UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Uso de Frações Contínuas e do Paradoxo de Galileu: Aplicações na Resolução de Problemas Físicos na Educação Básica

Evison Rosalino de Oliveira

Instituto de Matemática

Maceió, Outubro de 2014

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EVISON ROSALINO DE OLIVEIRA

O USO DE FRAÇÕES CONTÍNUAS E DO PARADOXO DE GALILEU: APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

MACEIÓ
2014

EVISON ROSALINO DE OLIVEIRA

O USO DE FRAÇÕES CONTÍNUAS E DO PARADOXO DE GALILEU: APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Ma. Viviane de Oliveira Santos.

MACEIÓ

2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Dilma Maria dos Santos Cunha

O48u Oliveira, Evison Rosalino de.
O uso de frações contínuas e do paradoxo de Galileu : aplicações na resolução de problemas físicos na educação básica. / Evison Rosalino de Oliveira. – Maceió, 2014.
50 f. ; il.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática, 2014.

Bibliografia: f. 50.

1. Frações contínuas. 2. Aproximações sucessivas. 3. Paradoxo de Galileu. 4. Problemas físicos. 5. Educação básica. I. Título.

CDU: 511.4

EVISON ROSALINO DE OLIVEIRA

O USO DE FRAÇÕES CONTÍNUAS E DO PARADOXO DE GALILEU: APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Viviane de Oliveira Santos

Profa. Ma. Viviane de Oliveira Santos (Orientadora)

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva

Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos

À Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, nosso senhor e criador, que nos guia sempre no melhor caminho e também a meu pai, José Simões de Oliveira (In memorian), minha mãe, Luiza Rosalino de Oliveira, estes que, graça a Deus, me deram a vida e oportunizaram minha caminhada até este momento.

Minha esposa Joceliane dos Santos Oliveira que sempre acredita e fortalece minha caminhada.

Meu filho Isac dos Santos Oliveira, de onde vem minha motivação.

A Professora Viviane de Oliveira Santos, que com muita dedicação não mediu esforços para me orientar na elaboração desta dissertação. De forma muito atenciosa, sempre abrindo espaço na sua apertada agenda para me atender pessoalmente ou respondendo todos os meus contatos via e-mail quase que simutaneamente, não importando dia ou horário.

E não menos importante, minha companheira de curso Maria Dayane Dalysse dos Santos, que me deu uma grande ajuda durante o curso, principalmente nesta reta final.

Meus companheiros de estudos durante todo curso, Andre Carlos Nascimento, Marcel Serqueira, Aldo Agustinho e Josimar Santos, em especial os três primeiros com os quais formei um regular grupo de estudo, fortalecendo com isso uma amizade extremamente salutar.

A todo corpo docente do curso, em especial ao Professor Hilário Alencar, que junto com o Professor Marcelo Viana idealizaram o Profmat, além suas importantes observações a respeito deste texto, contribuindo assim para melhoria do mesmo.

Ao Professor Givaldo Oliveira dos Santos que dispôs de parte de seu tempo para compor a banca juntamente com a Professora Viviane e o Professor Hilário e por suas importantes contribuições para melhoria deste texto.

A todos os meus familiares e colegas de curso que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a chegada desse momento.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida durante o mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, descrevemos a representação de um número racional na forma de Fração Contínua para posteriormente estender tal representação para os números irracionais. Enunciamos também o "Paradoxo de Galileu" para conjuntos infinitos. Inicialmente, com o auxílio da divisão euclidiana, obtemos a representação de um número racional na forma de Fração Contínua e, em seguida, através de aproximações sucessivas obtemos a representação dos números irracionais nestas frações. Depois, enunciamos e exemplificamos o "Paradoxo de Galileu" para conjuntos infinitos. Em seguida, usamos as Frações Contínuas e o "Paradoxo de Galileu" na resolução de problemas físicos na Educação Básica. Ressaltamos, que conforme Portilho e Lima [8] (2006, p. 26) tais conteúdos raramente vem sendo lecionados nas aulas neste nível educacional, porém, neste texto procuramos expor uma proposta para que sejam ensinados e exercitados neste nível. Concluímos assim, que estes conteúdos podem ser muito úteis na resolução de problemas interessantes das disciplinas de Matemática e Física na Educação Básica.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Aproximações Sucessivas. Paradoxo de Galileu. Problemas Físicos. Educação Básica.

ABSTRACT

In this paper, we describe the representation of a rational number in the form of continuous fraction sand later extend this representation to irrational numbers. We also enunciate Galileo's Paradox for infinite sets. Initially, with the aid of Euclidean division, we obtain the representation of a rational number in the form of continuous fractions and then through successive approximations, we obtain the representation of irrational numbers using these fractions. Then we articulate and exemplify the Galileo's Paradox for infinite sets. In addition, we use the continuous fractions and Galileo's Paradox tosolve physical problems appropriate for k-12 education. Portilho and Lima [8] (2006, p. 26) suggest that such content rarely has been taught at this educational level, but in this text we seek to expose a proposal to be taught and exercised at this level. We conclude that these contents can be very useful in solving interesting problems of mathematics and Physics in k-12 education.

Keywords: Continued fractions. Successive approximations. Galileo's paradox. Physical problems. Basic education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos séculos XVII e XVIII, grandes matemáticos, como Leonard Euler e Hermite, tiveram como objeto de estudo uma das mais belas teorias da matemática elementar, as frações contínuas, que até hoje é tema de pesquisa em várias áreas no campo da matemática. Porém, os primeiros passos para o estudo de Frações Contínuas datavam de muito antes. Por exemplo, conforme Eves [4] (2011, p. 312), na Itália, Pietro Cataldi $(1548-1626)$ escreveu raízes quadradas na forma de tais frações.

Em meados de 306 a.C., segundo Andrade e Bracciali [1] (2004, p. 6) tomou-se conhecimento de um dos textos de matemática mais bem sucedido de todos os tempos - Os Elementos (Stoichia) de Euclides. Nele encontra-se um algoritmo (Algoritmo da divisão de Euclides), usado para encontrar o máximo divisor comum (a, b) dos números a e b. Com este algoritmo, vamos obter qualquer número racional em termos de fração contínua.

