

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)**

Miguel Angelo Moraes de Sousa

EXPERIMENTOS DE TRIGONOMETRIA EM SALA DE AULA

Santarém – PA
2014

Miguel Angelo Moraes de Sousa

EXPERIMENTOS DE TRIGONOMETRIA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

EXPERIMENTOS DE TRIGONOMETRIA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr.

Orientador – UFOPA

Prof. Dr.

Examinador – UFOPA

Prof. Dr.

Examinador –

À Leilane

AGRADECIMENTOS

A Deus, todo poderoso, por minha vida, por minha saúde e por minha família.

À Leilane, minha esposa, minha amada, por seu carinho, compreensão e dedicação; sem ela esse trabalho não seria possível, obrigado por me aturar nestes meses.

Aos meus pais, maravilhosos educadores.

Aos meus irmãos, pelo apoio.

Ao meu orientador, Professor Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz, pela orientação e pela inspiração.

A todos os professores do PROFMAT-UFOPA, pois mesmo com todas as dificuldades encontradas, sempre buscaram dar o melhor de si.

Aos colegas da turma de mestrado pela companhia nos estudos, pelo suporte e pela inspiração.

Aos estudantes participantes da pesquisa.

À equipe gestora da Escola Estadual de Ensino Médio Maestro Wilson Dias da Fonseca.

À Sociedade Brasileira de Matemática.

RESUMO

O professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio tem o dever de conhecer os principais aspectos da Trigonometria, desde a sua história até o sua aplicação na atualidade, para facilitar no ensino de tal tema. Este trabalho mostra o estudo acerca do ensino de Trigonometria, dando enfoque a Trigonometria no triângulo retângulo. A pesquisa envolve duas turmas de 2º Ano da Escola Estadual de Ensino Médio Maestro Wilson Dias da Fonseca. Em uma turma, ensinamos Trigonometria com o auxílio do programa computacional Geogebra e, na outra turma, com uma atividade concreta envolvendo a construção do teodolito escolar e sua utilização para estabelecer a altura de algum objeto. A pesquisa revelou que as duas abordagens aplicadas tornaram o processo de ensino e de aprendizagem participativo, construtivo e interativo, provocando o envolvimento dos alunos. Este trabalho busca auxiliar professores na reflexão de suas práticas de ensino e como uma forma de ajudar o aprimoramento de alunos que tiveram o primeiro contato com este assunto.

Palavras-chave: Trigonometria no triângulo retângulo. Teodolito. Programa computacional

ABSTRACT

The mathematics teacher of Elementary and Secondary Education has the duty to know the principal aspects of trigonometry from its history to its application in the present, to facilitate the teaching of this subject. This work shows the study of the about teaching of Trigonometry, focusing Trigonometry in the right triangle. The research involves two classes of 2nd Year of State High School Maestro Wilson Dias da Fonseca. In a class, we worked teach Trigonometry with the aid of computer program Geogebra and in another class, with a concrete activity involving the construction of school theodolite and its use to measure the height of some object. The research revealed that the two approaches applied have made the process of teaching and participatory learning, constructive and interactive learning, provoking student engagement. This work is intended to assist teachers in reflection of their teaching practice and as a way to help the improvement of students.

Keywords: Trigonometry in the right triangle. Theodolite. Computer program.

Lista de Figuras

Figura 1: Ângulos formados por mãos que apontam para mesma estrela.....	18
Figura 2: Groma.....	18
Figura 3: Heron de Alexandria	19
Figura 4: Dioptra.....	19
Figura 5: Raios solares ao meio dia no solstício de verão de Siena	21
Figura 6: As sombras formadas pela Lua e pela Terra durante o eclipse lunar e o eclipse solar	21
Figura 7: Razão Diâmetro Lunar/Distância Lunar	22
Figura 8: Triângulo retângulo formado por Terra, Sol e Lua.....	23
Figura 9: Ábaco, material dourado e disco de frações.....	30
Figura 10: Esquema ilustrando um campo de futebol	32
Figura 11: Representação de Pontos	33
Figura 12: Reta r	33
Figura 13: A ideia de plano	34
Figura 14: Exemplo da representação de um plano	35
Figura 15: Semirretas formando um ângulo	35
Figura 16: Exemplo de Triângulo	38
Figura 17: Representações de Ângulo Reto	39
Figura 18: Triângulos Retângulos.....	40
Figura 19: Triângulo Retângulo	40
Figura 20: Hipotenusa, Cateto Adjacente e Cateto Oposto.....	41
Figura 21: Triângulo Retângulo	41
Figura 22: Triângulo Retângulo e a Classificação de seus Lados	41
Figura 23: Triângulo Retângulo com a medida de seus lados.....	42
Figura 24: Triângulos Retângulos semelhantes.....	43
Figura 25: Aproximações da função $f(x) = \text{sen}(x)$ através da série de Taylor	44
Figura 26: Teodolito	45
Figura 27: Teodolito Digital.....	45
Figura 28: Eixos e círculos de um teodolito	46
Figura 29: Transferidor de 360° e Transferidor de 180°	46
Figura 30: Esquema de montagem do teodolito escolar com transferidor e canudo	47
Figura 31: Posicionamento durante o uso do teodolito escolar	47
Figura 32: Janela do Geogebra.	50
Figura 33: Centro do Transferidor	52
Figura 34: Estudante exibindo o teodolito que construiu.....	52
Figura 35: Medição de ângulo vertical usando o teodolito	53
Figura 36: Exemplo de medição de altura usando teodolito	53
Figura 37: Terceira questão do diagnóstico	57
Figura 38: Quarta questão do diagnóstico	59
Figura 39: Quinta questão do diagnóstico.....	60
Figura 40: Resposta de um estudante para a quinta questão do diagnóstico.....	62
Figura 41: Sexta questão do diagnóstico.....	62

Figura 42: Terceira questão da avaliação	64
Figura 43: Quarta questão da avaliação	66
Figura 44: Quinta questão da avaliação	67
Figura 45: Sexta questão da avaliação	69

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Resultado da primeira questão do diagnóstico aplicado na turma A	55
Gráfico 2: Resultado da primeira questão do diagnóstico aplicado na turma B	56
Gráfico 3: Resultado da segunda questão do diagnóstico aplicado na turma A.....	56
Gráfico 4: Resultado da segunda questão do diagnóstico aplicado na turma B	57
Gráfico 5: Resultado da terceira questão do diagnóstico aplicado na turma A.....	58
Gráfico 6: Resultado da terceira questão do diagnóstico aplicado na turma B	58
Gráfico 7: Resultado da quarta questão do diagnóstico aplicado na turma A.....	59
Gráfico 8: Resultado da quarta questão do diagnóstico aplicado na turma B	60
Gráfico 9: Resultado da quinta questão do diagnóstico aplicado na turma A.....	61
Gráfico 10: Resultado da quinta questão do diagnóstico aplicado na turma B	61
Gráfico 11: Resultado da sexta questão do diagnóstico aplicado na turma A	63
Gráfico 12: Resultado da sexta questão do diagnóstico aplicado na turma B.....	63
Gráfico 13: Resultado da terceira questão da Avaliação aplicada na turma A	65
Gráfico 14: Resultado da terceira questão da Avaliação aplicada na turma B.....	65
Gráfico 15: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de identificar a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto.	66
Gráfico 16: Comparação entre os resultados da turma B obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de identificar a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto.	67
Gráfico 17: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de calcular o valor de senα , cosα e tga	68
Gráfico 18: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de calcular o valor de senα , cosα e tga	69
Gráfico 19: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de determinar distância usando conhecimento trigonométrico.	70
Gráfico 20: Comparação entre os resultados da turma B obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de determinar distância usando conhecimento trigonométrico.	70

Lista de Tabelas

Tabela 1: Segmentos de retas e suas representações	33
Tabela 2: Semirreta e sua representação	34
Tabela 3: Ângulos medidos em graus, grados e radianos	36
Tabela 4: Classificação de ângulos	38
Tabela 5: Classificação dos triângulos quanto aos lados	39
Tabela 6: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	39
Tabela 7: Razões Trigonométricas	42

Sumário

Introdução.....	14
Capítulo 1: Um Pouco de História da Trigonometria	17
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
1.2. ÂNGULO.....	17
1.3. TRIGONOMETRIA E ASTRONOMIA	19
1.3.1. O Raio e a Circunferência da Terra	20
1.3.2. O Raio da Lua.....	21
1.3.3. A Distância entre a Terra e a Lua	22
1.3.4. A Distância entre a Terra e o Sol	22
1.4. A TRIGONOMETRIA EM VÁRIAS PARTES DO MUNDO	23
Capítulo 2: Ensino de Trigonometria.....	26
2.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS	26
2.2- A VISÃO DOS PCN'S E CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS.....	26
2.3- TRABALHOS CORRELATOS AO TEMA.....	27
2.4- O USO DE MATERIAIS CONCRETOS	29
2.5- O USO DE COMPUTADORES	30
Capítulo 3: Um Pouco de Trigonometria	32
3.1 Qual Trigonometria?.....	32
3.2 Ponto, reta e plano	32
3.3 Ângulo	35
3.3.1 Unidades de Medida.....	35
3.3.2 Conversão de Radianos para Graus	36
3.3.3 Conversão de Graus para Radianos	36
3.3.4 Classificação de Ângulos	37
3.4 Triângulo.....	38
3.4.1 Classificação quanto aos lados	38
3.4.2 Classificação quanto aos ângulos.....	39
3.5 Triângulo Retângulo	39
3.5.1 Hipotenusa e catetos.....	39
3.5.2 Razões Trigonométricas	41
3.5.3 Teorema de Pitágoras.....	43
3.6 Avaliando funções em uma calculadora	44
Capítulo 4: Teodolito	45
Capítulo 5: Metodologia da Pesquisa	48

5.1	Abordagem Metodológica.....	48
5.2	Aulas.....	49
5.2.1	Atividade com o Transferidor.....	49
5.2.2	Aspectos Exclusivos da Turma A.....	49
5.2.3	Aspectos Exclusivos da Turma B.....	51
Capítulo 6:	Resultados e Discussão.....	55
	Considerações Finais.....	72
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74
Anexo A	: A Tabela Trigonométrica.....	76
Anexo B	: Diagnóstico da turma A.....	77
Anexo C	: Diagnóstico da turma B.....	79
Anexo D	: Avaliação da turma A.....	81
Anexo E	: Avaliação da turma B.....	83

INTRODUÇÃO

De acordo com Aranão (2007), a palavra *Matemática* é de origem grega, deriva dos verbos “conhecer, aprender” e a palavra *mathema* significa “o que é ensinado”, ou seja, todas as formas de conhecimento. Porém, mesmo com esta definição tão nobre, é justamente a Matemática a disciplina que é tida como vilã da aprendizagem por grande parte dos estudantes. A Matemática tem como um de seus objetivos: encontrar a solução de problemas. Ironicamente, vários estudantes relatam que a Matemática é o seu problema.

Não seria exagero falar que reclamação de professores sobre o desempenho de estudantes é tão antigo quanto à efetivação de escola para jovens. Hoje, o professor tem várias metodologias que auxiliam no processo de ensino aprendizagem. Neste trabalho serão abordadas duas, o uso de programa computacional e de atividade com material concreto.

É inegável que as escolas não conseguem acompanhar o ritmo frenético da informática. Ainda é possível encontrar professores que não sabem usar computadores. Mas, cada vez mais, os estudantes estão envolvidos com novas tecnologias.

“O papel do professor já não é mais o de transmitir conhecimentos, pois qualquer recurso tecnológico dispõe de mais que informações que o professor. Portanto, o papel do professor passa a ser, sobretudo, o de motivar situações de aprendizagem, organizar tais situações” (PICCOLI, 2006).

A aprendizagem ocorre muito antes do contato com a escola, de modo natural, a criança busca conhecer o mundo que a cerca através de cheiros, sabores, texturas, cores e sons. A curiosidade inata que faz com que fases da aprendizagem sejam por vezes prazerosas, enriquecendo o conhecimento da criança.

A criança busca o conhecimento, movida pela força da necessidade de interagir com o meio. A fala, analisada em vários âmbitos, é complexa e, mesmo assim, após poucos meses de vida, boa parte das crianças arriscam algumas palavras.

A escola tem como um de seus objetivos ajudar as crianças nesta busca por conhecimento. Todavia, não é raro ela ser orientada a ficar em silêncio, sentada e copiar tudo o que for escrito no quadro, entre outros. Desde cedo, sem que se perceba e sem má intenção, aos poucos a criança vira coadjuvante no processo de aprendizagem, resultando na diminuição da sua capacidade autonômica.

No Ensino Médio, não é diferente. O estudante é submetido ao estudo de conteúdos que por muitas vezes é visto com uma grande carga de abstração. O professor tem o dever de encontrar meios para que o assunto se torne mais acessível e mais atraente.

Este trabalho se dedica ao estudo do ensino de uma das mais importantes áreas da Matemática: a Trigonometria. Uma das características mais fascinantes advinda dos conhecimentos de Trigonometria é o fato de podermos medir distâncias que com fita métrica seria muito difícil, muitas vezes até impossível. A Trigonometria teve uso prático na evolução do conhecimento da humanidade, da navegação e da Astronomia principalmente.

Este trabalho tem por objetivo verificar a influência de atividades concretas e de ambientes computacionais no processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria. O material concreto deste trabalho é o teodolito escolar que será construído pelos estudantes e depois usado para aferir um ângulo de inclinação, para poder medir a altura de algum objeto usando conhecimentos trigonométricos. O programa computacional Geogebra será o ambiente computacional escolhido para este trabalho.

No **Capítulo 1** abordaremos alguns aspectos da evolução histórica da Trigonometria, destacando seus principais estudiosos e os povos que mais contribuiram para o seu avanço. O conhecimento sobre a evolução da Trigonometria pode aumentar o interesse do estudante, além de servir como aliado na reflexão da metodologia de ensino.

No **Capítulo 2** mostraremos as dificuldades e métodos do ensino de Trigonometria. Além disso, no final deste capítulo, faremos relatos breves sobre trabalhos correlatos ao nosso tema.

No **Capítulo 3** abordaremos o teodolito que é uma ferramenta que possui a função de medir ângulos verticais e horizontais, dando enfoque para sua história, tipos e formas de utilização. Além disso, mostraremos como construir um teodolito de uma maneira bem simples.

No **Capítulo 4** mostraremos um breve estudo de Trigonometria no triângulo retângulo, o qual servirá de material de apoio para professores, para a reflexão de ordenação dos principais tópicos, bem como a nossa visão acerca de algumas abordagens.

No **Capítulo 5** falaremos sobre as metodologias usadas nesta pesquisa: atividade concreta com o uso do teodolito para determinação de distância e o uso do programa computacional Geogebra, no processo de aprendizagem de Trigonometria.

No **Capítulo 6** mostraremos os resultados da nossa pesquisa, seguidos de análises estatísticas e reflexões.

O uso de atividades concretas bem como uso de ambientes computacionais apresentou respostas positivas no processo de aprendizagem de Trigonometria.

CAPÍTULO 1: UM POUCO DE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Da construção das pirâmides à determinação da altura de um arranha-céu, do cálculo da distância entre a Terra e o Sol à determinação da largura de um riacho; desde o início do estudo da Astronomia até em descobertas tecnológicas mais recentes, a Trigonometria vem auxiliando a humanidade na caminhada ao longo de sua história em busca de novas descobertas.

As informações históricas das formas de como alguns povos foram incrementando os seus conhecimentos, na evolução da Matemática, podem ajudar na aprendizagem dos estudantes, bem como auxiliar o professor na reflexão sobre uma melhor forma de organizar os conteúdos e criar atividades bem atraentes.

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metrum (medir) e significa medidas dos triângulos (MIGUEL, 2009). No estudo da Matemática, o uso do conhecimento de sua história é valioso, para que a ligação que o estudante deve fazer com a evolução do conhecimento matemático o inspire e o incentive a buscar uma constante melhora da aprendizagem. Por esse motivo, será mostrada aqui inicialmente como a Trigonometria evoluiu.

1.2. ÂNGULO

Um dos primeiros conceitos que se deve construir com os estudantes para o ensino da Trigonometria é o conceito do ângulo, pois a Trigonometria é o ramo da Matemática que mais dá importância à conceituação de ângulo. Os ângulos abordados neste trabalho dizem respeito a ângulos no plano, pois existem os chamados ângulos sólidos, definidos no espaço. Miguel (2009) afirma que os gregos antigos concebiam a noção de ângulo, imaginando, por exemplo, duas pessoas apontando para uma mesma estrela, a partir de pontos diferentes da terra, cujas direções tinham um ponto comum, a estrela.

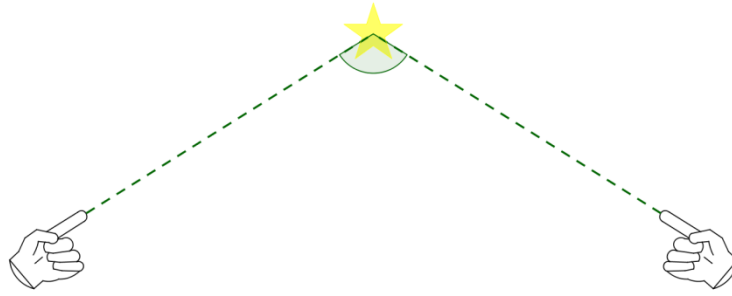


Figura 1: Ângulos formados por mãos que apontam para mesma estrela.

Sampaio (2005) afirma que não é exagero dizer que a raça humana aprendeu primeiro a medir ângulos e somente depois a medir comprimentos. De acordo com Wallis (2005), o primeiro instrumento conhecido para a medição do ângulo era possivelmente a groma egípcia, um instrumento usado para a construção de obras maciças tais como as pirâmides. A groma constitui de uma vara vertical, associada a duas varas horizontais que formam um ângulo reto entre si. Em cada uma das quatro extremidades das varas horizontais e do cruzamento entre elas, há cabos fixados com pedras em suas extremidades inferiores. Usado para inspecionar linhas retas e ângulos retos, porém seu uso foi bastante limitado ao fato de que ele só foi capaz de ser usado em terreno bastante plano e sua precisão limitada pela distância.

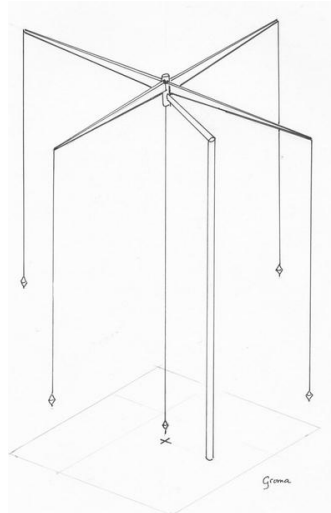


Figura 2: Groma¹

Wallis (2005) afirma que Heron de Alexandria (10-70 dC) descreveu a dioptra, palavra grega que significa instrumento para ver “através de”.

¹ Disponível em: <http://www.romanaqueducts.info/picturedictionary/pd_onderwerpen/tools.htm>



Figura 3: Heron de Alexandria²

A dioptra foi originalmente usada por astrônomos gregos para medir as posições das estrelas. Adaptado ao levantamento, a dioptra é semelhante ao teodolito o qual será descrito no Capítulo 4:. A dioptra é uma versão mais precisa da groma, pode ter sido sofisticada o suficiente para construir um túnel. Possivelmente o primeiro instrumento que poderia ser chamado como tal era a dioptra, o que possivelmente data de cerca de 150 a.C.

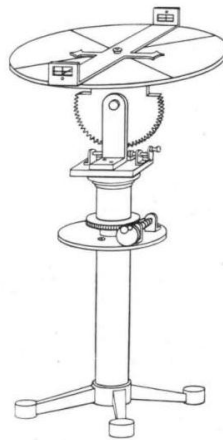


Figura 4: Dioptra³

1.3. TRIGONOMETRIA E ASTRONOMIA

Os babilônios dividiram uma circunferência em 360 partes devido ao uso do sistema de numeração sexagesimal. Além disso, os babilônios tinham em seu calendário um ano de 360 dias, Stewart (2010) ressalta que o número 360 talvez tenha sido uma aproximação conveniente para o número de dias de um ano, mas os babilônios sabiam

² Disponível em: <<http://fernandoloppes.blogspot.com.br/2011/08/formula-de-heron-de-alexandria.html>>

³ Disponível em: <<http://lb.wikipedia.org/wiki/Dioptra>>

que 365 e uma pequena fração era muito mais próximo, e conheciam o tamanho dessa pequena fração.

1.3.1. O Raio e a Circunferência da Terra

Para Hewitt (2002), o tamanho da Terra foi medido pela primeira vez no Egito por Eratóstenes, cerca de 235 a.C. Eratóstenes calculou o comprimento da circunferência da Terra da seguinte forma: o solstício de verão é o momento em que a sombra de uma estaca vertical se apresenta com comprimento mínimo. Se o Sol estiver diretamente acima, a estaca não projetará sombra alguma, o que ocorre em Siena, ao sul de Alexandria, ao meio-dia de 22 de junho.

Ao meio-dia do dia 22 de junho, Eratóstenes mediu a sombra projetada por uma estaca vertical em Alexandria e descobriu que ela tinha $1/8$ da altura da estaca. Assim, o valor de α entre o eixo vertical da estaca e os raios solares (Figura 5) é $7,2^\circ$. Lembrando que $7,2^\circ$ é $7,2/360$, ou melhor, $1/50$ de um círculo. Eratóstenes concluiu que a distância entre Alexandria e Siena deveria ser $1/50$ da circunferência da Terra. Desta forma, a circunferência terrestre é igual a 50 vezes a distância entre estas duas cidades. Tal distância, em terreno completamente plano e era percorrida frequentemente, tinha sido medida pelos agrimensores como igual a 5.000 estádios (800 quilômetros). Assim, Eratóstenes calculou a circunferência terrestre em 50×5.000 estádios = 250.000 estádios o que resulta em 40.000 quilômetros, medida aceita atualmente de acordo com Crease (2006).

