



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Ciências Exatas e da Terra  
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT

**Agamenon Henrique de Carvalho Tavares.**

**Usando a história da resolução de alguns problemas  
para introduzir conceitos: Sistemas Lineares,  
Determinantes e Matrizes.**

Natal/RN, fevereiro de 2013.

Agamenon Henrique de Carvalho Tavares

**Usando a história da resolução de alguns problemas  
para introduzir conceitos: Sistemas Lineares,  
Determinantes e Matrizes.**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof<sup>o</sup>. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Natal/RN, fevereiro de 2013.

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial  
Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET.

Tavares, Agamenon Henrique de Carvalho.

Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: sistemas lineares, determinantes e matrizes / Agamenon Henrique de Carvalho Tavares. - Natal, 2013.

73 f. il.:

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Sistemas lineares - Dissertação. 2. Determinantes - Dissertação. 3. Matrizes - Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 517.956

Agamenon Henrique de Carvalho Tavares.

# Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes.

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 22 / 02 / 2013

## Banca Examinadora:

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. André Gustavo Campos Pereira  
Departamento de Matemática - UFRN  
Orientador.

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. Fagner Lemos de Santana  
Departamento de Matemática - UFRN  
Examinador Interno

---

Prof<sup>o</sup>. Dr. José de Arimatéia Fernandes  
Departamento de Matemática e Estatística - UFCG  
Examinador Externo

# Dedicatória

Dedico esta dissertação aos que acreditam em Educação, Matemática e Vida.

# Agradecimentos

Ao Professor André Gustavo Campos Pereira pelos ensinamentos e orientações acadêmicas desde as disciplinas ministradas até a orientação segura, firme e cuidadosa da dissertação do Mestrado. À Professora Viviane Simioli Medeiros Campos sempre solícita e pronta a resolver quaisquer dos nossos problemas. À minha família, base sólida da minha existência, incentivadores incondicionais das minhas ações acadêmicas e profissionais. Em especial à minha mãe e exemplo Eunice; meu pai Agamenon; minha tia Maria Antônia de Oliveira; minhas irmãs Joilma e Maria Antônia, seus maridos, bons amigos Vando e Valdomiro; aos tesouros da minha vida, minhas filhas Manuella, Marianna, Milena, Marcella e minha sobrinha Lívia; à minha companheira de lutas, minha esposa Aline, amável, atenciosa e paciente. Aos meus queridos amigos, sempre apoiando o meu trabalho, Valdemberg Pessoa, Sérgio Trindade, Severino Carlos, Ronald Fred, Sheyla Patrícia (cuja revisão foi essencial), Karla Angélica, Pablo Capistrano, Pauleany Simões, Adriano Costa, Bruno Sielly, Francisco Júnior, Pedro Ivo e Marcus Vinícius. Aos colegas de Profmat, em especial Nilson Nicácio, Abraão Azevedo e Luciano Nóbrega. A todos os professores do Profmat na UFRN, guias corretos nos caminhos acadêmicos.

”A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

Bertrand Russell

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o método apresentado no livro "Os nove capítulos sobre a arte matemática", escrito no século I da era cristã, a fim de revelar como a história pode ser uma motivadora na introdução de tópicos da matemática do ensino médio. Através de observações dos padrões que se repetem no método apresentado, fomos capazes de introduzir, de maneira natural, o conceito de equações lineares, sistema de equações lineares, solução de sistemas de equações lineares, determinantes e matrizes, além do desenvolvimento de Laplace para cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que 3, considerando, em seguida, algumas de suas aplicações gerais.

**Palavras-chave:** Sistemas Lineares. Determinantes. Matrizes.



# Abstract

In this work we studied the method to solving linear equations system, presented in the book titled "The nine chapters on the mathematical art", which was written in the first century of this era. This work has the intent of showing how the mathematics history can be used to motivate the introduction of some topics in high school. Through observations of patterns which repeats itself in the presented method, we were able to introduce, in a very natural way, the concept of linear equations, linear equations system, solution of linear equations, determinants and matrices, besides the Laplacian development for determinants calculations of square matrices of order bigger than 3, then considering some of their general applications.

**Keywords:** Linear Systems. Determinants. Matrices.

# Sumário

Introdução	1
Capítulo I. O Método Chinês	4
Capítulo II. Observação de padrões	33
Parte I . . . . .	33
Parte II . . . . .	38
Capítulo III. Os determinantes	45
Capítulo IV. Observações e Aplicações	55
Capítulo V. Conclusão	62
Bibliografia	63

# Introdução

A partir da análise de alguns dos livros didáticos de Ensino Médio disponíveis no Brasil, verificamos que os autores costumam abordar de modo praticamente idêntico o ensino de sistemas lineares, determinantes e matrizes.

Citamos como exemplos os livros dos autores Dante (2010), Iezzi et al. (2012) e Paiva (2010), que iniciam pelo estudo das matrizes - com suas definições, operações e propriedades - e tratam de maneira semelhante o estudo dos determinantes e dos sistemas lineares. Nesses autores, o contexto histórico é colocado em alguns pontos como uma ilustração, mas não como uma metodologia de ensino.

Em nossa proposta os conceitos de matrizes e determinantes surgem naturalmente no estudo de sistemas lineares e a necessidade de entender mais sobre tais conceitos nos motiva a desenvolver um estudo mais detalhado sobre esses temas a posteriori.

Na abordagem que adotamos, a adequação do currículo a uma perspectiva cronológica oferece aos professores de matemática a oportunidade de trabalhar com atividades que possibilitem a construção de conceitos pelo aluno e que despertem nele a percepção da necessidade de uma teoria antes que ela seja sistematizada, fazendo-o entender, ainda que simplificada, como o conhecimento matemático se desenvolve e é validado.

Para darmos uma ideia cronológica dos fatos, nosso estudo está baseado em uma parte do livro intitulado *K'ui-ch'ang Suan-Shu* (Os nove capítulos sobre a arte matemática), de Liu Hui, publicado na China durante o século I da era cristã e, conforme Eves (2004, p. 243), "o mais importante dos textos de matemática chineses". Essa obra é constituída por 246 problemas de aritmética e geometria, mas neste trabalho nos atemos à resolução de sistemas lineares, em função de termos a descrição sistematizada para a resolução de tais sistemas com coeficientes positivos.

Como curiosidade, cabe ressaltar que as operações eram efetuadas com o auxílio de pequenos gravetos dispostos numa folha de papel, os quais eram manipulados numa técnica que se assemelhava ao método da eliminação de Gauss (apresentado somente no século XIX). As operações eram efetuadas sobre os coeficientes do sistema, daí porque

---

entendemos a técnica como precursora de métodos de solução propostos em épocas posteriores. Lembremos aqui que os chineses usavam um sistema de numeração posicional e recorriam ao uso de um quadrado em branco para representar o zero.

O matemático japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708) generalizou a álgebra chinesa, abandonando o recurso concreto. O cálculo que ele propôs (na obra *Kaiken dai no Hô*) não restringe o número de incógnitas e estabelece regras gerais, não mais casos particulares. Outra contribuição importante de Seki Kowa foi a introdução da noção de determinante (sem o uso dessa nomenclatura, mas com uma ideia semelhante), no seu livro *Kaifukudai no Hô* (Método de solução de questões secretas).

Propomos a apresentação dos temas já citados seguindo o curso histórico, começando com a resolução de problemas diversos, modelando-os como sistemas de equações lineares, chamando a atenção para algumas expressões que aparecem na resolução de tais sistemas (determinantes) e mostrando que essas expressões estão associadas a uma estrutura de números organizados em linhas e colunas (matrizes). Depois que mostrarmos a existência de tais expressões e estruturas, daremos as suas definições de maneira formal e, em seguida, mostraremos seu uso geral.

Este trabalho é dividido em cinco capítulos, que se distribuem, em linhas gerais, como segue.

No capítulo I, através de problemas encontrados na obra "Os nove capítulos sobre a arte matemática", estudamos como os autores chineses resolviam esses problemas. Discutimos outra forma de modelar tais situações, o que nos leva às definições das equações lineares, sistemas de equações lineares e, conseqüentemente, de incógnita, coeficiente e termo livre. Verificamos que o método dos chineses era uma forma de resolução de tais sistemas, ou seja, chegamos ao conceito de solução de sistemas de equações lineares. A partir de observações, encontramos certos padrões matemáticos que nos conduzem à generalização do método chinês para resolução de sistemas de equações lineares.

No capítulo II, procuramos explicitar o padrão que aparece nas soluções dos sistemas lineares que os chineses resolviam. Com o uso de tabelas obtidas a partir dos coeficientes do sistema, observamos que podemos associar a essas tabelas um número (que aparece no denominador dos valores de todas as incógnitas do sistema). Essa associação pode ser aplicada a outras matrizes de mesma ordem, de modo a conseguir os resultados que aparecem nos numeradores das incógnitas encontradas. Com isso verificamos que podemos usar os números gerados pelas tabelas montadas com os coeficientes e os termos livres para conseguir os valores das incógnitas, ou seja, a solução do sistema. Surge, então, a definição de determinante (de uma matriz quadrada).

No capítulo III, mostramos que existem formas mais simples de calcular o deter-

minante, regras práticas que não seguem diretamente a definição, quando a matriz quadrada envolvida tem ordem 2 ou 3, entretanto tal modo não se aplica a matrizes de ordem maior que 3. Mostramos, contudo, que é possível calcular o determinante de uma matriz de ordem  $n$  usando o cálculo de vários determinantes de ordem  $n - 1$ , o que nos leva ao desenvolvimento de Laplace para determinantes.

No capítulo IV, inserimos algumas observações e aplicações importantes dos determinantes.

No capítulo V, fazemos as considerações finais do nosso trabalho.

# Capítulo I. O Método Chinês

Nesta seção estudamos o método apresentado em "Os nove capítulos sobre a arte matemática" que era utilizado para a resolução de problemas práticos do dia a dia dos autores.

O método é ilustrado a partir de quatro problemas: os dois primeiros pertencem à obra citada e os dois últimos foram criados para ilustrar nossa abordagem. Procuramos explicar por que ele funciona e pode ser estendido para resolver problemas mais gerais, envolvendo inclusive valores negativos.

Cabe aqui a observação de que os chineses, na obra estudada, consideraram quase sempre problemas envolvendo o mesmo número de situações descritas e valores desconhecidos a serem calculados (como nos problemas a seguir), entretanto eles não indicaram o motivo de esses sistemas poderem ser resolvidos.

As soluções dos problemas pelos chineses basearam-se em dois métodos: o denominado *shinjutsu* ou método direto (substituição direta de valores a serem calculados), e o identificado como *kyojutsu* ou método indireto (simplificação das situações descritas).

Nesse trabalho, partimos de situações que são modeladas segundo esse último método.

Vejam alguns exemplos.

I. Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2004, p. 268).

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado, como a seguir.

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 1 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 2 \\
 3 & 1 & 1 \\
 26 & 34 & 39
 \end{bmatrix}$$

Montada a tabela, utilizamos os seguintes passos:

1º Passo: multiplicamos todos os termos da coluna central (2, 3, 1, 34) pelo primeiro termo da coluna direita (3), obtendo (6, 9, 3, 102).

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 1 & 6 & 3 \\
 2 & 9 & 2 \\
 3 & 3 & 1 \\
 26 & 102 & 39
 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números do centro, obtendo, no centro, ( $6 - 3 = 3$ ;  $9 - 2 = 7$ ;  $3 - 1 = 2$ ;  $102 - 39 = 63$ ).

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 1 & 3 & 3 \\
 2 & 7 & 2 \\
 3 & 2 & 1 \\
 26 & 63 & 39
 \end{bmatrix}$$

3º Passo: repetimos continuamente o 2º passo até que o primeiro número da coluna central seja eliminado ( $3 - 3 = 0$ ;  $7 - 2 = 5$ ;  $2 - 1 = 1$ ;  $63 - 39 = 24$ ).

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 1 & 0 & 3 \\
 2 & 5 & 2 \\
 3 & 1 & 1 \\
 26 & 24 & 39
 \end{bmatrix}$$

Seguimos repetindo os dois primeiros passos, agora entre as colunas 1 e 3, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 1.

1º passo: multiplicar todos os termos da primeira coluna (1, 2, 3, 26) pelo primeiro termo da coluna direita (3), obtendo-se (3, 6, 9, 78).

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 3 & 0 & 3 \\
 6 & 5 & 2 \\
 9 & 1 & 1 \\
 78 & 24 & 39
 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da primeira coluna, obtendo ( $3 - 3 = 0$ ;  $6 - 2 = 4$ ;  $9 - 1 = 8$ ;  $78 - 39 = 39$ ).

