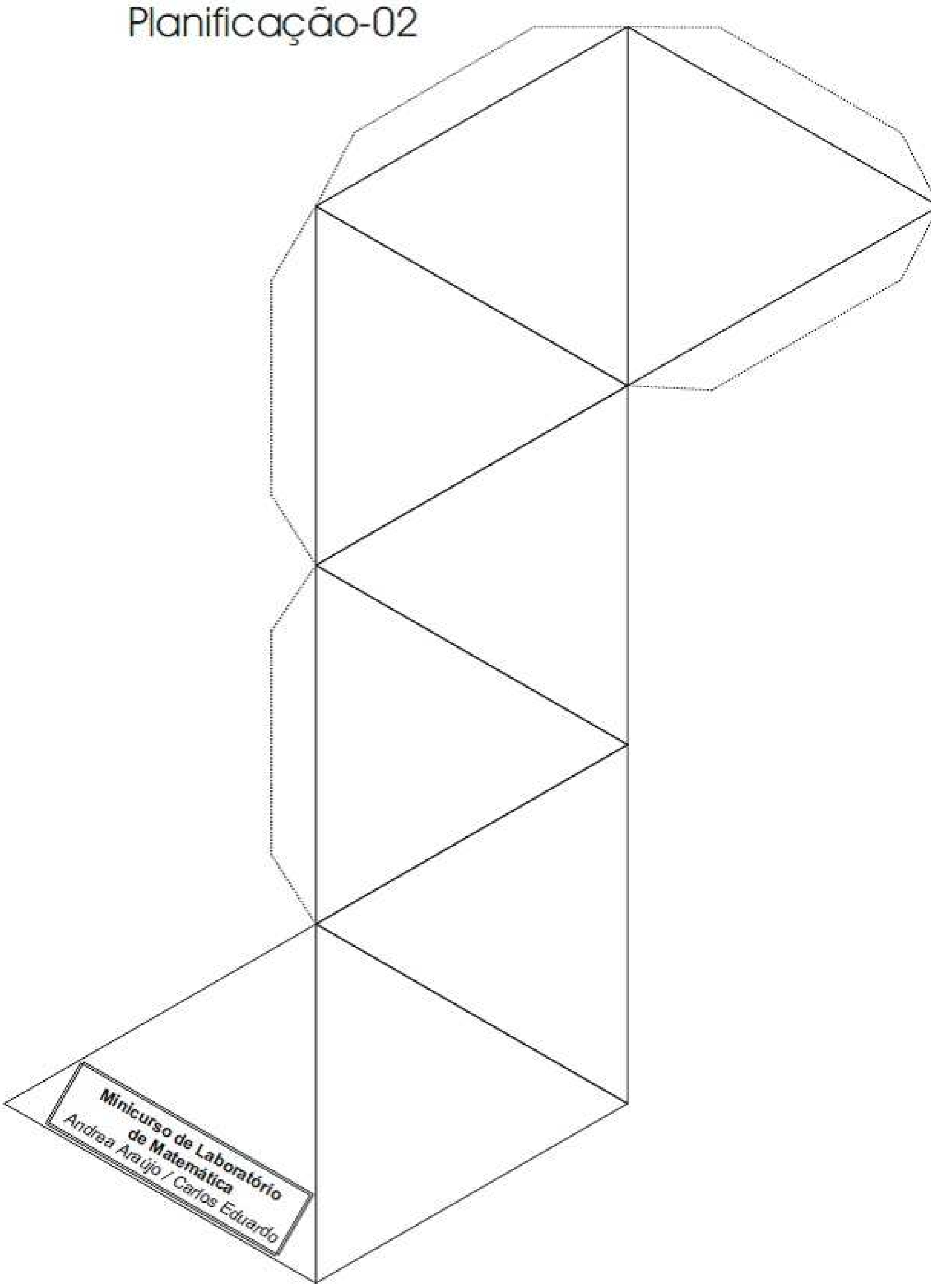


Figura A.2: *Octaedro regular*

A.3 Paralelepípedo reto

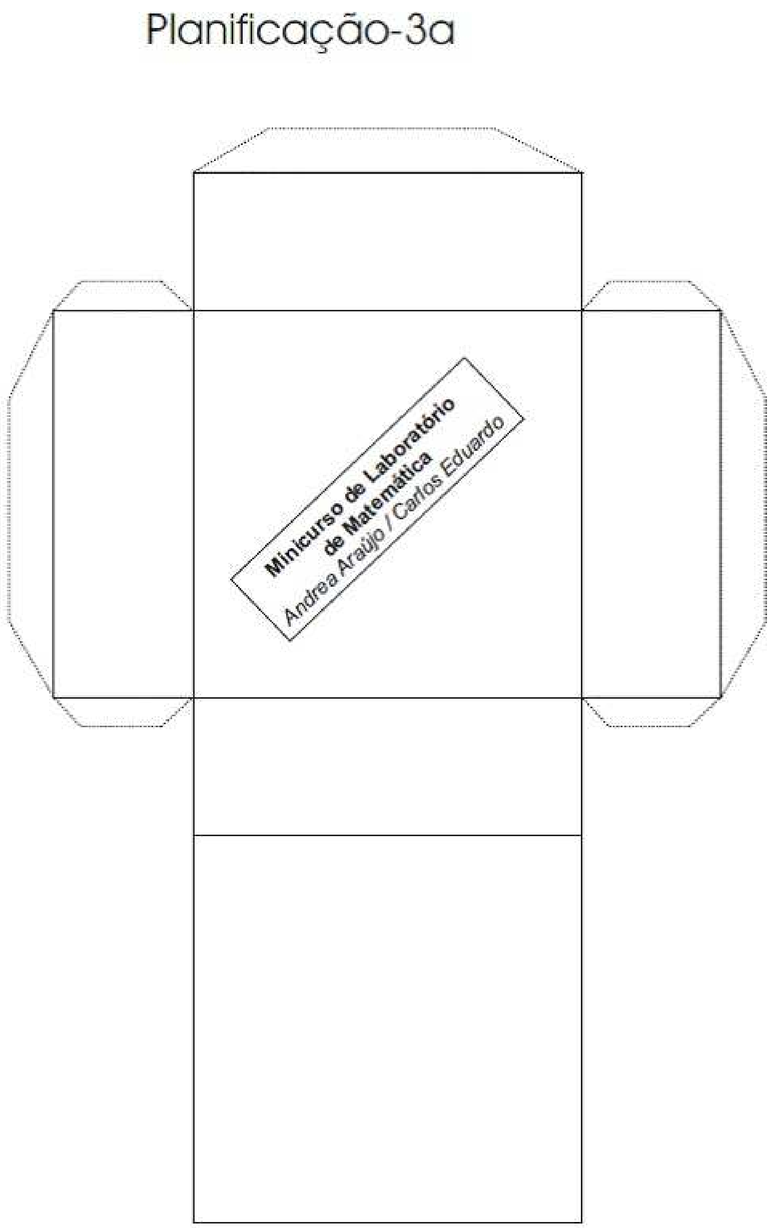


Figura A.3: *Paralelepípedo reto*

A.4 Um sólido vasado