Usando o algoritmo da divisão de Euclides, conseguimos escrever $\frac{79}{28}$ na forma

$$\frac{79}{28} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}},$$

a qual é a expressão que representa a Fração Contínua do número racional $\frac{79}{28}$, denotada por $[2, 1, 4, 1, 1, 2]$.

De forma geral, temos que uma expressão da forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}$$

é chamada de *Fração Contínua* e os números $a_1, a_2, \ldots$ são chamados de quocientes parciais.

Se o número de $a_i' s$ for finito, dizemos que a Fração Contínua é finita e, caso contrário, dizemos que é infinita.

Em 1564 nasceu em Pisa, Galileu. Filho de um compositor e músico, ingressou aos dezessete anos na Universidade de Pisa no curso de Medicina, onde aproveitou para aprofundar a observação dos fenômenos naturais e estudar textos de grandes autores clássicos como Arquimedes. No segundo ano do curso, que acabou por não concluir devido ao gosto que tinha por ciência e pela matemática, descobriu que um pêndulo oscila com uma frequência constante (lei do isocronismo das pequenas oscilações).

Um dos paradoxos [1] mais famosos acerca do infinito, conforme Freitas e Gonçalves [5] (2008, p. 30) é o que Galileu apresentou no livro *Discorsi e dimostrazioni matematiche a due nuove scienze*, o paradoxo dos naturais e dos quadrados.

Este paradoxo afirma: números que são quadrados perfeitos(qualquer número natural que possa ser representado pelo quadrado de um número também natural) são tantos quantos os próprios números naturais.

Neste texto, vamos explorar os temas mencionados, ou seja, *Frações Contínuas* e o *Paradoxo de Galileu*, para em seguida utilizá-los na resolução das duas seguintes aplicações:

"A fração $\frac{37}{13}$ *tem como representação sobre a forma de fração contínua a expressão* $2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$. *Quais os valores de* x, y *e* z *?"*

e

"O problema em questão é um exercício d eletricidade envolvendo uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência R, conforme ilustrado na Figura.

As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas retângulares é muito grande, podendo ser considerado, para efeito de cálculos, infinito. O exercício consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito (à esquerda da Figura."

Notemos que a primeira aplicação, que é modelagem de um teste de um concurso militar de 2011, é exclusivamente da disciplina de Matemática e a segunda uma aplicação interdisciplinar envolvendo as disciplinas de Matemática e Física, encontrada em Portilho e Lima [8] (2006, p. 26), porém, neste trabalho apresentamos uma proposta para que ambas sejam aplicadas na Educação Básica, mas precisamente na 1ª série ou na 3ª série do Ensino Médio, tendo em vista que os conteúdos aqui explorados requerem conhecimento prévio de conjuntos e de eletricidade.

Como eletricidade é um conteúdo da disciplina de Física na 3ª série do Ensino Médio, então é sempre importante que o professor de Física seja consultado e quando possível participe de forma ativa na aplicação deste trabalho, afim de que este torne-se uma atividade interdisciplinar satisfazendo assim uma das intenções do mesmo. Além de mostrar de forma relevante a importante contribuição que os temas abordados dão a resolução de questões em tal nível de ensino e de forma bem nivelada com a feita no Ensino Superior.

[1]Paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum.

1 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo, iremos inicialmente explorar alguns fatos históricos sobre Frações Contínuas, conforme [1], [2], [4], [7] e [11]. Em seguida, definiremos a notação de um número racional escrito na forma de Fração Contínua, para através de aproximações sucessivas conseguirmos a notação de um número irracional também na forma de Fração Contínua. Qualquer demonstração omitida de 1.2 a 1.5 pode ser encontrada no livro Introdução à Teoria dos Números escrito por José Plínio de Oliveira Santos [9], o qual foi usado como base nas seções deste capítulo.

1.1 Aspectos históricos

Não é fácil de ser datada a origem exata de quando o conceito de Frações Contínuas foi utilizado, pois, segundo Andrade e Bracciali [1] (2004, pp. 6-7) e Nascimento [7] (2013, p. 39), encontram-se exemplos dessas frações por toda a Matemática desde anos remotos.

No entanto, é possível datar dos séculos XVII e XVIII, que estas frações foram objeto de estudo de grandes matemáticos, como Leonard Euler e Hermite, por ser sua teoria um dos mais belos assuntos de matemática elementar, sendo até hoje tema de pesquisa com grande interesse em várias áreas no campo da matemática, como em teoria dos números, na ciência da computação etc..

No período de 1650 a 1670, uma grande variedade de métodos infinitos foi desenvolvida, inclusive o método das frações contínuas infinitas para π que, de acordo com Eves [4] (2011, p. 403), fora dado por William Brauncker $(1620 - 1684)$, o primeiro presidente da Royal Society.

Segundo Eves [4] (2011, pp. 143-144), o matemático inglês Jonh Wallis, em 1650, obteve a curiosa expressão:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2.2.4.4.6.6.8....}{1.3.3.5.5.7.7....}.$$

Por manipulação do produto de Wallis para $\frac{2}{\pi}$, como dito em Boyer [2] (1974, p. 283), Brouncker chegou de algum modo à expressão

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2+\frac{25}{2+\frac{49}{2+...}}}}.$$

Porém, os primeiros passos para Frações Contínuas datavam de muito antes. Na Itália, o matemático Pietro Antonio Cataldi $(1548-1626)$ de Bolonha, que ensinou matemática e astronomia em sua cidade natal, inclui entre seus trabalhos o desenvolvimento de frações Contínuas, escrevendo números do tipo $\sqrt{2}-1$, nesta forma,

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Leonhard Euler contribuiu de modo valoroso com a matemática, ele foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas. Em 1737 expressou o seguinte desenvolvimento para o número e

$$e=2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}}}}.$$

Euler usou esta expressão para mostrar que e e e^2 são irracionais. Além disso, demonstrou a representação de uma série a partir de frações contínuas e vice-versa.

O matemático suiço Johann Heinrich Lambert generalizou o trabalho de Euler sobre o número e. Em 1766, ele mostrou que

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{\frac{6}{x}+\frac{1}{\frac{10}{x}+\frac{1}{\frac{14}{x}+\ldots}}}}.$$

Em 1768, Lambert encontrou expansões em frações contínuas para as funções $log\,(1+x)$, $arctg\,(x)$ e $tg\,(x)$. Ele usou essas expressões para mostrar que e^x e $tg\,(x)$ são irracionais, se x for racional.