Há divergência entre autores sobre o valor usado por Eratóstenes para a medida de um estádio, nada que ofusque o brilhantismo e a beleza de seu experimento. Atualmente, acredita-se que o valor da medida da circunferência da Terra é 40.000 quilômetros.

Ora, o raio de um círculo pode ser obtido pela divisão do comprimento da circunferência deste círculo por 2π . Assim, para $\pi = 3,14$, o raio terrestre mede:

$$\frac{250.000 \text{ estádios}}{2\pi} = \frac{40.000 \text{ quilômetros}}{6,28} \cong 6.370 \text{ quilômetros}$$

Alguns autores, por razões didáticas, arredondam tal valor para 6.400 quilômetros.

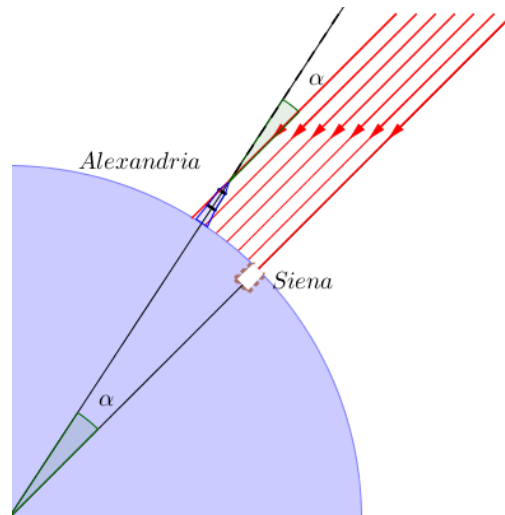


Figura 5: Raios solares ao meio dia no solstício de verão de Siena

1.3.2. O Raio da Lua

Hewitt (2002) afirma que Aristarco comparou os tamanhos da Lua e da Terra observando um eclipse lunar. Ele observou que a sombra feita pela Terra sobre a Lua era 2,5 vezes mais larga que a Lua. Isto parecia indicar que o diâmetro da Lua era 2,5 vezes menor que o diâmetro da Terra. Porém, devido ao enorme tamanho do Sol, a sombra da Terra se estreita, o que é evidenciado por um eclipse solar, como ilustrado na Figura 6 em escala exagerada.

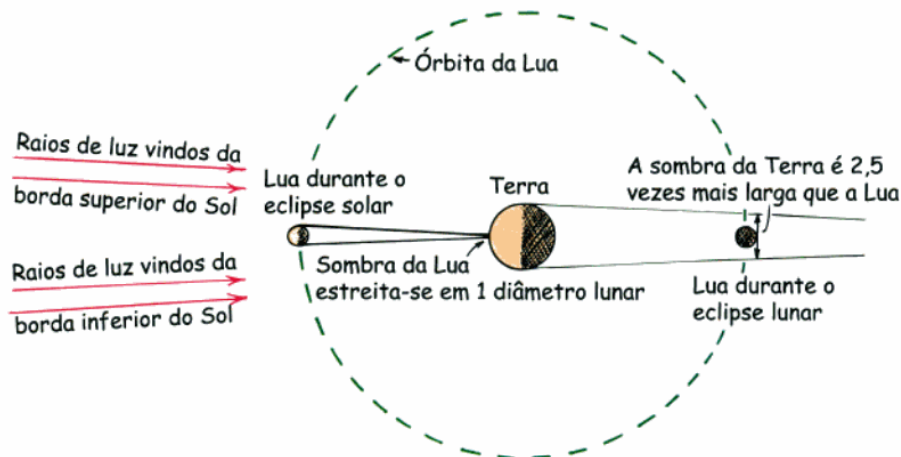


Figura 6: As sombras formadas pela Lua e pela Terra durante o eclipse lunar e o eclipse solar
Fonte: Hewitt, 2002.

Durante o eclipse solar, a sombra da Lua projetada sobre a superfície terrestre é uma região pequena que pode ser considerada um ponto tomando a Terra como referencial, isto é, a sombra da Lua durante o eclipse solar estreita-se em um diâmetro lunar.

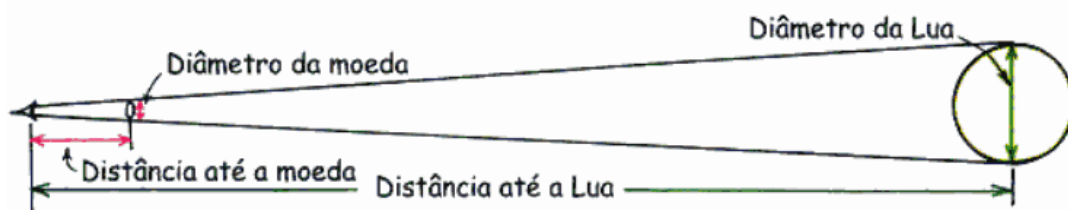
Aristarco acreditava que a distância entre a Terra e a Lua durante os dois eclipses era constante. Assim, a sombra da Terra sobre a Lua deve sofrer o mesmo processo, isto é, a sombra da Terra durante o eclipse lunar estreita-se em um diâmetro lunar. Desta maneira, temos que o diâmetro da Terra é $(2,5+1)$ 3,5 vezes maior que o da Lua. Logo, podemos dizer também que o raio terrestre é 3,5 vezes maior que o da Lua. Portanto, o raio da Lua é:

$$\text{Raio da Lua} = \frac{\text{Raio da Terra}}{3,5} = \frac{6.370 \text{ km}}{3,5} = 1820 \text{ km}$$

De acordo com Luiz (2007), o raio da lua mede aproximadamente 1.750 quilômetros.

1.3.3. A Distância entre a Terra e a Lua

Fixe uma moeda no vidro de uma janela e olhe com um dos olhos de maneira que ela bloqueie exatamente a Lua toda, a distância do seu olho para a moeda é de aproximadamente 110 vezes o diâmetro da moeda. Através de raciocínio geométrico, usando semelhança de triângulos, concluímos que a distância entre a Lua e a Terra é de aproximadamente 110 vezes o diâmetro lunar.



$$\frac{\text{Diâmetro da moeda}}{\text{Distância da moeda}} = \frac{\text{Diâmetro lunar}}{\text{Distância lunar}} = \frac{1}{110}$$

Figura 7: Razão Diâmetro Lunar/Distância Lunar
Fonte: Hewitt, 2002.

Portanto, a distância entre a Terra e a Lua é $110 \times 2 \times 1.750 \text{ km}$, isto é, 385.000 km. Para Faria (2007), atualmente acredita-se que a distância entre a Terra e a Lua (centro a centro) é de 384.400 km.

1.3.4. A Distância entre a Terra e o Sol

Se você repetisse o exercício “moeda sobre a janela” para o caso do Sol (o que seria perigoso, por causa do brilho do Sol), verificaria que a razão Diâmetro solar/ Distância solar é de também 1/110.

De acordo com Singh (2006), Aristarco, no século III a.C., se o luar era luz do Sol refletida, afirmou, então a meia lua deve acontecer quando o Sol, a Lua e a Terra formam um triângulo retângulo. Aristarco então determinou que o ângulo formado pelo segmento de retas que une os centros da Lua e da Terra com o segmento de reta que une os centros da Terra e do Sol era 87° , que é o ângulo complementar do ângulo α exibido na figura abaixo. Assim, o Sol estava vinte vezes mais distante que a Lua.

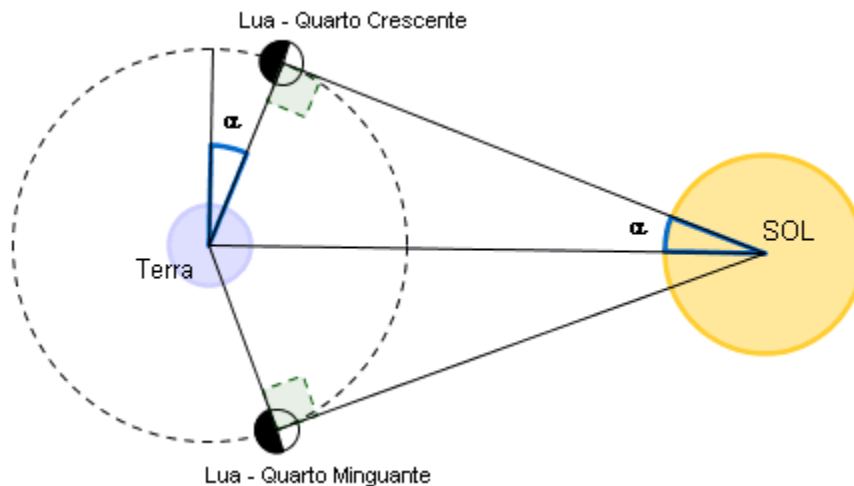


Figura 8: Triângulo retângulo formado por Terra, Sol e Lua

Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/problema_triggeo.html

O método de Aristarco é bastante criativo, porém o seu brilhantismo esbarrava na escassa disponibilidade ferramentas adequadas. O ângulo correto é $89,85^\circ$ e o Sol está quatrocentas vezes mais distante que a Lua. A distância entre a Terra e o Sol é de aproximadamente:

$$400 \times 385.000 \text{ km} = 154.000.000$$

Para Faria (2007), a distância média entre a Terra e o Sol é de 149.600.000 quilômetros, valor este adotado como unidade de distância em Astronomia e denominado Unidade Astronômica de Distância (U.A.).

1.4. A TRIGONOMETRIA EM VÁRIAS PARTES DO MUNDO

A Tábua de Cordas mais antiga foi descoberta na Índia. O *Surya Siddhanta* (século IV ou V d.C.) consiste de um compêndio de astronomia com regras em versos escritos em sânscrito com poucas explicações e nenhuma prova. Outra contribuição dos

hindus, para a Trigonometria foi a introdução do equivalente da função seno para substituir a tabela grega de cordas (KENNEDY, 1992; BOYER, 1974).

A Matemática indiana é frequentemente descrita como intuitiva em contraste com o severo racionalismo da Geometria grega. “Embora na Trigonometria hindu haja traços da influência grega, os indianos não parecem ter tido ocasião de tomar emprestada a Geometria grega, preocupados como estavam com simples regra de mensuração” (BOYER, 1974, p. 148).

Em países da região Árabe, temos vários trabalhos a respeito da Trigonometria de acordo com Cajori (2007), ao estudar as obras de Ptolomeu, Al Battani preferiu utilizar a metade da corda (seno indiano), em vez da corda inteira usada por Ptolomeu. Foi o primeiro a preparar uma tábua de cotangente. Construiu relógios de sol horizontal e vertical, considerando a sombra horizontal como *umbra extensa* (tradução latina) e a vertical *umbra versa* que são respectivamente, a cotangente e a tangente. Observando que a palavra penumbra, do latim, é a junção de duas outras palavras: *paenes* (quase) e *umbra* (sombra).

Outra contribuição importante foi dada por Abu'l Wefa (940-998) que criou um método para construir tábuas de seno com valores corretos até a nona casa decimal, introduziu a função tangente, fez uma tábua de senos e tangentes com incremento de 15' e, ao considerar o triângulo sombra dos relógios de sol, introduziu a secante e a cossecante (EVES, 2004; CAJORI, 2007).

De acordo com Eves (2004), Nasir Eddin (1201-1274) em seu livro Tratado sobre os Quadriláteros é o primeiro que trata a Trigonometria independente da Astronomia e com tal perfeição que poupou os europeus do século XV de maiores encargos.

O papel dos povos árabes em Geometria foi mais de preservação do que de descoberta. O mundo lhes deve um preito de reconhecimento por seus esforços continuados para traduzir satisfatoriamente os clássicos gregos. (EVES, 2004).

Partindo para a Europa Ocidental Medieval, Eves (2004) relata que o mais capaz e influente matemático da Europa do século XV foi John Mueller, mais conhecido como Regiomontanus(1436-1476) e sua obra, o tratado de *Triangulis omnimodis* é uma das mais importante das obras da Trigonometria, pois contém a primeira exposição sistemática de Trigonometria plana e esférica com um tratamento independente da astronomia. O autor ressalta ainda que a referida obra se divide em cinco livros os dois primeiros dedicados à Trigonometria plana e os outros três dedicados à Trigonometria esférica,

sendo que as funções empregadas são o seno e o cosseno, e mais tarde Regiomontanus calculou uma tabela de tangentes. (EVES, 2004, p. 297).

Segundo Boyer (1996) e Cajori (2007), George Joachim Rheticus (ou Rhaeticus 1514-1576), discípulo de Copérnico (1473-1543), fez o mais elaborado tratado de Trigonometria escrito, até então, o *Opus palatinum de triangulis* no qual Rheticus foi o primeiro a construir um triângulo retângulo e o fez depender diretamente de seus ângulos não as funções trigonométricas relacionadas.

Com relação à origem da palavra Trigonometria, Cajori (2007) aponta que Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) foi o primeiro a utilizar a palavra Trigonometria e suas tábuas astronômicas tinham um alto grau de precisão. Outra contribuição importante para a Trigonometria foi o *Canon mathematicus seu ad triangula*, escrito por Viète (1540-1603), que foi pioneiro na Europa ocidental em desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Viète foi o primeiro a aplicar transformações algébricas à Trigonometria, em particular, na multisseção de ângulos. (CAJORI, 2007, p. 201)

Segundo Kennedy (1992), com o avanço da Análise desencadeado pela invenção do cálculo infinitesimal, a Trigonometria foi logo absorvida por esta teoria. O processo de transição começou com a representação das funções trigonométricas por meio de séries infinitas no século XVII por Isaac Newton.

CAPÍTULO 2: ENSINO DE TRIGONOMETRIA

2.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As disciplinas da área de exatas trabalhadas no Ensino Médio, Matemática, Química e Física, são alvo de críticas severas por parte dos alunos. Questionamentos de o porquê estudá-las não raramente chegam aos ouvidos dos professores. Além do distanciamento que estas disciplinas possuem da realidade dos estudantes, há a dificuldade na aprendizagem que parece ser maior que nas demais áreas do conhecimento.

Para entender um tema da disciplina de História como, por exemplo, Era Vargas, não é tão necessário saber sobre a Proclamação da República. A dependência de assuntos de História é geralmente muito sutil, não é um fator decisivo na aprendizagem do estudante. Em Matemática, é bastante diferente, assuntos trabalhados no 3º Ano do Ensino Médio precisam da compreensão de assuntos, muitas vezes, visto no 6º Ano do Ensino Fundamental. O professor de Matemática do Ensino Médio acredita, ou quer acreditar, que assuntos básicos como fração, jogo de sinal e divisão aritmética já são temas bastante conhecidos pelo estudante.

O ensino da Trigonometria exige do estudante um conhecimento prévio e básico de Álgebra e de Geometria. A Geometria no Ensino Fundamental é muitas vezes deixada de lado, pois o professor é induzido a seguir a ordem do livro didático e esse, na maioria das vezes, deixa o conteúdo de Geometria na segunda metade do livro. A dificuldade dos estudantes com alguns temas, como por exemplo, divisão entre polinômios no 8º Ano, por muitas vezes, obriga o professor a destinar mais tempo a este tópico negligenciando outros assuntos.

2.2- A VISÃO DOS PCN'S E CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS.

No Brasil, os **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN's) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que orientam a educação e são separados por disciplina e trazem propostas inovadoras sobre como deve ser pautado o ensino no país. Após assumir o que considera como dificuldades no ensino de Matemática do país, o documento propõe novas perspectivas para a visualização do aluno por parte do professor, sendo que este deve considerar o conhecimento prévio do aluno e as implicações da Matemática no dia-a-dia.

Para Moreno (2006) todo o conhecimento novo é construído apoiando-se sobre os conhecimentos anteriores que, ao mesmo tempo, são modificados. Na interação desenvolvida por um aluno em situação de ensino, ele utiliza seus conhecimentos anteriores, submete-os à revisão, modifica-os, rejeita-os ou completa-os, redefine-os, descobre novos contextos de utilização e dessa maneira, constrói novas concepções.

Embora ressalte a aplicação e o caráter reflexivo da Matemática os PCN's ressaltam que a realidade do aluno não pode ser o único determinante na escolha dos conteúdos, haja vista que o docente deve ainda apresentar questões inerentes à própria Matemática e seu contexto histórico.

De acordo com o descrito nos PCN's (BRASIL, 1998), o uso de materiais didáticos é fundamental, entretanto esta prática ocorre de forma dissociada e descontextualizada no processo de ensino aprendizagem.

É necessário, então que os recursos didáticos produzam aprendizagem significativa ao que Manrique (2003) entende que ocorre quando um novo conhecimento relaciona-se de uma maneira substantiva a informações previamente adquiridas pelo aluno, ou seja, quando a substância do conceito se incorpora a estrutura cognitiva.

Os PCN's do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) não propõe claramente o ensino de Trigonometria para 9º ano, mas enfatizam conceitos básicos para a Trigonometria como: o ensino de semelhança de figuras planas a partir de ampliações e reduções identificando as medidas que não se alteram (ângulo) e que se modificam, além da verificação e aplicação do teorema de Tales e Pitágoras.

Logo, é de se esperar que o estudante já tenha uma base trigonométrica quando é inserido no Ensino Médio. O conteúdo acima descrito é trabalhado nas Escolas Municipais de Santarém, no 9º Ano, apresentando os conceitos básicos descritos pelos PCN's além de razões trigonométricas no triângulo retângulo, haja vista que as Escolas Municipais seguem Conteúdo Programático praticamente igual ao definido pela Secretaria de Estado de Educação do Pará.

2.3- TRABALHOS CORRELATOS AO TEMA

Em diversos trabalhos observamos a pesquisa do Ensino de Trigonometria e a utilização de materiais concretos. Nascimento (2005) desenvolveu uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica, sob a ótica construtivista, em uma oficina ministrada para alunos de 1º ano do Ensino Médio na qual dividiu os alunos em

grupos e propôs a construção de teodolito e astrolábio com materiais alternativos. Após a construção a autora propôs problemas para serem resolvidos com o uso dos instrumentos e observou que apesar de alguns erros os alunos foram persistentes em resolver os problemas propostos com tais instrumentos.

A autora constatou ainda a deficiência de conteúdos que os discentes tiveram em Geometria e Trigonometria no Ensino Fundamental e Ensino Médio para ajudas a solucionar os problemas propostos. Além disso, havia pouca familiaridade com os instrumentos oferecidos, como por exemplo: a régua, na qual os alunos não sabiam onde começava a graduação.

Amaral (2002), após apresentar aspectos que interferem da aprendizagem, ressalta em seu trabalho a importância da aplicação de práticas para a melhor compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. O autor utiliza como analogia a movimentação de uma aranha em torno do ciclo trigonométrico, e como metodologia o autor aborda o método de resoluções e aplicações em situações-problema e a linguagem computacional LOGO tendo como público-alvo estudante do Ensino Médio. Na conclusão, o autor relata perceber avanços ao concluir que o método de resolução de problemas atende as expectativas para a melhoria do ensino e aprendizagem em Trigonometria.

Em seu trabalho, Martins (2003) observa alguns erros cometidos por seus alunos que mostraram que demonstram defasagem com relação aos conceitos de seno, cosseno e tangente. A pesquisa foi realizada com 16 alunos executada em duplas de forma que foram passadas sete atividades que deveriam ser executadas com a ajuda do *software Cabri-géomètre* finalizando com construção da senóide e da cossenóide. Ao final, Martins (2003) observou duas duplas aleatoriamente e relatou o sucesso nas atividades e na construção dos gráficos.

Após um levantamento com alunos e professores sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem de Trigonometria, Costa (1997) desenvolveu uma sequência para o ensino com 32 estudantes do 1º e 2º anos do ensino Médio dividindo os alunos em três grupos denominados com A, B e C. O grupo A, com 16 alunos teve apenas aulas tradicionais realizadas por seu professor; o grupo B, com 8 alunos, fez experimentos em um laboratório e depois foram para o computador e o grupo C fez o inverso do grupo B. após a Coleta de dados feita no pré teste, teste intermediário e pós teste Costa (1997) conclui que os alunos que passaram pelo contexto experimental seguido do computacional tiveram melhor compreensão da Trigonometria.

Borges (2009) trabalhou em sua pesquisa com doze atividades como o objetivo de melhorar a compreensão dos alunos sobre as razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo. A pesquisa teve por objetivo verificar se atividades manipulativas e o uso do computador contribuem para a aprendizagem da transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Para tanto o autor se fundamentou na Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática, utilizando como recursos em suas atividades o *software Geogebra* e instrumento de medição (régua, compasso e transferidor). Em suas conclusões, o autor colocou que quando a atividade exigia um conhecimento anterior os alunos não tinham domínio ou não se lembravam que tinham aprendido, os alunos não dominavam os instrumentos de construção e de medida (o compasso, a régua e o transferidor), os alunos tinham dificuldades em executar os trabalhos por falta de autonomia e esperavam respostas prontas por parte do professor e do pesquisador.

Como resultados positivos o autor citou que no decorrer da sequência de atividades os alunos foram percebendo a necessidade de utilizar os instrumentos propostos, obtendo com desempenho nas últimas atividades propostas, denotando um avanço na aprendizagem.