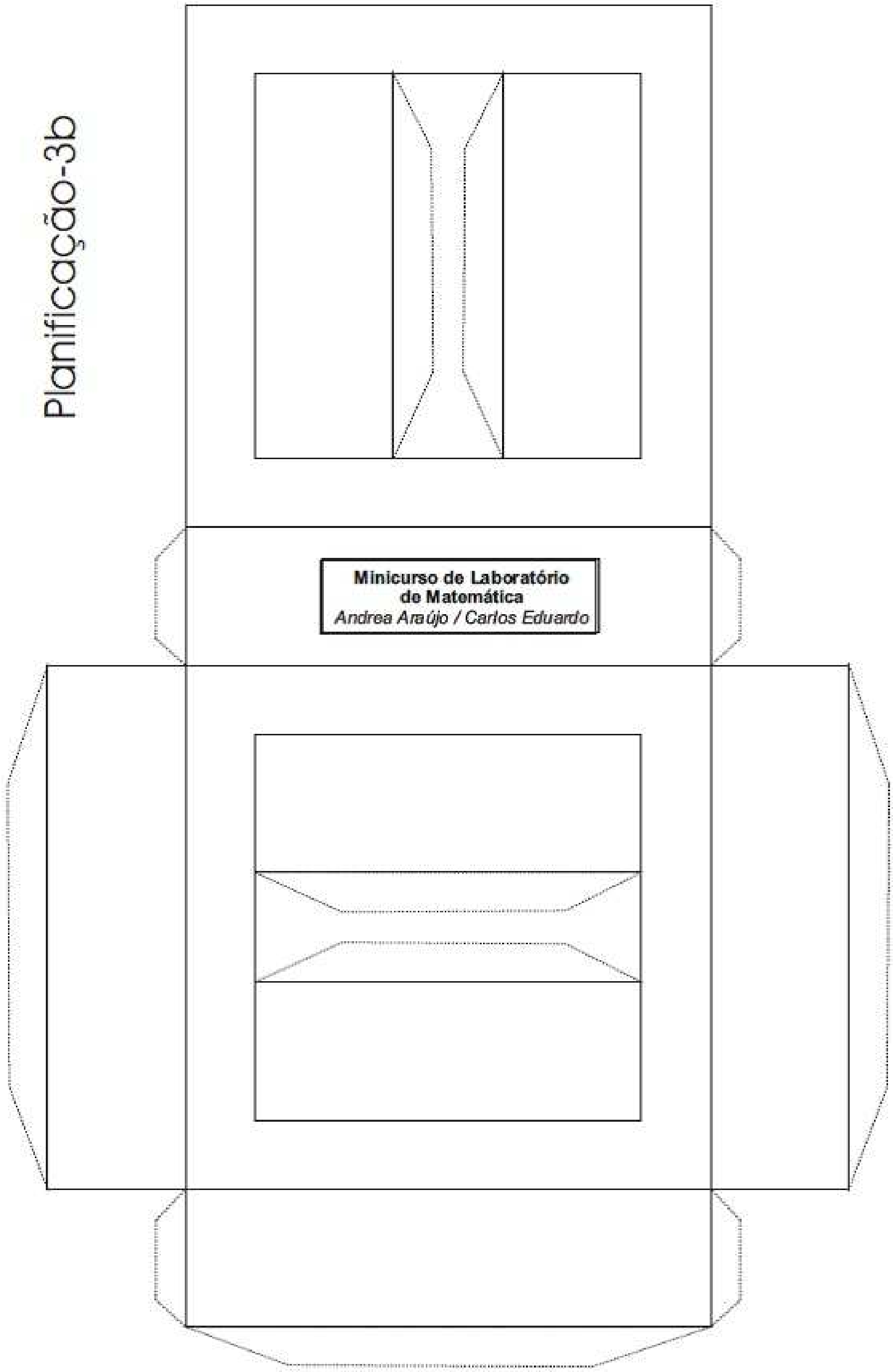


Figura A.4: *Um sólido vasado*

A.5 Paralelepípedo oblíquo

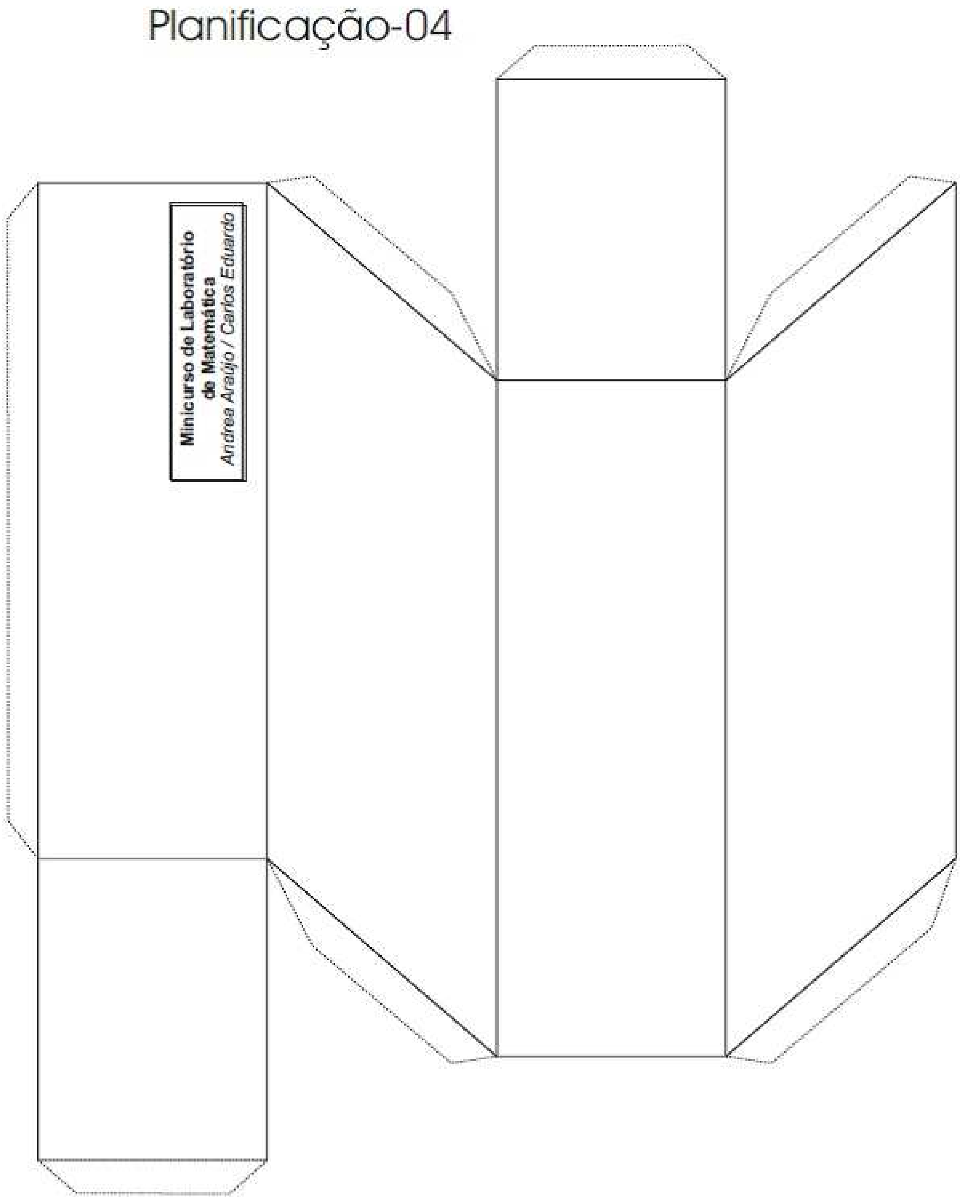


Figura A.5: *Paralelepípedo oblíquo*

A.6 Pentaedro

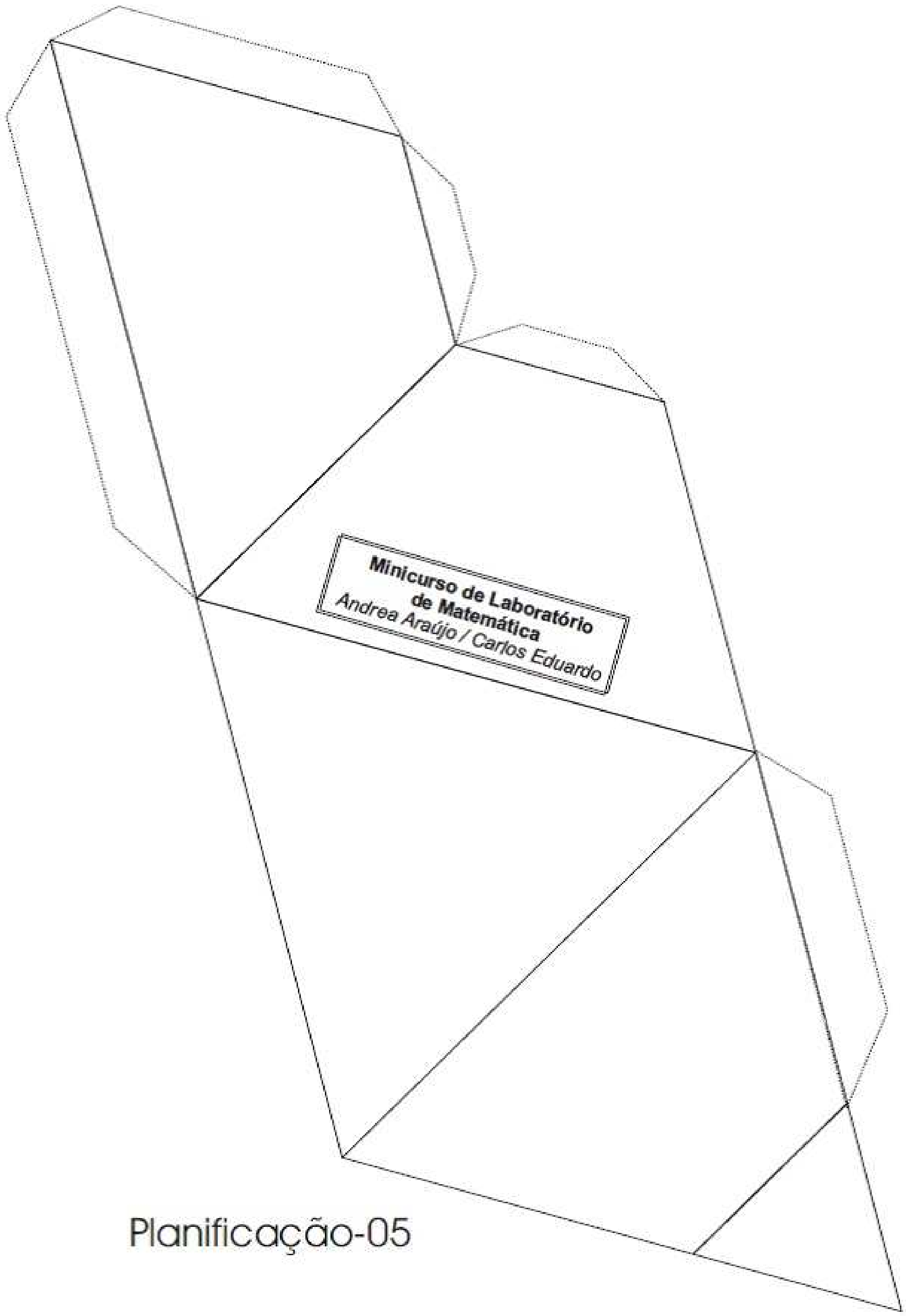