Lagrange usou frações contínuas para encontrar o valor de raízes irracionais e provou que os *números quadráticos irracionais* (números algébricos irracionais, ou seja, que são soluções de uma equação quadrática com coeficientes racionais) são dados por uma fração contínua periódica.

Enfim, a teoria das frações contínuas se desenvolveu muito e hoje está presente em diversas áreas. Como por exemplo: algoritmos para calcular aproximações racionais para os números reais, resoluções de equações diofantinas, problemas na Física e Teoria dos

Números. Acredita-se que tanto as suas aplicações, quanto suas pesquisas, estão longe de terminarem.

Citados os fatos históricos acima, vamos agora definir e denotar a representação de um número racional em termos de fração contínua.

1.2 Definição - Notação

Em meados de 306 a.C. tomou-se conhecimento de um dos textos de matemática mais bem sucedido de todos os tempos - Os Elementos (Stoichia) de Euclides. Nele encontra-se um algoritmo (Algoritmo da divisão de Euclides), usado para encontrar o *máximo divisor comum* de dois números inteiros a e b (a ou b diferente de zero), denotado por (a, b), que é o maior inteiro que divide a e b.

Nas duas próximas proposições, veremos este algoritmo integralmente como está escrito em Euclides [3] (2009, pp. 270 - 272).

Proposiçao 1.2.1. *Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.*

Demonstração.

Pois, dos dois números [desiguais] AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, o que restou jamais meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade; digo que os AB, CD são primos entre si, isto é, que uma unidade só mede os AB, CD.

Pois se os AB, CD não são primos entre si, algum número os medirá. Meça, e seja o E; e o CD medindo o BF, reste dele mesmo o menor FA, enquanto o AF, medindo o DG, reste dele mesmo o menor GC, e o GC, medindo o FH, reste a unidade HA.

Como, de fato, o E mede o CD, e o CD mede o BF, portanto também o E mede o BF; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o AF restante. E o AF mede o DG; portanto, o E também mede o DG; e também mede o DC todo; portanto , também medirá o CG restante. E o CG mede o FH; portanto, o E também mede o FH; e mede também o FA todo; portanto, medirá também a unidade AH restante, sendo um número; o que é impossível. Portanto, nenhum número medirá os números AB, CD; assim, os AB, CD são primos entre si; o que era preciso provar.

□

Proposiçao 1.2.2. *Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.*

Demonstração.

Sejam AB, CD os dois números dados não primos entre si. É preciso, então, achar a maior medida comum dos AB, CD.

Se, por um lado, de fato, o CD mede o AB, mas mede também a si mesmo, portanto o CD é uma medida comum dos CD, AB. E é evidente que é também a maior; pois, nenhum maior do que o CD medirá o CD.

Se, por outro lado, o CD não mede o AB, dos AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. Pois, uma unidade não terá restado; e, se não, os AB, CD serão primos entre si; o que não foi suposto. Portanto, terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. E, por um lado, o CD, medindo o BE, reste um menor do que ele mesmo, o EA, e, por outro lado, o EA, medindo o DF, reste um menor do que ele mesmo, o FC, e o CF meça o AE. Como, de fato, o CF mede o AE, e o AE mede o DF, portanto o CF medirá o DF; e mede também a si mesmo; portanto, medirá também o CD todo. E o CD mede o BE; portanto, o CF mede também o BE; e mede também o EA; portanto, medirá também o BA todo; e mede também o CD; portanto, o CF mede os AB, CD. Portanto, o CF é uma medida comum dos AB, CD. Digo, então, que também é a maior. Pois, se o CF não é a maior medida comum dos AB, CD, algum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF. Meça, e seja o G. E como o G mede o CD, e o CD mede o BE, portanto também o G mede o BE; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o DF; e mede também o DC todo; portanto, também medirá o CF restante, o maior, o menor; o que é impossível; portanto, nenhum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF; portanto, o CF é a maior medida comum dos AB, CD; [o que era preciso provar].

□

Iremos mostrar a seguir dois teoremas que nos dão uma escrita repaginada do Algoritmo da Divisão de Euclides, conforme Santos [4] (2005, p. 8), da forma que usamos nos dias atuais.

Porém, antes de introduzir tais teoremas, enunciaremos o chamado Teorema de Eudoxius:

Teorema 1.1. *Se a e b inteiros, com $b \neq 0$, então a é um múltiplo de b ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, correspondendo a cada par de inteiros a e $b \neq 0$, existe um inteiro q tal que, para $b > 0$,*

$$qb \leq a < (q+1)b$$

e para $b < 0$,

$$qb \leq a < (q-1)b.$$

Teorema 1.2. *(Algoritmo da Divisão de Euclides) Dados dois inteiros a e b, $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que*

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b \ (r = 0 \Leftrightarrow b|a)$$

(q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Demonstração.

Pelo Teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q+1)b,$$

o que implica $0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Desta forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos garantida a existência de q e r.

A fim de mostrarmos a unicidade, suponhamos a existência de outro par q_1 e r_1 tal que

$$a = q_1 b + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Disto temos

$$(qb + r) - (q_1 b + r_1) = 0 \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r,$$

o que inplica $b|(r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Logo

$$q_1 b = qb \Rightarrow q_1 = q,$$

uma vez que $b \neq 0$.

□

Teorema 1.3. *Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não-negativos, com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter*

$$r_j = q_{j+1}r_{j+1} + r_{j+2}, 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$, então $(a, b) = r_n$, onde r_n é o último resto não nulo.

Demonstração.

Aplicando inicialmente o Teorema 1.2 para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$, obtemos $r_0 = q_1r_1 + r_2$ e, em seguida, dividindo r_1 e r_2, obtemos $r_1 = q_2r_2 + r_3$. Continuamos esse processo sucessivamente até a obtenção do resto $r_{n+1} = 0$. Como a cada passo, o resto é sempre menor do que o anterior e estamos lidando com números inteiros positivos, é claro que após um número finito de aplicações do Teorema 1.1, teremos resto nulo. Assim, temos a seguinte sequência de equações:

$$\begin{array}{rcl}
r_0 & = & q_1r_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 & = & q_2r_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 & = & q_3r_3 + r_4, 0 < r_4 < r_3 \\
 & \vdots & \\
r_{n-2} & = & q_{n-1}r_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} & = & q_nr_n + 0.
\end{array}$$

A última destas equações nos diz que o máximo divisor comum de r_n e r_{n-1} é r_n e a penúltima diz que este número é igual a (r_{n-1}, r_{n-2}). Prosseguindo desta maneira, teremos a sequência

$$r_n = (r_{n-1,r_n}) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = (r_1, r_2) = (r_0, r_1) = (a, b).$$

Portanto, o máximo divisor comum de a e b é o último resto não-nulo da sequência de divisões descrita.