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 4 & 5 & 2 \\
 8 & 1 & 1 \\
 39 & 24 & 39
 \end{bmatrix}$$

Finalmente, utilizamos os três passos iniciais, agora entre as colunas 1 e 2, até eliminar o segundo número da coluna 1.

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 20 & 5 & 2 \\
 40 & 1 & 1 \\
 195 & 24 & 39
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 15 & 5 & 2 \\
 39 & 1 & 1 \\
 171 & 24 & 39
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 10 & 5 & 2 \\
 38 & 1 & 1 \\
 147 & 24 & 39
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 5 & 5 & 2 \\
 37 & 1 & 1 \\
 123 & 24 & 39
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Boa Qualidade} \\
 \text{Qualidade Regular} \\
 \text{Má Qualidade}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a \\
 0 & 0 & 3 \\
 0 & 5 & 2 \\
 36 & 1 & 1 \\
 99 & 24 & 39
 \end{bmatrix}$$

O preço do feixe de má qualidade é  $\frac{99}{36}$ , que equivale a 2,75 dou.

O valor do feixe de qualidade regular é determinado por substituição:

$$(\text{Feixe de qualidade regular}) \times 5 + 2,75 = 24$$

$$(\text{Feixe de qualidade regular}) \times 5 = 24 - 2,75$$

$$(\text{Feixe de qualidade regular}) \times 5 = 21,25$$

$$(\text{Feixe de qualidade regular}) = \frac{21,25}{5}$$



$$(\text{Feixe de qualidade regular}) = 4,25$$

Portanto o feixe de qualidade regular custa 4,25 dou.

O valor do feixe de boa qualidade é determinado por substituição:

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) \times 3 + 2 \cdot 4,25 + 2,75 = 39$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) \times 3 + 8,5 + 2,75 = 39$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) \times 3 + 11,25 = 39$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) \times 3 = 39 - 11,25$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) \times 3 = 27,75$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) = \frac{27,75}{3}$$

$$(\text{Feixe de boa qualidade}) = 9,25$$

Portanto o feixe de boa qualidade custa 9,25 dou.

Para esse problema proposto pelos chineses, é possível atribuir uma letra ao preço indicado para cada feixe com qualidade diferente:

Preço dos feixes de boa qualidade:  $x$ .

Preço dos feixes de qualidade regular:  $y$ .

Preço dos feixes de má qualidade:  $z$ .

Segundo o texto do problema, teríamos uma representação para o problema com as igualdades a seguir.

a) Soma de 3 feixes da colheita boa, 2 feixes da regular e 1 feixe da colheita de má qualidade, totalizando 39 dou:  $3x + 2y + z = 39$ ;

b) Soma de 2 feixes da boa, 3 da regular e 1 da colheita de má qualidade, totalizando 34 dou:  $2x + 3y + z = 34$ .

c) Soma de 1 feixe da boa, 2 da regular e 3 da colheita de má qualidade, totalizando 26 dou:  $x + 2y + 3z = 26$ .

Assim, o problema pode ser expresso da seguinte forma.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

Preço dos feixes de boa qualidade: 9,25 dou.

Preço dos feixes de qualidade regular: 4,25 dou.

Preço dos feixes de má qualidade: 2,75 dou.

a) Soma de 3 feixes da colheita boa, 2 feixes da regular e 1 feixe da colheita de má qualidade totalizando 39 dou:

$$3 \times 9,25 + 2 \times 4,25 + 2,75 = 27,75 + 8,50 + 2,75 = 39;$$

b) Soma de 2 feixes da boa, 3 da regular e 1 da colheita de má qualidade totalizando 34 dou:

$$2 \times 9,25 + 3 \times 4,25 + 2,75 = 18,50 + 12,75 + 2,75 = 34.$$

c) Soma de 1 feixe da boa, 2 da regular e 3 da colheita de má qualidade totalizando 26 dou:

$$9,25 + 2 \times 4,25 + 3 \times 2,75 = 9,25 + 8,50 + 8,25 = 26.$$

Vamos acompanhar como os chineses resolviam mais um problema.

II. Suponha que cinco ovelhas, quatro patos, três galinhas e dois coelhos valem 1496 moedas; quatro ovelhas, dois patos, seis galinhas e três coelhos valem 1175; três ovelhas, um pato, sete galinhas e cinco coelhos valem 958; duas ovelhas, três patos, cinco galinhas e um coelho valem 861. Então, qual é o preço de uma ovelha, um pato, uma galinha e um coelho? (HUI, Liu. Problema 17, Capítulo VIII. apud CARRERA, 2009, p. 181).

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado, como a seguir.

$$\begin{array}{l} \text{Ovelhas} \\ \text{Patos} \\ \text{Galinhas} \\ \text{Coelhos} \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 861 & 958 & 1175 & 1496 \end{array} \right]$$

Montada essa tabela, utilizamos os mesmos passos que seguimos no problema anterior, realizando as multiplicações e subtrações (ou somas) exigidas, que é o que acontece quando se subtrai sucessivas vezes uma coluna da outra até zerar uma das entradas (posições).

1º Passo: multiplicamos todos os termos da 3ª coluna (4, 2, 6, 3, 1175) pelo primeiro termo da coluna à direita (5), obtendo-se (20, 10, 30, 15, 5875).

$$\begin{array}{l} \text{Ovelhas} \\ \text{Patos} \\ \text{Galinhas} \\ \text{Coelhos} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\ 2 & 3 & 20 & 5 \\ 3 & 1 & 10 & 4 \\ 5 & 7 & 30 & 3 \\ 1 & 5 & 15 & 2 \\ 861 & 958 & 5875 & 1496 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da coluna 3, obtendo, em seus lugares, respectivamente, ( $20 - 5 = 15$ ;  $10 - 4 = 6$ ;  $30 - 3 = 27$ ;  $15 - 2 = 13$ ;  $5875 - 1496 = 4379$ ).

$$\begin{array}{l} \text{Ovelhas} \\ \text{Patos} \\ \text{Galinhas} \\ \text{Coelhos} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\ 2 & 3 & 15 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 27 & 3 \\ 1 & 5 & 13 & 2 \\ 861 & 958 & 4379 & 1496 \end{bmatrix}$$

3º Passo: repetimos continuamente o 2º passo até que o primeiro número da 3ª coluna seja eliminado.

$$(15 - 5 = 10; 6 - 4 = 2; 27 - 3 = 24; 13 - 2 = 11; 4379 - 1496 = 2883).$$

$$\begin{array}{l} \text{Ovelhas} \\ \text{Patos} \\ \text{Galinhas} \\ \text{Coelhos} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\ 2 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 24 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 2 \\ 861 & 958 & 2883 & 1496 \end{bmatrix}$$

$$(10 - 5 = 5; 2 - 4 = -2; 24 - 3 = 21; 11 - 2 = 9; 2883 - 1496 = 1387).$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 3 & 5 & 5 \\
 3 & 1 & -2 & 4 \\
 5 & 7 & 21 & 3 \\
 1 & 5 & 9 & 2 \\
 861 & 958 & 1387 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$(5 - 5 = 0; -2 - 4 = -6; 21 - 3 = 18; 9 - 2 = 7; 1387 - 1496 = -109).$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 3 & 0 & 5 \\
 3 & 1 & -6 & 4 \\
 5 & 7 & 18 & 3 \\
 1 & 5 & 7 & 2 \\
 861 & 958 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

Seguimos repetindo os dois primeiros passos, agora entre as colunas 2 e 4, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 2.

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 15 & 0 & 5 \\
 3 & 5 & -6 & 4 \\
 5 & 35 & 18 & 3 \\
 1 & 25 & 7 & 2 \\
 861 & 4790 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 10 & 0 & 5 \\
 3 & 1 & -6 & 4 \\
 5 & 32 & 18 & 3 \\
 1 & 23 & 7 & 2 \\
 861 & 3294 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 5 & 0 & 5 \\
 3 & -3 & -6 & 4 \\
 5 & 29 & 18 & 3 \\
 1 & 21 & 7 & 2 \\
 861 & 1798 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 2 & 0 & 0 & 5 \\
 3 & -7 & -6 & 4 \\
 5 & 26 & 18 & 3 \\
 1 & 19 & 7 & 2 \\
 861 & 302 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

Seguimos repetindo os dois primeiros passos, agora entre as colunas 1 e 4, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 1.

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 10 & 0 & 0 & 5 \\
 15 & -7 & -6 & 4 \\
 25 & 26 & 18 & 3 \\
 5 & 19 & 7 & 2 \\
 4305 & 302 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 5 & 0 & 0 & 5 \\
 11 & -7 & -6 & 4 \\
 22 & 26 & 18 & 3 \\
 3 & 19 & 7 & 2 \\
 2809 & 302 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & -7 & -6 & 4 \\
 19 & 26 & 18 & 3 \\
 1 & 19 & 7 & 2 \\
 1313 & 302 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

Utilizamos os três passos iniciais, agora entre as colunas 2 e 3, até eliminarmos o segundo número da coluna 2.

1º Passo: multiplicamos os termos da 2ª coluna (0, -7, 26, 19, 302) pelo 2º termo da 3ª coluna (-6), obtendo-se (0, 42, -156, -114, -1812).

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 42 & -6 & 4 \\
 19 & -156 & 18 & 3 \\
 1 & -114 & 7 & 2 \\
 1313 & -1812 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 36 & -6 & 4 \\
 19 & -138 & 18 & 3 \\
 1 & -107 & 7 & 2 \\
 1313 & -1921 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 42 & -6 & 4 \\
 19 & -156 & 18 & 3 \\
 1 & -114 & 7 & 2 \\
 1313 & -1812 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 24 & -6 & 4 \\
 19 & -102 & 18 & 3 \\
 1 & -93 & 7 & 2 \\
 1313 & -2139 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 18 & -6 & 4 \\
 19 & -84 & 18 & 3 \\
 1 & -86 & 7 & 2 \\
 1313 & -2248 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 12 & -6 & 4 \\
 19 & -66 & 18 & 3 \\
 1 & -79 & 7 & 2 \\
 1313 & -2357 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 6 & -6 & 4 \\
 19 & -48 & 18 & 3 \\
 1 & -72 & 7 & 2 \\
 1313 & -2466 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 7 & 0 & -6 & 4 \\
 19 & -30 & 18 & 3 \\
 1 & -65 & 7 & 2 \\
 1313 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

Utilizamos os três passos iniciais, agora entre as colunas 1 e 3, até eliminarmos o segundo número da coluna 1.

1º Passo: multiplicamos os termos da 1ª coluna (0, 7, 19, 1, 1313) pelo 2º termo da 3ª coluna (-6), obtendo-se (0, -42, -114, -6, -7878).

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -42 & 0 & -6 & 4 \\
 -114 & -30 & 18 & 3 \\
 -6 & -65 & 7 & 2 \\
 -7878 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -36 & 0 & -6 & 4 \\
 -132 & -30 & 18 & 3 \\
 -13 & -65 & 7 & 2 \\
 -7769 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -30 & 0 & -6 & 4 \\
 -150 & -30 & 18 & 3 \\
 -20 & -65 & 7 & 2 \\
 -7660 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -24 & 0 & -6 & 4 \\
 -168 & -30 & 18 & 3 \\
 -27 & -65 & 7 & 2 \\
 -7551 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -30 & 0 & -6 & 4 \\
 -150 & -30 & 18 & 3 \\
 -20 & -65 & 7 & 2 \\
 -7660 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -24 & 0 & -6 & 4 \\
 -168 & -30 & 18 & 3 \\
 -27 & -65 & 7 & 2 \\
 -7551 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -18 & 0 & -6 & 4 \\
 -186 & -30 & 18 & 3 \\
 -34 & 65 & 7 & 2 \\
 -7442 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -12 & 0 & -6 & 4 \\
 -204 & -30 & 18 & 3 \\
 -41 & -65 & 7 & 2 \\
 -7333 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 -6 & 0 & -6 & 4 \\
 -222 & -30 & 18 & 3 \\
 -48 & -65 & 7 & 2 \\
 -7224 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -240 & -30 & 18 & 3 \\
 -55 & -65 & 7 & 2 \\
 -7115 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

Utilizamos os três passos iniciais, agora entre as colunas 1 e 2, até eliminarmos o terceiro número da coluna 1.