Figura A.6: *Pentaedro*

A.7 Hexaedro não regular

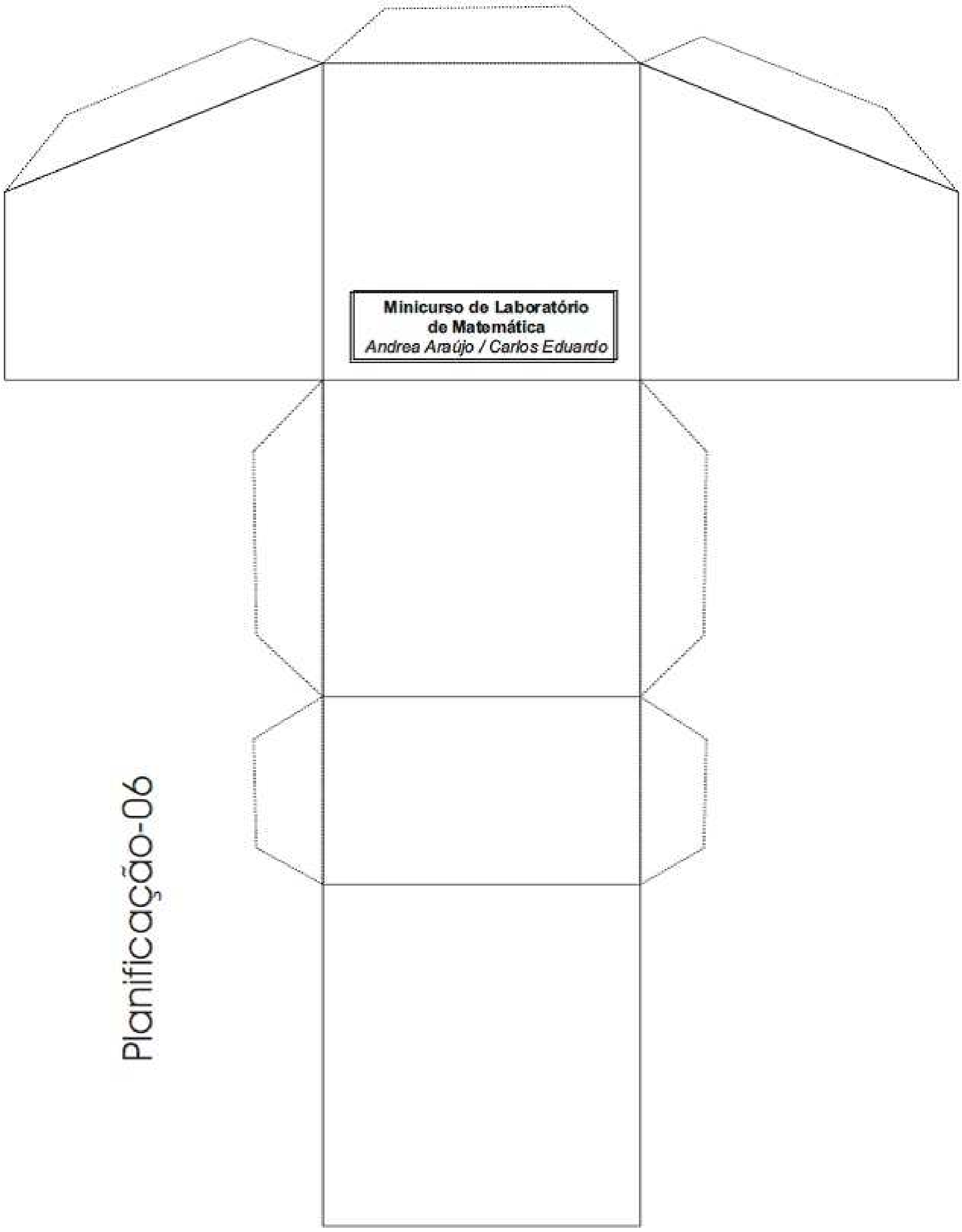


Figura A.7: *Hexaedro não regular*

A.8 Tetraedro regular

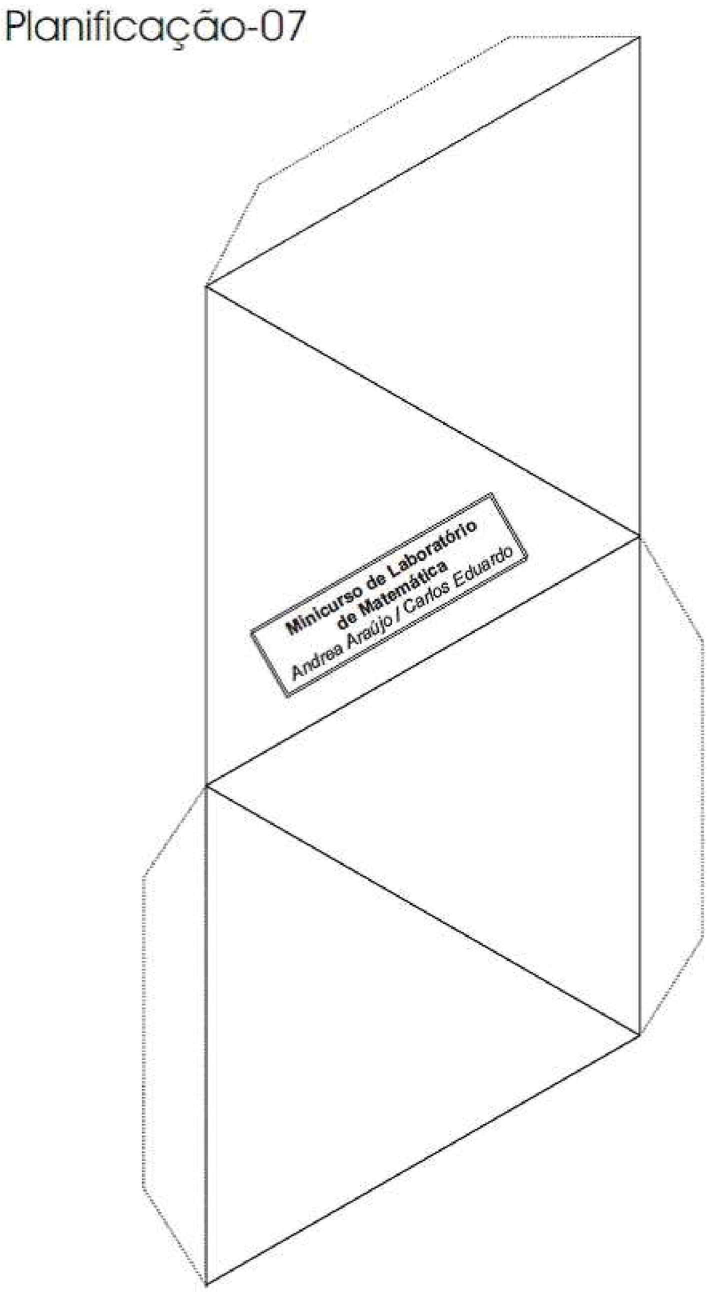