□

Com este algoritmo, podemos obter qualquer número racional em termos de fração contínua, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.1. Vamos encontrar o máximo divisor comum de 79 e 28, usando o algoritmo da divisão de Euclides.

Temos que

$$79 = 2.28 + 23$$

$$28 = 1.23 + 5$$

$$23 = 4.5 + 3$$

$$5 = 1.3 + 2$$

$$3 = 1.2 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0.$$

Logo, $(79, 28) = 1$, uma vez que 1 é o último resto não-nulo nesta sequência de divisões sucessivas.
Como consequência imediata destas igualdades, podemos expressar o número racional $\frac{79}{28}$ como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{79}{28} &= 2 + \frac{23}{28} = 2 + \frac{1}{\frac{28}{23}} \\
&= 2 + \frac{1}{1+\frac{5}{23}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{23}{5}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4+\frac{3}{5}}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{5}{3}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}} = \\
&= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}.
\end{aligned}$$

Dizemos que esta última expressão é a *fração contínua* que representa o número racional $\frac{79}{28}$, ou a expressão de $\frac{79}{28}$ sob a forma de fração contínua.
Notação: $[2, 1, 4, 1, 1, 2]$.

Generalizando, temos que uma expressão da forma

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \ddots}}}} \cdot \tag{1}$$

é chamada de *fração contínua* e os números $a_1, a_2, ...$ são chamados de quocientes parciais. Na sequência de divisões sucessivas que fizemos acima para a obtenção do máximo divisor comum de 79 e 28, os números a_i são, de fato, quocientes daquelas divisões.

Quando a quantidade dos $a_i's$ for finita, dizemos que a fração contínua é *finita* e, caso contrário, dizemos que é *infinita*.

Se todos os $a_i's$ são inteiros dizemos que a fração contínua é *simples*.

Uma expressão como (1) será denotada por $[a_1, a_2, a_3, ...]$ e a expressão

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

denota-se por $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Exemplo 1.2.2. Vamos expressar o racional -37/5 como uma fração contínua.

Verifica-se que

$$-37 = -8.5 + 3$$

$$5 = 1.3 + 2$$

$$3 = 1.2 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \tfrac{-37}{5} &= -8 + \tfrac{3}{5} = -8 + \tfrac{1}{\frac{5}{3}} = -8 + \tfrac{1}{1+\frac{2}{3}} \\ &= -8 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = -8 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

e, portanto, $\frac{-37}{5} = [-8, 1, 1, 2]$.

Podemos ver que no processo de divisões sucessivas, somente o primeiro quociente pode ser negativo, pois, a partir do segundo, temos a divisão entre dois números positivos que sabemos resultar em um quociente positivo. Daí, concluímos que na fração contínua simples $[a_1, a_2, \ldots]$ todos os $a_i's$ são inteiros positivos, exceto possivelmente o a_1.

Exemplo 1.2.3. Consideremos a sequência 2, 1, 4, 5, 3 e a fração contínua representada por $[2, 1, 4, 5, 3]$, isto é,

$$2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}.$$

Essa fração pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{15+1}{3}}}} &= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{3}{16}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{64+3}{16}}} \\ &= 2 + \tfrac{67}{83} = \tfrac{233}{83}. \end{aligned}$$

Observamos que toda Fração Contínua (simples) finita $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ representa um número racional. De fato, sabemos que sendo m e n dois números racionais com $n \neq 0$, então $m + n$ e m/n são também números racionais. Assim, dada uma fração contínua (simples), procedendo com operações de adição e divisão como no Exemplo 1.2.3 vamos ter sempre no final um número racional.

A recíproca da afirmação acima é também verdadeira. Um número racional pode ser representado sob a forma de Fração Contínua finita, pois o processo de divisões sucessivas, após um número finito de passos (divisões), sempre nos fornece resto nulo, como visto no Teorema 1.2.

Observamos que a quantidade de quocientes parciais a_i na representação de um número racional pode ser par ou ímpar, uma vez que quando o a_n é maior do que 1 podemos substituí-lo por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$. Na representação do exemplo (1.2.3) de $\frac{233}{83}$ teríamos

$$2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}}$$

e, portanto, é verdadeira a igualdade

$$[2, 1, 4, 5, 3] = [2, 1, 4, 5, 2, 1].$$

Generalizando, temos

$$a_n > 1 \Rightarrow [a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1].$$

Podemos resumir as observações que acabamos de fazer no seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita, e toda fração contínua (simples) finita representa um número racional.*

A unicidade da representação de um número racional em fração contínua (a menos da modificação do último termo) é garantida pelo Teorema 1.1.

Se a representação em fração contínua do racional $\frac{p}{q}(p > q)$ é dada por $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, então a representação de $\frac{q}{p}$ é dada por $[0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Isso é consequência imediata do fato de

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}.$$

Exemplo 1.2.4. A representação de $\frac{19}{11}$ em fração contínua é dada por $[1, 1, 2, 1, 2]$ e como

$$\frac{11}{19} = 0 + \frac{1}{\frac{19}{11}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}},$$

temos que $\frac{11}{19} = [0, 1, 1, 2, 1, 2]$.

1.3 Convergentes

Na seção anterior vimos que qualquer número racional pode ser expresso sob a forma de uma fração contínua (simples)

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n],$$

onde a_1 é um inteiro qualquer e $a_2, a_3, \ldots, a_n$ são inteiros positivos.

Pelas expansões das frações contínuas $[a_1], [a_1, a_2], [a_1, a_2, a_3], \ldots$, obtemos as seguintes frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \ldots$$

chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ... *convergentes*, respectivamente, da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n]$.

Observemos que o n-ésimo convergente é igual à própria fração contínua. Nos teoremas seguintes mostraremos algumas propriedades satisfeitas pelos convergentes de uma fração contínua.