Outro trabalho neste campo é o trabalho de Lindegger (2000) que aplicado à alunos do 9º ano do Ensino Fundamental trabalhou uma sequência de Ensino para o triângulo retângulo, no qual tentou introduzir os conceitos das relações trigonométricas como seno, cosseno e tangente a partir de manipulações de triângulos. O autor dividiu os alunos em dois grupos de trabalho sendo que um seria o grupo de referência e grupo experimental, os dois grupos trabalharam o triângulo sendo que o grupo de referência trabalharia de maneira tradicional, com aulas expositivas e exercícios e o grupo experimental fez manipulações de figuras geométricas abordando metodologia construtivista. Em suas conclusões o autor ressalta que apesar de utilizar menos questões o método utilizado no grupo experimental teve muito melhor resultado no aprendizado da Trigonometria, avaliado no pós-teste.

2.4- O USO DE MATERIAIS CONCRETOS

Os professores de Matemática possuem muitas opções de materiais concretos para auxiliá-los no ensino de vários temas. Podemos citar como exemplo de materiais concretos o ábaco, o material dourado e disco de fração.



Figura 9: Ábaco⁴, material dourado⁵ e disco de frações⁶

O uso de material concreto faz com que o estudante perceba aspectos do assunto estudado sem abstrações excessivas. Sempre que possível, o professor de Matemática deve promover atividades que envolvam materiais concretos. Para Mendes (2009),

[...] Estas atividades tem uma estrutura matemática a ser descoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático. Infelizmente, o professor frequentemente usa o material concreto de forma inadequada, como uma peça motivadora ocasional, ou pior, como uma demonstração feita por ele, em que o aluno é um mero espectador.

Nesta pesquisa, verificaremos a influência do material concreto teodolito no ensino de Trigonometria, onde grupos de estudantes construíram o seu próprio teodolito (por esse motivo, podemos chama-lo de teodolito escolar) e com ele mediram a altura de algum objeto. Nem todo assunto de Matemática permite o uso oportuno de material concreto, mas é bem provável que para estes seja possível o uso de ambientes computacionais.

2.5- O USO DE COMPUTADORES

Celular, *tablet*, calculadora, *notebook*, enfim, há uma lista de ferramentas eletrônicas que podem auxiliar o estudante no entendimento de assuntos de Matemática. Além disso, uma escola só pode ser considerada de excelência se tiver um laboratório de informática. Por este motivo, daremos ênfase ao uso de computador pessoal.

Na aula de estatística, a planilha eletrônica é bastante útil, assim como aplicativos para visualização de gráfico de funções em outros tópicos da Matemática. No ensino de Trigonometria não é diferente, atualmente há uma vasta oferta de programas computacionais que podem auxiliar o professor em suas explicações.

⁴ Disponível em: <<http://educador.brasilecola.com/estrategias-ensino/abaco.htm>>

⁵ Disponível em: <<http://ensineseubebe.blogspot.com.br/2010/09/jogo-de-matematica.html>>

⁶ <http://www.worldtoys.com.br/produto/logicos-matematicos/disco-de-fracoes-brink-mobil-brink-mobil-1117.php>

Mas em que os computadores podem ajudar o professor de Matemática nas aulas de Trigonometria? Primeiramente, na independência do estudante na busca pelo conhecimento. É uma excelente forma de estimular a autonomia do discente. O uso de ambientes computacionais pode proporcionar mais motivação para o estudante. A compreensão da ideia de ângulo e da de semelhança podem ser bem abordadas, com grande expectativa de que o conhecimento adquirido seja mantido por um tempo superior ao que se tem em uma aula expositiva.

Observemos que em uma função $f(x) = a \cdot \text{sen}(x) + b$, o estudante pode descobrir a importância de a e de b no gráfico desta função, alterando seus valores. O estudante pode criar sua própria função.

O uso de computador como uma boa ferramenta no ensino de Matemática é quase uma unanimidade dentre os estudiosos, mas o uso da calculadora ainda é motivo de muito debate. Entendemos que a calculadora pode ser usada em situações que o cálculo é objetivo secundário, porém nas primeiras séries do Ensino Fundamental o seu uso pode ser prejudicial.

Nesta pesquisa usaremos o programa computacional Geogebra, pois com ele podemos fazer animações, desenhos geométricos, verificar gráfico de funções, entre outros. Todos esses recursos, quando bem empregados, facilitam a vida do professor.

CAPÍTULO 3: UM POUCO DE TRIGONOMETRIA

3.1 QUAL TRIGONOMETRIA?

A Trigonometria tem aplicações importantes em vários ramos tanto como na Matemática pura, quanto na Matemática aplicada. Embora a sua origem esteja vinculada à origem da Geometria, a separação ocorreu devido a sua grande evolução. A Trigonometria pode, para fins didáticos, ser dividida em outras áreas como, por exemplo, Trigonometria no triângulo retângulo, Trigonometria na circunferência e Trigonometria esférica.

Abordaremos neste trabalho a Trigonometria no triângulo retângulo por ter mais relação com a nossa pesquisa. Para compreendermos melhor a Trigonometria, precisamos recapitular alguns conceitos básicos de Geometria. Alguns temas do Ensino Fundamental serão brevemente revisados neste capítulo, mas não é o nosso enfoque. Mostraremos neste capítulo uma sugestão de ordem do conteúdo para o professor do Ensino médio, exibindo os tópicos que acreditamos serem os mais relevantes.

3.2 PONTO, RETA E PLANO

A ideia de ponto, reta e plano é bastante intuitiva, pois não há definição satisfatória. Podemos ter a ideia a partir da figura abaixo.

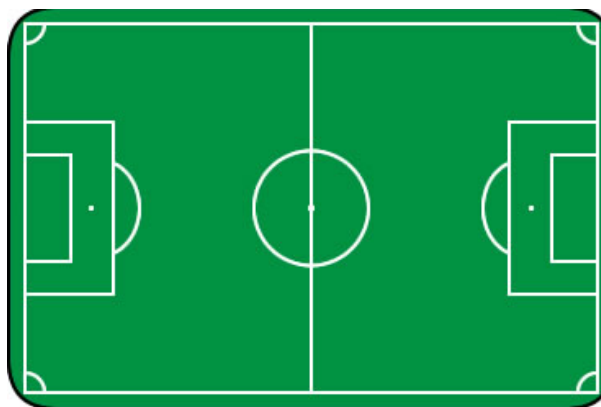


Figura 10: Esquema ilustrando um campo de futebol⁷

⁷ Disponível em: <<http://www.arcb.com.br/regras.asp>>

O local no centro de campo onde ocorre o pontapé inicial pode ser considerado um ponto, a identificação dos pontos será indicada preferencialmente com letras maiúsculas, assim como exposto na figura abaixo.



Figura 11: Representação de Pontos

A linha que passa por cima do local aonde ocorre o pontapé inicial dá a ideia de segmento de reta. Na figura abaixo tem exemplos de segmentos de reta e suas respectivas representações.

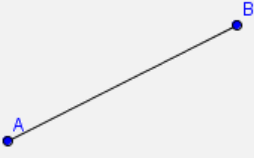
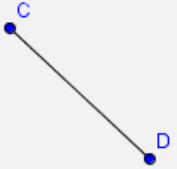
Segmento de reta	Representação
	AB ou BA
	CD ou DC

Tabela 1: Segmentos de retas e suas representações

Observe que a representação dos segmentos de reta depende dos pontos que as delimitam e estes pontos são chamados de extremidades. A distância entre dois pontos A e B é representada por \overline{AB} . Pense agora em um segmento de reta AB que se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. A figura correspondente é uma reta.

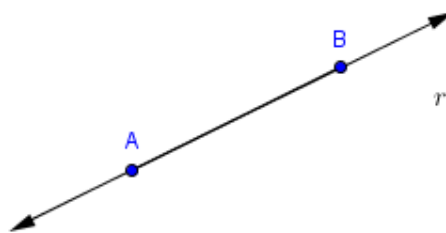


Figura 12: Reta r

Observe que a reta representada na **FIGURA 12** passa pelos pontos A e B , pode ser representada por \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BA} ou por uma letra minúscula que neste caso é r . Mais uma vez, pense em um segmento de reta AB , mas agora sendo prolongado em apenas em um sentido. A figura correspondente é uma semirreta.

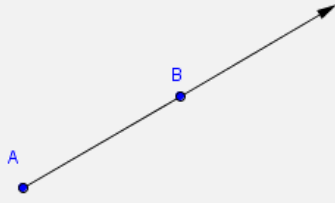
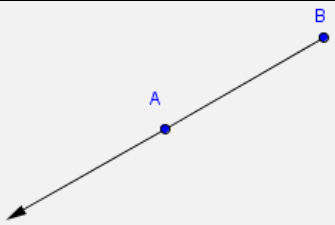
Semirreta	Representação
	\overrightarrow{AB}
	\overrightarrow{BA}

Tabela 2: Semirreta e sua representação

Na Tabela 2 há duas semirretas. Acima temos a semirreta \overrightarrow{AB} de origem em A , passando pelo ponto B . Abaixo temos a semirreta \overrightarrow{BA} de origem em B , passando pelo ponto A . Diferentemente da reta e do segmento de reta, a ordem das letras na representação é importante para a descrição da figura geométrica.

Agora imagine o piso do campo de futebol se expandindo indefinidamente em todas as direções. Assim, podemos ter uma ideia do que é um plano.

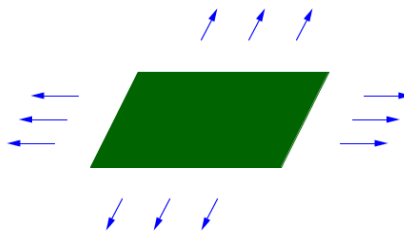


Figura 13: A ideia de plano

Costumamos indicar cada plano por uma letra grega: α (alfa), β (beta), γ (gama), etc.



Figura 14: Exemplo da representação de um plano

3.3 ÂNGULO

De acordo com Hilbert (1902), seja α um plano arbitrário e r e s duas semirretas distintas com a mesma origem, ponto A . As semirretas são chamadas de lados do ângulo, enquanto que a origem comum é chamada de ângulo. A figura $\Gamma = r \cup s$ divide o plano α em duas regiões adjuntas. Estas regiões podem ser chamadas de ângulo.

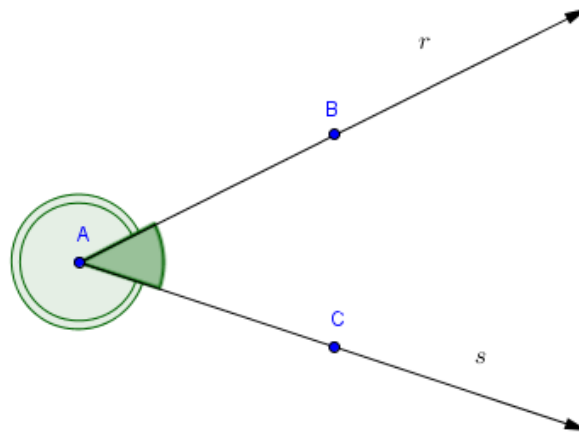


Figura 15: Semirretas formando um ângulo

Podemos indicar o ângulo da Figura 15 por \widehat{BAC} , por \widehat{CAB} ou simplesmente por \widehat{A} . As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são os lados dos ângulos e o ponto A é o vértice do ângulo.

Sabemos que a formação para professor de Matemática é bastante rigorosa no que tange definições dos conteúdos, porém quando o assunto é Geometria e Trigonometria, o rigor sobre a formalidade das definições não pode sobrepor a facilitação do entendimento do estudante.

3.3.1 Unidades de Medida

Todo ângulo pode ser medido em graus, grado e radianos. Para termos uma ideia destas medidas vamos pensar em um giro ou uma volta completa. Uma volta completa

possui 360° (lê-se: 360 graus), também podemos dizer que uma volta completa tem $2\pi \text{ rad}$ (lê-se: dois pí radianos).

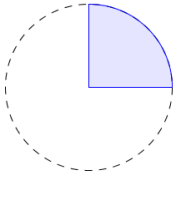
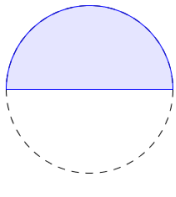
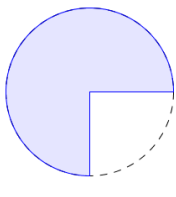
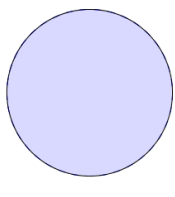
				
Volta	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Grau	90	180	270	360
Radiano	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabela 3: Ângulos medidos em graus, grados e radianos

3.3.2 Conversão de Radianos para Graus

Uma habilidade bastante exigida em vestibulares é a conversão da medida de ângulos de graus para radianos e vice-versa. Existem várias estratégias para fazermos conversão entre as unidades de medida de ângulos. Na conversão de radianos para graus, basta substituir o $\pi \text{ rad}$ por 180° . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Determine o valor em graus do ângulo $4\pi \text{ rad}$.

Resolução:

$$4\pi \text{ rad} = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

Exemplo 2: Determine o valor em graus do ângulo $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Resolução:

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Exemplo 3: Determine o valor em graus do ângulo $\frac{3\pi}{5} \text{ rad}$.

Resolução:

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \times 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

3.3.3 Conversão de Graus para Radianos

Para converter um ângulo de grau para radiano, considere uma fração na qual o numerador é o a medida em graus do ângulo que se deseja converter e o denominador é

180° , simplifique essa fração o máximo possível, pegue o resultado e multiplique por $\pi \text{ rad}$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4: Determine o valor em radianos do ângulo 120° .

Resolução:

$$120^\circ \rightarrow \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

A resposta também poderia ficar assim $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$, apesar de não ser a forma preferida para a maioria dos autores de livros didáticos de Matemática.

Exemplo 5: Determine o valor em radianos do ângulo 630° .

Resolução:

$$630^\circ \rightarrow \frac{630^\circ}{180^\circ} = \frac{63}{18} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7\pi}{2} \text{ rad}$$

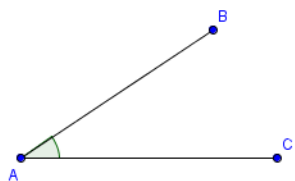
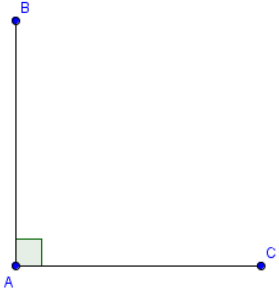
Exemplo 6: Determine o valor em radianos do ângulo 45° .

Resolução:

$$45^\circ \rightarrow \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{9}{36} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Quando no processo de simplificação o numerador final encontrado for 1, como no Exemplo 6, é conveniente omiti-lo, deixando somente o π no numerador.

3.3.4 Classificação de Ângulos

Ângulo	Descrição	Exemplo
Agudo	Ângulo que mede menos que 90°	
Reto	Ângulo que mede 90°	

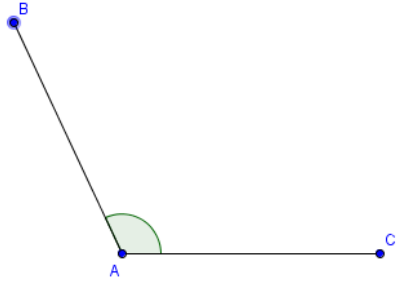
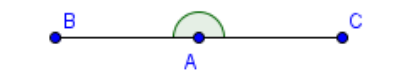
Obtuso	Ângulo que mede mais que 90° e menos que 180°	
Raso	Ângulo que mede 180°	

Tabela 4: Classificação de ângulos

De todos da TABELA 4, o mais difícil para a maioria dos estudantes recordar é o obtuso.

3.4 TRIÂNGULO

Triângulo é todo polígono que têm três lados e, conseqüentemente, três vértices e três ângulos.

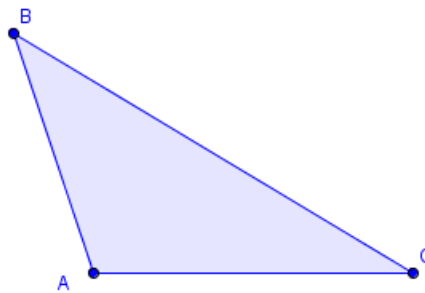
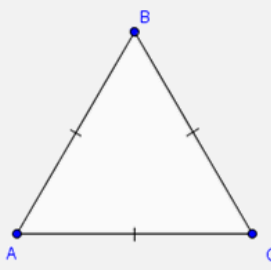
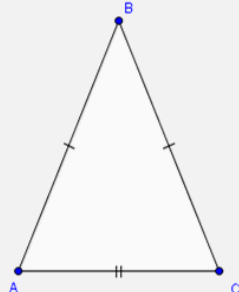
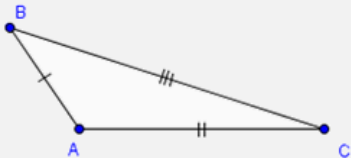


Figura 16: Exemplo de Triângulo

O triângulo da pode ser representado por ΔABC . Nós podemos classificar os triângulos sob dois critérios: quanto aos lados e quanto aos ângulos.

3.4.1 Classificação quanto aos lados

		
Equilátero: possui todos os	Isósceles: possui somente	Escaleno: possui os três

lados com a mesma medida	dois lados com a mesma medida	lados com medidas distintas
--------------------------	-------------------------------	-----------------------------

Tabela 5: Classificação dos triângulos quanto aos lados

Observação: lados **congruentes** são lados que possuem a mesma medida.

3.4.2 Classificação quanto aos ângulos

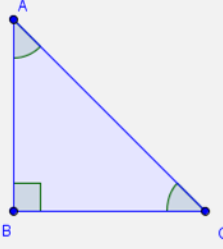
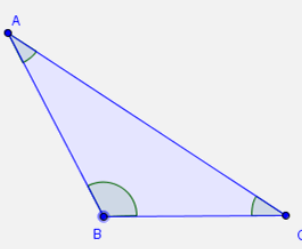
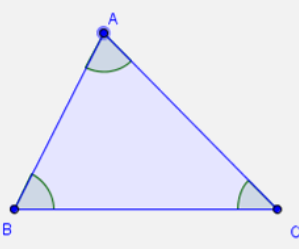
		
Retângulo: possui um ângulo reto	Obtusângulo: possui um ângulo obtuso	Acutângulo: possui todos os ângulos agudos

Tabela 6: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

3.5 TRIÂNGULO RETÂNGULO

3.5.1 Hipotenusa e catetos

Primeiramente, o estudante tem que saber onde está o ângulo reto está em um triângulo retângulo. Sem este conhecimento, o sucesso no estudo de Trigonometria se torna improvável. Exemplos de sua representação estão expressos na figura abaixo:

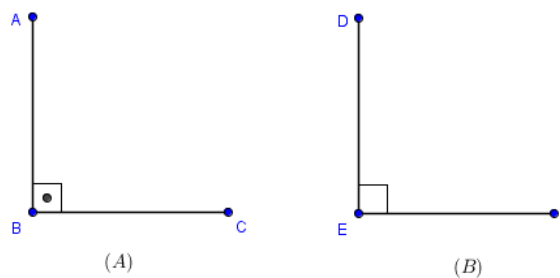


Figura 17: Representações de Ângulo Reto

Difícil? Esperamos sinceramente que não. Aqui, usaremos para a representação de ângulo reto o símbolo que foi expresso na Figura 17(B). Agora, vamos ver exemplos de triângulos retângulos.

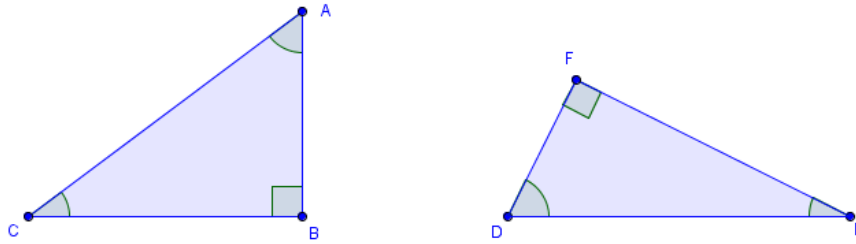


Figura 18: Triângulos Retângulos.

Observe que no ΔABC , a esquerda, o ângulo reto é o \widehat{ABC} , enquanto que no ΔDEF , a direita, o ângulo reto é o \widehat{DFE} . Quais os lados do ΔABC que formam o ângulo \widehat{ABC} ? Resposta: os lados são BA e BC . Estes lados recebem o nome de catetos. De modo análogo, no ΔDEF , os catetos são os lados FD e FE . E o lado que não é cateto em um triângulo retângulo, qual é a sua denominação? Resposta: hipotenusa. A hipotenusa sempre é o maior lado em um triângulo retângulo. Os catetos ainda podem ser classificados em relação a um dos ângulos agudo do triângulo retângulo em: cateto adjacente e cateto oposto. Observe a figura abaixo:

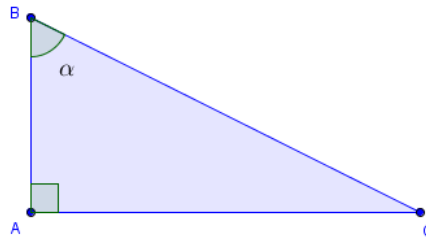


Figura 19: Triângulo Retângulo

Fizemos aqui algo que é comum em livros didáticos, repetimos as mesmas letras (A , B e C) para representar pontos que determinam triângulos distintos. A ideia é sempre se basear pela última figura, neste caso: Figura 19. Observe que agora o ângulo reto é \widehat{BAC} e que $\widehat{ABC} = \alpha$. Observe ainda que o lado BC é a hipotenusa e que os lados AB e AC são os catetos. Se vamos classificar os catetos em relação ao ângulo α , então devemos nos perguntar qual lado forma o ângulo α juntamente com a hipotenusa? Resposta: o lado AB . Assim, este lado é o cateto adjacente, lembrando que adjacente é sinônimo de *próximo*. Consequentemente, o lado AC é o cateto oposto.