Figura A.8: *Tetraedro regular*

A.9 Cubo

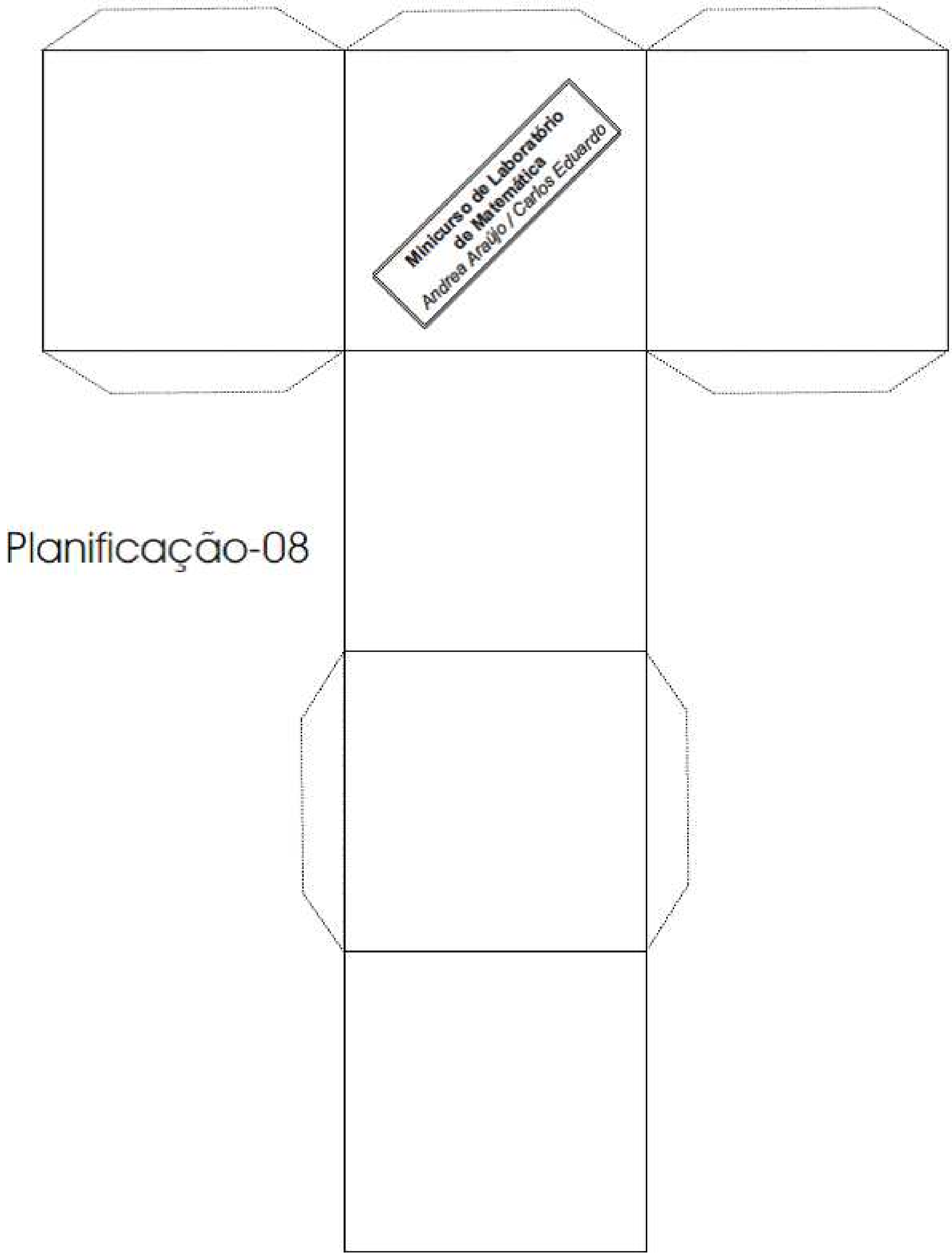


Figura A.9: *Cubo*

A.10 Dodecaedro regular

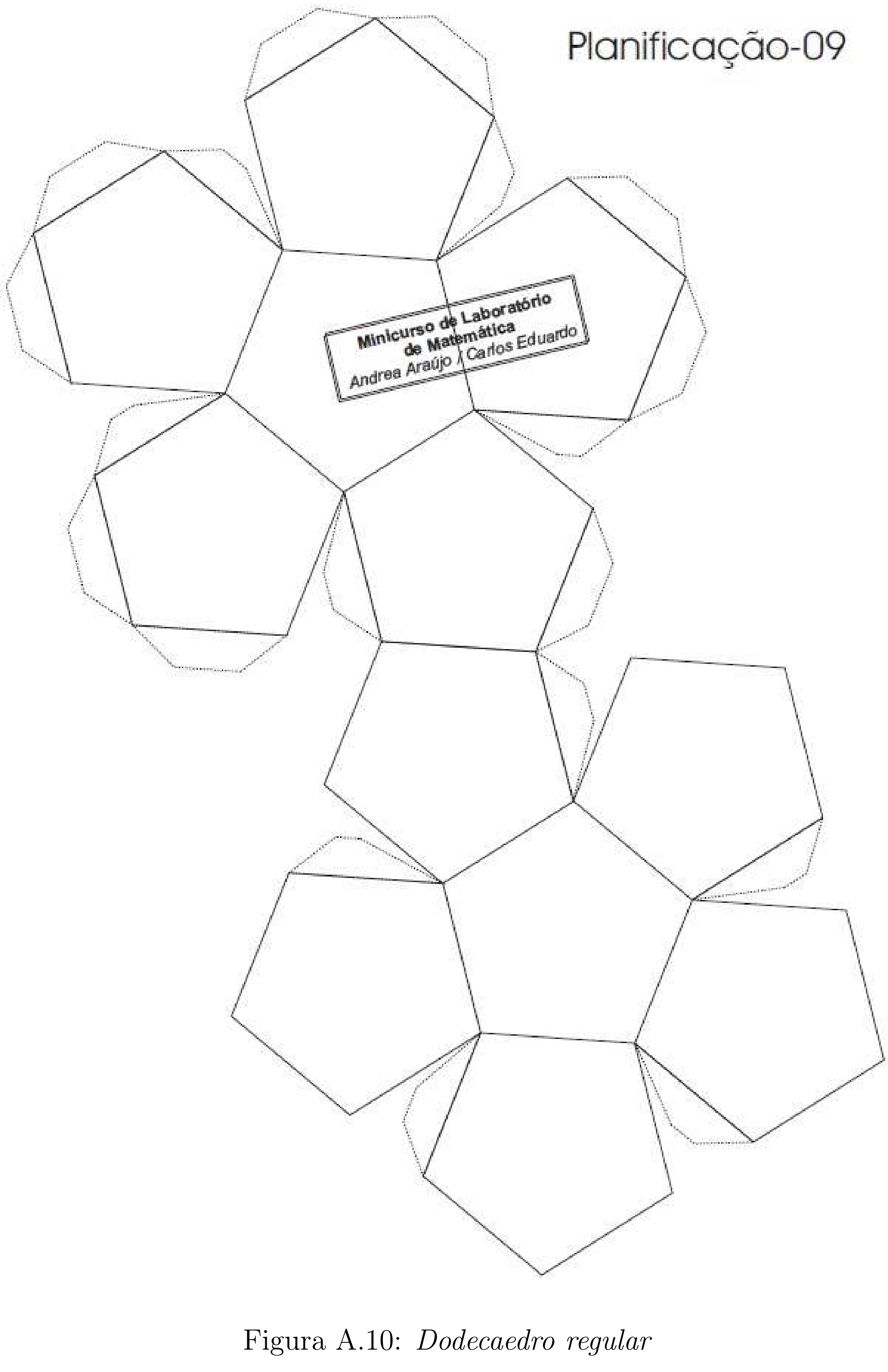


Figura A.10: *Dodecaedro regular*

A.11 Icosaedro regular