Considerando

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad \text{onde} \quad p_1 = a_1 \quad \text{e} \quad q_1 = 1,$$

temos

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2},$$

onde $p_2 = a_1a_2 + 1$ e $q_2 = a_2$.

Calculando c_3, c_4, c_5, obtemos

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} \\ c_4 &= \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4} \\ c_5 &= \frac{a_5p_4 + p_3}{a_5q_4 + q_3} = \frac{p_5}{q_5}. \end{aligned}$$

Pelos resultados obtidos acima, vamos conjecturar que os numeradores $p_i's$ e os denominadores $q_i's$ dos convergentes $c_i's$ satisfazem as seguintes igualdades:

$$p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2} \text{ e } q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}.$$

No próximo teorema, provaremos por indução, que estas relações se verificam para $i = 3, 4, 5 \ldots, n$.

Teorema 1.5. *Seja $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ o i-ésimo convergente da fração contínua $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Então o numerador p_i e o denominador q_i de c_i satisfazem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} p_i &= a_ip_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_iq_{i-1} + q_{i-2} \end{aligned} \tag{2}$$

para $i = 3, 4, 5, \ldots, n$, onde

$$p_1 = a_1, p_2 = a_2a_1 + 1, q_1 = 1, q_2 = a_2.$$

Demonstração. Como já vimos, o teorema é valido para $i = 3$, isto é,

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1}.$$

Supondo que a relação (2) valha para todo $j \leq i$ com $3 \leq i < n$, teremos

$$c_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}. \tag{3}$$

Observando que

$$c_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$$

e

$$c_{i+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1}}}}}},$$

vemos que c_{i+1} pode ser obtido de c_i simplesmente pela substituição de a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$. Isto nos diz que se pudermos mostrar que os números $p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1}$ e q_{i-2} dependem somente dos quocientes parciais $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, poderemos usar (3) para a obtenção de c_{i+1} pois estamos assumindo, como hipótese de indução, a validade de (3) para todo $j \leq i$. Como

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{a_{i-1} p_{i-2} + p_{i-3}}{a_{i-1} q_{i-2} + q_{i-3}},$$

os números p_{i-1} e q_{i-1} dependem somente dos números a_{i-1} e dos números $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-3}, q_{i-3}$ os quais dependem dos procedentes $a's, p's$ e $q's$. Desta forma, $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-1}$ e q_{i-1} dependem somente dos primeiros $i - 1$ quocientes parciais $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, sendo independentes de a_i. Portanto, eles não serão alterados com a substituição de a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$.

Assim, podemos utilizar (3) para a obtenção de c_{i+1}, bastando para isto, substituir a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$:

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= \frac{(a_i+\frac{1}{a_{i+1}})p_{i-1}+p_{i-2}}{(a_i+\frac{1}{a_{i+1}})q_{i-1}+q_{i-2}} \\ &= \frac{(a_{i+1}a_i+1)p_{i-1}+a_{i+1}p_{i-2}}{(a_{i+1}a_i+1)q_{i-1}+a_{i+1}q_{i-2}} \\ &= \frac{a_{i+1}(a_ip_{i-1}+p_{i-2})+p_{i-1}}{a_{i+1}(a_iq_{i-1}+q_{i-2})+q_{i-1}} \\ &= \frac{a_{i+1}p_i+p_{i-1}}{a_{i+1}q_i+q_{i-1}} \\ &= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \end{aligned}$$

ou seja, é válido para $i+1$, o que conclui a demonstração por indução.

□

Se definirmos $p_0 = 1, p_{-1} = 0, q_0 = 0$ e $q_{-1} = 1$, as equações (2)

$$p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}$$

passam a ser verdadeiras para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$.

A relação obtida no próximo teorema nos permitirá deduzir que para todo convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ temos que $(p_i, q_i) = 1$.

Teorema 1.6. *A relação*

$$p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i \tag{4}$$

se verifica para todo $i \geq 0$, *onde* p_i *e* q_i *são, respectivamente, o numerador e o denominador do i-ésimo convergente.*

Demonstração. Para $i = 0$, temos $p_0q_{-1} - p_{-1}q_0 = (-1)^0$ uma vez que definimos $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$.

Supondo, como hipótese de indução, a validade de (4), mostraremos que a mesma relação também se verifica quando substituímos i por $i+1$.

O teorema 1.5 nos fornece

$$p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1}$$

$$q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} p_{i+1}q_i - p_i q_{i+1} &= (a_{i+1}p_i + p_{i-1})q_i - p_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1}) \\ &= a_{i+1}p_i q_i + p_{i-1}q_i - a_{i+1}p_i q_i - p_i q_{i-1} \\ &= (-1)(p_i q_{i-1} - p_{i-1}q_i). \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$p_{i+1}q_i - p_i q_{i+1} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1},$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Corolário 1.1. *Para todo convergente* $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ *temos que* $(p_i, q_i) = 1$.

Demonstração. O Teorema 1.6 nos diz que $p_i q_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$. Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Daí, o máximo divisor comum de p_i e q_i deve ser igual a 1.

$\square$

1.4 Aproximações sucessivas

Tudo que fizemos nas seções anteriores com relação a frações contínua referenciava os números racionais. Nesta seção descreveremos um processo de obtenção de aproximações sucessivas, por racionais, para um número irracional, ou seja, vamos enfim conhecer a representação de um número irracional em termos de fração contínua.

Seja α um irracional e seja $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, isto é, a_1 é o maior inteiro menor do que α. Logo

$$\alpha = a_1 + \tfrac{1}{x_1}, \text{ com } x_1 = \tfrac{1}{\alpha - a_1}.$$

Vemos que x_1 é um irracional maior que 1, pois se x_1 fosse racional, $a_1 + \frac{1}{x_1}$ também seria, contrariando a hipótese de α ser irracional. Assim, podemos escrever x_1 na forma

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

onde $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$, x_2 irracional e $x_2 > 1$. Repetindo este processo, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \tfrac{1}{x_1} \\ x_1 &= a_2 + \tfrac{1}{x_2} \\ x_2 &= a_3 + \tfrac{1}{x_3} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n+1} + \tfrac{1}{x_{n+1}}, \end{aligned} \tag{5}$$

onde todos os $a_i's$ $(i > 1)$ são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos os $x_i's$ são irracionais maiores do que 1. O fato de cada x_i ser irracional nos garante que este processo pode ser repetido um número infinito de vezes. Utilizando as equações (5), vemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \tfrac{1}{x_1} = a_1 + \tfrac{1}{a_2 + \frac{1}{x_2}} = a_1 + \tfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_3}}} \\ &= a_1 + \tfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{x_4}}}}. \end{aligned}$$

Definimos $[a_1, a_2, a_3, \ldots] = \lim\limits_{n \to \infty} [a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Exemplo 1.4.1. Vamos ilustrar o processo acima obtendo a expansão de $\sqrt{3}$.