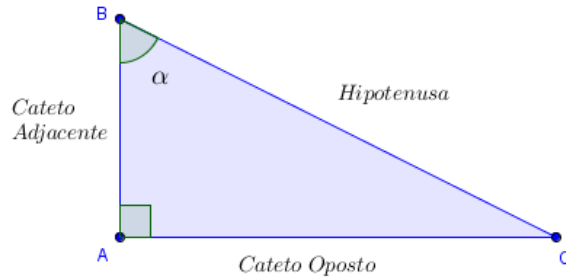


Figura 20: Hipotenusa, Cateto Adjacente e Cateto Oposto

Agora se mudássemos o ângulo de referência, como na figura abaixo, mudaria a classificação dos catetos?

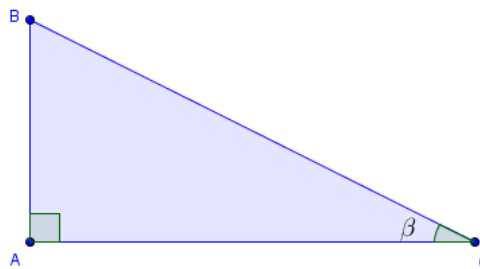


Figura 21: Triângulo Retângulo

Resposta: Sim, pois agora o lado AB não forma o ângulo β . Logo, não pode ser classificado como cateto adjacente e sim como cateto oposto. Além disso, a ideia de proximidade do cateto adjacente estaria contrariada. Portanto, a classificação dos lados em relação ao ângulo β é:

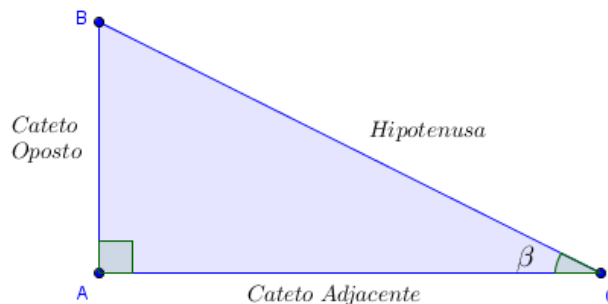


Figura 22: Triângulo Retângulo e a Classificação de seus Lados

3.5.2 Razões Trigonométricas

As razões trigonométricas são: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. No Ensino Fundamental, somente as três primeiras são estudadas, enquanto que no Ensino Médio, são todas.

Nome da razão	Símbolo	Razões Trigonométricas	Relação com <i>seno</i> e <i>coseno</i>
Seno	$\text{sen}(x)$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\text{sen}(x)$
Cosseno	$\text{cos}(x)$	$\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\text{cos}(x)$
Tangente	$\text{tg}(x)$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$	$\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$
Cotangente	$\text{cotg}(x)$	$\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Cateto Oposto}}$	$\frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}$
Secante	$\text{sec}(x)$	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adjacente}}$	$\frac{1}{\text{cos}(x)}$
Cossecante	$\text{cossec}(x)$	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Oposto}}$	$\frac{1}{\text{sen}(x)}$

Tabela 7: Razões Trigonométricas

Não raramente, podemos nos deparar com *sin* sendo o símbolo da razão seno e com *tan* sendo o símbolo. Observe o triângulo abaixo:

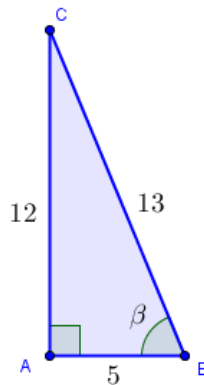


Figura 23: Triângulo Retângulo com a medida de seus lados

Note que além do ângulo reto $B\hat{A}C$ temos o ângulo $\beta = A\hat{B}C$ que servirá para classificar os catetos. Desta forma, a hipotenusa BC mede 13, o cateto adjacente AB (lembre-se: próximo – de β) mede 5 e o cateto oposto AC mede 12. Portanto, podemos afirmar que:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{12}{13}; \text{cos}(\beta) = \frac{5}{13}; \text{tg}(\beta) = \frac{12}{5};$$

$$\text{cotg}(\beta) = \frac{5}{12}; \text{sec}(\beta) = \frac{13}{5}; \text{cossec}(\beta) = \frac{13}{12}.$$

Uma propriedade importante das razões trigonométricas no triângulo retângulo é que elas não dependem dos valores das medidas dos lados e sim do ângulo.

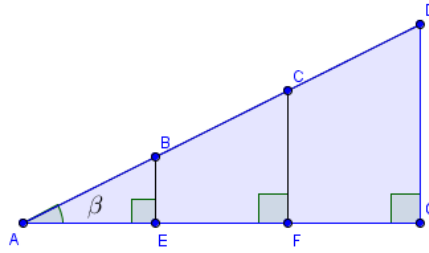


Figura 24: Triângulos Retângulos semelhantes

Como os triângulos ABE , ACE e ADG , são semelhantes, a razão entre os lados correspondentes é constante. Desta forma, podemos afirmar que:

$$tg(\beta) = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}}$$

3.5.3 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo que tem seus catetos classificados em relação a um ângulo α pode ser expresso por:

$$(\textit{Cateto Adjacente})^2 + (\textit{Cateto Oposto})^2 = (\textit{Hipotenusa})^2$$

Assim, dividindo os dois membros da equação por $(\textit{Hipotenusa})^2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{(\textit{Cateto Adjacente})^2}{(\textit{Hipotenusa})^2} + \frac{(\textit{Cateto Oposto})^2}{(\textit{Hipotenusa})^2} &= \frac{(\textit{Hipotenusa})^2}{(\textit{Hipotenusa})^2} \\ \left(\frac{\textit{Cateto Adjacente}}{\textit{Hipotenusa}}\right)^2 + \left(\frac{\textit{Cateto Oposto}}{\textit{Hipotenusa}}\right)^2 &= 1 \\ \textit{sen}^2(\alpha) + \textit{cos}^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

A equação $\textit{sen}^2(\alpha) + \textit{cos}^2(\alpha) = 1$ é denominada **Relação Fundamental da Trigonometria**. Se, ao invés de dividirmos a equação $(\textit{Cateto Adjacente})^2 + (\textit{Cateto Oposto})^2 = (\textit{Hipotenusa})^2$ por $(\textit{Hipotenusa})^2$, dividíssemos por $(\textit{Cateto Adjacente})^2$ ou por $(\textit{Cateto Oposto})^2$, teríamos respectivamente:

$$\begin{aligned} 1 + \textit{tg}^2(x) &= \textit{sec}^2(x) \\ \text{ou} \\ 1 + \textit{cotg}^2(x) &= \textit{cossec}^2(x) \end{aligned}$$

3.6 AVALIANDO FUNÇÕES EM UMA CALCULADORA

Como é que a sua calculadora avaliar $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, $e^{(x)}$ e outras funções? Um método consiste em aproximar estas funções por polinômios, polinômios porque são fáceis de avaliar, por exemplo:

$$e^x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots, \text{ com } x \text{ em radianos.}$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots, \text{ com } x \text{ em radianos.}$$

Onde $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Estas fórmulas notáveis foram encontradas pelo matemático britânico Brooke Taylor (1685-1731). A Figura 25 obtida por meio do programa computacional Geogebra mostra como sucessivas somas parciais aproximam cada vez mais da curva da função $y = \text{sen}(x)$.

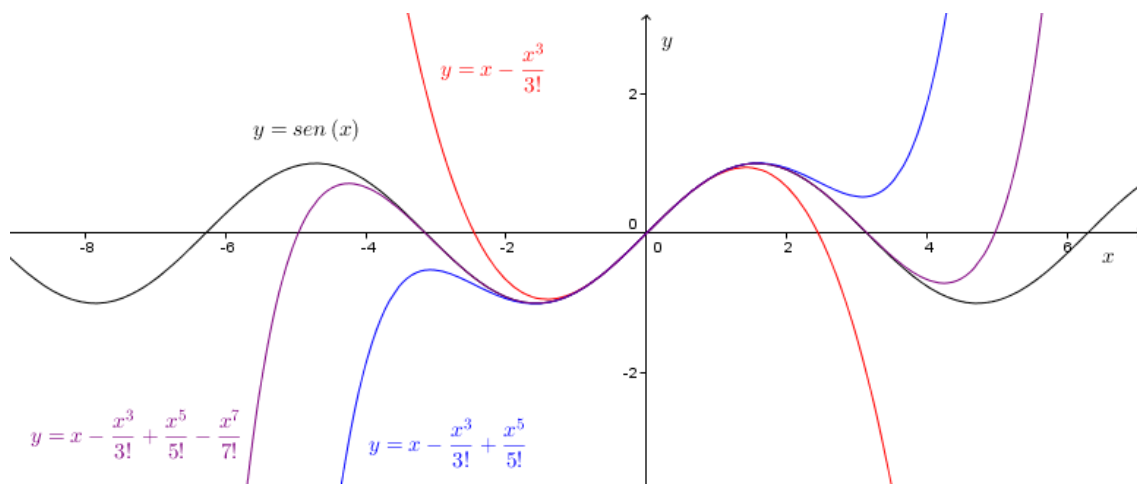


Figura 25: Aproximações da função $f(x) = \text{sen}(x)$ através da série de Taylor

CAPÍTULO 4: TEODOLITO

Ao longo de sua história, a humanidade criou métodos e ferramentas para medir ângulos, como visto no Capítulo 1. De acordo com Huon (1999), o matemático inglês Leonard Digges (1510-1558) montou um astrolábio sobre outro, de modo que pudesse medir ângulos verticais e horizontais de uma só vez, este instrumento depois foi chamado de teodolito.



Figura 26: Teodolito⁸

Atualmente, o teodolito ainda é utilizado, porém em versões modernas, para diversos tipos de uso, precisões e alcance, como o exposto na figura abaixo.



Figura 27: Teodolito Digital⁹

O teodolito se assemelha bastante ao telescópio, porém com o teodolito podemos obter o valor do ângulo de inclinação vertical ou horizontal.

⁸Disponível em: <http://www.mast.br/multimedia_instrumentos/teodolito_funcao.html>

⁹ Disponível em: <<http://mundotop.com/teodolito-estacao-total-agrimensura>>

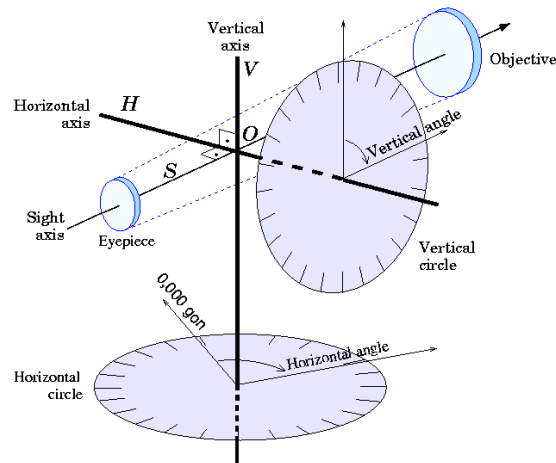


Figura 28: Eixos e círculos de um teodolito¹⁰

Uma atividade interessante para os estudantes de Trigonometria é a construção de um teodolito. Há atualmente várias formas de se fazer esta construção e na maioria delas está presente na lista de material necessário o transferidor ou uma folha de papel com o transferidor impresso. Na figura abaixo temos dois modelos de transferidor.

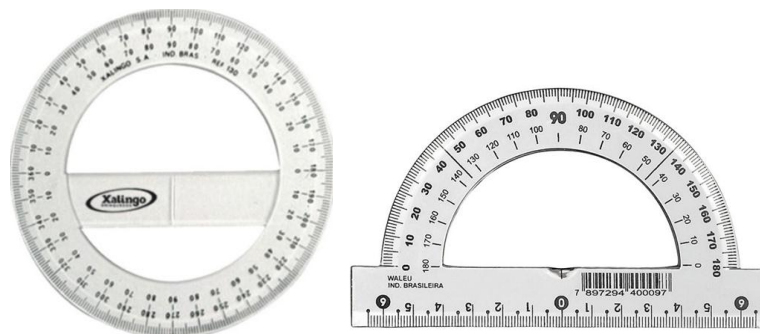


Figura 29: Transferidor de 360°¹¹ e Transferidor de 180°¹²

Veremos a seguir uma forma bem simples de se construir um teodolito escolar. É a forma mais simples que conhecemos. A lista de material inclui um transferidor, canudo ou tubo de antena, cola e tachinha. Fixe a tachinha na base central do transferidor de forma que ela fique com mobilidade. Cole o canudo na tachinha, de modo que a sua movimentação seja completa.

¹⁰ Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito>>

¹¹ Disponível em: <<http://www.infoescola.com/matematica/transferidor/>>

¹² Disponível em: <<http://www.sodine.com.br/material-para-escritorio/acrilicos/transferidores/transferidor-escolar-180-graus-c-10-un>>

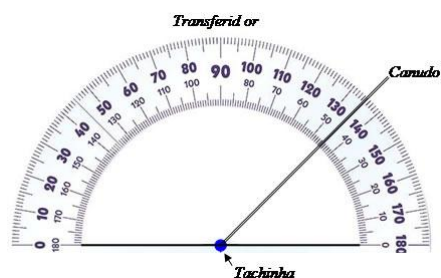


Figura 30: Esquema de montagem do teodolito escolar com transferidor e canudo¹³

Observe que a duas marcações de ângulos, uma em sentido horário e outra no sentido anti-horário, para o cálculo é aconselhável que se escolha o ângulo de menor valor. O estudante observado após posicionar o transferidor deve olhar para o ponto mais alto do que se deseja medir, movimento o canudo como se pudesse ver através dele. **Vantagens:** simples, barato, o ângulo obtido é o mesmo ângulo a ser usado no cálculo. **Desvantagens:** a reta que une as indicações de 0° e 180° tem que está posicionada horizontalmente e isso é mais difícil do que se aparenta, são necessários no mínimo dois estudantes para aferir o ângulo.



Figura 31: Posicionamento durante o uso do teodolito escolar¹⁴

Na Figura 31 vemos que a base do transferidor não está horizontalizada e que a estudante não está olhando através do canudo, logo o ângulo encontrado não será o ângulo de inclinação desejado. É importante o professor aconselhe seus estudantes a tomarem bastante cuidado na construção do teodolito escolar, bem como o modo de uso.

¹³ Disponível em: < <http://educador.brasilecola.com/estrategias-ensino/construindo-um-teodolito.htm>>

¹⁴ Disponível em: < https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CFEQFjAC&url=http%3A%2F%2Fprofcamilo.files.wordpress.com%2F2010%2F10%2Ftrigonometria_no_triangulo_retangulo.ppt&ei=6FJZU5PZNNPJsQSUg4KQDA&usg=AFQjCNFMNBsMGGERho-jxdFyPn0-NLFCQg&sig2=sIyGcQ064s4-ptiUhnx-lQ>

CAPÍTULO 5: METODOLOGIA DA PESQUISA

5.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Inicialmente, foi solicitada autorização da Escola Estadual de Ensino Médio Maestro Wilson Dias da Fonseca, localizada no bairro Nova República, Travessa 25, em duas turmas do 2º Ano do ensino médio, para a realização do projeto. Os estudantes envolvidos não serão identificados no trabalho

Esta pesquisa foi realizada em ambiente escolar e orientada por uma abordagem mista (qualitativa e quantitativa), segundo Sampieri (2013), sendo classificada como pesquisa-ação. Planejamento, coleta de informações, implementação e avaliação foram as fases realizadas, segundo a visão técnico-científica. As informações foram obtidas por dois questionários, um aplicado no início do projeto (**diagnóstico**) e outro no final (**avaliação**). Como hipóteses, apresentam-se:

- Os estudantes do 2º Ano do Ensino Médio lembram pouco da Trigonometria supostamente vista no 9º do Ensino Fundamental.
- Atividades com ambientes computacionais podem ter boa aceitação e bom rendimento com estudantes do 2º Ano do Ensino Médio no ensino de Trigonometria.
- Atividades com materiais concretos podem ter boa aceitação e bom rendimento com estudantes do 2º Ano do Ensino Médio no ensino de Trigonometria.

Neste trabalho, deseja-se responder os seguintes questionamentos. O que os estudantes do 2º Ano do Ensino Médio lembram sobre da Trigonometria de 9º Ano do Ensino Fundamental? O uso do programa computacional Geogebra ou de materiais concretos favorece a aprendizagem do tema?

Num primeiro momento, nas duas turmas, foi feito um diagnóstico por meio de um questionário com questões abertas e fechadas (múltipla escolha), para avaliar o conhecimento prévio de algumas habilidades em Trigonometria e informações gerais.

Num segundo momento, as turmas receberam aulas mostrando aspectos básicos da Trigonometria seguidos de resolução das questões do diagnóstico. A aula lecionada para as duas salas foi basicamente a mesma, exceto no fato de que para uma, aqui denominada de **turma A**, foi mostrado o uso do programa Geogebra como método interativo e dinâmico para o ensino e aprendizagem. Na outra turma, aqui denominada de

turma B, foi abordado o uso de teodolito para determinação de ângulos, assim como suas propriedades e maneiras de sua construção.

Encerrando o projeto, foi realizada uma avaliação para verificar se houve melhora do conhecimento sobre a Trigonometria e sobre a opinião deles sobre aspectos do projeto. As questões das avaliações para as duas salas foram basicamente as mesmas, excetuando-se pela primeira questão.

5.2 AULAS

Na aula utilizou-se projetor multimídia que, com auxílio de o *notebook* e de caixa de som, serviu para apresentar *slides* que mostraram informações sobre a história da Trigonometria e seus conceitos básicos.

Durante a aula foi mostrado dois tipos de transferidor: o transferidor de 360° e o transferidor de 180° que foram apresentados através de figuras nos *slides* e também foram disponibilizados alguns exemplares. Tais exemplares foram usados para resolver atividades de medição de ângulo.

5.2.1 Atividade com o Transferidor

Para reforçar a ideia de medição de ângulos, em graus, foi passada algumas atividades em um exercício aos estudantes, para que eles medissem ângulos com os transferidores.

5.2.2 Aspectos Exclusivos da Turma A

Um dos motivos de a aula ter ocorrido no laboratório de informática da escola é por que seria apresentado aos estudantes o programa computacional Geogebra, o qual pode ser descrito como ambiente computacional de fácil entendimento, grátis, com várias ferramentas e com versão em língua portuguesa disponível no site <http://www.Geogebra.org/cms/pt_BR/download>.

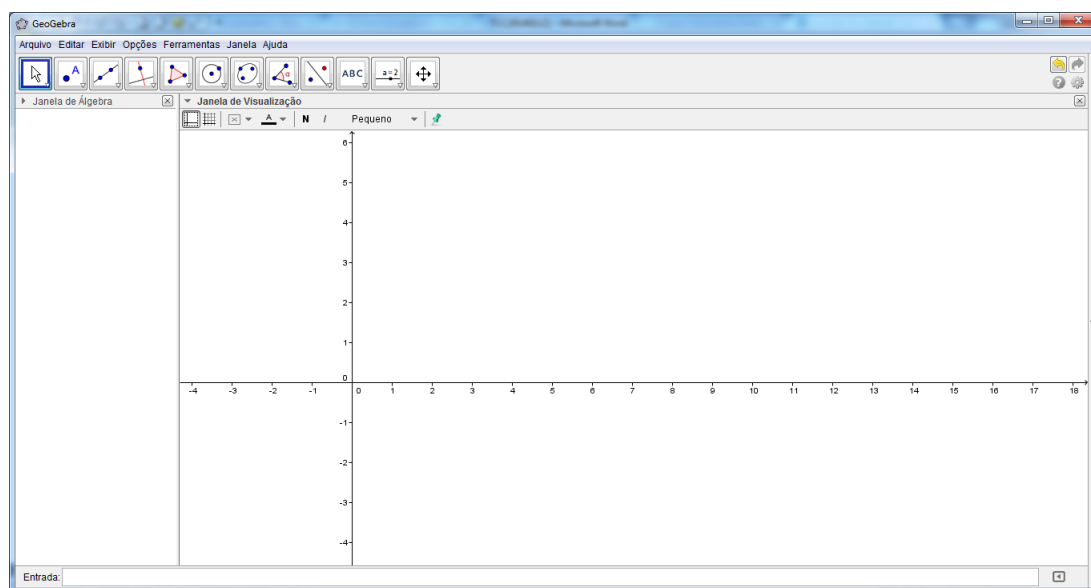







Figura 32: Janela do Geogebra.

O programa constava em todos os computadores da sala de informática. Os alunos ficaram em duplas para explorarem o programa livremente por 10 minutos e, após este tempo, foram passadas as seguintes atividades propostas para uma melhor apresentação do programa:

- Criar pontos usando a ferramenta *Novo Ponto* .
- Criar retas unindo os pontos criados usando a ferramenta *Reta definida por Dois Pontos* .
- Clicar nos ponto da reta e arrastar o *mouse* para ver o comportamento da reta.
- Salvar o documento.
- Criar polígonos usando a ferramenta *Polígono* .
- Medir ângulos através da ferramenta *Ângulo* .
- Salvar novamente o documento.

Após o término desta sequência de atividades, foi destinado mais 10 minutos para interação livre dos alunos com o programa e para tirar dúvidas. Na aula seguinte, foi trabalhado o conceito de semelhança de figuras geométricas, criar retas perpendiculares através da ferramenta *Reta Perpendicular* , identificação de hipotenusa e catetos, classificação de catetos em cateto adjacente e cateto oposto e, na aula seguinte, calcular o valor das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo e, por fim, saber calcular a medida de um lado de um triângulo retângulo tendo o valor da medida de outro lado deste triângulo e o valor da medida de um de seus ângulos agudos.