1º Passo: Sabendo que 240 é múltiplo de 30, subtraímos de cada número da 1ª coluna o seu correspondente na coluna 2, obtendo em seus lugares:

( $0 - 0 = 0$ ;  $0 - 0 = 0$ ;  $-240 + 30 = -210$ ;  $-55 + 65 = 10$ ;  $-7115 + 2575 = -4540$ ).

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -210 & -30 & 18 & 3 \\
 10 & -65 & 7 & 2 \\
 -4540 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -180 & -30 & 18 & 3 \\
 75 & -65 & 7 & 2 \\
 -1965 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -150 & -30 & 18 & 3 \\
 140 & -65 & 7 & 2 \\
 -610 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -120 & -30 & 18 & 3 \\
 205 & -65 & 7 & 2 \\
 3185 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -90 & -30 & 18 & 3 \\
 270 & -65 & 7 & 2 \\
 5760 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^{\text{a}} & 2^{\text{a}} & 3^{\text{a}} & 4^{\text{a}} \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -60 & -30 & 18 & 3 \\
 335 & -65 & 7 & 2 \\
 8335 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{l}
 \text{Ovelhas} \\
 \text{Patos} \\
 \text{Galinhas} \\
 \text{Coelhos}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 -30 & -30 & 18 & 3 \\
 400 & -65 & 7 & 2 \\
 10910 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}
 \longrightarrow
 \begin{bmatrix}
 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \\
 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -6 & 4 \\
 0 & -30 & 18 & 3 \\
 465 & -65 & 7 & 2 \\
 13485 & -2575 & -109 & 1496
 \end{bmatrix}$$

O preço de um coelho é  $\frac{13485}{465}$ , que equivale a 29 moedas.

O preço de uma galinha é determinado por substituição na coluna que ocupa:

$$\frac{2575 - 65 \times 29}{30} = 23$$

Portanto uma galinha vale 23 moedas.

O preço de um pato é determinado por substituição na coluna que ocupa:

$$\frac{-109 - 7 \times 29 - 18 \times 23}{-6} = 121$$

Portanto um pato vale 121 moedas.

O preço de uma ovelha é determinado por substituição na coluna que ocupa:

$$\frac{1496 - 2 \times 29 - 3 \times 23 - 4 \times 121}{5} = 177$$

Portanto uma ovelha vale 177 moedas.

Nesse problema, atribuindo-se uma letra ao preço de cada animal citado:

- a) Preço das ovelhas:  $x$ .
- b) Preço dos patos:  $y$ .
- c) Preço das galinhas:  $z$ .
- d) Preço dos coelhos:  $u$ .

Temos sua modelagem, via letras, dada por:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3z + 2u = 1496 \\ 4x + 2y + 6z + 3u = 1175 \\ 3x + y + 7z + 5u = 958 \\ 2x + 3y + 5z + u = 861 \end{cases}$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

- a) Preço das ovelhas:  $x = 177$  moedas.
- b) Preço dos patos:  $y = 121$  moedas.
- c) Preço das galinhas:  $z = 23$  moedas.
- d) Preço dos coelhos:  $u = 29$  moedas.

$$\begin{cases} 5 \times 177 + 4 \times 121 + 3 \times 23 + 2 \times 29 = \dots \\ 4 \times 177 + 2 \times 121 + 6 \times 23 + 3 \times 29 = \dots \\ 3 \times 177 + 121 + 7 \times 23 + 5 \times 29 = \dots \\ 2 \times 177 + 3 \times 121 + 5 \times 23 + 29 = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 885 + 484 + 69 + 58 = 1496 \\ 708 + 242 + 138 + 87 = 1175 \\ 531 + 121 + 161 + 145 = 958 \\ 354 + 363 + 115 + 29 = 861 \end{cases}$$

Vejamos agora mais dois problemas a fim de ajudar a entender a proposta inicial.

III. Um aluno recebe 3 pontos por problema que acerta e perde 2 pontos por problema que erra. Resolveu 50 problemas e conseguiu 85 pontos. Quantos problemas ele acertou e quantos ele errou?

A modelagem desse problema pode ser feita adotando, para o número de acertos, a letra  $x$  e, para o número de erros, a letra  $y$ . Dessa forma, teríamos uma igualdade para cada situação descrita, como se segue.

- a) Total de questões:  $x + y = 50$
- b) Total de pontos recebidos:  $x \times 3$
- c) Total de pontos perdidos:  $y \times 2$
- d) Pontuação final:  $3x - 2y = 85$

Em função das letras utilizadas, podemos representar o problema da seguinte forma.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x - 2y = 85 \end{cases}$$

Observamos aqui que o método ainda se aplica na eventualidade de trabalharmos com números negativos, como conhecemos hoje, salientando que, segundo Eves [2004], os chineses foram os primeiros a introduzir uma notação para números negativos.

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado como a seguir.

$$\begin{array}{l} \text{Acertos} \\ \text{Erros} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 85 & 50 \end{bmatrix}$$

1º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da primeira coluna, obtendo ( $3 - 1 = 2$ ;  $-2 - 1 = -3$ ;  $85 - 50 = 35$ ).

$$\begin{array}{l} \text{Acertos} \\ \text{Erros} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 35 & 50 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da primeira coluna, obtendo ( $2 - 1 = 1$ ;  $-3 - 1 = -4$ ;  $35 - 50 = -15$ ).

$$\begin{array}{l} \text{Acertos} \\ \text{Erros} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -15 & 50 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1^a & 2^a \\ 0 & 1 \\ -5 & 1 \\ -65 & 50 \end{bmatrix}$$

A quantidade de erros é calculada por  $\frac{-65}{-5} = 13$ .

A quantidade de acertos é determinada por substituição.

$$(\text{n.º de acertos}) + 13 = 50 \Rightarrow (\text{n.º de acertos}) = 50 - 13 = 37$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

Temos sua modelagem, via letras, dada por:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x - 2y = 85 \end{cases}$$

- a) Total de acertos:  $x = 37$ .      b) Total de erros:  $y = 13$ .

$$\begin{cases} 37 + 13 = 50 \\ 3 \times 37 - 2 \times 13 = 85 \Rightarrow 111 - 26 = 85 \end{cases}$$

Resolveremos outro exemplo, começando com a modelagem por um conjunto de equações e usando, em seguida, o método chinês de resolução.

IV. Dona Marianna foi à feira e lá verificou que as barracas de Manuella, de Milena e de Marcella tinham preços diferentes por quilo de produto, conforme a tabela a seguir:

	FEIJÃO	ARROZ	FARINHA
MANUELLA	R\$4,00	R\$5,00	R\$3,00
MILENA	R\$5,00	R\$4,00	R\$4,00
MARCELLA	R\$5,00	R\$4,00	R\$3,00

Realizando a mesma compra nas barracas de Manuella e de Milena, o gasto será de R\$26,00. A mesma compra na barraca de Marcella custa R\$1,00 a menos. Atribuindo as letras  $x$ ,  $y$  e  $z$  às quantidades compradas de feijão, arroz e farinha, respectivamente, qual o valor de  $x + y + z$ ?

A modelagem desse problema é feita adotando para a quantidade de Kg de feijão a letra  $x$ , para a quantidade de Kg de arroz a letra  $y$  e para a quantidade de Kg de farinha a letra  $z$ . Dessa forma, teríamos uma igualdade para cada situação, descritas como se segue.

- a) Total na barraca da Manuella:  $4x + 5y + 3z = 26$   
 b) Total na barraca da Milena:  $5x + 4y + 4z = 26$   
 c) Total na barraca da Marcella:  $5x + 4y + 3z = 25$

Ou seja, o problema pode ser expresso, com a utilização de letras, pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 26 \\ 5x + 4y + 4z = 26 \\ 5x + 4y + 3z = 25 \end{cases}$$

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado como a seguir.

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 26 & 26 & 25 \end{bmatrix}$$

1º Passo: multiplicamos todos os termos da coluna central (5, 4, 4, 26) pelo primeiro termo da coluna à direita (5), obtendo-se (25, 20, 20, 130).

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 25 & 5 \\ 5 & 20 & 4 \\ 3 & 20 & 3 \\ 26 & 130 & 25 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números do centro, obtendo, no centro, (25 - 5 = 20; 20 - 4 = 16; 20 - 3 = 17; 130 - 25 = 105).

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 20 & 5 \\ 5 & 16 & 4 \\ 3 & 17 & 3 \\ 26 & 105 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 15 & 5 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 14 & 3 \\ 26 & 80 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 10 & 5 \\ 5 & 8 & 4 \\ 3 & 11 & 3 \\ 26 & 55 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 3 \\ 26 & 30 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 26 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Seguimos repetindo os dois primeiros passos, agora entre as colunas 1 e 3, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 1.

1º passo: multiplicar todos os termos da primeira coluna (4, 5, 3, 26) pelo primeiro termo da coluna à direita (5), obtendo-se (20, 25, 15, 130).

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 20 & 0 & 5 \\ 25 & 0 & 4 \\ 15 & 5 & 3 \\ 130 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da primeira coluna, obtendo ( $20 - 5 = 15$ ;  $25 - 4 = 21$ ;  $15 - 4 = 11$ ;  $130 - 25 = 105$ ).

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 15 & 0 & 5 \\ 21 & 0 & 4 \\ 12 & 5 & 3 \\ 105 & 5 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 10 & 0 & 5 \\ 17 & 0 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 80 & 5 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 5 & 0 & 5 \\ 13 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 55 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 30 & 5 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Feijão} \\ \text{Arroz} \\ \text{Farinha} \end{array} \begin{bmatrix} 1^a & 2^a & 3^a \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 30 & 25 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que a troca de duas colunas dessa tabela não altera a solução proposta pelos chineses, pois estaríamos apenas informando os dados do problema em outra ordem.

A primeira quantidade é  $\frac{5}{5} = 1$ , portanto temos 1 Kg de farinha.

A segunda é determinada por substituição:

$$(\text{Kg de arroz}) \times 9 + 3 \times 1 = 30 \Rightarrow (\text{Kg de arroz}) \times 9 + 3 = 30$$

$$(\text{Kg de arroz}) \times 9 = 30 - 3 \Rightarrow (\text{Kg de arroz}) \times 9 = 27$$

$$(\text{Kg de arroz}) = \frac{27}{9} \Rightarrow (\text{Kg de arroz}) = 3, \text{ portanto são } 3 \text{ Kg de arroz.}$$

A terceira, também por substituição:

$$(\text{Kg de feijão}) \times 5 + 4 \times 3 + 3 \times 1 = 25 \Rightarrow (\text{Kg de feijão}) \times 5 + 12 + 3 = 25$$

$$(\text{Kg de feijão}) \times 5 + 15 = 25 \Rightarrow (\text{Kg de feijão}) \times 5 = 10$$

$$(\text{Kg de feijão}) = \frac{10}{5} \Rightarrow (\text{Kg de feijão}) = 2, \text{ portanto são } 2 \text{ Kg de feijão.}$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

Temos sua modelagem, via letras, dada por:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 26 \\ 5x + 4y + 4z = 26 \\ 5x + 4y + 3z = 25 \end{cases}$$

a) Quantidade de feijão:  $x = 2$ .

b) Quantidade de arroz:  $y = 3$ .

c) Quantidade de farinha:  $z = 1$ .

$$\begin{cases} 4 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 26 \Rightarrow 8 + 15 + 3 = 26 \\ 5 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 1 = 26 \Rightarrow 10 + 12 + 4 = 26 \\ 5 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 1 = 25 \Rightarrow 10 + 12 + 3 = 25 \end{cases}$$

A resposta à pergunta feita á  $x + y + z = 2 + 3 + 1 = 6$

É possível perceber que os valores numéricos apresentados na vertical em "Os nove capítulos sobre a arte matemática" aparecem horizontalmente na modelagem moderna, em que usamos letras para representar quantidades (nas equações).

Então vemos que podemos usar o método chinês para encontrar os valores das letras de uma dada quantidade de equações.

Formalizaremos alguns conceitos vistos até o momento.

A utilização de letras representando quantidades nos leva a uma modelagem por equações da forma a seguir.

$$(1) \quad a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

Essa forma é chamada de equação linear, na qual:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  são chamados de incógnitas, que são as letras que aparecem na equação;
- $a_1, a_2, \dots, a_n$  são chamados de coeficientes das incógnitas, sendo os números que aparecem multiplicando as incógnitas na equação;
- e  $b$  é o termo independente, sendo o número que aparece sem incógnitas na equação.