Seja $a_1 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ e

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

Temos que

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{(\sqrt{3} - 1)} \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Consequentemente,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}.$$

Como $a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$, temos

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

e obtemos

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1 + \tfrac{1}{x_1} = 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{x_2}} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}. \end{aligned}$$

Como $a_3 = \lfloor \sqrt{3} + 1 \rfloor = 2$, temos

$$\sqrt{3} + 1 = x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}.$$

Resolvendo esta última equação para x_3, obtemos

$$x_3 = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1 - 2)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Sendo $x_3 = x_1$ concluímos que x_4 será igual a x_2 e desta forma, continuando com este processo, iremos obter para a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ os valores $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$. Logo, a fração contínua infinita representando $\sqrt{3}$ será dada por:

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}].$$

Chamamos *fração contínua periódica* a uma representação como esta em que uma sequência de números se repete periodicamente. Colocamos uma barra sobre a parte que se repete, a qual é chamada de *período* da fração contínua.

Exemplo 1.4.2. Para $\alpha = \sqrt{6}$, obtemos a seguinte sequência

$$\begin{aligned} a_1 &= \lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2 \\ x_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}-2} = \tfrac{\sqrt{6}+2}{2} \\ a_2 &= \left\lfloor \tfrac{\sqrt{6}+2}{2} \right\rfloor = 2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{(\frac{\sqrt{6}+2}{2})-2} = \sqrt{6} + 2 \\ a_3 &= \lfloor \sqrt{6} + 2 \rfloor = 4 \\ x_3 &= \tfrac{1}{(\sqrt{6}+2)-4} = \tfrac{\sqrt{6}+2}{2} = x_1 \end{aligned}$$

Como $x_3 = x_1$, vemos que $a_4 = a_2, a_5 = a_3, a_6 = a_2, a_7 = a_3, \ldots$. Logo

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, \ldots] = [2, \overline{2, 4}].$$

Exemplo 1.4.3. Dada uma Fração Contínua periódica, podemos reverter o processo usado nos exemplos acima para a obtenção do número irracional representado por ela. Consideremos

$$\begin{aligned}[2, \overline{2, 4}] &= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \\ &= 2 + \tfrac{1}{y},\end{aligned}$$

onde

$$y = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}.$$

Desta última igualdade, observamos que

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}}$$

e obtemos a equação $2y^2 - 4y - 1 = 0$, ou seja, $y = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$, uma vez que y é positivo. Logo

$$\begin{aligned}[2, \overline{2, 4}] &= 2 + \tfrac{1}{y} = 2 + \tfrac{1}{\frac{2+\sqrt{6}}{2}} \\ &= 2 + \tfrac{2}{2+\sqrt{6}} = 2 + \tfrac{2(2-\sqrt{6})}{-2} \\ &= \tfrac{-4+4-2\sqrt{6}}{-2} = \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Até o presente momento, vimos que toda fração contínua finita representa um racional, que todo racional é representado por uma fração contínua finita e que um irracional é representado por uma fração contínua infinita.

Vale mencionar que nem todo irracional possui uma representação periódica quando representado sob a forma de fração contínua. O número π possui a seguinte representação

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots],$$

onde não há nenhuma sequência (período) que se repete. De acordo com Santos[9] (2005, p. 150), Lagrange em 1770, caracterizou todos os irracionais que possuem representação periódica quando expressos sob a forma de fração contínua. Ele mostrou que a fração contínua infinita que representa um irracional é periódica se, e somente se, este irracional for raiz de um polinômio da forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde a,b e c são inteiros. Este resultado nos diz, em particular, que somente irracionais algébricos, ou seja, que são soluções de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, podem ter representação periódica.

2 PARADOXO DE GALILEU

Neste capítulo vamos falar sobre um dos "Paradoxos de Galileu", no caso, o que se refere a igualdade de cardinalidade entre determinados pares de conjuntos infinitos, conforme [2], [4] e [5], tendo em vista que *paradoxo* é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum, em termos simples, um *paradoxo* é o osposto do que alguém pensa ser a verdade.

2.1 Galileu

Conforme Eves [4] (2011, pp. 352-356), Galileu Galilei nasceu em Pisa em 1564. Filho de um compositor e músico, ingressou aos dezessete anos na Universidade de Pisa no curso de Medicina, onde aproveitou para aprofundar a observação dos fenômenos da natureza e estudar textos de grandes autores clássicos como Arquimedes. No segundo ano do curso, que acabou por não concluir devido ao gosto que tinha pela Ciência e pela Matemática, descobriu que um pêndulo oscila com uma frequência constante (lei do isocronismo das pequenas oscilações).

Aos vinte e cinco anos de idade foi indicado professor de Matemática da Universidade de Pisa, tendo realizado experiências públicas sobre a queda dos corpos, enquanto exerceu essa função, desenvolvendo as primeiras ideias sobre o princípio da inércia.

Em 1592 tornou-se professor na Universidade de Pádua, por quase dezoito anos, onde continuou as suas experiências e aulas, ganhando um amplo prestígio.

Galileu desenvolveu vários instrumentos como a balança hidrostática, um tipo de compasso geométrico que permitia medir ângulos e áreas, o termômetro de Galileu e o precursor do relógio de pêndulo.

No início do século XVII surgiram os primeiros telescópios. Galileu desenvolveu o seu próprio telescópio e foi o primeiro a observar quatro satélites luminosos de Júpiter, confirmando de maneira notável a teoria de Copérnico dos corpos pequenos girando em torno de outros maiores. Com o telescópio, Galileu observou as manchas do Sol, as montanhas da Lua, as fases de Vênus e os anéis de Saturno. Mas tais descobertas provocaram uma oposição fanática por parte de muitos homens da Igreja, que aceitavam a autoridade de Aristóteles. *"Aristóteles garantia que o Sol não tem manchas e que a Terra, e, portanto, o homem é o centro do Universo"* (Freitas e Gonçalves [5](2008, p.28)). Houve até quem acusasse Galileu de colocar os quatro satélites de Júpiter dentro do telescópio.