5.2.3 Aspectos Exclusivos da Turma B

Na turma B, foi exposto sobre a evolução do teodolito. Além disso, foram mostrados vídeos encontrados na *internet* que mostram a construção de teodolito, sua função entre outras características.

Foram expostas variadas formas de construção do teodolito, dando-se ênfase ao material necessário, bem como sua utilização e prováveis dificuldades na realização da atividade prática para cada forma de construção. Todo esse cuidado se justifica pelo simples motivo de que em alguns vídeos a medição do ângulo não é bem realizada. Ao invés de descartar tais vídeos, preferiu-se usá-los como exemplo de como não fazer.

Os tipos de teodolito foram classificados em três grupos: os que usavam uma linha com peso, os que usavam objetos sólidos que apontavam para o topo do objeto a ser medido e o misto. Além disso, foram apresentados aos estudantes os conceitos de hipotenusa, definição e classificação dos catetos em cateto oposto e cateto adjacente, definição das razões trigonométricas: *seno*, *coseno* e *tangente*, além de exemplos do cálculo da altura (profundidade ou largura) usando a distância e a razão trigonométrica *tangente*.

Para determinar uma dada altura, podemos fazer os seguintes passos:

Passo 1: Posicionar o teodolito na direção do topo da altura a ser medida para obter a partir da posição horizontal, o ângulo α .

Passo 2: Medir a distância (d_1) entre o pé da pessoa que tá com o teodolito e a base do objeto a ser medido.

Passo 3: Medir a distância (d_2) do chão até o olho da pessoa que está com o “teodolito”.

Passo 4: Calcular a altura a partir da tangente do ângulo encontrado, ou seja,

$$ALTURA = tg(\alpha) \cdot d_1 + d_2$$

Aqui mostraremos uma forma bem simples de se construir um teodolito para medição de ângulo vertical. Primeiramente, vamos listar os materiais necessários:

- Transferidor de 180°.
- Um fio de nylon de 20 a 40 centímetros.
- Um prego¹⁵

¹⁵ Não obrigatoriamente precisa ser um prego, qualquer objeto sólido de massa aproximada e que seja fácil de ser amarrado pode substituir o prego.

Modo de fazer: observe que de um lado do transferidor tem a indicação de 0° e que no outro lado há a indicação de 180° . Trace uma linha imaginária que passe por cima destas duas indicações. Observe que no transferidor a uma marcação equidistante às duas indicações; caso não tenha, se oriente pela direção da indicação de 90° para determiná-la, através de uma reta perpendicular a linha imaginária. É neste ponto que deve ser fixado um das extremidades do fio de nylon. Chamaremos esse ponto de centro do transferidor.

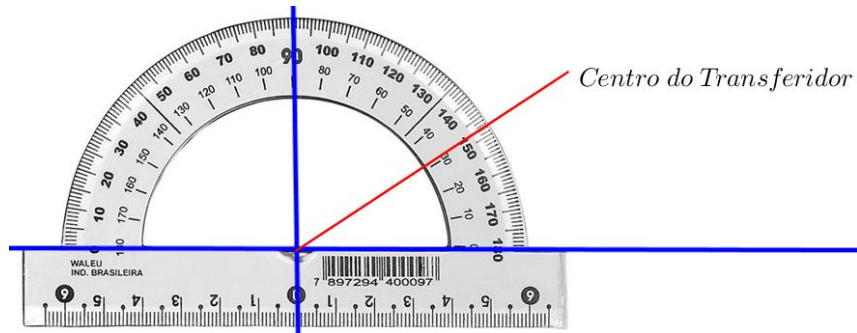


Figura 33: Centro do Transferidor

Na outra extremidade, amarre o prego. Para medição do ângulo, a convexidade do transferidor deve estar voltada para o solo, como ilustra a Figura 34.



Figura 34: Estudante exibindo o teodolito que construiu

Antes de verificar o ângulo com o teodolito precisamos conhecer duas medidas: a altura do olhar do estudante observador e a distância dele para o que será medido. A parte retilínea do transferidor deve ser apontada pelo estudante observador para o ponto mais alto do que se deseja medir. Enquanto o transferidor é posicionado, alguém verifi-

ca por onde o fio está passando, como exibido na Figura 35. Observe que no transferidor há duas sequências de ângulos, nos sentidos: horário e anti-horário.



Figura 35: Medição de ângulo vertical usando o teodolito

O fio vai passar por cima de duas indicações de medida de ângulos os quais são suplementares. Escolha a menor medida obtida e encontre o seu ângulo complementar, isto é, subtraia de 90° este valor. Para fixarmos melhor, vejamos um exemplo: um observador cuja medida do olhar está a 1,60 metros do chão está a 5 metros do que se deseja medir, ver Figura 36. O menor ângulo encontrado no transferidor foi 74° e seu complementar é 16° , pois $74^\circ + 16^\circ = 90^\circ$.



Figura 36: Exemplo de medição de altura usando teodolito

Sabemos que $tg(16^\circ) = 0,2867$, ver Anexo A. Assim, para termos a altura do que se deseja medir, podemos obtê-la do seguinte modo:

$$(altura\ do\ objeto) = tg(16^\circ) \times (dist\ancia) + (altura\ do\ olhar\ do\ observador)$$

$$(altura\ do\ objeto) = 0,2867 \times 5 + 1,60$$

$$(altura\ do\ objeto) = 3,30\ metros$$

Os estudantes ficaram responsáveis de montar equipes de cinco a seis integrantes para construir um teodolito, escolher algum objeto para medir a altura, medir esta altura usando o teodolito construído, registrar a atividade através de fotos ou vídeo e apresentar em sala de aula. Não foi estipulado um tempo para a exposição dos estudantes.

Foi disponibilizada uma tabela com os valores de *seno*, *coosseno* e *tangente* dos ângulos de 0° a 90° (ver no Anexo A) além de mostrar como se encontrava o valor através das calculadoras “científicas” de celulares de alguns alunos. No final da aula foi reservado um momento no qual os estudantes puderam tirar dúvidas sobre a atividade.

A exposição dos estudantes ocorreu na semana seguinte na sala de informática. Foi utilizado projetor multimídia, associado a um *notebook* e caixa de som, para expor em *slides* ou vídeo. No final de cada apresentação, foi destinado um tempo após cada exposição no qual todos que estavam presentes, incluindo o professor, puderam tirar dúvidas sobre o trabalho exposto e fazer comentários pertinentes.

CAPÍTULO 6: RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao todo, a pesquisa envolveu 55 alunos, 29 da turma A e 26 da turma B. Os alunos que não puderam participar de todas as fases do projeto foram desconsiderados na estatística deste trabalho.

Na atividade envolvendo o material concreto teodolito, um grupo de estudante queria fazer a atividade através do uso de aplicativo de celular. Entendemos que o uso deste aplicativo nesta atividade seria bem cômodo para equipe, porém descaracterizaria a pesquisa.

O diagnóstico passado para as duas turmas foi o mesmo, excetuando-se pela primeira questão. Na turma A, a primeira questão foi “Você conhece o programa computacional Geogebra?” e as alternativas foram: Sim, Não e Talvez. O resultado está exposto no Gráfico 1.

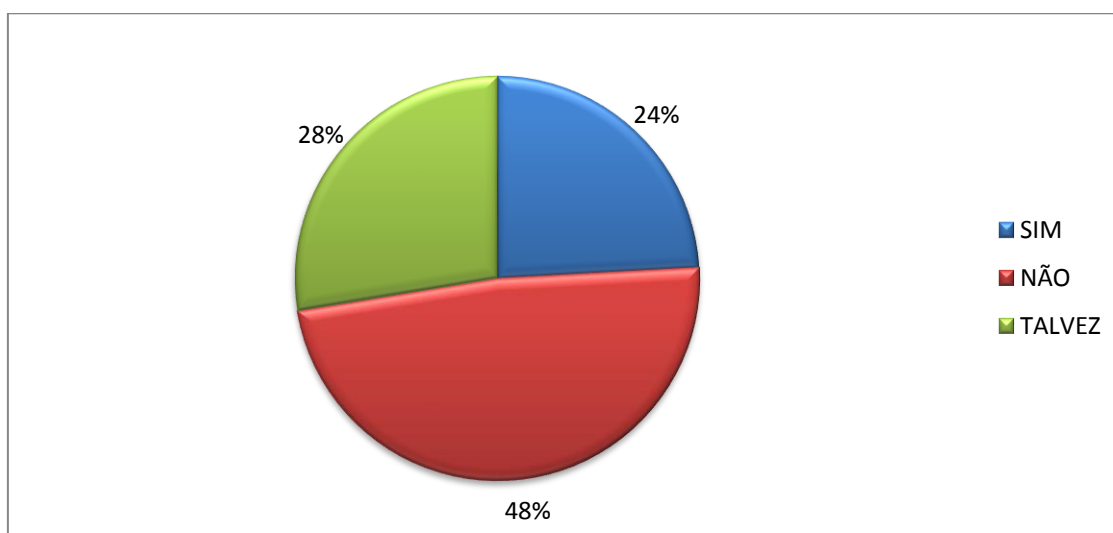


Gráfico 1: Resultado da primeira questão do diagnóstico aplicado na turma A

Na turma B, a primeira pergunta do diagnóstico foi “Você já ouviu falar sobre teodolito?” e as alternativas foram: Sim, Não e Talvez. O resultado está exposto no Gráfico 2.

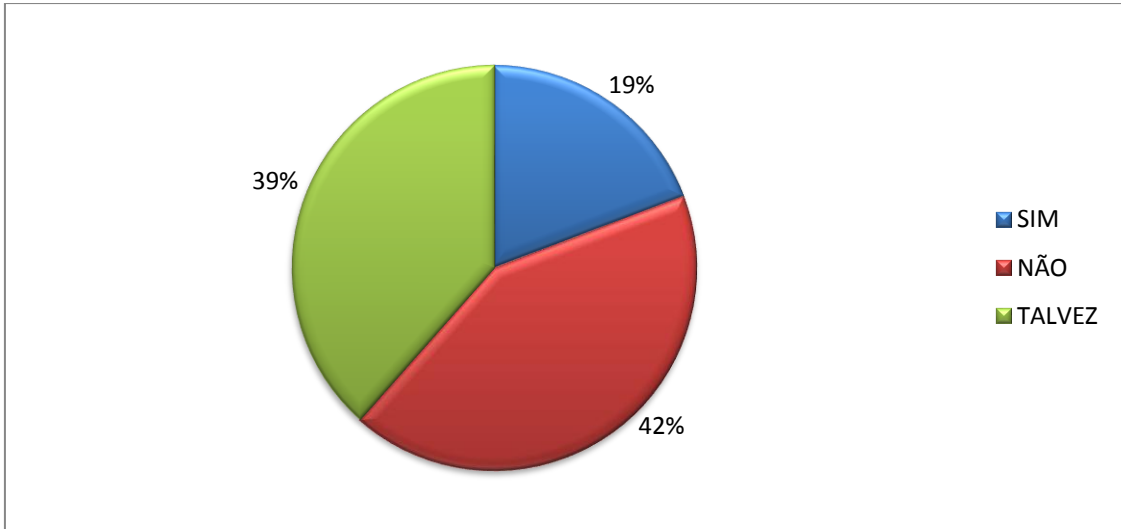


Gráfico 2: Resultado da primeira questão do diagnóstico aplicado na turma B

Somente 24% da turma A afirmou que conhece o programa computacional Geogebra, enquanto somente 19% da turma B já ouviu falar em teodolito. Com base nestas informações, as atividades que foram envolvidas nas duas turmas partiram do princípio do desconhecimento prévio das ferramentas, indicando a necessidade uma abordagem introdutória.

A segunda questão era de múltipla escolha e tinha como pergunta: “Você já estudou Trigonometria?”. Os resultados obtidos nas duas na turma A e na turma B estão expressos na Gráfico 3 e Gráfico 4, respectivamente.

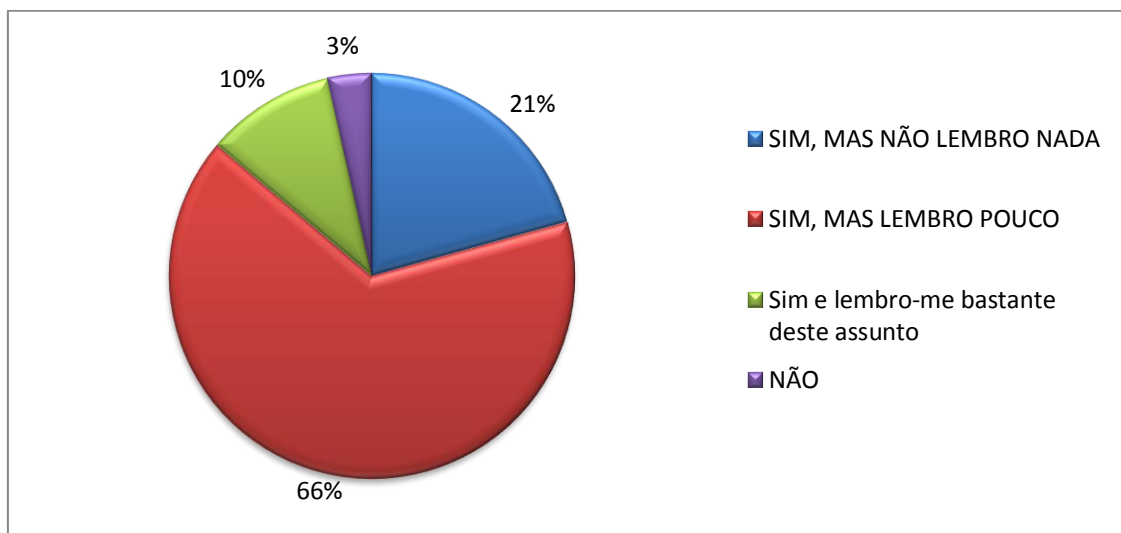


Gráfico 3: Resultado da segunda questão do diagnóstico aplicado na turma A

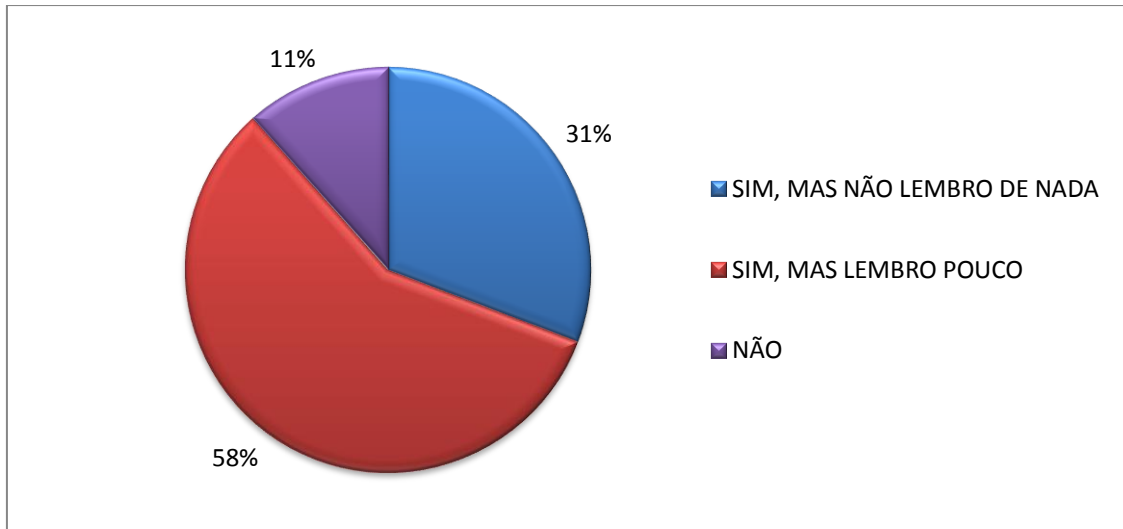


Gráfico 4: Resultado da segunda questão do diagnóstico aplicado na turma B

As respostas obtidas através da segunda questão do diagnóstico indicam que a maioria dos estudantes, 66% da turma A e 58% da turma B, já ouviu falar sobre Trigonometria, mas lembra de pouco. Em seguida, 21% da turma A e 31% da turma B, assinalaram que já haviam ouvido falar sobre Trigonometria, mas que não se lembravam de nada. Além disso, 3% da turma A e 11% da turma B afirmaram que nunca haviam estudados Trigonometria, inclusive alguns estudantes relataram que nunca sequer ouviram falar a palavra Trigonometria, o que é muito preocupante, pois indica que o professor responsável pela disciplina Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental pode não ter ministrado aulas de Trigonometria ou que o estudante não lembra que estudou tal assunto. A terceira questão do diagnóstico tem por objetivo de verificar se o aluno tem noção básica de o que é ângulo reto, como se verifica na Figura 37.

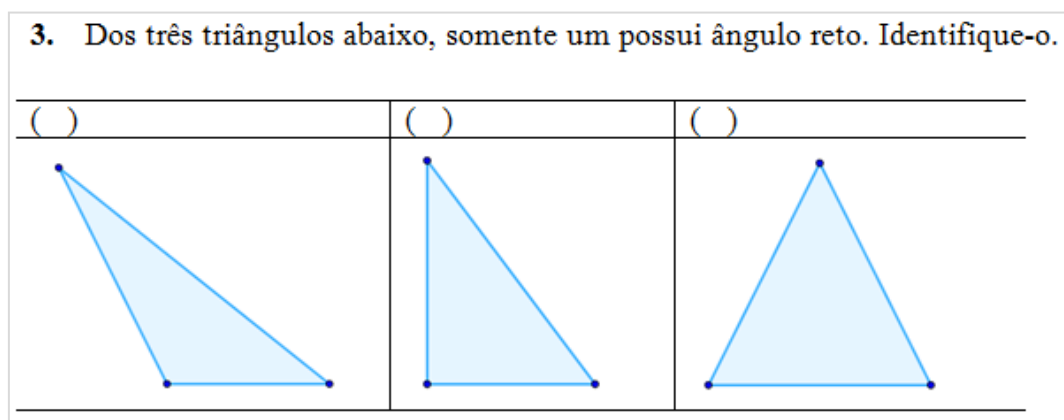


Figura 37: Terceira questão do diagnóstico

O resultado obtido da terceira questão do diagnóstico nas duas na turma A e na turma B está expresso na Gráfico 5 e Gráfico 6, respectivamente.

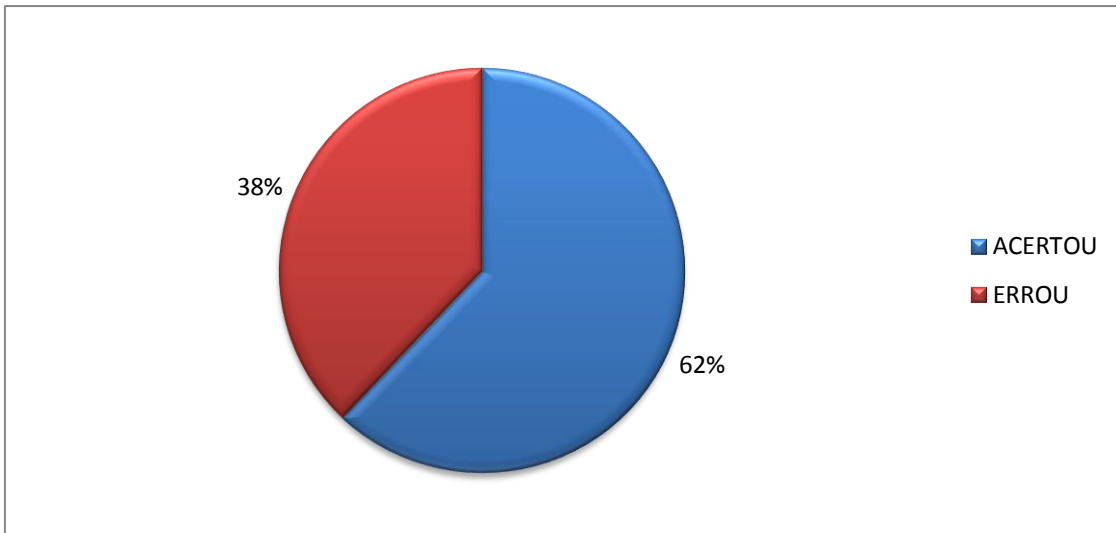


Gráfico 5: Resultado da terceira questão do diagnóstico aplicado na turma A

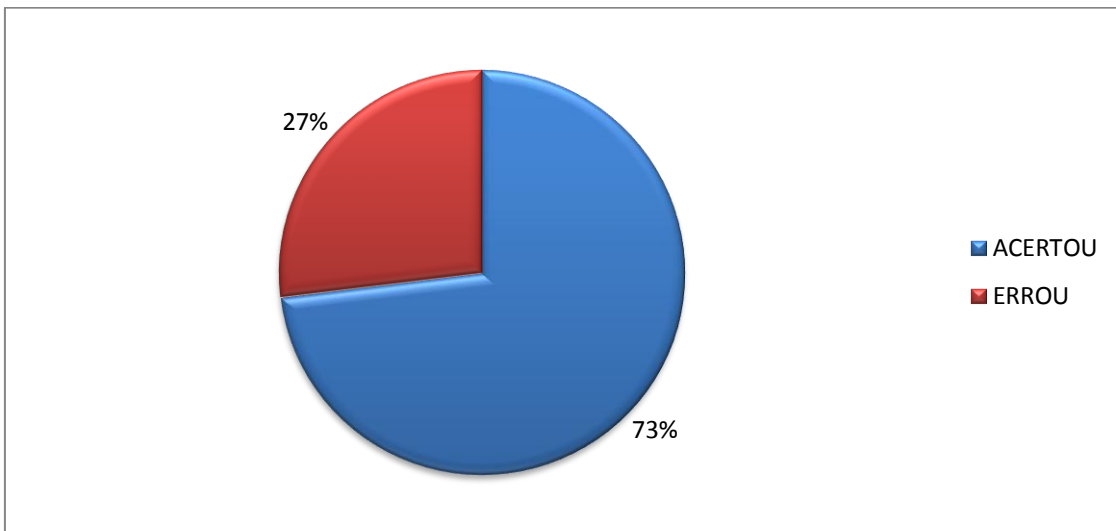


Gráfico 6: Resultado da terceira questão do diagnóstico aplicado na turma B

O resultado obtido na terceira questão do diagnóstico foi positivo. Todavia, a ideia de ângulo reto e perpendicularidade são trabalhadas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, tanto o livro didático quanto o professor, na maioria das vezes, partem do princípio de que o estudante já está bem familiarizado com tais temas. Quem já estudou Trigonometria sabe que a ideia de ângulo reto, principalmente no que concerne a sua identificação, é pré-requisito básico para os estudantes que devem estudar tal assunto. A quarta questão do diagnóstico, Figura 38, tem por objetivo verificar se

o estudante, ao se deparar com um triângulo retângulo, sabe identificar a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação a um ângulo α .