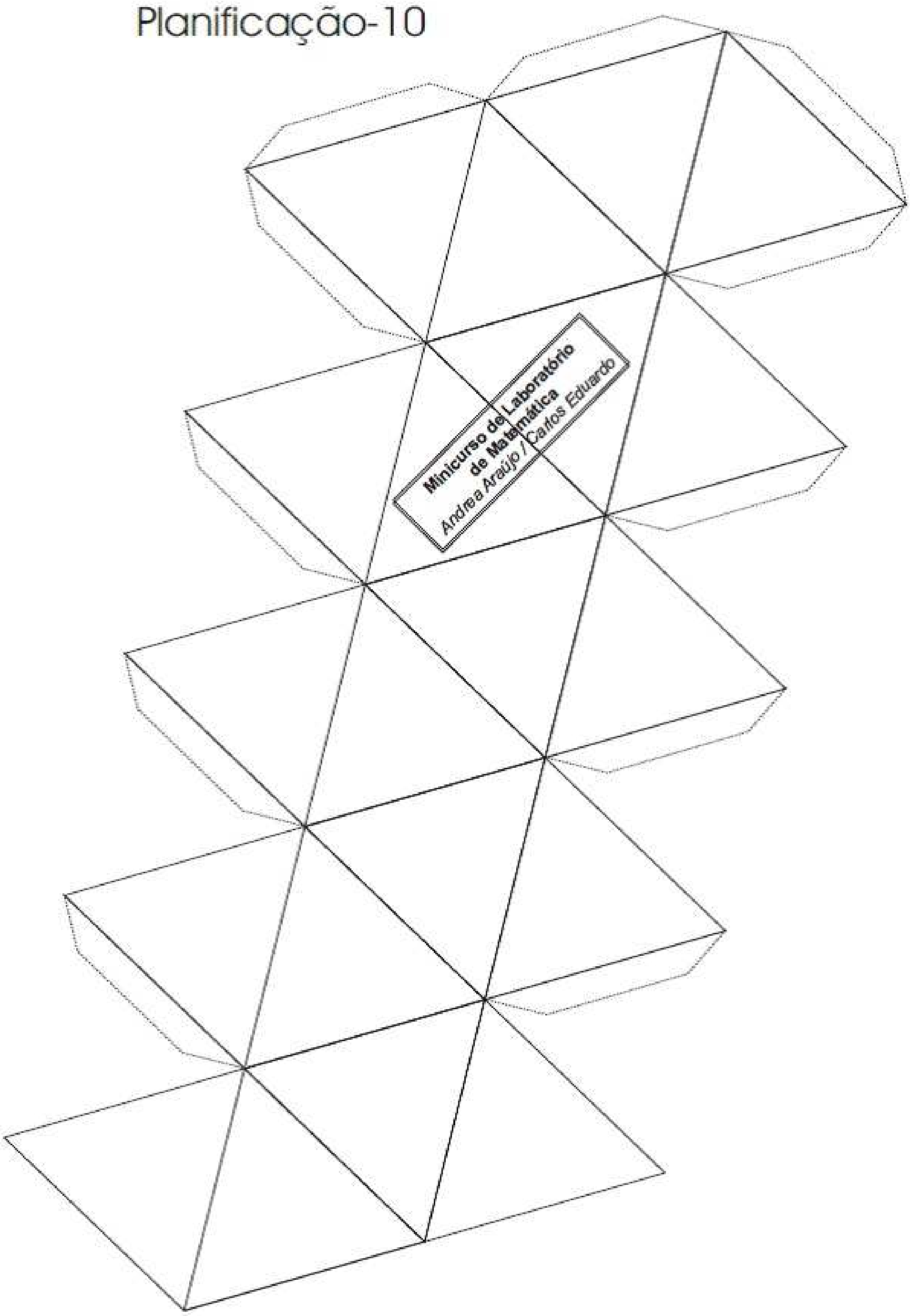


Figura A.11: *Icosaedro regular*

A.12 Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 1 e 2

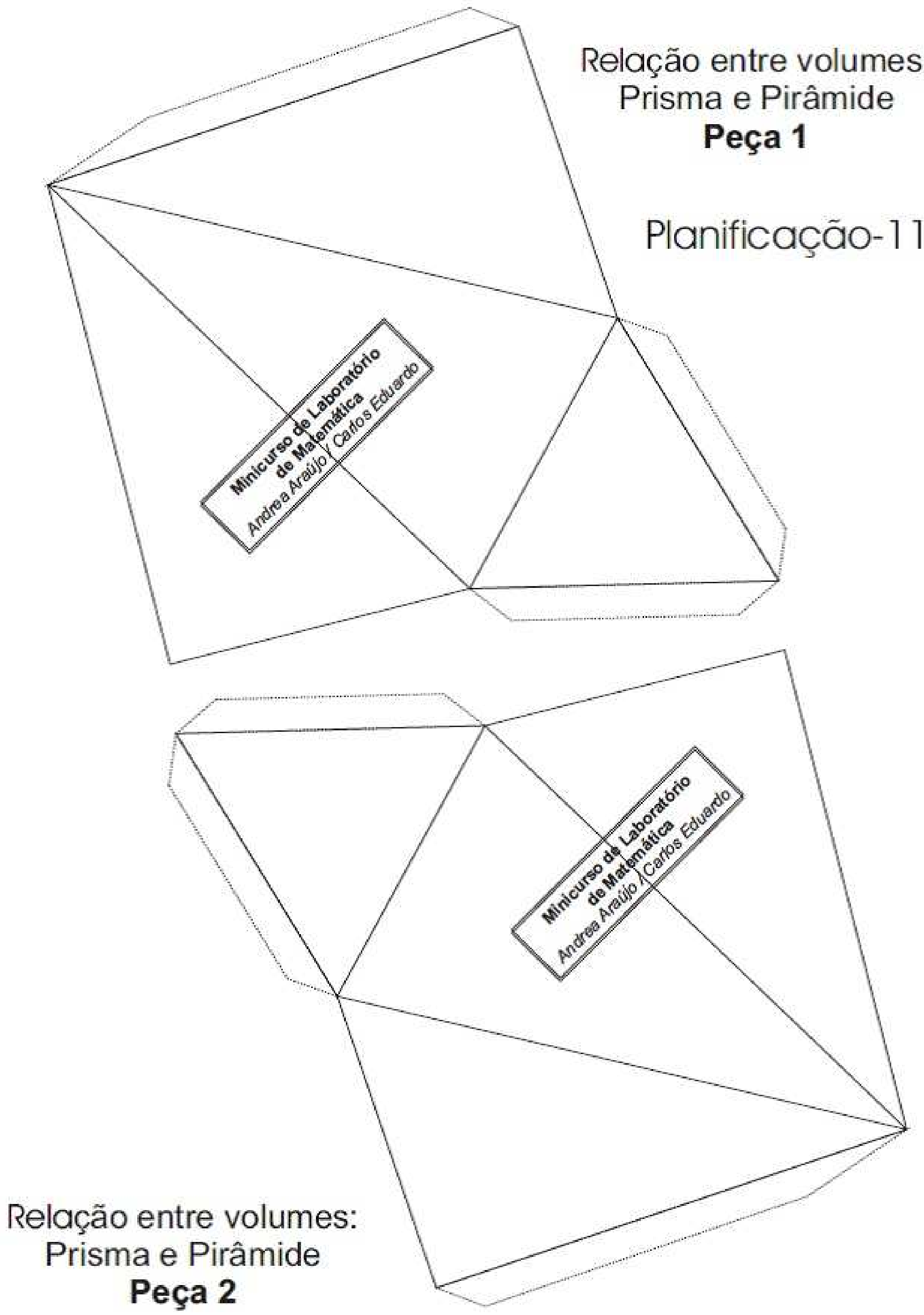