Ilustraremos as operações elementares em um sistema de 3 equações e 4 incógnitas, mas essas operações continuam valendo para um sistema de  $m$  equações e  $n$  incógnitas, com  $m$  e  $n$  quaisquer:

I. Permutar uma ou mais equações.

- Notemos que, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução do sistema

$$(A) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

então ela também será solução do sistema obtido pela troca de lugar entre duas linhas e, também pelo mesmo motivo, a recíproca será verdadeira. Em outras palavras, trocar a ordem das equações não muda o problema em si, nem a sua solução, apenas corresponde a descrever o problema em uma ordem diferente, logo a solução continuará a mesma.

II. Somar os termos correspondentes de duas equações e colocar o resultado em substituição a uma das equações envolvidas na operação.

- Notemos que, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução do sistema (A), permanecerá solução do sistema a seguir.

$$(B) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 + (a_{14} + a_{24})x_4 = b_1 + b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

De fato, sabemos que todas as equações, exceto a 2<sup>a</sup>, continuam sendo as mesmas, logo uma solução do sistema (A) satisfaria a todas as equações do sistema (B), exceto a 2<sup>a</sup>, mas mostraremos que essa equação também é satisfeita.

Da 1<sup>a</sup> equação em (A), temos  $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1$  e da 2<sup>a</sup> equação temos  $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = b_2$ , logo, somando as equações e colocando os termos iguais em evidência, temos  $(a_{11} + a_{21})\alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\alpha_2 + (a_{13} + a_{23})\alpha_3 + (a_{14} + a_{24})\alpha_4 = b_1 + b_2$ , ou seja,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  satisfaz à segunda equação de (B).

Reciprocamente, mostraremos que, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  satisfaz às equações do sistema (B), também satisfaz às equações do sistema (A).

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1 \\ (a_{11} + a_{21})\alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\alpha_2 + (a_{13} + a_{23})\alpha_3 + (a_{14} + a_{24})\alpha_4 = b_1 + b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1 \\ a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{22}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{23}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 + a_{24}\alpha_4 = b_1 + b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Da primeira equação temos  $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1$ , então a segunda equação do sistema anterior corresponde a  $b_1 + a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = b_1 + b_2$ , ou ainda a  $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = b_2$ . Dessa forma, o sistema acima pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Logo  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução de (A).

III. Multiplicar uma ou mais equações por escalares reais diferentes de zero.

- Observemos que, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução do sistema (A), então será solução do sistema

$$(C) \begin{cases} \beta a_{11}x_1 + \beta a_{12}x_2 + \beta a_{13}x_3 + \beta a_{14}x_4 = \beta b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

Se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  satisfaz a (A), então já satisfaz a todas as equações de (C), exceto à primeira. Mostraremos, no entanto, que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  também satisfaz à 1ª equação.

De (A), temos que  $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1$ , logo, multiplicando tudo por  $\beta$ , com  $\beta \neq 0$ , temos  $\beta a_{11}\alpha_1 + \beta a_{12}\alpha_2 + \beta a_{13}\alpha_3 + \beta a_{14}\alpha_4 = \beta b_1$ , então satisfaz à 1ª

equação de (C).

Reciprocamente, mostraremos que, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  satisfaz ao sistema (C), então também satisfaz ao sistema (A).

$$\begin{cases} \beta a_{11}x_1 + \beta a_{12}x_2 + \beta a_{13}x_3 + \beta a_{14}x_4 = \beta b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) = \beta b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

Como  $\beta \neq 0$ , dividiremos os dois lados da 1ª equação por  $\beta$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

IV. A uma equação adicionar outra, multiplicada por um escalar diferente de zero, e colocar o resultado em substituição a uma das equações envolvidas na operação.

- Suponhamos que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  seja solução do sistema (A).

Então também será solução do sistema a seguir, pela propriedade III, com  $\beta \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ .

$$\begin{cases} \beta a_{11}x_1 + \beta a_{12}x_2 + \beta a_{13}x_3 + \beta a_{14}x_4 = \beta b_1 \\ \gamma a_{21}x_1 + \gamma a_{22}x_2 + \gamma a_{23}x_3 + \gamma a_{24}x_4 = \gamma b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases},$$

E também será solução do sistema a seguir, pela propriedade II.

$$\begin{cases} \beta a_{11}x_1 + \beta a_{12}x_2 + \beta a_{13}x_3 + \beta a_{14}x_4 = \beta b_1 \\ (\beta a_{11} + \gamma a_{21})x_1 + (\beta a_{12} + \gamma a_{22})x_2 + (\beta a_{13} + \gamma a_{23})x_3 + (\beta a_{14} + \gamma a_{24})x_4 = \beta b_1 + \gamma b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

Reciprocamente, se  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução do sistema:

$$\begin{cases} \beta a_{11}x_1 + \beta a_{12}x_2 + \beta a_{13}x_3 + \beta a_{14}x_4 = \beta b_1 \\ (\beta a_{11} + \gamma a_{21})x_1 + (\beta a_{12} + \gamma a_{22})x_2 + (\beta a_{13} + \gamma a_{23})x_3 + (\beta a_{14} + \gamma a_{24})x_4 = \beta b_1 + \gamma b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \beta a_{11}\alpha_1 + \beta a_{12}\alpha_2 + \beta a_{13}\alpha_3 + \beta a_{14}\alpha_4 = \beta b_1 \\ \beta a_{11}\alpha_1 + \gamma a_{21}\alpha_1 + \beta a_{12}\alpha_2 + \gamma a_{22}\alpha_2 + \beta a_{13}\alpha_3 + \gamma a_{23}\alpha_3 + \beta a_{14}\alpha_4 + \gamma a_{24}\alpha_4 = \beta b_1 + \gamma b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Na primeira equação temos  $\beta a_{11}\alpha_1 + \beta a_{12}\alpha_2 + \beta a_{13}\alpha_3 + \beta a_{14}\alpha_4 = \beta b_1$ , então a segunda equação do sistema anterior corresponde a  $\beta b_1 + \gamma a_{21}\alpha_1 + \gamma a_{22}\alpha_2 + \gamma a_{23}\alpha_3 + \gamma a_{24}\alpha_4 = \beta b_1 + \gamma b_2$ , ou, ainda, a  $\gamma a_{21}\alpha_1 + \gamma a_{22}\alpha_2 + \gamma a_{23}\alpha_3 + \gamma a_{24}\alpha_4 = \gamma b_2$ . Dessa forma, o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \beta a_{11}\alpha_1 + \beta a_{12}\alpha_2 + \beta a_{13}\alpha_3 + \beta a_{14}\alpha_4 = \beta b_1 \\ \gamma a_{21}\alpha_1 + \gamma a_{22}\alpha_2 + \gamma a_{23}\alpha_3 + \gamma a_{24}\alpha_4 = \gamma b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} \beta(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4) = \beta b_1 \\ \gamma(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4) = \gamma b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Como  $\beta \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$ , dividiremos os dois lados da primeira equação por  $\beta$  e os dois lados da segunda equação por  $\gamma$ , obtendo

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = b_3 \end{cases}$$

Logo,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  é solução do sistema (A).

Notemos que, nos problemas (III) e (IV), apresentados no início deste capítulo, bem como nos problemas (I) e (II), propostos pelos chineses, o número de incógnitas é igual ao número de equações, assim, generalizando o modelo, indicando cada linha e



A seguir, faremos as operações aprendidas pelo método chinês diretamente no sistema. Para ficar claro como tais operações são realizadas, exemplificaremos em um sistema com duas equações e duas incógnitas ( $2 \times 2$ ) e em outro com três equações e três incógnitas ( $3 \times 3$ ). Em sistemas maiores, os passos são os mesmos.

i. (FUVEST 1994 - adaptada) Aline diz a Antonia: se você me der  $\frac{1}{5}$  do dinheiro que possuí, eu ficarei com uma quantia igual ao dobro do que lhe restará. Por outro lado, se eu lhe der R\$6.000,00 do meu dinheiro, nós ficaremos com quantias iguais. Quanto dinheiro possui cada uma?

A modelagem desse problema deve ser feita segundo a indicação. Adotando, para a quantia de Aline, a incógnita  $x$  e, para a quantia de Antonia, a incógnita  $y$ , teremos as seguintes situações:

- a) Antonia dá  $\frac{1}{5}$  do dinheiro que tem:  $y - \frac{1y}{5}$
- b) Aline recebe  $\frac{1}{5}$  do dinheiro de Antonia:  $x + \frac{1y}{5}$
- c) Aline fica com o dobro do que resta a Antonia:  $x + \frac{y}{5} = 2\left(y - \frac{y}{5}\right)$
- d) Aline dá R\$6.000,00 a Antonia:  $x - 6000$
- e) Antonia recebe R\$6.000,00 de Aline:  $y + 6000$
- f) Aline e Antonia ficam com quantias iguais:  $x - 6000 = y + 6000$

Essa análise nos indica o sistema

$$\begin{cases} 2\left(y - \frac{y}{5}\right) = x + \frac{y}{5} & (\cdot 5) \\ x - 6000 = y + 6000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\left(y - \frac{y}{5}\right) = 5x + y \\ x - y = 12000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10y - 2y = 5x + y \\ x - y = 12000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8y = 5x + y \\ x - y = 12000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ x - y = 12000 \end{cases}$$

Resolveremos esse sistema usando as operações elementares já vistas.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ x - y = 12000 \end{cases} \longrightarrow \text{Trocando as posições das equações} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - y = 12000 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Anulando a 1ª incógnita da 2ª equação} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - y = 12000 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \quad 5L_1 - L_2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - y = 12000 \\ 2y = 60000 \end{cases} \Rightarrow y = 30000 \end{aligned}$$

→ Substituindo a 2ª incógnita na 1ª equação

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 30000y = 12000 \\ \Rightarrow x = 420000 \end{cases}$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

Temos sua modelagem, via letras, dada por

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ x - y = 12000 \end{cases}$$

a) Para a quantia de Aline,  $x = 42000$ .

b) Para a quantia de Antonia,  $y = 30000$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 \times 42000 - 7 \times 30000 = 210000 - 210000 = 0 \\ 42000 - 30000 = 12000 \end{cases}$$

Respondendo à pergunta, Aline possui R\$42.000,00 e Antonia possui R\$30.000,00.

ii. Um casal entrou em uma lanchonete e pediu 3 sanduíches, 1 refrigerante e 2 sobremesas, gastando R\$43,00. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 sanduíches, 3 refrigerantes e 5 sobremesas, gastando R\$114,00. O preço de 1 sanduíche, mais o de 1 refrigerante, mais o de 1 sobremesa totaliza R\$20,00. Qual o preço de cada um desses itens?

A modelagem desse problema deve ser feita, segundo a indicação, adotando, para o preço do sanduíche, a incógnita  $x$ ; para o preço do refrigerante, a incógnita  $y$ ; e, para o preço da sobremesa, a incógnita  $z$ , teremos as seguintes situações:

a) 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sobremesa custam R\$20,00:

$$x + y + z = 20.$$

b) 8 sanduíches, 3 refrigerantes e 5 sobremesas custam R\$114,00:

$$8x + 3y + 5z = 114.$$

c) 3 sanduíches, 1 refrigerante e 2 sobremesas custam R\$43,00:

$$3x + y + 2z = 43.$$

Encontramos, então, o sistema a seguir, que resolveremos como nos casos anteriores.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x + 3y + 5z = 114 \\ 3x + y + 2z = 43 \end{cases}$$

Anulemos a primeira incógnita da segunda e terceira equações:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x + 3y + 5z = 114 \quad \leftarrow 8L_1 - L_2 \\ 3x + y + 2z = 43 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad 5y + 3z = 46 \\ 3x + y + 2z = 43 \quad \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad 5y + 3z = 46 \\ \quad 2y + z = 17 \end{cases} \end{aligned}$$

Igualemos os coeficientes de  $y$  das duas últimas equações:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad 5y + 3z = 46 \quad \cdot 2 \\ \quad 2y + z = 17 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10y + 6z = 92 \\ 2y + z = 43 \end{cases} \quad ;5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10y + 6z = 92 \\ 10y + 5z = 85 \end{cases}$$

Anulemos a segunda incógnita da terceira equação:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10y + 6z = 92 \\ 10y + 5z = 485 \end{cases} \quad \underline{L_2 - L_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10y + 6z = 92 \\ z = 7 \end{cases}$$

Neste último sistema, a solução encontrada corresponde à mesma do sistema original, mas apresenta um grau de dificuldade menor, no que diz respeito às operações de substituições envolvidas.