4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo α nos triângulos abaixo.

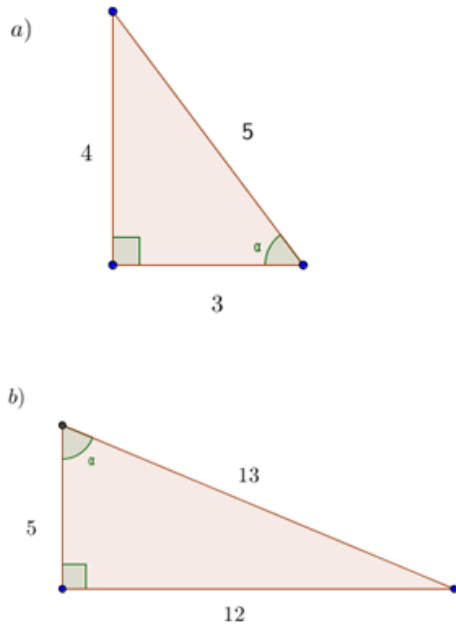


Figura 38: Quarta questão do diagnóstico

O resultado obtido da quarta questão do diagnóstico na turma A e na turma B está expresso no Gráfico 7 e no Gráfico 8, respectivamente.

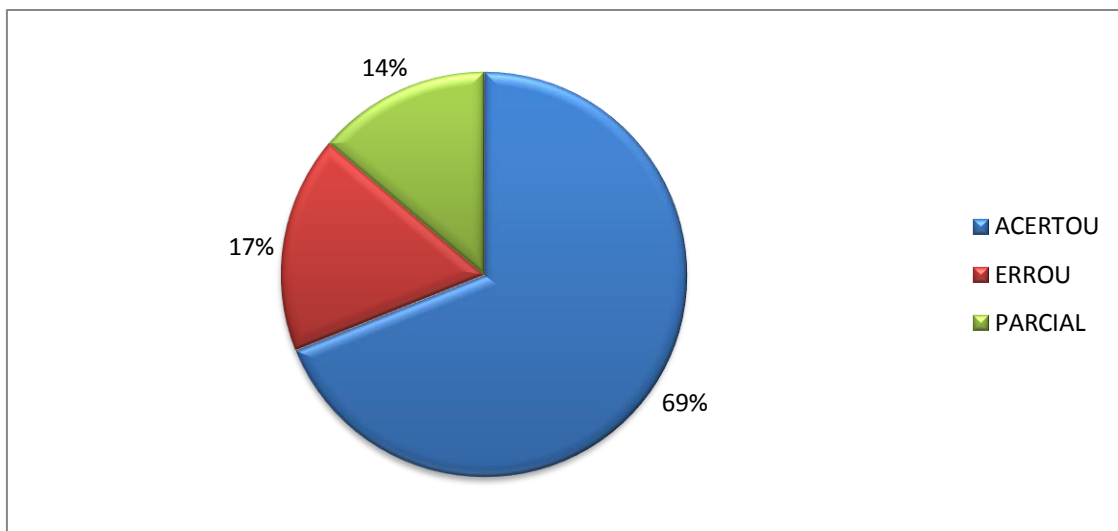


Gráfico 7: Resultado da quarta questão do diagnóstico aplicado na turma A

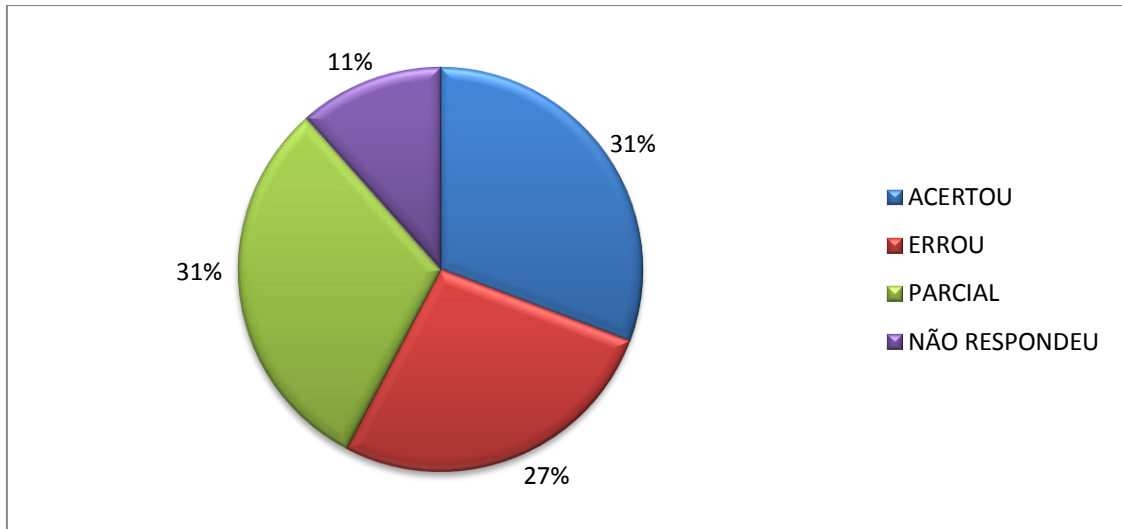


Gráfico 8: Resultado da quarta questão do diagnóstico aplicado na turma B

A quarta questão do diagnóstico, assim como a quinta e a sexta, exigiu resposta discursiva a qual teve sua correção classificada em: acertou, errou parcial e não respondeu. As respostas dos estudantes que chegaram pelo menos na metade de uma resposta satisfatória foram classificadas como parcial, enquanto que as respostas com desempenho abaixo disso foram assinaladas como erro.

A quinta questão do diagnóstico (Figura 39) tem por objetivo verificar se o estudante, tendo um triângulo retângulo com um ângulo agudo α , consegue calcular os valores de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

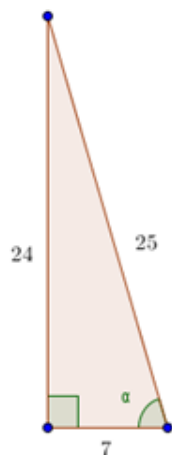


Figura 39: Quinta questão do diagnóstico

O resultado obtido da quarta questão do diagnóstico na turma A e na turma B está expresso no Gráfico 9 e no Gráfico 10, respectivamente.

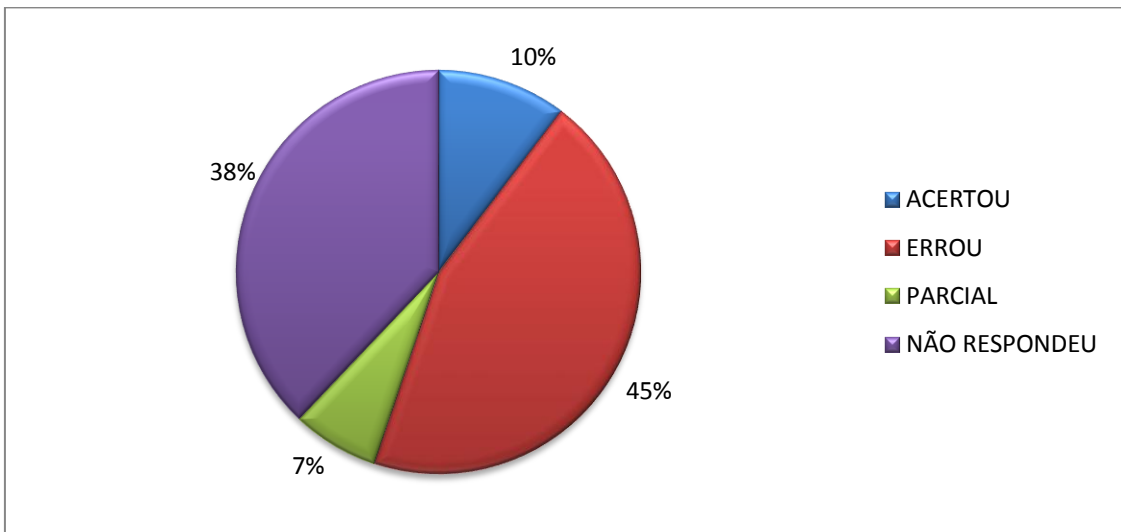


Gráfico 9: Resultado da quinta questão do diagnóstico aplicado na turma A

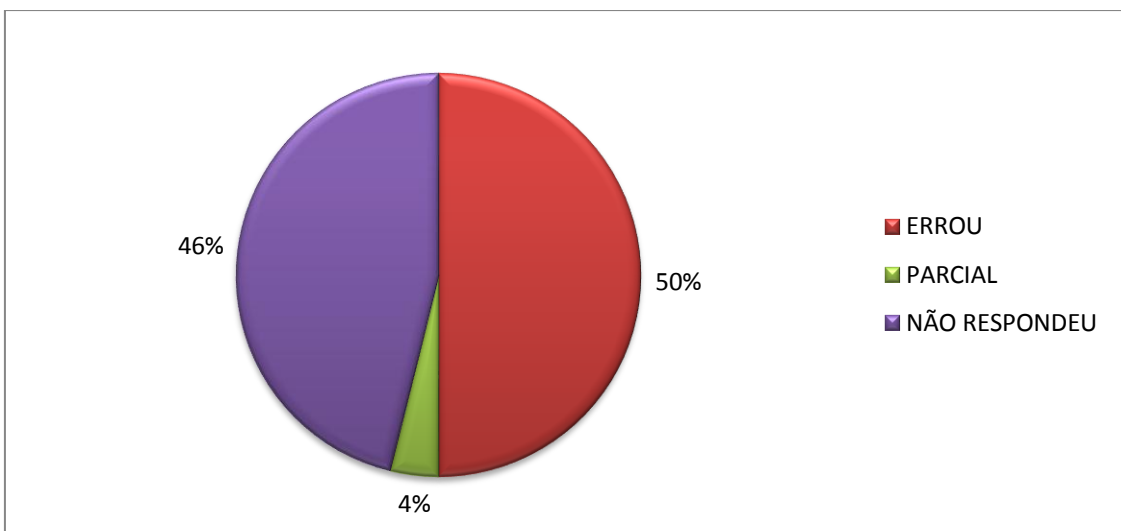


Gráfico 10: Resultado da quinta questão do diagnóstico aplicado na turma B

O resultado obtido na quinta questão do diagnóstico indica que o conhecimento das três principais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) não foi bem absorvido pela grande maioria dos estudantes. Somente 10% da turma A acertou a questão enquanto que na turma B nenhum estudante acertou a questão. Além disso, 31% da turma A e 42% da turma B colocaram como valores de $\text{sen}(\alpha)$, de $\text{cos}(\alpha)$ e de $\text{tg}(\alpha)$ uma das medidas de lado triângulo, assim como mostra a figura abaixo.

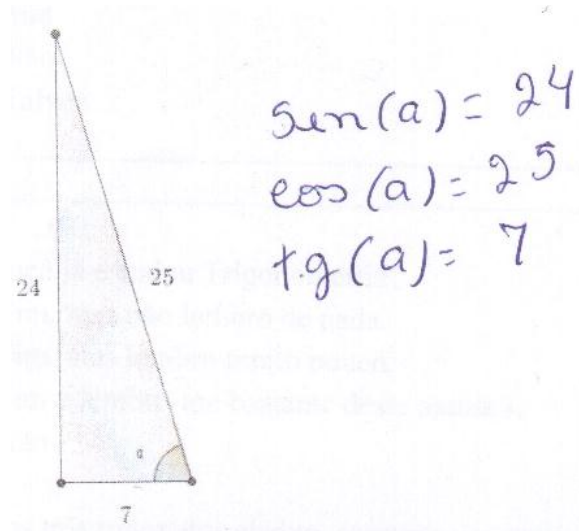


Figura 40: Resposta de um estudante para a quinta questão do diagnóstico

Os estudantes que responderam de forma semelhante ao demonstrado na Figura 40 tiveram sua resposta classificada como Errou. Um dos principais objetivos do estudo de Trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental é saber o conceito das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Diante de um indicativo bastante desanimador, o professor tem que saber identificar quais as dificuldades que o estudante enfrenta na construção de determinados conhecimentos. A sexta questão do diagnóstico (Figura 41) verifica se o aluno consegue usar, dentre outros, os conhecimentos necessários para resolver às questões 3, 4 e 5.

6. Um observador está a 10 metros de uma árvore, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo da árvore com o ângulo de 50° com a horizontal. Supondo que o olhar do observador está a 1,6 metros do solo, determine a altura da árvore, sabendo que $\text{sen}(50^\circ) = 0,766$, $\text{cos}(50^\circ) = 0,6428$ e $\text{tg}(50^\circ) = 1,1918$.

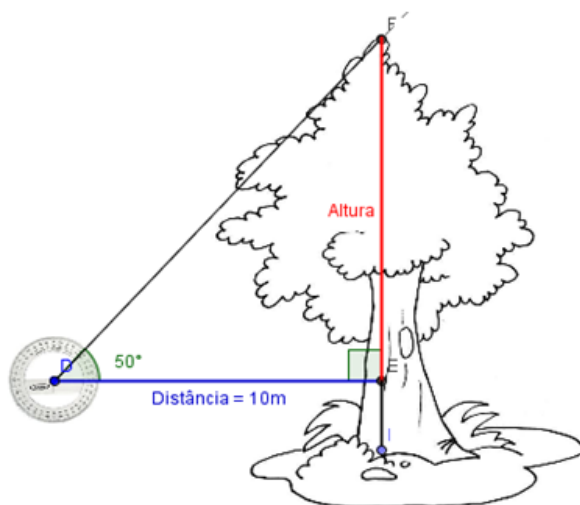


Figura 41: Sexta questão do diagnóstico

A sexta questão do diagnóstico é a mais complexa do nosso questionário, isto justifica claramente os resultados obtidos na turma A (Gráfico 11) e na turma B (Gráfico 12). A questão exige o uso da razão trigonométrica denominada tangente, porém nos dados foram juntamente incluídas dados sobre seno e cosseno.

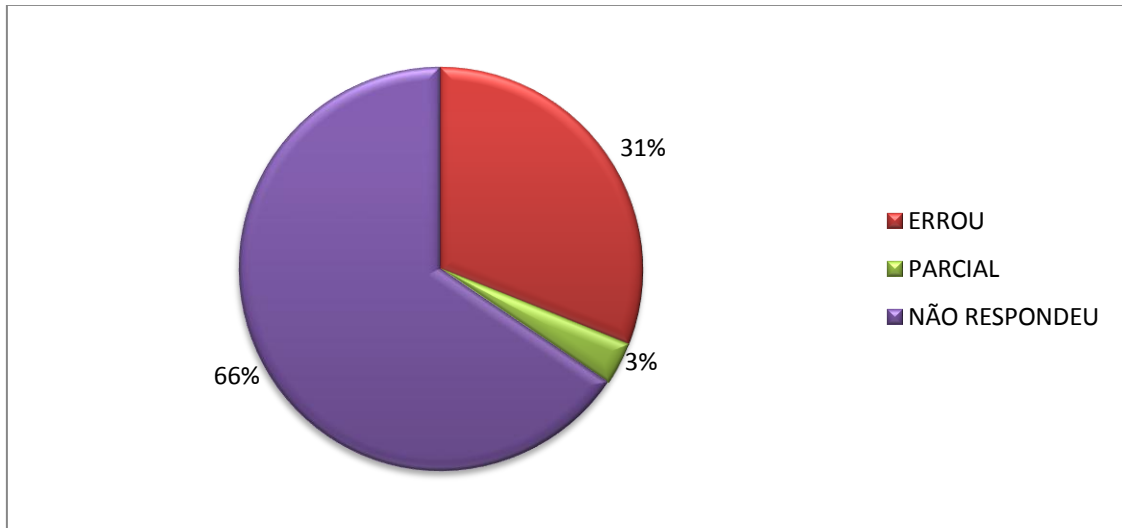


Gráfico 11: Resultado da sexta questão do diagnóstico aplicado na turma A

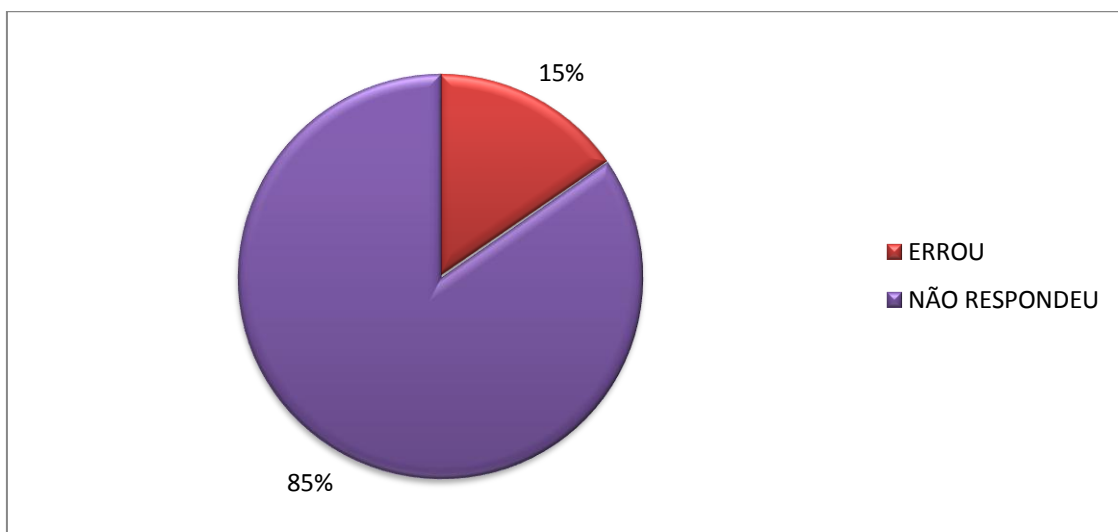


Gráfico 12: Resultado da sexta questão do diagnóstico aplicado na turma B

Os resultados obtidos na sexta questão do diagnóstico nas turmas A e B foram aquém do esperado. Nas duas turmas não houve registro de acerto e somente 3% da turma A acertou próximo da metade da questão. A grande maioria dos estudantes, 66% da Turma A e 85% da turma B, nem tentaram resolver.

Estes resultados ficaram disponíveis para os alunos. Durante a aula, muitos alunos relataram que não sabiam a função do transferidor, mas logo viram que era simples. Outros já tinham visto, mas não sabiam que o nome era transferidor.

Após as atividades foi feita uma avaliação como todos os alunos com questões abertas e fechadas, no total de seis questões, para serem respondidas em duas aulas consecutivas, isto é, 80 minutos. As três últimas questões desta avaliação são semelhantes às três últimas questões do diagnóstico realizado no início deste trabalho, com o objetivo de aferir se houve ou não melhora no conhecimento sobre Trigonometria. A primeira questão da avaliação foi “O que pode ser feito pelo professor(a) de Matemática para que sua aula seja mais interessante?”

A terceira questão da avaliação (Figura 42) tem como objetivo verificar a aceitação dos estudantes para a metodologia aplicada. Nas duas salas, alguns estudantes questionaram:

— O que é metodologia?

Respondemos de forma simples, através de exemplos. Frequentemente, o professor usar termos que na sua visão são de fácil compreensão, porém esbarramos no desconhecimento dos estudantes.

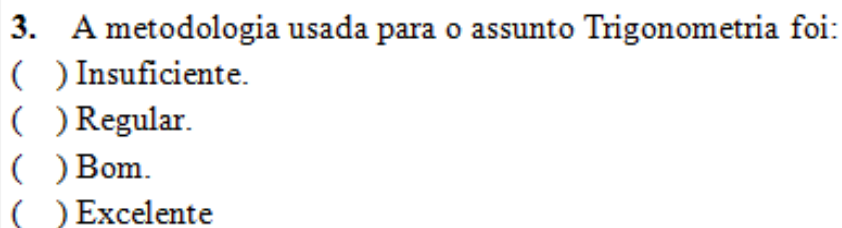
- 
- 3. A metodologia usada para o assunto Trigonometria foi:**
 Insuficiente.
 Regular.
 Bom.
 Excelente

Figura 42: Terceira questão da avaliação

O resultado obtido para a questão três da Avaliação na turma A e na turma B está expresso no Gráfico 13 e no Gráfico 14, respectivamente.