Figura A.12: *Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 1 e 2*

A.13 Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 3

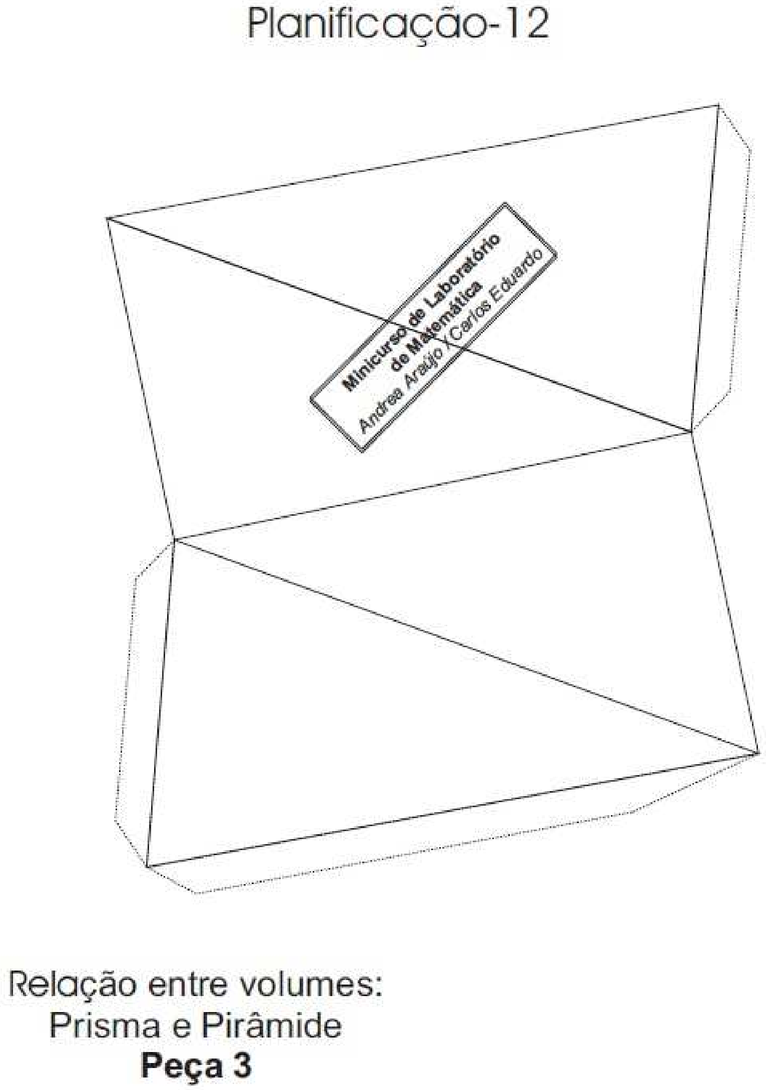


Figura A.13: *Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 3*