Substituindo na segunda equação o valor de  $z = 7$ , obtido na terceira equação, temos,

$$10y + 6 \cdot 7 = 92 \Rightarrow 10y + 42 = 92 \Rightarrow 10y + 42 - 42 = 92 - 42$$

$$\Rightarrow 10y = 50 \Rightarrow \frac{10y}{10} = \frac{50}{10} \Rightarrow y = 5$$

Substituindo, na primeira equação, os valores de  $z$  e  $y$  obtidos anteriormente, temos,

$$x + 5 + 7 = 20 \Rightarrow x + 12 = 20 \Rightarrow x + 12 - 12 = 20 - 12 \Rightarrow x = 8$$

Verifiquemos se os valores encontrados satisfazem às equações.

Temos sua modelagem, via letras, dada por:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x + 3y + 5z = 114 \\ 3x + y + 2z = 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 5 + 7 = 20 \\ 8 \times 8 + 3 \times 5 + 5 \times 7 = 64 + 15 + 35 = 114 \\ 3 \times 8 + 5 + 27 = 24 + 5 + 14 = 43 \end{cases}$$

Respondendo à pergunta, um sanduíche custa R\$8,00, um refrigerante custa R\$5,00 e uma sobremesa custa R\$7,00.

# Capítulo II. Observação de padrões

## Parte I

Finalizamos o capítulo anterior usando o método dos chineses, já adaptado, para a resolução de sistemas lineares de ordem 2 e 3. Vamos observar de forma mais geral o que já foi feito nos exemplos finais do capítulo anterior.

i. Caso  $2 \times 2$ .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{multiplicada por } (a_{21}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{multiplicada por } (a_{11}) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (\cdot(a_{21})) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (\cdot(a_{11})) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 & \text{Subst. } L_2 \text{ por } L_1 - L_2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 & (L_1 - L_2) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + & a_{12}a_{21}x_2 & = & a_{21}b_1 \\ & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = & a_{21}b_1 \\ & x_2 & = & \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{assim } x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Encontraremos o valor de  $x_1$  por substituição de  $x_2$  na primeira equação do sistema inicial.

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 &\Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = b_1 \\
 &\Rightarrow a_{11}x_1 = b_1 - a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 &\Rightarrow a_{11}x_1 = \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 &\Rightarrow a_{11}x_1 = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{12}a_{21} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 &\Rightarrow a_{11}x_1 = \frac{b_1a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 &\Rightarrow a_{11}x_1 = \frac{a_{11}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \Rightarrow x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
 \end{aligned}$$

ii. Caso  $3 \times 3$ .

Utilizaremos o mesmo processo para um sistema linear com três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
 \end{cases}$$

Realizaremos operações envolvendo a 1ª e a 2ª equações e, em seguida, a 1ª e a 3ª equações.

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \cdot \underline{(a_{21})} \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \cdot \underline{(a_{11})}
 \end{cases} \\
 \Rightarrow &\begin{cases}
 a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 + a_{13}a_{21}x_3 = a_{21}b_1 \\
 a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 = a_{11}b_2 \quad \underline{L_1 - L_2}
 \end{cases} \\
 &(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_3 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \quad \langle I \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \cdot \underleftarrow{(a_{31})} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \cdot \underleftarrow{(a_{11})} \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = a_{31}b_1 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 = a_{11}b_3 \quad L_1 - L_2 \end{cases} \\
& (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_2 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_3 = a_{31}b_1 - a_{11}b_3 \quad \langle II \rangle \\
& \begin{cases} (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_3 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \quad \langle I \rangle \\ (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_2 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_3 = a_{31}b_1 - a_{11}b_3 \quad \langle II \rangle \end{cases} \\
& \begin{cases} (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_3 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \\ (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_2 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_3 = a_{31}b_1 - a_{11}b_3 \end{cases} \cdot \frac{a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \cdot L_2 - L_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} - (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) \right] \cdot x_3 = \dots \\
& \dots = \frac{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{21}b_1 - a_{11}b_2)}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} - (a_{31}b_1 - a_{11}b_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \right] \cdot x_3 = \dots \\
& \dots = \frac{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}b_1 - a_{11}b_3)}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})] \cdot x_3 = \dots \\
& \dots = (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}b_1 - a_{11}b_3)
\end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{21}b_1 - a_{11}b_2) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}b_1 - a_{11}b_3)}{(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})}$$

$$x_3 = \frac{\begin{array}{ccccccc} a_{12}a_{31}a_{21}b_1 & - & a_{11}a_{31}a_{11}b_2 & - & a_{11}a_{32}a_{21}b_1 & + & a_{11}a_{32}a_{11}b_2 & \dots \\ \dots & - & a_{12}a_{21}a_{31}b_1 & + & a_{12}a_{21}a_{11}b_3 & + & a_{11}a_{22}a_{31}b_1 & - & a_{11}a_{22}a_{11}b_3 & \dots \end{array}}{\begin{array}{ccccccc} a_{12}a_{31}a_{13}a_{21} & - & a_{12}a_{31}a_{11}a_{23} & - & a_{11}a_{32}a_{13}a_{21} & + & a_{11}a_{32}a_{11}a_{23} & \dots \\ \dots & - & a_{12}a_{21}a_{13}a_{31} & + & a_{12}a_{21}a_{11}a_{33} & + & a_{11}a_{22}a_{13}a_{31} & - & a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} & \dots \end{array}}$$



Vemos, então, que é possível montar, a partir de um sistema como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

uma tabela apenas com os coeficientes das incógnitas (na ordem em que aparecem em cada equação), como, por exemplo:

$$I \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Notemos que podemos associar o número que aparece no denominador, tanto de  $x_1$ , quanto de  $x_2$ , a essa tabela, ou seja,  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . A partir dessa associação, podemos concluir que os valores encontrados nos numeradores de  $x_1$  e  $x_2$  são os números associados às seguintes tabelas:

$$II \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad III \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Chamamos a atenção para o fato de que a solução do sistema com  $x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$  e  $x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$  só faz sentido no caso de termos, como no sistema proposto, o número de equações igual ao número de incógnitas e os denominadores serem diferentes de zero, para garantir que se possa determinar o quociente para cada incógnita.

No caso de um sistema  $3 \times 3$ , como  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$  a tabela com os coeficientes é  $I \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  e o número associado a essa tabela, o qual encontramos nos denominadores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , é  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ .

Assim como no caso  $2 \times 2$ , observamos que os números encontrados nos numeradores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são associados às tabelas  $\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$ , respectivamente.

Também aqui é preciso ter o número de equações igual ao número de incógnitas e os denominadores diferentes de zero, para determinar que se possa efetuar o quociente para cada incógnita.

## Parte II

Como surgiu essa associação? Como obter esse número caso a tabela seja quadrada de ordem maior que 3?

Nesta seção procuramos responder a esses questionamentos e mostrar que, com a ajuda de alguns conceitos estudados em outros tópicos da matemática, podemos dar uma resposta satisfatória às perguntas do início desta seção.

Em matemática, dado um conjunto de elementos  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , cada organização diferente desses elementos é uma permutação deles.

Assim, para o conjunto  $\{1, 2\}$  podemos montar as permutações  $[1\ 2]$  e  $[2\ 1]$ .

Da mesma forma, no para o conjunto  $\{1, 2, 3\}$  podemos montar as permutações  $[1\ 2\ 3]$ ,  $[2\ 3\ 1]$ ,  $[3\ 1\ 2]$ ,  $[3\ 2\ 1]$ ,  $[1\ 3\ 2]$ ,  $[2\ 1\ 3]$ .

Em geral, a quantidade de permutações de  $n$  objetos distintos é dada pelo valor  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ , chamado fatorial de  $n$ .

No caso  $\{1, 2\} \rightarrow (1, 2)$  e  $(2, 1) \rightarrow 2 = 2 \times 1 = 2!$

No caso  $\{1, 2, 3\} \rightarrow (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \rightarrow 6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$

Observemos mais de perto para verificar se conseguimos identificar algum padrão nas relações que associam um número a cada tabela.

Se olharmos para a solução do sistema de ordem 2, veremos que, em cada parcela, as primeiras entradas de cada fator do produto são  $[1\ 2]$ , conforme a expressão  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , na qual observamos que as segundas entradas são as permutações que conseguimos com esses elementos, a saber  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ .

Ao observarmos a solução do sistema de ordem 3, percebemos que há um padrão que se repete, pois vemos que, em cada parcela, as primeiras entradas de cada fator do produto são  $[1\ 2]$ , conforme a expressão  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ , e as segundas entradas são as permutações que conseguimos com esses elementos, a saber  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$ ,  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ .

Observação: as expressões anteriores representam a somatória de todos os produtos possíveis envolvendo os elementos da tabela dada, de tal modo que em cada parcela -



formada por um produto  $\cdot$ , temos um, e apenas um, elemento de cada linha e de cada coluna, conforme vemos na ilustração a seguir.

$$\left| \begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{array} \right|$$

Entendendo melhor essas permutações.

Chamemos  $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  o conjunto dos  $n$  primeiros números naturais. Assim,  $S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = \{1, 2, 3\}, \dots$

Encontraremos as permutações  $P_n$ , fixando o conjunto original e agrupando os termos em suas possíveis permutações.

a) Permutações sobre  $S_2 = \{1, 2\}$

$$P_1 \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \quad P_2 \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

b) Permutações sobre  $S_3 = \{1, 2, 3\}$

$$P_1 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad P_2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \quad P_3 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$P_4 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \quad P_5 \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad P_6 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

A partir do exemplo anterior,

i. a permutação  $P_1$  será chamada de identidade, pois temos a mesma ordem nas duas linhas.

$$P_1 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

ii. na permutação  $P_2$ , trocando o número 2 pelo número 3 na segunda linha, obtemos exatamente os números que aparecem na primeira linha.

$$P_2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad P_1 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Consideremos que queremos transformar cada permutação na permutação inicial  $(1\ 2\ 3)$ , trocando de lugar, a cada etapa, apenas dois números. Em seguida, contamos o número de etapas que foram necessárias.

No caso de  $P_2$  para  $P_1$ , necessitamos apenas de uma etapa, portanto o número de trocas dessa permutação é o número ímpar 1.

iii. na permutação  $P_5$ , se trocarmos o número 3 pelo número 1 na segunda linha, ainda não conseguiremos obter a permutação identidade, que só aparecerá ao realizarmos uma segunda troca.

$$P_5 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \longrightarrow P_2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \longrightarrow P_1 \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Assim, necessitamos de duas trocas para obtermos a identidade, portanto o número de etapas dessa permutação é o número par 2.

Com esses passos iniciais, analisaremos a paridade dessas permutações, determinando que uma permutação é par caso necessite de um número par de trocas para transformá-la na identidade, ou ímpar quando necessita de um número ímpar de trocas para transformá-la na identidade.

Definamos, então, o sinal da permutação pela sua paridade, utilizando a expressão,

$$\text{sinal}(P) = \begin{cases} +, & \text{se } P \text{ é par ou zero} \\ -, & \text{se } P \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Verificamos que há uma inversão na permutação sempre que um número maior precede um menor. Assim, uma maneira interessante de obter a paridade, portanto o sinal, da permutação  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , consiste nos seguintes passos:

- contamos os números menores que  $p_1$  que estão à sua frente na permutação;
- a seguir, contamos os números menores que  $p_2$  que estão à sua frente na permutação;
- mantemos essa contagem para  $p_3, \dots, p_{n-1}$ .
- O número total de inversões é dado pela soma dos números obtidos em cada passo anterior.
- Tendo em vista que o número total de inversões corresponde a um possível número de trocas para transformar a permutação na identidade, a paridade desse número é a paridade da permutação.

Obs.: como as permutações são sempre entre pares de números e a ordenação correta deve ser atingida, essa paridade encontrada não será alterada se for feita em uma sequência de permutações diferentes.