Por fim, em 1633, um ano depois da publicação de um livro em que sustentava a teoria de Copérnico, Galileu foi intimado a comparecer perante a Inquisição, quando já doente e envelhecido, foi forçado, sob ameaça de tortura, a retratar-se de suas descobertas científicas. O seu livro foi colocado no *Index Librorum Prohibitorum* (Índice dos Livros Proibidos), onde ficou por dois séculos e apenas lhe permitiram continuar um trabalho científico inócuo, mas acabou por cegar e morrer em 1642, ainda sob a vigilância da Inquisição.

Um dos paradoxos mais famosos acerca do infinito é o que é apresentado por Galileu, o paradoxo dos naturais e dos quadrados, no livro *Discorsi e dimostrazioni matematiche a due nuove scienze*, publicado em Leyden em 1638. Galileu encena uma conversa entre três personagens, Salviati, Simplício e Sagredo, que representam respectivamente, ele próprio, um sábio convencido da justeza das concepções de Aristóteles e um homem honesto para quem a demonstração e a experiência se sobrepõem ao conhecimento livresco.

Salviati leva Simplício a concordar que os números que são quadrados perfeitos são tantos quantos os próprios números naturais, mostrando-lhe a correspondência, a que hoje chamamos bijetiva, entre os dois conjuntos de números, depois de o ter feito reconhecer que os inteiros são mais do que os quadrados perfeitos sozinhos:

> *"Salviati. (...). Por consciência, se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira não é?*
>
> *Simplicío. Certamente.*
>
> *Salviati. Se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, e nos enganarmos, que há tantos quanta raiz e quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais que uma raiz, nem uma raiz mais que um quadrado.*
>
> *Simplicío. Exatamente.*
>
> *Salviati. Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado; assim sendo, será portanto preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números; e no entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados.*

> *Sagredo. Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?*
>
> *Salviati. Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas"* (Galileu citado por Freitas e Gonçalves [5](2008, pp. 30-31)).

Galileu chegou a conclusão que para contar os quadrados perfeitos, podia estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos, concluindo assim que os quadrados perfeitos não eram menos do que os números naturais. A ideia proveniente da famosa noção de Euclides - "o todo é maior que a parte" - de que os números naturais eram mais do que os quadrados perfeitos, impediu-o de declarar a igualdade de cardinais.

Outro paradoxo galileano é o das rodas, que consiste em duas rodas concêntricas, uma maior que a outra, que tocam com os seus pontos em dois segmentos de comprimentos iguais.

> *"Salviati. Mas diz-me se em torno de um centro, (...) este ponto A, descrevermos dois círculos e dos pontos C e B dos seus semi-diâmetros se traçarem as tangentes CE, BF e deles, pelo centro A, a paralela AD, considerando que o círculo maior gira sobre a linha BF (igual à da sua circunferência, assim como as outras duas CE, AD) e admitindo que há uma revolução, que terá feito o círculo menor e o centro? Este terá, sem dúvida, percorrido a linha AD, e a circunferência daquele terá, com os seus contactos, medido toda a CE (...). Portanto, como pode, sem saltos o círculo menor percorrer uma linha tão maior de que a sua circunferência (...)"* (Galileu citado por Freitas e Gonçalves [5](2008, p. 31)).

A situação pode ser representada da seguinte forma:

Mais uma vez se trata de uma bijeção entre dois conjuntos, o segundo dos quais pode ser considerado uma parte do outro. A circunferência menor é, como comprimento, metade da maior. Assim, é possível estabelecer uma correspondência dos seus pontos com os de metade da circunferência de raio AB. Mas também podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos da menor na da maior, tendo portanto uma correspondência biunívoca entre as circunferências.

Figura 1: **Cículos concêntricos**

Fonte: Freita, Gonçalves e Silva, 2008

O paradoxo reside na possibilidade de correspondência biunívoca entre um segmento contínuo e sua parte própria. Bernhard Bolzano falou deste assunto nos *Paradoxos do Infinito*, conforme Freitas e Gonçalves [5] (2008, p. 32).

Vejamos então a solução proposta por Galileu e em seguida a solução proposta por Bolzano.

A solução que Galileu apresenta é negativa: não é possível com a nossa compreensão finita apurar o infinito. Ou seja, quando falamos em infinitos e em indivisíveis, os primeiros são incompreensíveis pela sua dimensão e os segundos pela sua pequenez.

Galileu, enquanto matemático, nega a possibilidade de raciocinar com argumentos necessariamente convincentes sobre o infinito. Mas, enquanto filósofo, admite a possibilidade de fazer conjecturas, arbitrárias e não necessárias, sobre a natureza do infinito. Assim, como matemático afirma:

> *"Não vejo a que outra decisão possa chegar do que dizer que infinitos são todos os números, infinitos os quadrados, infinitas as suas raízes, nem que a multidão dos quadrados é menor que a de todos os números, nem esta maior que aquela, e, como última conclusão, os atributos de igual, maior e menor não terem lugar nos infinitos, mas apenas nas quantidades terminadas"* (Galileu citado por Freitas e Gonçalves [5](2008, p. 33)).

Totalmente diferente da opinião de Galileu é a opinião de Bolzano perante o infinito e, em particular, do paradoxo do todo e da parte.

Bernahrd Bolzano, nascido em Praga, atual República Checa, era filósofo, matemático e teólogo, contribuiu tanto para a Matemática como para a Teoria do Conhecimento. Ele tentou, no seu trabalho, libertar o Cálculo da sua concepção infinitesimal. Para além de problemas ligados à Matemática, estudou problemas ligados ao espaço, à força e à propagação das ondas. Filho de um comerciante de artes, frequentou a Universidade de Praga, onde estudou Teologia, Matemática e Filosofia. Foi ordenado sacerdote da Igreja Católica e foi designado para lecionar religião na universidade onde estudou.