A.14 Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 4

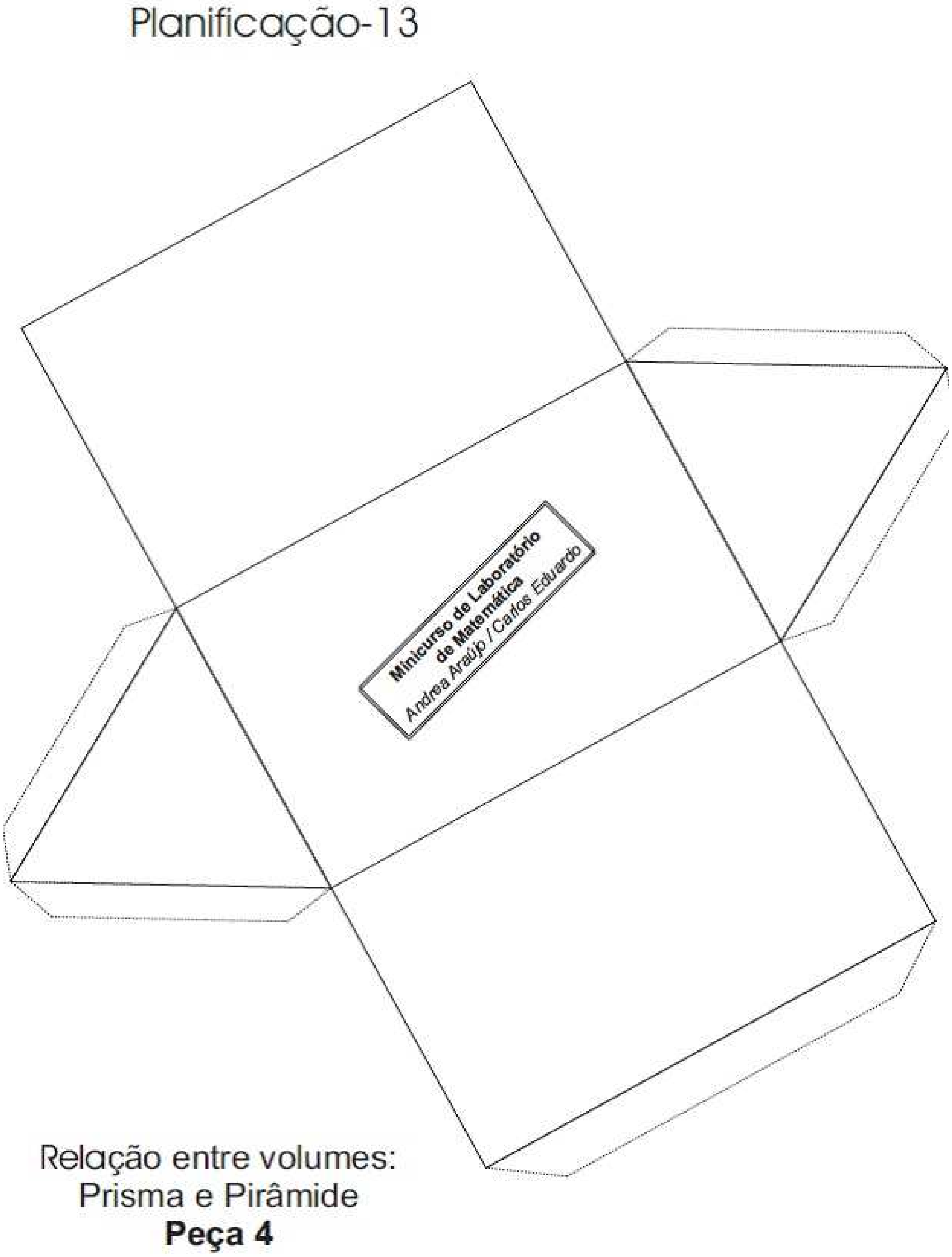


Figura A.14: *Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 4*

A.15 Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 5