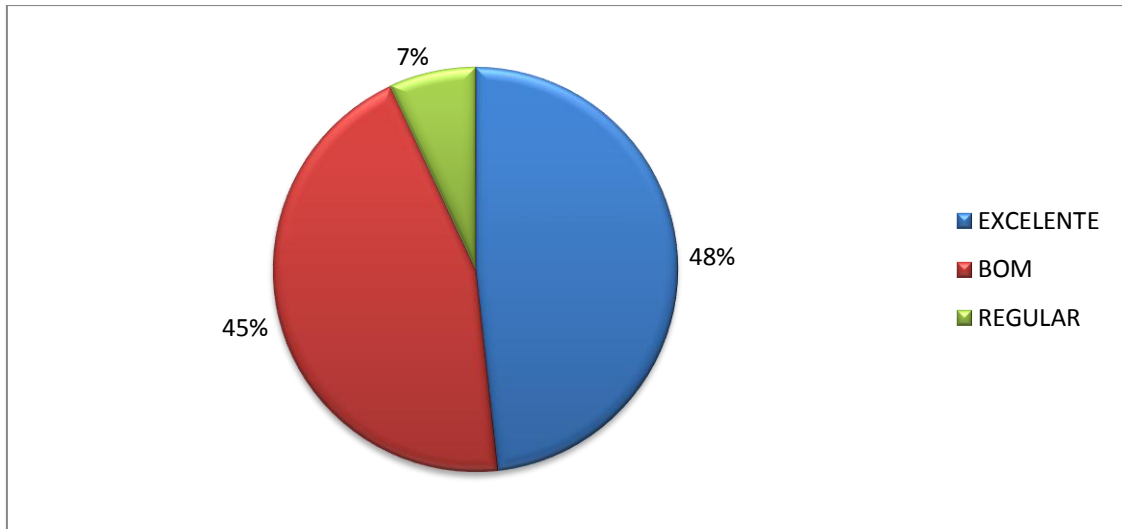


Gráfico 13: Resultado da terceira questão da Avaliação aplicada na turma A

Não tivemos registro de alguém que tenha assinalado a opção INSUFICIENTE na resposta da terceira questão da Avaliação aplicada na turma A e somente 7% dos estudantes assinalaram a opção REGULAR. Isto é um bom indicativo de que a metodologia aplicada nesta sala foi satisfatória, assim como na turma B que, em relação a mesma questão a maioria assinalou a opção BOM (65%) e 23% assinalou a opção EXCELENTE.

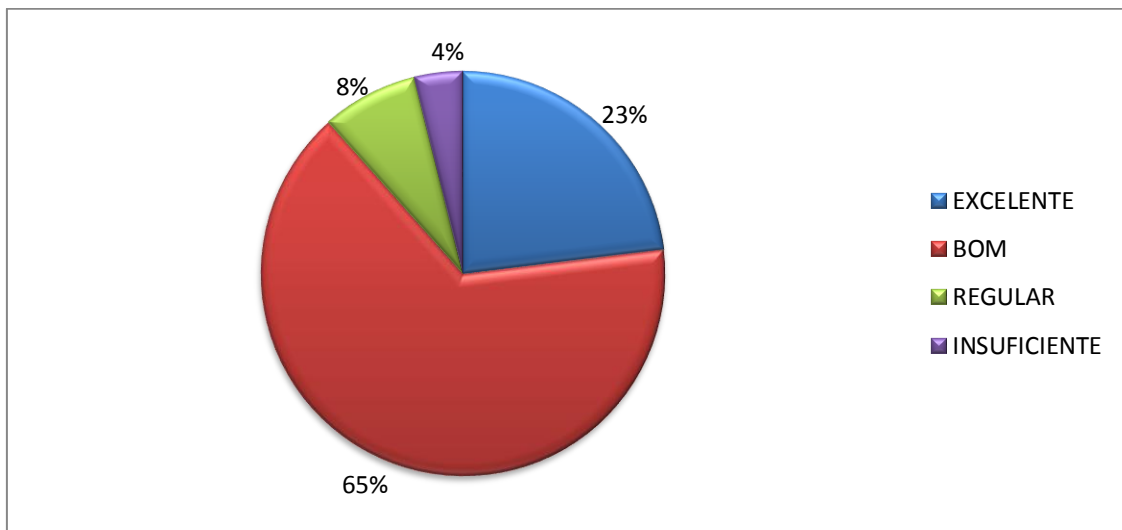
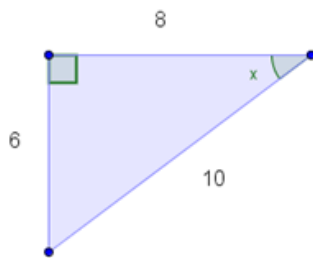


Gráfico 14: Resultado da terceira questão da Avaliação aplicada na turma B

Na figura abaixo, a quarta questão da avaliação busca verificar se houve melhora em relação ao diagnóstico sobre a habilidade de identificar em um triângulo retângulo a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto.

4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo x nos triângulos abaixo.

a)



b)

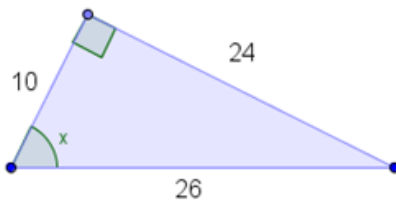


Figura 43: Quarta questão da avaliação

No Gráfico 15 e no Gráfico 16 abaixo, há a comparação da habilidade de identificar a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente em relação a um dos ângulos agudos destacados em um triângulo retângulo na turma A e na turma B, respectivamente.

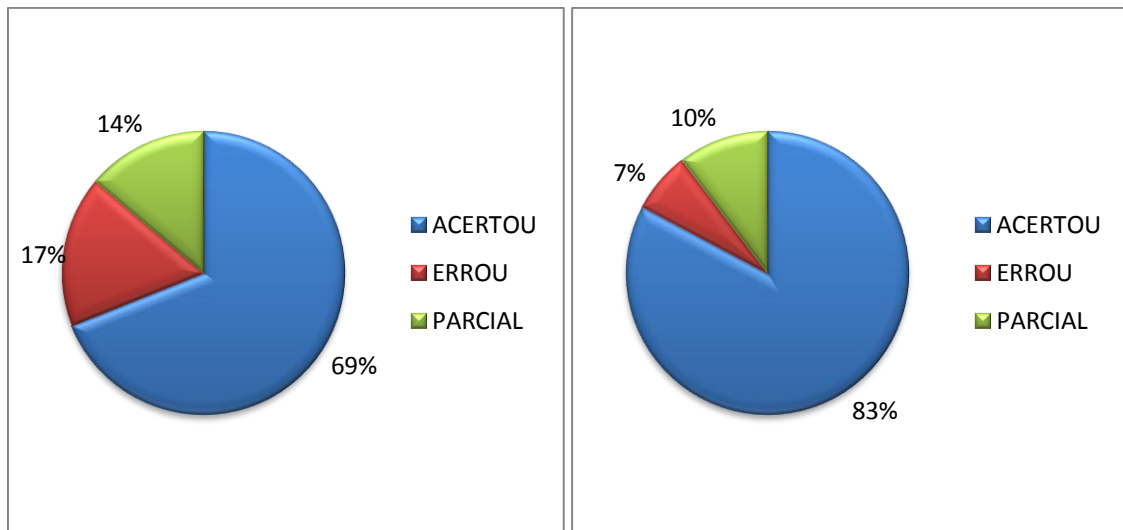


Gráfico 15: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de identificar a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto.

O Gráfico 15 mostra que o resultado obtido no diagnóstico já era bom, ficou ainda melhor na avaliação e o Gráfico 16 mostra que, apesar do resultado obtido no diagnóstico ser desanimador, o resultado na avaliação ficou bem próximo do que o obtido na turma A.

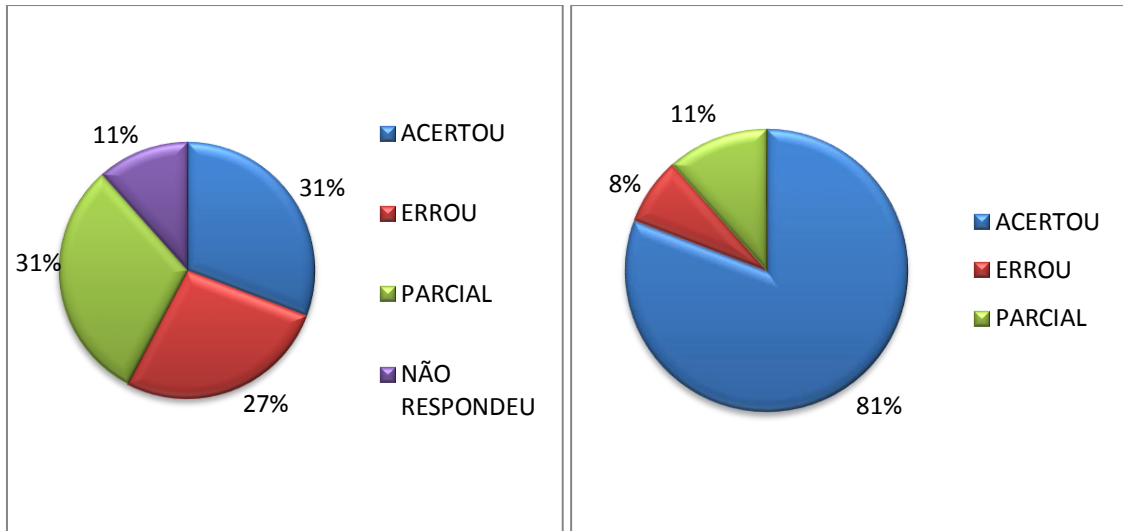
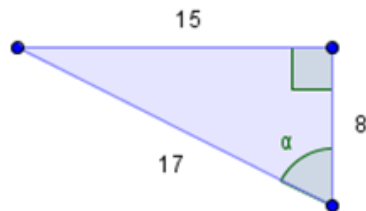


Gráfico 16: Comparação entre os resultados da turma B obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de identificar a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto.

A Figura 44 exibe a quinta questão da avaliação, cujo objetivo é verificar se os estudantes tem a habilidade de calcular $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$, em um triângulo retângulo, tendo como informação os valores da medida de seus lados e a localização de um de um de seus ângulos agudo, o ângulo α .

5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

a)



b)

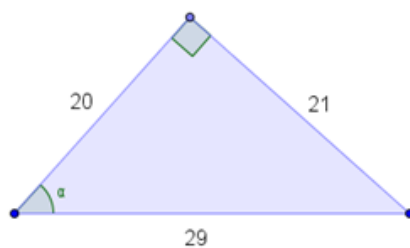


Figura 44: Quinta questão da avaliação

No Gráfico 17, mostra que no diagnóstico somente 10% acertou a questão, enquanto que na avaliação o percentual aumentou para incríveis 79%. O percentual de

estudantes que erraram a questão se reduziu a quase um terço e, além disso, o percentual de estudantes que não respondeu a questão no diagnóstico foi 38% passou para 0% na avaliação. O resultado para esta habilidade foi bastante positivo.

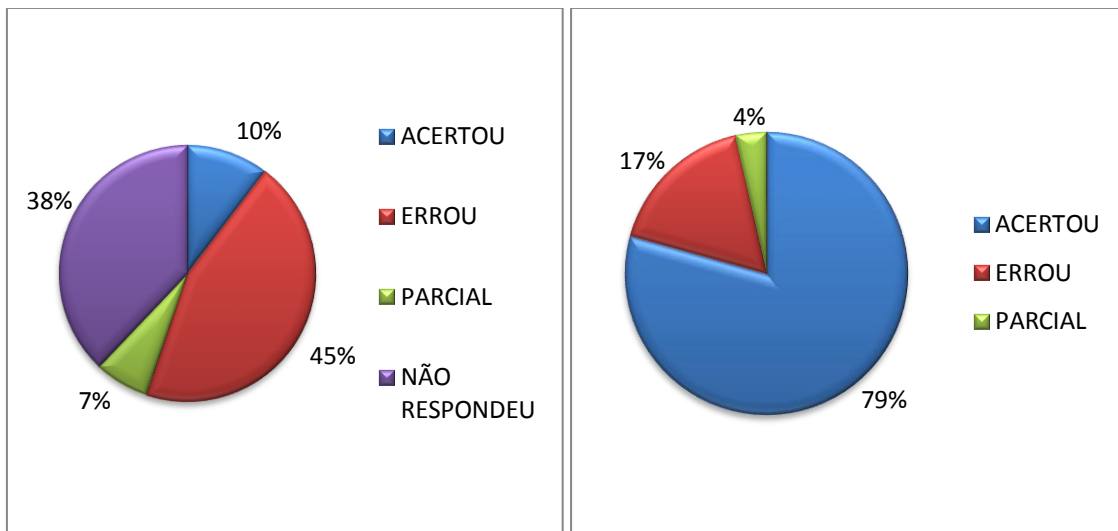


Gráfico 17: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de calcular o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

No Gráfico 18, o resultado no diagnóstico na turma B foi desastroso, porém o resultado da avaliação foi semelhante ao obtido pela turma A. Mesmo assim, em uma turma inteira de 2º ano do Ensino Médio, não ter nenhum registro de acerto na verificação da habilidade de calcular o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$ é preocupante, uma vez que esta é uma das habilidades mais cobradas no ensino de Trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental.

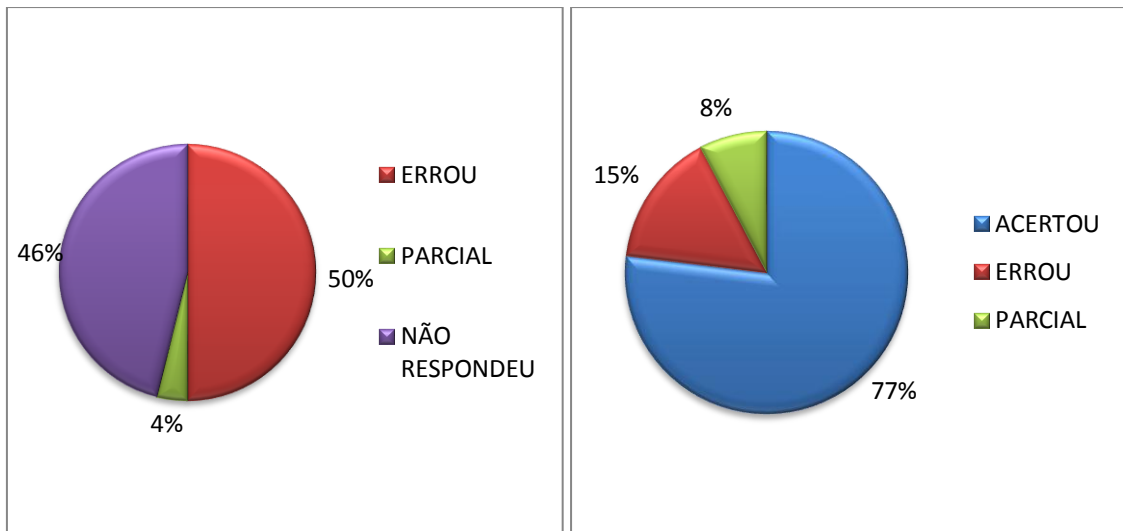


Gráfico 18: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de calcular o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

Na Figura 45 está exibida a sexta e última questão da avaliação que, assim como a sexta questão do diagnóstico, visa verificar a habilidade de aplicar os conhecimentos trigonométricos para medir distâncias.

6. Um observador está a 80 metros de um prédio, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo do prédio sob um ângulo de 62° em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio? (Dados: $\text{sen}(62^\circ) = 0,8829$, $\text{cos}(62^\circ) = 0,4695$ e $\text{tg}(62^\circ) = 1,8807$)

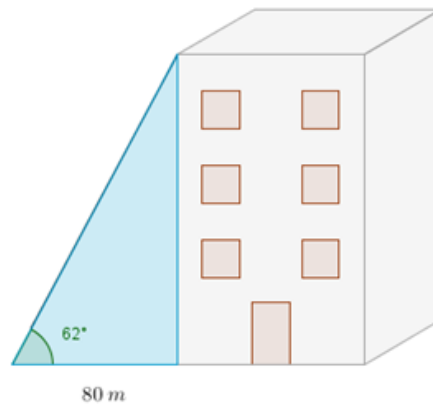


Figura 45: Sexta questão da avaliação

No Gráfico 19, observamos que o resultado foi positivo tendo em vista a situação verificada no diagnóstico. Um grande ganho foi que na avaliação todos tentaram responder, enquanto que mais da metade (66%) havia deixado uma questão semelhante em branco no diagnóstico.

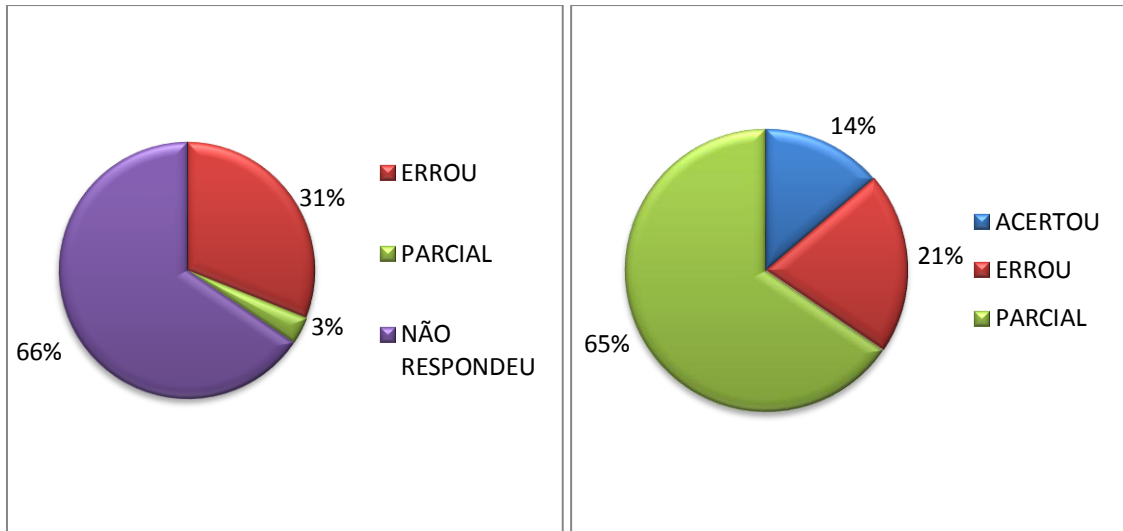


Gráfico 19: Comparação entre os resultados da turma A obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de determinar distância usando conhecimento trigonométrico.

No Gráfico 20, estamos diante de extremos ou de uma comprovação que nossos estudantes podem sempre nos surpreender. Se a esquerda, no diagnóstico, o resultado foi catastrófico, pois 85% nem tentou se arriscar a responder, este percentual caiu para 0% na avaliação. Melhora semelhante ocorreu com o percentual de acertos que foi de 0% para 54%.

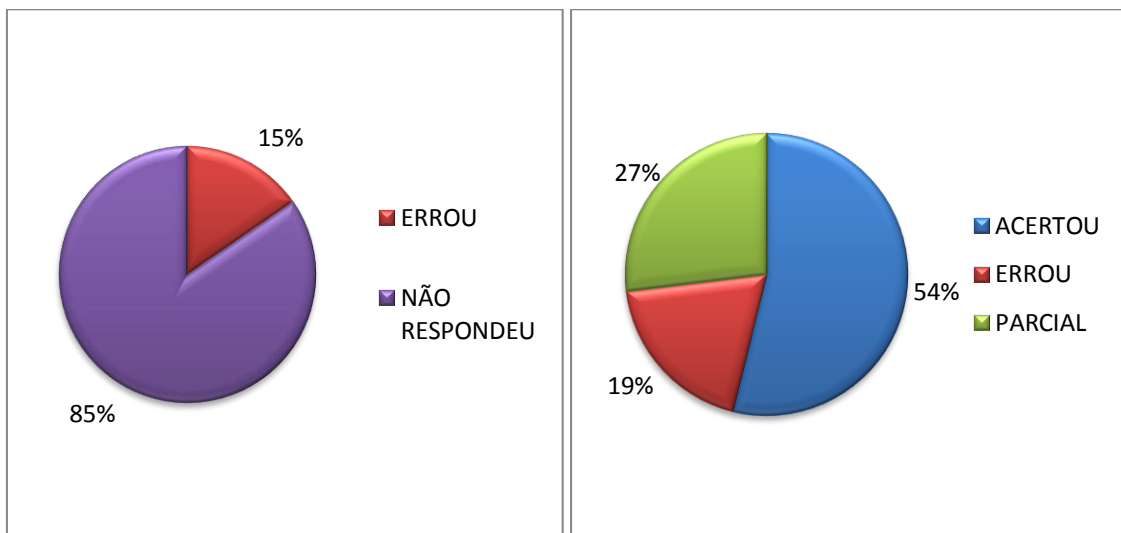


Gráfico 20: Comparação entre os resultados da turma B obtidos no diagnóstico, à esquerda, e na avaliação, à direita, para habilidade de determinar distância usando conhecimento trigonométrico.

Um dos resultados mais importantes desta pesquisa foi que na avaliação todos os estudantes responderam algo em todas as questões. Essa mudança de comportamento é bastante positiva, pois se o estudante se propõe a escrever resoluções, então há comprometimento com o processo e ensino, além de ser um indicativo de que se teve apren-

dizagem significativa. Após a tabulação dos dados, os resultados foram exibidos aos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho surgiu da grande fascinação que tenho do tema Trigonometria e da necessidade de me aprofundar mais em vários de seus aspectos. Além disso, é sempre interessante que o professor de Matemática, especialmente, seja humilde; saiba que pode existir uma metodologia diferente da sua que deve alcançar um melhor resultado e que esta metodologia nunca será absoluta, pois para cada indivíduo a aprendizagem ocorre de forma distinta.