Assim, no caso de ordem 2, podemos associar  $\{1, 2\}$  às permutações  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ . A cada uma dessas permutações podemos associar um produto e um sinal.

$$\begin{aligned} (1, 2) &\longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \longleftrightarrow + \\ (2, 1) &\longleftrightarrow a_{12} \cdot a_{21} \longleftrightarrow - \end{aligned}$$

Pois  $(1, 2)$  precisa de zero passo para chegar a  $(1, 2)$ , sendo associado ao sinal de  $+$ . Já  $(2, 1)$  precisa de 1 passo para chegar a  $(1, 2)$ , sendo associado ao sinal de  $-$ . Se juntarmos cada permutação e seu sinal, teremos:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \\ (2, 1) &\longleftrightarrow -a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

Com a soma desses valores, temos  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , que é o número associado à tabela  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Ao fazermos isso para o caso de ordem 3, teremos:

Permutações	Produto	Inversões	Sinal
$(1, 2, 3)$	$\longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	$\longleftrightarrow 0$	$\longleftrightarrow +$
$(2, 3, 1)$	$\longleftrightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	$\longleftrightarrow 2$	$\longleftrightarrow +$
$(3, 1, 2)$	$\longleftrightarrow a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	$\longleftrightarrow 2$	$\longleftrightarrow +$
$(3, 2, 1)$	$\longleftrightarrow a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	$\longleftrightarrow 3$	$\longleftrightarrow -$
$(2, 1, 3)$	$\longleftrightarrow a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	$\longleftrightarrow 1$	$\longleftrightarrow -$
$(1, 3, 2)$	$\longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	$\longleftrightarrow 1$	$\longleftrightarrow -$

Se colocarmos o produto com o sinal associado a cada permutação, teremos:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ (2, 3, 1) &\longleftrightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ (3, 1, 2) &\longleftrightarrow a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ (3, 2, 1) &\longleftrightarrow -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ (2, 1, 3) &\longleftrightarrow -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ (1, 3, 2) &\longleftrightarrow -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Ao somarmos esses produtos, teremos exatamente o número associado à tabela  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$ , que é

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Agora sabemos como obter o número associado a qualquer tabela de ordem  $(n \times n)$ : basta saber quais são todas as permutações de  $(1, 2, \dots, n)$ , qual o sinal de cada permutação, aplicar o sinal e somar todas essas permutações com os seus respectivos sinais.

Exemplo: encontremos o número que podemos associar a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Antes de começarmos, já sabemos que esse número será uma soma de produtos de elementos da forma  $a_{1(i_1)}a_{2(i_2)}a_{3(i_3)}a_{4(i_4)}$ , na qual  $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$  é uma permutação de  $(1, 2, 3, 4)$ , portanto a quantidade de parcelas é dada por

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Temos, então:

Permutações		Produto		Inversões		Sinal
(1, 2, 3, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	0	$\longleftrightarrow$	+
(1, 2, 4, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	1	$\longleftrightarrow$	-
(1, 3, 2, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	1	$\longleftrightarrow$	-
(1, 3, 4, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	2	$\longleftrightarrow$	+
(1, 4, 2, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	2	$\longleftrightarrow$	+
(1, 4, 3, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(2, 1, 3, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	1	$\longleftrightarrow$	-
(2, 1, 4, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	2	$\longleftrightarrow$	+
(2, 3, 1, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	2	$\longleftrightarrow$	+
(2, 3, 4, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(2, 4, 1, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(2, 4, 3, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	4	$\longleftrightarrow$	+
(3, 1, 2, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	2	$\longleftrightarrow$	+
(3, 1, 4, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(3, 2, 1, 4)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(3, 2, 4, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	4	$\longleftrightarrow$	+
(3, 4, 1, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	4	$\longleftrightarrow$	+
(3, 4, 2, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	5	$\longleftrightarrow$	-
(4, 1, 2, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	3	$\longleftrightarrow$	-
(4, 1, 3, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	4	$\longleftrightarrow$	+
(4, 2, 1, 3)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43}$	$\longleftrightarrow$	4	$\longleftrightarrow$	+
(4, 2, 3, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	5	$\longleftrightarrow$	-
(4, 3, 1, 2)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$	$\longleftrightarrow$	5	$\longleftrightarrow$	-
(4, 3, 2, 1)	$\longleftrightarrow$	$a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$	$\longleftrightarrow$	6	$\longleftrightarrow$	+

Se colocarmos o produto com o sinal associado a cada permutação, teremos:

$$\begin{aligned}
(1, 2, 3, 4) &\longleftrightarrow +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \\
(1, 2, 4, 3) &\longleftrightarrow -a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \\
(1, 3, 2, 4) &\longleftrightarrow -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \\
(1, 3, 4, 2) &\longleftrightarrow +a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \\
(1, 4, 2, 3) &\longleftrightarrow +a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \\
(1, 4, 3, 2) &\longleftrightarrow -a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} \\
(2, 1, 3, 4) &\longleftrightarrow -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \\
(2, 1, 4, 3) &\longleftrightarrow +a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} \\
(2, 3, 1, 4) &\longleftrightarrow +a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44} \\
(2, 3, 4, 1) &\longleftrightarrow -a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} \\
(2, 4, 1, 3) &\longleftrightarrow -a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43} \\
(2, 4, 3, 1) &\longleftrightarrow +a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \\
(3, 1, 2, 4) &\longleftrightarrow +a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \\
(3, 1, 4, 2) &\longleftrightarrow -a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \\
(3, 2, 1, 4) &\longleftrightarrow -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44} \\
(3, 2, 4, 1) &\longleftrightarrow +a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41} \\
(3, 4, 1, 2) &\longleftrightarrow +a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \\
(3, 4, 2, 1) &\longleftrightarrow -a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} \\
(4, 1, 2, 3) &\longleftrightarrow -a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \\
(4, 1, 3, 2) &\longleftrightarrow +a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42} \\
(4, 2, 1, 3) &\longleftrightarrow +a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43} \\
(4, 2, 3, 1) &\longleftrightarrow -a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \\
(4, 3, 1, 2) &\longleftrightarrow -a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \\
(4, 3, 2, 1) &\longleftrightarrow +a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}
\end{aligned}$$

Com a soma de todos os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
&a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} + a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} + \\
&a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44} + a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41} + \\
&a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42} + a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42} + a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43} + a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41} - \\
&a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} - a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} - \\
&a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} - a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44} - \\
&a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} - a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} - a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} - a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}
\end{aligned}$$

De forma geral, podemos definir essa associação de números a tabelas quadradas como determinante de ordem  $n$ , que obtemos pela soma de todos os produtos elementares com sinal da tabela a ele associada.

Isso significa que, considerando  $P =$  permutações de  $(1, 2, \dots, n) = i_1, i_2, \dots, i_n$ ,

---

$$\text{se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ então } \det(A) = \sum_{i \in P} = \text{signal}(P) a_{1(i_1)} a_{2(i_2)} \cdots a_{n(i_n)}$$

Algumas observações são necessárias.

i. A essas tabelas que encontramos e às quais nos referimos até aqui, damos o nome de matrizes. Em especial, trabalhamos até aqui com matrizes ditas quadradas, aquelas em que a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas. Para tais matrizes, poderíamos representar os termos de acordo com a linha e a coluna que ocupam.

ii. O estudo das matrizes, suas propriedades e operações, apesar de não ser o objeto principal deste trabalho, permite análises importantes, com aplicações em diversos ramos de conhecimento.

iii. Como em outros tópicos da matemática, as matrizes têm características, relações e operações próprias. Algumas dessas relações e operações envolvendo as matrizes que podemos citar são:

- igualdade;
- adição/subtração;
- multiplicação por um escalar;
- multiplicação de matrizes;
- inversão;
- transposição (troca de posições entre linhas e colunas).

## Capítulo III. Os determinantes

Chegamos à definição de determinante de uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  no capítulo anterior, entretanto a definição parece um pouco complicada.

Em certa altura do desenvolvimento dos estudos sobre determinantes e matrizes, observou-se que, tomando uma matriz quadrada de ordem 2 e traçando diagonais, como na figura 1, atribuindo o sinal positivo à diagonal descendente e o sinal negativo à diagonal ascendente, e colocando esses sinais no produto dos termos sobre essas diagonais, obtemos  $a_{11}a_{22}$  e  $-a_{12}a_{21}$ , cuja soma é representada pela expressão  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , que é o determinante da matriz  $A$ .

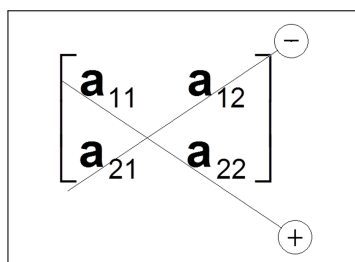


Figura 1: Matriz quadrada de ordem 2

No livro "História da Matemática", o autor Carl B. Boyer (1996) relata um comentário que Colin Maclaurin (1698 - 1746) fez em sua obra "*Treatise of Algebra*", ao resolver sistemas de equações, anos antes de Cramer sistematizar a sua famosa regra. Segundo Boyer, Maclaurin indicava que o denominador encontrado na solução de ordem 2 é "a diferença dos produtos dos coeficientes opostos, tirados das ordens que envolvem as duas quantidades incógnitas", enquanto na de ordem 3, os denominadores são "todos os produtos que podem ser formados de três coeficientes opostos, tirados das ordens que envolvem as três quantidades desconhecidas".

Então uma pergunta que surge normalmente é: será que pode haver um padrão que nos dê uma forma mais rápida de calcular determinantes?

Se fizermos o mesmo procedimento para uma matriz quadrada de ordem 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , obteremos:

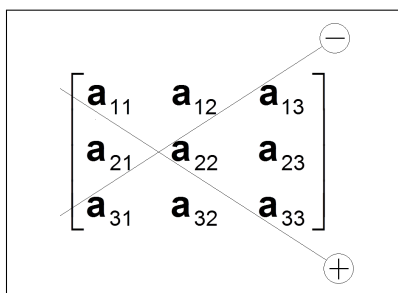


Figura 2: Matriz quadrada de ordem 3

O que nos dá a expressão  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ , que é diferente do determinante de  $A$ , pois sabemos que este possui 6 termos na soma do seu desenvolvimento.

Contudo, o professor da universidade francesa de Strasbourg, Pierre Frederic Sarrus (1833, apud BATISTA; LUCAS, 2005), observou em certo momento que, se repetirmos a primeira coluna depois da terceira, conforme a figura 3, e acrescentarmos uma diagonal, obteremos,

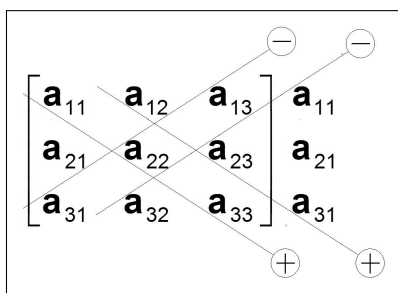


Figura 3: Matriz quadrada de ordem 3 com repetição da 1ª coluna

Vemos que  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$  não é o determinante de  $A$ , mas está bem mais próximo que a expressão anterior. Podemos agora acrescentar a segunda coluna, ao final, como na figura 4, e repetir o processo.

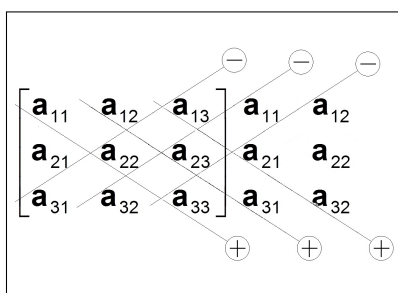


Figura 4: Matriz quadrada de ordem 3 com repetição da 1ª e da 2ª colunas

Temos  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ , que é o determinante de  $A$ .



Esse procedimento é conhecido como Regra de Sarrus e serve para cálculo de determinantes de ordem 3.

É possível, então, afirmar que há um padrão?

Podemos notar que não, pois se não tivéssemos encontrado o determinante procurado nesse passo e tentássemos acrescentar mais uma coluna (no caso a terceira, no final), começaríamos a repetir produtos, conforme vemos na figura 5, a qual nos permite observar que o último produto com sinal  $+$  é igual ao primeiro com o mesmo sinal.

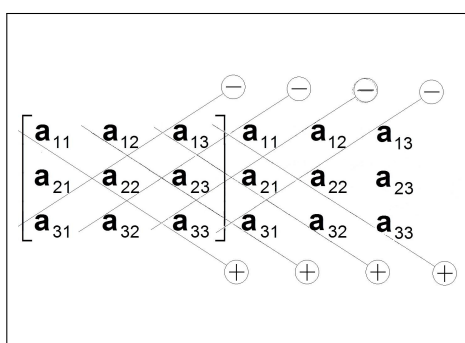


Figura 5: Matriz quadrada de ordem 3 com repetição das três colunas

Pelo procedimento acima, vemos que o número máximo de colunas que podemos acrescentar para obtermos produtos diferentes é  $n - 1$ .

Se repetirmos esse procedimento para uma matriz de ordem 4, então o número máximo de parcelas diferentes que conseguiremos é de 4 com sinal positivo e 4 com sinal negativo, mas já vimos que o número de produtos que somamos ao calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 4 é  $4! = 24$ , tendo 12 termos positivos e 12 termos negativos.