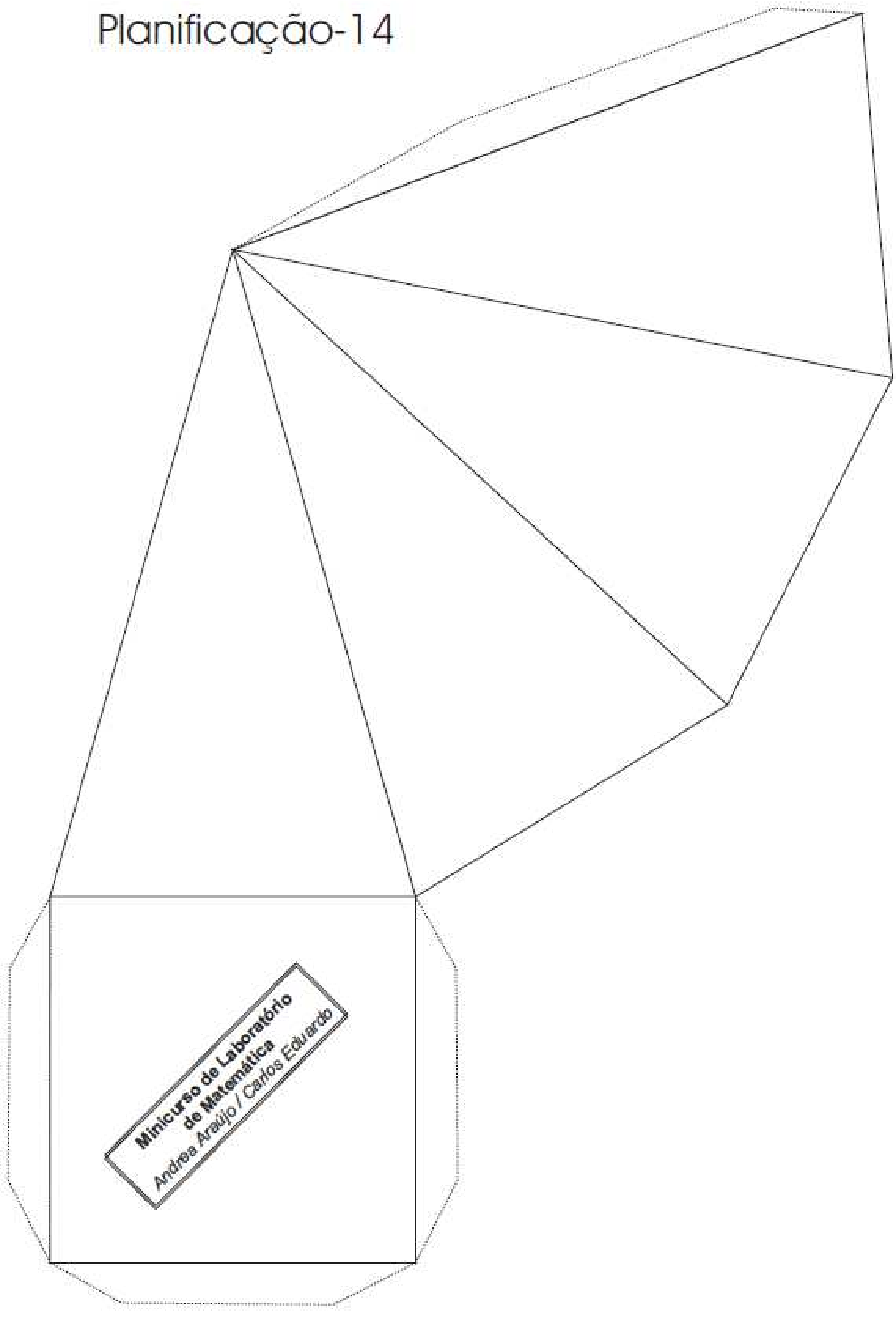


Figura A.15: *Relação entre volumes: prisma e pirâmide: peça 5*

A.16 Cilindro

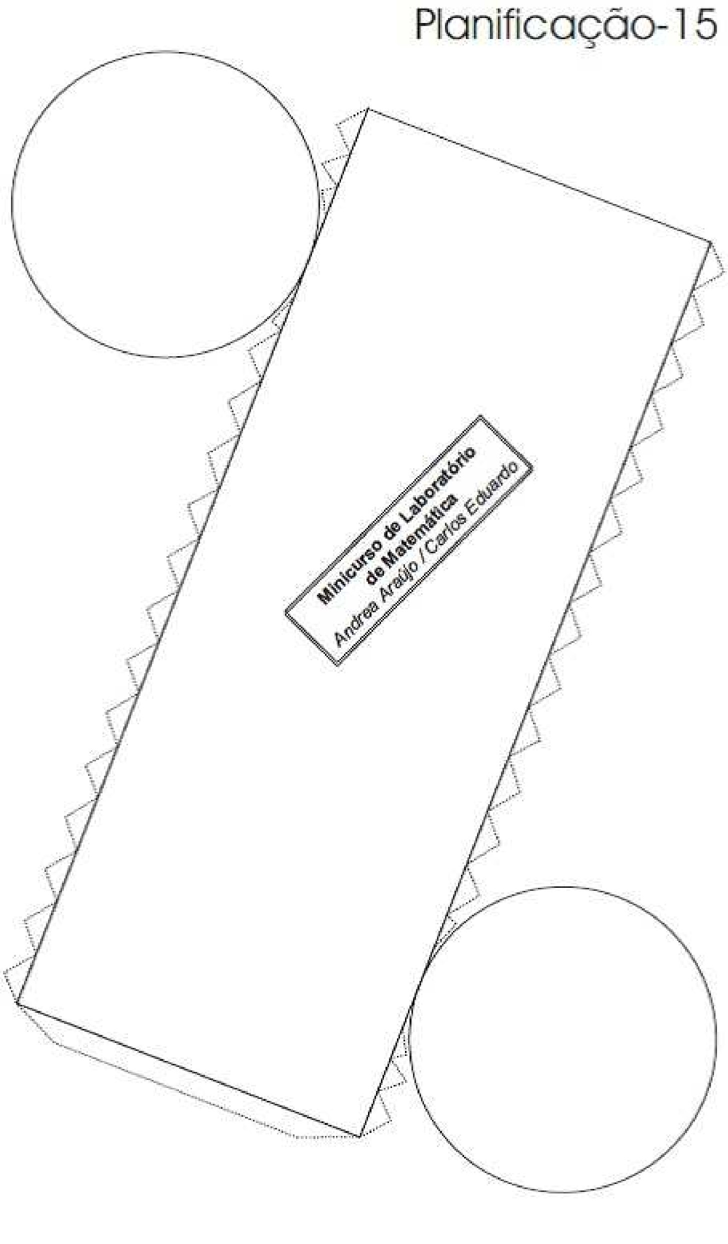


Figura A.16: *Cilindro*