Ser professor é ter uma grande responsabilidade, é saber ir além de uma boa explicação. Atualmente, é cada vez mais exigido que o professor saiba conquistar seus alunos, motivá-los; pois é provável que você leitor deixou de admirar uma matéria ou assunto por não simpatizar com o professor.

Pesquisar sobre a história da Trigonometria foi bastante interessante, visto que a cada nova descoberta suscitava uma nova reflexão sobre a metodologia de aula. Vejo que o professor de Matemática deve sempre buscar saber mais sobre a origem histórica dos temas de Matemática, esta é uma forma bem prazerosa de aperfeiçoamento.

Em escolas públicas é comum, independente da quantidade de salas, ter somente um laboratório de informática. Para fazer minha pesquisa, tive prioridade na reserva de horários, porém no cotidiano a realidade é bastante desafiadora. A rejeição de alguns estudantes para o uso de computadores nas aulas se mostrou imotivada e facilmente contornável. Tanto o uso de ambiente computacional quanto o de atividade concreta teve boa repercussão dentre os estudantes no término da pesquisa.

Neste trabalho, buscamos responder, dentre outros questionamentos, O que os estudantes do 2º Ano do Ensino Médio lembram sobre da Trigonometria de 9º Ano do Ensino Fundamental? Os resultados do diagnóstico realizado mostram que a grande maioria dos estudantes lembra pouco acerca de Trigonometria. Quanto ao uso de materiais concretos e ao uso do programa computacional Geogebra, constatou-se que ambos favoreceram a aprendizagem do tema.

As atividades realizadas nas duas turmas desta pesquisa tiveram um resultado satisfatório. Mas, no diagnóstico, percebi que conhecimento prévio em assuntos do Ensino Fundamental era abaixo do esperado e, posteriormente, que a autonomia dos alunos para realizar as atividades propostas era muito crítica. Autonomia esta também se apresentou

problemática em alguns trabalhos que exibimos no segundo capítulo, mostrando que não é um problema local ou atual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL, Fábio José. **Ensino da trigonometria via resolução de problemas mediado por dinâmicas de grupo**, analogias e recursos informáticos. 2002. Dissertação de Mestrado do CEFET/MG.

ARANÃO, Ivana V. D. **A Matemática Através de Brincadeiras e Jogos**. 6ª Ed. Editora: Papirus. Campinas-SP. 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. Editora Blücher. São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: MEC, 1998.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Editora Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2007

COSTA, Maria José. **Como se observava antigamente?** Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Cd_Costa_4a5f442e6f4c0.pdf>. Acessado em: 22/04/13

CREASE, Robert P. **Os dez mais belos experimentos científicos**. Tradutora: Maria Inês Duque Estrada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2006.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da UNICAMP, Campinas, SP: 2004.

FARIA, Romildo Póvoa. **Fundamentos de Astronomia**. 9ª Ed. Papirus, Campinas-SP: 2007.

FONSECA, Regina Célia Veiga da. **Metodologia do Trabalho Científico**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 9ª edição, Editora Bookman, 2002.

HILBERT, David. **Foundations of Geometry**. Editora Chicago, 1902.

HUON, Mallalieu. **História Ilustrada das Antiguidades: Guia básico para antiquários, colecionadores e apreciadores da arte**. São Paulo: Nobel, 1999.

KENNEDY, E. S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Trigonometria**. Tradução Hygino H. Domingues. Atual Editora. São Paulo, 1992.

LINDEGGER, L. R. M. **Construindo os conceitos básicos de Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000, 204 p.

LUIZ, Adir Moysés; **Física 2: gravitação, ondas e termodinâmica: teoria e problemas resolvidos**. Editora Livraria da Física. São Paulo: 2007.

MANRIQUE, A. L. **Processo de formação de professores em Geometria: Mudanças em concepções e práticas**. 2003. Tese de Doutorado em Educação: Psicologia da Educação – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação: Psicologia da Educação. São Paulo, PUC, 2003.

MARTINS, V. L. de O. F. **Atribuindo significado ao seno e cosseno**, utilizando o *software Cabri-Géomètre*. 2003. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São, Paulo/PUC-SP, São Paulo - SP, 2003.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Editora Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, Antônio *et al.* **História da Matemática em Atividades Didáticas**. 2ª Edição. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009, p.132.

MORENO, Beatriz R. **O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série**. In: PANIZZA, Mabel. (Org.). *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006. p. 43-76

NASCIMENTO, Alessandra Z. do. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. 228f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PICCOLI, Luís Alberto Prates. **A Construção de Conceitos em Matemática: Uma proposta usando Tecnologia de Informação**. 2006. 108 f. Dissertação (mestrado) – Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre: 2006.

SAMPAIO, Arnaud Fausto. **Matemática: História, aplicação e jogos matemáticos**. 4ª Edição. Campinas, SP: Papyrus, 2005.

SAMPIERI, Roberto Hernandez *et al.* **Metodologia de Pesquisa**. 5ª Edição. Porto Alegre – RS, Penso Editora LTDA, 2013.

SINGH, Simon. **Big Bang**. Rio de Janeiro: Record, 2006. Tradução: Jorge Luiz Calife.

STEWART, Ian. **Incríveis passatempos matemáticos**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, tradutor: Diego Alfaro, 2010.

WALLIS, David A. **History of Angle Measurement**. Cairo – Egito: United Kingdom, 2005.

Anexo A : A Tabela Trigonométrica

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,017452	0,999848	0,017455	46°	0,71934	0,694658	1,03553
2°	0,034899	0,999391	0,034921	47°	0,731354	0,681998	1,072369
3°	0,052336	0,99863	0,052408	48°	0,743145	0,669131	1,110613
4°	0,069756	0,997564	0,069927	49°	0,75471	0,656059	1,150368
5°	0,087156	0,996195	0,087489	50°	0,766044	0,642788	1,191754
6°	0,104528	0,994522	0,105104	51°	0,777146	0,62932	1,234897
7°	0,121869	0,992546	0,122785	52°	0,788011	0,615661	1,279942
8°	0,139173	0,990268	0,140541	53°	0,798636	0,601815	1,327045
9°	0,156434	0,987688	0,158384	54°	0,809017	0,587785	1,376382
10°	0,173648	0,984808	0,176327	55°	0,819152	0,573576	1,428148
11°	0,190809	0,981627	0,19438	56°	0,829038	0,559193	1,482561
12°	0,207912	0,978148	0,212557	57°	0,838671	0,544639	1,539865
13°	0,224951	0,97437	0,230868	58°	0,848048	0,529919	1,600335
14°	0,241922	0,970296	0,249328	59°	0,857167	0,515038	1,664279
15°	0,258819	0,965926	0,267949	60°	0,866025	0,5	1,732051
16°	0,275637	0,961262	0,286745	61°	0,87462	0,48481	1,804048
17°	0,292372	0,956305	0,305731	62°	0,882948	0,469472	1,880726
18°	0,309017	0,951057	0,32492	63°	0,891007	0,45399	1,962611
19°	0,325568	0,945519	0,344328	64°	0,898794	0,438371	2,050304
20°	0,34202	0,939693	0,36397	65°	0,906308	0,422618	2,144507
21°	0,358368	0,93358	0,383864	66°	0,913545	0,406737	2,246037
22°	0,374607	0,927184	0,404026	67°	0,920505	0,390731	2,355852
23°	0,390731	0,920505	0,424475	68°	0,927184	0,374607	2,475087
24°	0,406737	0,913545	0,445229	69°	0,93358	0,358368	2,605089
25°	0,422618	0,906308	0,466308	70°	0,939693	0,34202	2,747477
26°	0,438371	0,898794	0,487733	71°	0,945519	0,325568	2,904211
27°	0,45399	0,891007	0,509525	72°	0,951057	0,309017	3,077684
28°	0,469472	0,882948	0,531709	73°	0,956305	0,292372	3,270853
29°	0,48481	0,87462	0,554309	74°	0,961262	0,275637	3,487414
30°	0,5	0,866025	0,57735	75°	0,965926	0,258819	3,732051
31°	0,515038	0,857167	0,600861	76°	0,970296	0,241922	4,010781
32°	0,529919	0,848048	0,624869	77°	0,97437	0,224951	4,331476
33°	0,544639	0,838671	0,649408	78°	0,978148	0,207912	4,70463
34°	0,559193	0,829038	0,674509	79°	0,981627	0,190809	5,144554
35°	0,573576	0,819152	0,700208	80°	0,984808	0,173648	5,671282
36°	0,587785	0,809017	0,726543	81°	0,987688	0,156434	6,313752
37°	0,601815	0,798636	0,753554	82°	0,990268	0,139173	7,11537
38°	0,615661	0,788011	0,781286	83°	0,992546	0,121869	8,144346
39°	0,62932	0,777146	0,809784	84°	0,994522	0,104528	9,514364
40°	0,642788	0,766044	0,8391	85°	0,996195	0,087156	11,43005
41°	0,656059	0,75471	0,869287	86°	0,997564	0,069756	14,30067
42°	0,669131	0,743145	0,900404	87°	0,99863	0,052336	19,08114
43°	0,681998	0,731354	0,932515	88°	0,999391	0,034899	28,63625
44°	0,694658	0,71934	0,965689	89°	0,999848	0,017452	57,28996
45°	0,707107	0,707107	1	90°	1	0	

Anexo B : Diagnóstico da turma A

Aluno: _____

1. Você já ouviu falar sobre teodolito?

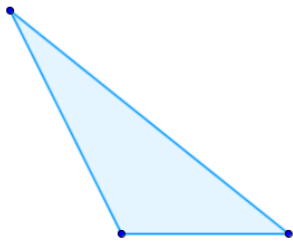
- () Sim
 () Não
 () Talvez

2. Você já estudou Trigonometria?

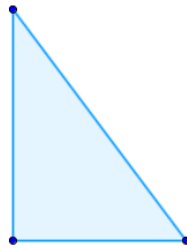
- () Sim, mas não lembro de nada.
 () Sim, mas lembro muito pouco.
 () Sim e lembro-me bastante deste assunto.
 () Não

3. Dos três triângulos abaixo, somente um possui ângulo reto. Identifique-o.

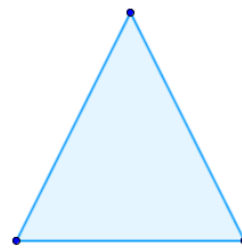
()



()

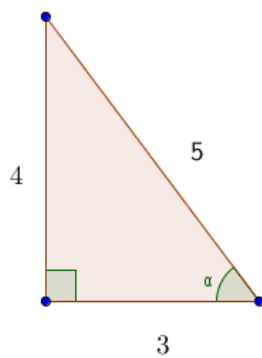


()

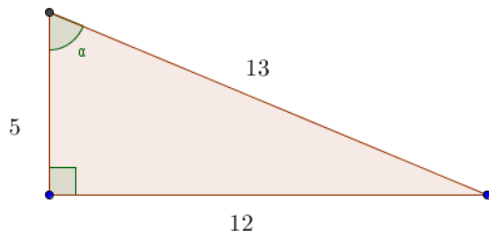


4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo α nos triângulos abaixo.

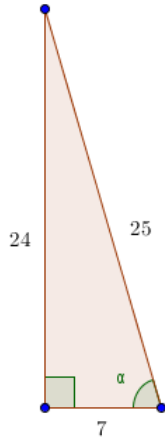
a)



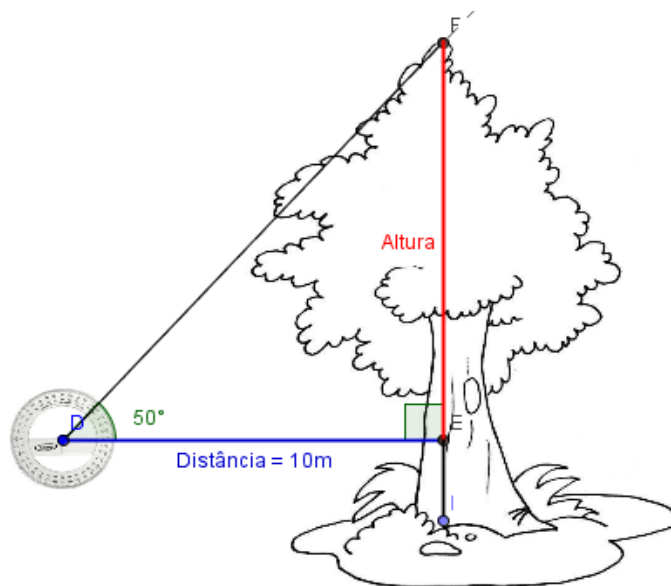
b)



5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.



6. Um observador está a 10 metros de uma árvore, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo da árvore com o ângulo de 50° com a horizontal. Supondo que o olhar do observador está a 1,6 metros do solo, determine a altura da árvore, sabendo que $\text{sen}(50^\circ) = 0,766$, $\text{cos}(50^\circ) = 0,6428$ e $\text{tg}(50^\circ) = 1,1918$.



Anexo C : Diagnóstico da turma B.

Aluno: _____

1. Você já ouviu falar sobre teodolito?

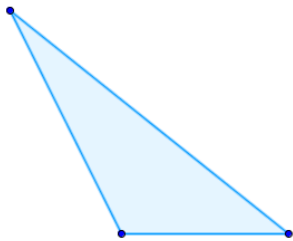
- () Sim
 () Não
 () Talvez

2. Você já estudou Trigonometria?

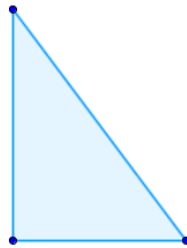
- () Sim, mas não lembro de nada.
 () Sim, mas lembro muito pouco.
 () Sim e lembro-me bastante deste assunto.
 () Não

3. Dos três triângulos abaixo, somente um possui ângulo reto. Identifique-o.

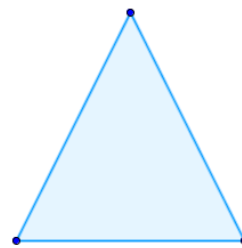
()



()

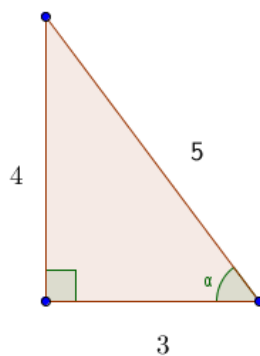


()

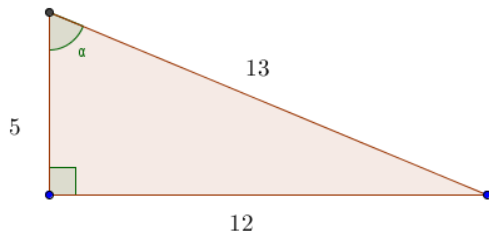


4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo α nos triângulos abaixo.

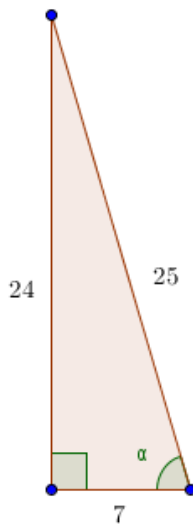
a)



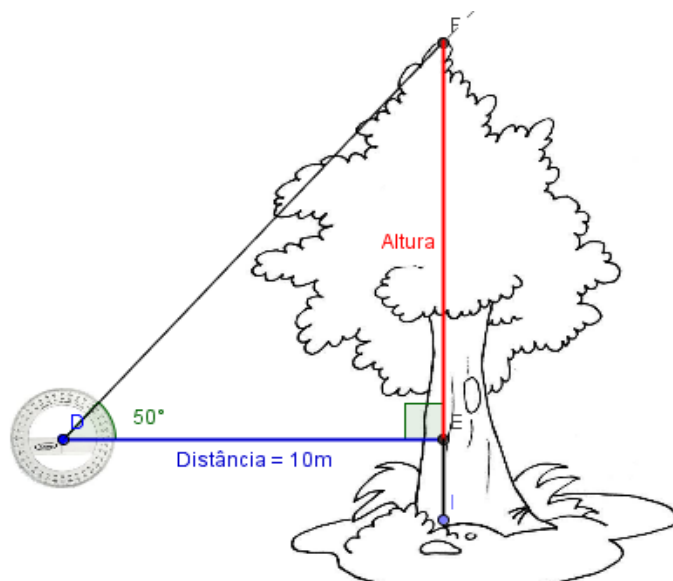
b)



5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.



6. Um observador está a 10 metros de uma árvore, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo da árvore com o ângulo de 50° com a horizontal. Supondo que o olhar do observador está a 1,6 metros do solo, determine a altura da árvore, sabendo que $\text{sen}(50^\circ) = 0,766$, $\text{cos}(50^\circ) = 0,6428$ e $\text{tg}(50^\circ) = 1,1918$.



Anexo D : Avaliação da turma A.

Aluno: _____

1. O que pode ser feito pelo professor(a) de Matemática para que sua aula seja mais interessante?

2. Nas aulas sobre Trigonometria, do que você gostou e o que poderia ser feito para que a aula fosse melhor?

3. A metodologia usada para o assunto Trigonometria foi:

() Insuficiente.

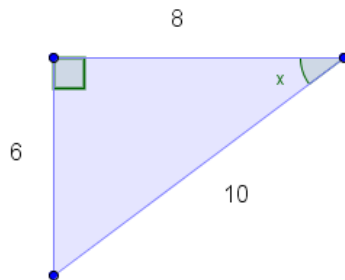
() Regular.

() Bom.

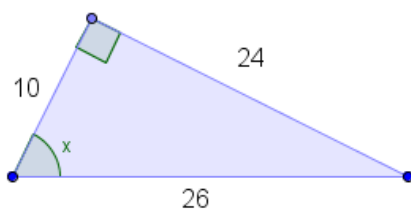
() Excelente

4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo x nos triângulos abaixo.

a)

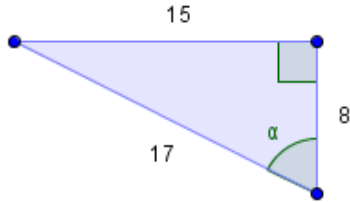


b)

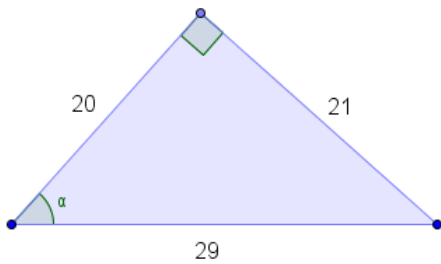


5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

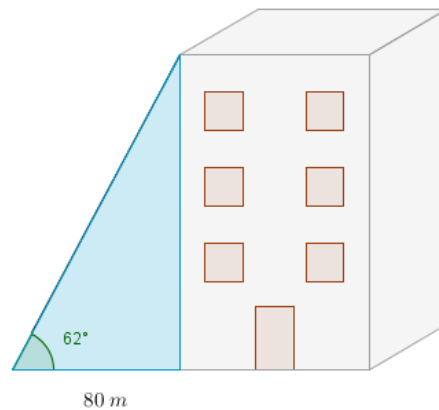
a)



b)



6. Um observador está a 80 metros de um prédio, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo do prédio sob um ângulo de 62° em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio? (Dados: $\text{sen}(62^\circ) = 0,8829$, $\text{cos}(62^\circ) = 0,4695$ e $\text{tg}(62^\circ) = 1,8807$)



Anexo E : Avaliação da turma B.

Aluno: _____

1. O que pode ser feito pelo professor(a) de Matemática para que sua aula seja mais interessante?

2. Nas aulas sobre Trigonometria, do que você gostou e o que poderia ser feito para que a aula fosse melhor?

3. A metodologia usada para o assunto Trigonometria foi:

() Insuficiente.

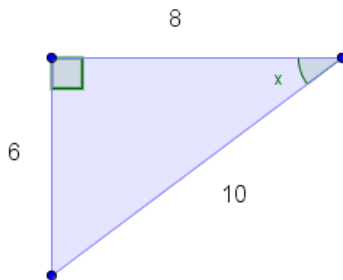
() Regular.

() Bom.

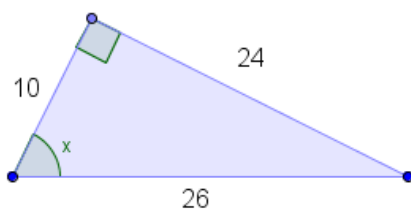
() Excelente

4. Identifique a hipotenusa, o cateto adjacente e o cateto oposto em relação ao ângulo x nos triângulos abaixo.

a)

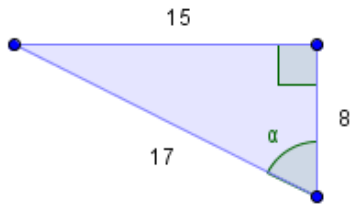


b)

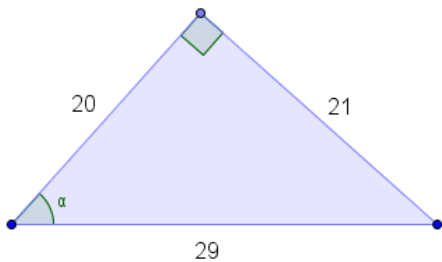


5. No triângulo abaixo, determine o valor de $\text{sen}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$.

a)



b)



6. Um observador está a 80 metros de um prédio, como ilustra a figura abaixo, e avista o topo do prédio sob um ângulo de 62° em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio? (Dados: $\text{sen}(62^\circ) = 0,8829$, $\text{cos}(62^\circ) = 0,4695$ e $\text{tg}(62^\circ) = 1,8807$)