Mesmo não havendo uma forma fácil de calcular o determinante de uma matriz quadrada para todas as ordens, conseguimos formas simples de cálculos, pelo menos para matrizes de ordens 2 e 3.

Mas, se pudéssemos calcular o determinante de ordem 4 reduzindo o nosso trabalho a cálculos de determinantes de ordem 3, o cálculo daquele determinante também seria simplificado. Em outras palavras, seria possível reduzir o cálculo de um determinante de ordem  $n$  ao cálculos de um determinantes de ordem  $n - 1$ ?

Isso foi exatamente o que Laplace fez.

- Se temos uma matriz de ordem 1, ou seja  $A = [a_{11}]$ , então, pela definição, o  $\det(A) = a_{11}$ .

- Se temos uma matriz

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , já sabemos que  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Então olhemos para a primeira linha, na qual temos os elementos  $a_{11}$  e  $a_{12}$ .

O termo  $a_{11}$  multiplica  $a_{22}$  que, observando sob outro olhar, é o determinante da matriz que obtemos ao retirarmos a linha e a coluna do elemento  $a_{11}$  na da matriz original, conforme a figura 6.

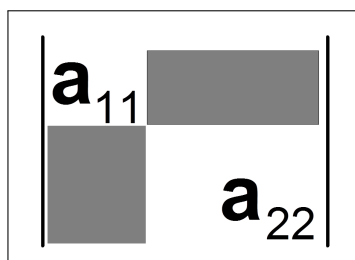


Figura 6: Determinante por Laplace  $\rightarrow 1$

Do mesmo modo, podemos ver o produto  $a_{12}a_{21}$  como o produto entre o elemento  $a_{12}$  e o determinante da matriz que sobra ao retirarmos a linha e a coluna às quais esse elemento pertence, como na figura 7.



Figura 7: Determinante por Laplace  $\rightarrow 2$

Assim como fizemos com a linha 1, poderíamos ter feito com a linha 2. Vejamos que  $a_{12}a_{21}$  é o produto entre o elemento  $a_{21}$  e o determinante da matriz que obtemos quando retiramos a linha e a coluna do elemento  $a_{21}$ , como na figura 8.

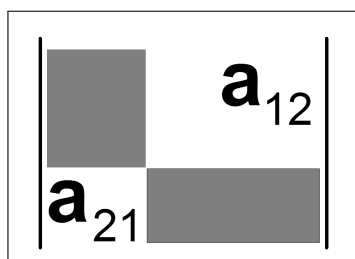


Figura 8: Determinante por Laplace  $\rightarrow 3$

Por fim,  $a_{11}a_{22}$  é o produto de  $a_{22}$  pelo determinante da matriz obtida quando retiramos a linha e a coluna do elemento  $a_{22}$ , conforme a figura 9.

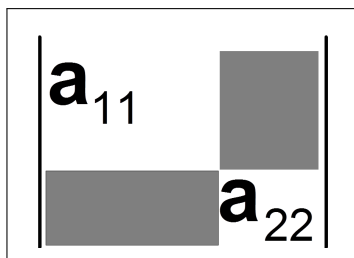


Figura 9: Determinante por Laplace  $\rightarrow$  4

Notamos que foi possível obter os produtos que aparecem na expressão do determinante. Entretanto, falta saber qual o sinal que cada produto desses terá.

Observamos que, quando escolhemos a primeira linha, o produto associado ao termo  $a_{11}$  tem sinal  $+$  e o produto associado a  $a_{12}$  tem sinal  $-$ .

Quando escolhemos a segunda linha, o produto associado ao termo  $a_{21}$  deve ter sinal  $-$  e o associado ao  $a_{22}$ , sinal  $+$ .

Se observarmos com mais cuidado, constataremos que, toda vez que o elemento escolhido tem a soma dos índices a ele associado como um valor par, o sinal é  $+$  e, quando a soma dos seus índices resulta em um valor ímpar, o sinal é  $-$ .

Chamemos  $A_{ij}$  a matriz que obtemos com a retirada da linha  $i$  e da coluna  $j$  de uma matriz  $A$ .

Assim, acabamos de constatar que, no cálculo do determinante de ordem 2, quando escolhemos a primeira linha, temos

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot \det(A_{11}) \cdot a_{11} + (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{12}) \cdot a_{12}$$

e, quando escolhemos a segunda linha,

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot \det(A_{21}) \cdot a_{21} + (-1)^{2+2} \cdot \det(A_{22}) \cdot a_{22}.$$

Ou seja, reduzimos o cálculo de um determinante de ordem 2 a cálculos de determinantes de ordem 1.

Cabe observar que precisamos utilizar todas as entradas da linha escolhida.

Se utilizarmos a mesma estratégia com colunas, ou seja, escolhendo  $a_{11}$  e  $a_{21}$  primeiramente e  $a_{12}$  e  $a_{22}$  em seguida, chegamos à expressão do determinante, com:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot \det(A_{11}) \cdot a_{11} + (-1)^{2+1} \cdot \det(A_{21}) \cdot a_{21}$$

e

$$\det(A) = (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{12}) \cdot a_{12} + (-1)^{2+2} \cdot \det(A_{22}) \cdot a_{22},$$

que são coincidentes.

Novamente a pergunta: será que encontramos um padrão?

Verifiquemos o que acontece quando tomamos uma matriz de ordem 3.

- Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , já sabemos que seu determinante é calculado através da expressão:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Então olhemos para a primeira linha, na qual temos os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{13}$ .

O termo  $a_{11}$  multiplica  $(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32})$  que, observando sob um outro olhar, é o determinante da matriz que obtemos ao retirarmos a linha e a coluna do elemento  $a_{11}$  da matriz original, conforme a figura 10.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \blacksquare & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

Figura 10: Determinante por Laplace  $\rightarrow$  5

Do mesmo modo, podemos ver a expressão  $a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}$  como o produto entre o elemento  $a_{12}$  e o determinante da matriz que sobra ao retirarmos a linha e a coluna às quais esse elemento pertence, como na figura 11.

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & \mathbf{a}_{12} & \blacksquare \\ \mathbf{a}_{21} & \blacksquare & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \blacksquare & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

Figura 11: Determinante por Laplace  $\rightarrow$  6

Em relação ao termo  $a_{13}$ , vemos a expressão  $a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$  como o produto entre o elemento  $a_{13}$  e o determinante da matriz que sobra ao retirarmos a linha e a coluna às quais esse elemento pertence, como na figura 12.

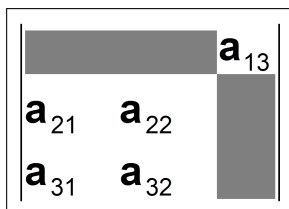


Figura 12: Determinante por Laplace  $\rightarrow$  7

Relembremos o caso de ordem 2, no qual tomamos todos os elementos  $a_{ij}$  de uma linha e multiplicamos cada um deles por  $(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ , em que  $A_{ij}$  é a matriz obtida quando retiramos a linha  $i$  e a coluna  $j$  do elemento escolhido.

Assim, no caso de ordem 3, temos:

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det(A_{11}) = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{12} \cdot \det(A_{12}) = -a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{13} \cdot \det(A_{13}) = a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Verifiquemos se esse procedimento também funciona com a linha 2, a partir da qual obtemos os termos:

$$a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}(-1)^3 \cdot \det(A_{21}) = -a_{21} \cdot (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}(-1)^4 \cdot \det(A_{22}) = a_{22} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

$$a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{23}(-1)^5 \cdot \det(A_{23}) = -a_{23} \cdot (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

cuja soma é:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23}a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Observamos, novamente, que precisamos utilizar todas as entradas da linha escolhida.

É, pois, possível dizer que há um padrão?

Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827 ) mostrou que sim, que sempre somos capazes de calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem  $n$  fazendo cálculos de determinantes de matrizes de ordem  $n - 1$ . Esse "adrão" é conhecido como o Desenvolvimento de Laplace.

Observação 1: O Desenvolvimento de Laplace também é válido quando escolhemos uma coluna ao invés de uma linha.

Observação 2: É necessário, ainda, observar que os valores  $b_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ , que calculamos anteriormente, formam uma matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

com o mesmo número de linhas e colunas de  $A$ . Essa matriz é chamada matriz dos cofatores de  $A$ , importante para outros tópicos não abordados neste trabalho.

- O que aconteceria no caso de um determinante  $4 \times 4$ ? As expressões encontradas para casos  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$  são análogas a esse caso? Vejamos a figura 13.

Figura 13: Determinante por Laplace → 8

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \dots \\ \dots a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Observamos, nesse cálculo, que o valor encontrado, quando o sistema é de ordem 4, não obedece a uma regra prática, como nos casos de ordem 2 e 3, sendo calculado apenas pelo Desenvolvimento de Laplace, através do qual encontramos, ao escolhermos a linha 1, a seguinte expressão:

$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot \det(A_{11}) = a_{11} \cdot \det(A_{11})$$

$$a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{12} \cdot (-1)^3 \cdot \det(A_{12}) = -a_{12} \cdot \det(A_{12})$$

$$a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{13} \cdot (-1)^4 \cdot \det(A_{13}) = a_{13} \cdot \det(A_{13})$$

$$a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = a_{14} \cdot (-1)^5 \cdot \det(A_{14}) = -a_{14} \cdot \det(A_{14})$$

A análise que acabamos de fazer, associada à definição que demos através de permutações, possibilita um entendimento mais completo da definição de determinante, dada por Laplace, aqui indicada em duas etapas:

1. Dada uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , de ordem  $n \geq 2$ , chamamos de cofator do elemento  $a_{ij}$  e indicamos por  $A_{ij}$  ao seguinte número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij},$$

em que  $D_{ij}$  é o determinante de ordem menor, formado pelos elementos restantes, quando retiramos a linha e a coluna às quais pertence o elemento  $a_{ij}$ .

2. Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , de ordem  $n \geq 2$ . O determinante da matriz  $A$  é a somatória dos produtos dos elementos  $a_{ij}$  pelos seus respectivos cofatores  $A_{ij}$ , em relação a qualquer linha ou coluna da matriz  $A$ . Assim, utilizando a definição para a primeira linha da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

temos  $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ .



# Capítulo IV. Observações e Aplicações

Diante de problemas como os apresentados inicialmente, além de outros que foram objetos de estudos, verificamos que matrizes e determinantes são originalmente esquemas associados à solução de sistemas lineares de equações.

Como observamos em variadas situações, podemos ter sistemas que podem não apresentar uma solução única (Sistema Possível e Indeterminado - SPI), ou podem até mesmo não apresentar solução alguma (Sistema Impossível - SI).

Em alguns livros didáticos, há uma classificação dos sistemas lineares quanto ao número de soluções, a qual é feita a partir do recurso à regra de Cramer, como se segue. Consideramos um sistema linear como o representado a seguir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

O falso teste para a determinação do número de soluções reais dessa equação consiste no seguinte procedimento:

- a) Formamos a matriz  $A$  dos coeficientes das incógnitas.
- b) Formamos as matrizes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  como anteriormente (substituição dos coeficientes das incógnitas pelos termos independentes). Nessa estratégia,  $n$  é a ordem da matriz dos coeficientes.
- c) Calculamos os  $n + 1$  determinantes de Cramer, atribuindo-lhes a simbologia  $\det(A_1), \det(A_2), \dots, \det(A_n)$ .

Feito isso, realizamos a análise detalhada a seguir:

- Afirmção I: Se  $\det(A) = 0$  e algum dos determinantes  $\det(A_1), \det(A_2), \dots, \det(A_n)$  é diferente de zero, então o número de soluções é zero.
- Afirmção II: Se  $\det(A) = 0$  e todos os determinantes  $\det(A_1), \det(A_2), \dots, \det(A_n)$  são zero, então o número de soluções é infinito.

- Afirmação III: Se  $\det(A) \neq 0$ , o número de soluções é 1.

Esses três passos constituem o teste que contém um grave equívoco, mas que persiste em muitos textos escolares.

As afirmações I e III são verdadeiras, conseqüências diretas da regra de Cramer.

A afirmação II, no entanto, é falsa, pois há situações que a satisfazem mas não obtêm o resultado que ela indica.

Vejamos um contraexemplo, encontrado em Lima (2005), que comprova o que acabamos de afirmar. Ou seja, basta descobrir uma matriz  $A$  tal que a hipótese "e todos os determinantes são zero" é verdadeira, mas a tese "o número de soluções é infinito" é falsa. Vejamos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0 \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 0 \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 0$$

Pela afirmação II, concluiríamos que "o sistema é indeterminado, pois teríamos"  
 $x = y = z = \frac{0}{0}$ .

Notemos, aqui, que, ao aplicarmos o método da eliminação de Gauss, ficaremos com,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1}} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Mas  $0 = 1$  é, evidentemente, um absurdo. Portanto o sistema é impossível.

Para esses casos, a utilização da regra de Cramer é insuficiente, mas a solução por eliminação de incógnitas em equações, já conhecida pelos chineses, e vista no capítulo II deste trabalho, que foi sistematizada e desenvolvida por Gauss, é indubitavelmente uma forma segura de busca de soluções.

Vejamus uma situação que também explicita a segurança que se tem ao utilizar o método da eliminação gaussiana.

Três amigos, Valdomiro, Joilma e Eunice, têm, cada um, um terreno com respectivamente  $x$ ,  $y$  e  $z$  hectares. A soma das áreas dos três terrenos é de 3 ha. A área do terreno de Joilma, somada com o dobro da área do terreno de Eunice, vale 2 ha. A diferença entre as áreas dos terrenos de Valdomiro e Eunice vale 1 ha. É possível calcular a área exata de cada terreno?

Vamos à solução.

- Teríamos uma igualdade para cada situação descrita, como se segue:

a) a soma das áreas dos três terrenos é de 3 ha:  $x + y + z = 3$ ;

b) a área do terreno de Joilma, somada com o dobro da área do terreno de Eunice, vale 2 ha:  $y + 2z = 2$ ;

c) a diferença entre as áreas dos terrenos de Valdomiro e Eunice vale 1 ha:  $x - z = 1$ .

Ou seja, o problema pode ser expresso pelo sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 - L_3} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_3} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

A solução nos permite perceber que o sistema pode ser resolvido, mas não oferece apenas uma solução, diante da explicação a seguir.

$$y = 2 - 2z$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$x + 2 - 2z + z = 3$$

$$x - z = 1$$

$$x = 1 + z$$

O que nos dá uma terna ordenada do tipo  $(1 + z, 2 - 2z, z)$ , possibilitando infinitas soluções.

Como em outros temas desenvolvidos pela matemática, o trabalho com matrizes e determinantes conduziu a aplicações diferentes das imaginadas inicialmente, por exemplo, o cálculo de áreas e volumes.

Dado um triângulo de vértices  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$ , podemos representá-lo em um plano cartesiano da seguinte maneira: Para o cálculo da área procurada,

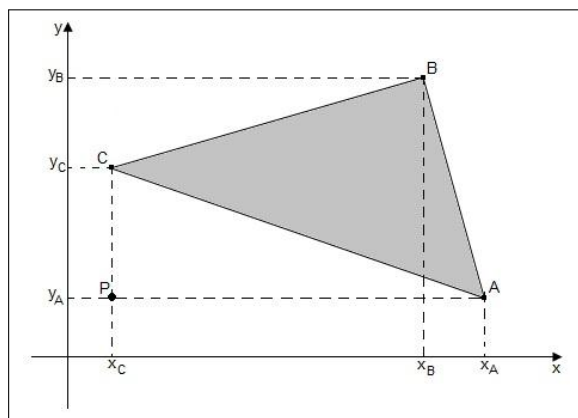


Figura 14: Triângulo Cartesiano 1

retiraremos do quadrilátero  $AMNP$  os triângulos  $AMB$ ,  $BNC$  e  $CPA$ , nos quais

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), M(x_A, y_B), N(x_C, y_B) \text{ e } P(x_C, y_A)$$

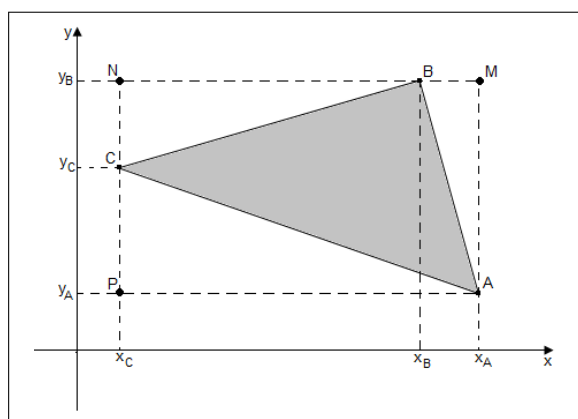


Figura 15: Triângulo Cartesiano 2

$$\text{Área}_{AMNP} = (x_A - x_C) \cdot (y_B - y_A) = x_{AyB} - x_{AyA} - x_{CyB} + x_{CyA}$$

$$\text{Área}_{AMB} = \frac{(x_A - x_B) \cdot (y_B - y_A)}{2} = \frac{x_{AyB} - x_{AyA} - x_{ByB} + x_{ByA}}{2}$$

$$\text{Área}_{BNC} = \frac{(x_B - x_C) \cdot (y_B - y_C)}{2} = \frac{x_{ByB} - x_{ByC} - x_{CyB} + x_{CyC}}{2}$$

$$\text{Área}_{CPA} = \frac{(x_A - x_C) \cdot (y_C - y_A)}{2} = \frac{x_{AyC} - x_{AyA} - x_{CyC} + x_{CyA}}{2}$$

$$\text{Área}_{AMB} + \text{Área}_{BNC} + \text{Área}_{CPA} = \frac{x_{AyB} - x_{AyA} - x_{ByB} + x_{ByA}}{2} + \dots$$

$$\dots \frac{x_{ByB} - x_{ByC} - x_{CyB} + x_{CyC}}{2} + \frac{x_{AyC} - x_{AyA} - x_{CyC} + x_{CyA}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{x_{AyB} - x_{AyA} - x_{ByB} + x_{ByA} + x_{ByB} - x_{ByC} - x_{CyB} + x_{CyC} + x_{AyC} - x_{AyA} - x_{CyC} + x_{CyA}}{2}$$

$$\text{Área}_{AMB} + \text{Área}_{BNC} + \text{Área}_{CPA} = \frac{x_{AyB} - 2x_{AyA} + x_{ByA} - x_{ByC} + x_{AyC} + x_{CyA}}{2}$$

$$\text{Área}_{ABC} = \text{Área}_{AMNP} - (\text{Área}_{AMB} + \text{Área}_{BNC} + \text{Área}_{CPA})$$

$$= x_{AyB} - x_{AyA} - x_{CyB} + x_{CyA} - \frac{x_{AyB} - 2x_{AyA} + x_{ByA} - x_{ByC} + x_{AyC} + x_{CyA}}{2}$$

$$= \frac{2(x_{AyB} - x_{AyA} - x_{CyB} + x_{CyA}) - (x_{AyB} - 2x_{AyA} + x_{ByA} - x_{ByC} + x_{AyC} + x_{CyA})}{2}$$

$$= \frac{2x_{AyB} - 2x_{AyA} - 2x_{CyB} + 2x_{CyA} - x_{AyB} + 2x_{AyA} - x_{ByA} + x_{ByC} - x_{AyC} - x_{CyA}}{2}$$

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{x_{AyB} - x_{CyB} + x_{CyA} - x_{ByA} + x_{ByC} - x_{AyC}}{2}$$

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{x_{AyB} + x_{CyA} + x_{ByC} - x_{CyB} - x_{AyC} - x_{ByA}}{2}$$

Verificamos assim, no numerador, produtos com sinal + em três deles e sinal - em

outros três, mas cada um com dois fatores. É possível fazer uma analogia com um determinante de ordem 3, que também tem (usando a Regra de Sarrus) três parcelas com sinal + e três com sinal -, no entanto cada uma com três fatores.

Usando o fato de que o 1 é o elemento neutro da multiplicação, podemos fazer o seguinte rearranjo:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{x_A \cdot y_B \cdot 1 + x_C \cdot y_A \cdot 1 + x_B \cdot y_C \cdot 1 - x_C \cdot y_B \cdot 1 - x_A \cdot y_C \cdot 1 - x_B \cdot y_A \cdot 1}{2}$$

que corresponde à metade do determinante da matriz  $A$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que, se

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} x_C & y_B & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{bmatrix}$$

então,

$$\det(A) = -\det(A_1) = \det(A_2) = -\det(A_3) = \det(A_4) = -\det(A_5)$$

Ou seja,

$$|\det(A)| = |\det(A_1)| = |\det(A_2)| = |\det(A_3)| = |\det(A_4)| = |\det(A_5)|$$

Podemos aqui nos referir à propriedade dos determinantes que indica a troca no sinal do seu valor numérico sempre que houver uma troca de posições entre duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), o que nos leva a concluir que a área da região triangular de vértices  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$  é dada por:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\det(A)|$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos estender esse conceito para a área de um paralelogramo de vértices  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$  e  $D(x_D, y_D)$ .

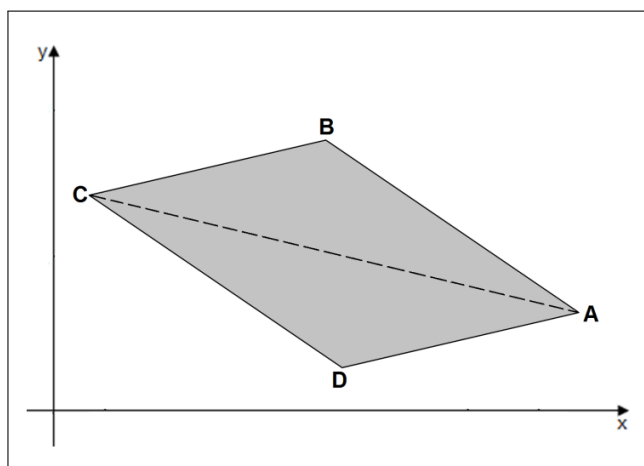


Figura 16: Paralelogramo Cartesiano

Para tanto, basta observar que a diagonal  $AC$  do paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes (caso de congruência  $LAL$ ), assim:

$$\text{Área}_{ABCD} = |\det(A)|$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}.$$

## Capítulo V. Conclusão

Neste trabalho, começamos estudando o método apresentado no livro "Os nove capítulos sobre a arte matemática" e explicamos como era utilizado. Dessa explicação, conseguimos modelar as informações por equações lineares e gerar sistemas de equações lineares. Então percebemos que o método resolvia tais sistemas de equações lineares.

Uma pergunta surgiu no nosso estudo: esse método resolve todos os sistemas?

Na busca pela resposta, alguns padrões surgiram e nos levaram à definição de determinantes e matrizes, o que nos levou à resposta de que o método dos chineses valia (para eles), porque eles sempre consideravam, em cada problema, o mesmo número de equações e incógnitas, como também que o determinante da matriz formada com os coeficientes dos sistemas era sempre diferente de zero.

A investigação de um método com mais de mil anos foi capaz de introduzir muitos conceitos matemáticos de forma natural e contextualizada.

Em nossa ótica, referenciada pelo que se expôs neste trabalho, o desenvolvimento histórico dos tópicos aqui estudados, como estratégia de ensino, torna os conteúdos mais lógicos, com padrões observáveis, com teorias desenvolvidas criticamente (como no caso da discussão de um sistema linear, principalmente ao nos depararmos com um sistema impossível ou indeterminado) e próximas à realidade do estudante, dinamizando as ações em sala de aula e elevando a qualidade dos processos de ensino-aprendizagem da matemática.



# Referências

- Batista, Irinéa De Lourdes, Luccas Simone, *Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática - uma proposta de interação entre domínios de conhecimento*, In: Anais (do) III Encontro da Rede Paranaense de Pesquisa em História e Filosofia da Ciência, Curitiba, 16 a 18 de março, 2005. Curitiba: UFPR, 2005.
- Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Tradução Elza F. Gomide - Tradução de *A History of Mathematics* - Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996.
- Carrera, Josep Pla i., *Liu Hui: Nueve Capítulos de Las Matemáticas CHINAS*, Nivola Libros Y Ediciones, S.L., Madrid. 2009.
- Dante, Luiz Roberto, *Matemática: Contexto e Aplicações, vol. 2*, São Paulo: Ática, 2010.
- Eves, Howard., *Introdução à História da Matemática*, Tradução Hygino H. Domingues - Tradução de *An Introduction to the History of Mathematics* - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- Iezzi, Gelson [et al.], *Matemática: Ciência e aplicações, vol. 2*, 5ª ed. São Paulo: Atual, 2010.
- Lima, Elon Lages [et al.], *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- Paiva, Manoel Rodrigues, *Matemática: Paiva, vol. 2*, São Paulo: Moderna, 2010.