Os estudos científicos de Bolzano foram muito avançados para o seu tempo, nos fundamentos de vários ramos da Matemática, como a teoria das funções, a lógica e a noção de cardinal. Depois de demonstrar o teorema do valor intermédio, deu o primeiro exemplo de uma função contínua não derivável em nenhum ponto do conjunto dos números reais. No campo da lógica, estudou a tabela de verdade de uma proposição e introduziu a primeira definição operativa de dedutibilidade.

Para ele bastava caracterizar um conjunto pelas suas propriedades, e não ter de enumerar todos os elementos desse conjunto, ou seja, um conjunto é um todo. Bolzano tentou estabelecer um critério de comparação entre conjuntos infinitos. Analisou o paradoxo de Galileu relativo à correspondência um a um entre os números naturais e os quadrados perfeitos. Além disso, concluiu, embora vagamente, que as correspondências entre um conjunto infinito e um seu subconjunto próprio são comuns a todos os conjuntos infinitos. No entanto, conforme Freitas e Gonçalves [5] (2008, p. 33), considerava que essa correspondência não era suficiente para concluir que tais conjuntos tinham o mesmo cardinal, a existência de uma bijeção entre os conjuntos. Para que pudessem ter o mesmo cardinal, era necessário estar, por exemplo, definidos de modo idêntico:

> *"Quando dois conjuntos são infinitos, pode haver uma relação tal que, por um lado é possível associar cada elemento do primeiro conjunto com algum elemento do segundo de tal forma que nenhum elemento dos dois conjuntos fique sem associação, e por outro lado é possível que um conjunto possa conter o outro como uma parte de si. É insuficiente que se possam equiparar os elementos de dois conjuntos (infinitos)... Só se pode concluir uma igualdade destas multiplicidades se ambos os conjuntos forem determinados de modo idêntico"* (Galileu citado por Freitas e Gonçalves [5](2008, p. 34)).

2.2 Cantor

George Ferdinand Ludwig Philip Cantor, cujos pais eram dinamarqueses, nasceu em 1845, em S. Petersburgo, Rússia, mas passou a maior parte da sua vida na Alemanha. Seu pai era judeu convertido ao protestantismo e a sua mãe católica de nascimento. Cantor interessou-se fortemente pela teologia medieval sobre a continuidade e o infinito. Como consequência, não seguiu uma carreira em engenharia como lhe sugeria o seu pai, a fim de se concentrar em Filosofia, Física e Matemática.

Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim, onde ensinavam, além de Kummer, Leopold Kronecker e Karl Weierstrass. Talvez por influência de Kummer e Kronecker, Cantor interessou-se particularmente por teoria de números, tendo sido este assunto tanto da sua tese de doutoramento como do trabalho que apresentou para ser admitido como docente na Universidade de Halle (uma universidade de província considerada pouco importante), onde lecionou entre 1869 e 1905.

Faleceu em 1918 no hospital de doenças mentais de Halle. As descobertas de Cantor sobre a teoria de conjuntos assentam sobre uma ideia muito simples: como comparar conjuntos se não se conseguir contar os seus elementos?

De uma forma intuitiva, a correspondência um a um entre dois conjuntos A e B trata-se do emparelhamento dos elementos de um conjunto com os do outro, de tal modo que todos os elementos de cada conjunto têm exatamente um correspondente no outro conjunto.

> "*Se eu puder corresponder, elemento por elemento, dois conjuntos bem definidos M e N por uma operação unívoca (e, quando se pode fazê-lo duma maneira, pode-se fazêlo também de muitas outras) (...) digo que estes conjuntos têm a mesma potência, ou ainda que eles são equivalentes*" (Cantor, 1883 [1887] citado por Freitas e Gonçalves [5](2008, p. 35)).

Segundo esta definição, pode-se procurar a equivalência de grandes conjuntos, como o dos lugares de um estádio e o dos espectadores que os ocupam para assistir a qualquer acontecimento: se houver espectadores sem lugar, ou se sobrarem lugares não ocupados, os dois conjuntos não são equivalentes; caso contrário, são.

A definição de Cantor não exige que contemos ou mesmo que conheçamos as populações dos dois conjuntos para determinar se são ou não equivalentes.

Cantor teve a ousadia intelectual que duzentos e cinquenta anos antes faltou a Galileu Galilei, de aplicar a definição de igualdade do número cardinal de dois conjuntos ao caso de conjuntos infinitos, afirmando que uma parte pode ser equivalente ao todo quando se trata de conjuntos infinitos.

Na obra de Galileu *Discorsi e dimostrazioni matematiche a due nuove scienze*, publicado em Leyden em 1638, escrita dois séculos e meio antes de Cantor, o grande cientista italiano chamou a atenção para a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados, embora intuitivamente parecesse haver muito menos quadrados do que números naturais.

A contradição que se deparou a Galileu resolve-se com facilidade, Observando que o mesmo adjetivo, igual, pode ser empregue com dois significados diferentes. Um deles, com origem em Aristóteles, baseia-se no fato de a parte não poder ser igual ao todo, na medida em que no todo existe pelo menos um elemento que não está na parte. O outro, cantoriano, considera que a parte pode ser igual em número ao todo.

Assim, Cantor não só afirmou que a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados deveria ser literalmente aceita, como também provou que o conjunto dos números pares, dos ímpares, dos números triangulares, $\ldots$, podem estar em correspondência um a um com o conjunto dos números naturais, ou seja, têm todos a mesma potência, o mesmo cardinal.

Cantor mostrou então que qualquer subconjunto infinito dos números naturais é equipotente a N.

Quando consideramos ao mesmo tempo conjuntos finitos e infinitos, a equipotência de um conjunto com uma sua parte própria torna-se uma característica específica dos conjuntos infinitos.

Conforme Freitas e Gonçalves [5] (2008, p. 37), em 1888, Richard Dedekind definiu um conjunto infinito como aquele em que se pode estabelecer uma bijeção com um seu *subconjunto próprio.* Com esta definição, Dedekind revolucionou uma maneira de pensar milenária. Agora não é necessário definir um conjunto infinito com a negação do que é finito, podemos, pelo contrário, definir o finito como negação do que é infinito, ou seja, um conjunto é finito se não estiver em bijecção com nenhuma parte própria.

Atualmente, a conclusão de Cantor sobre "Paradoxo de Galileu" acerca do infinito pode ser escrita conforme o corolário seguinte, visto em Lima [6] (2004, p. 6).

Corolário 2.1. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

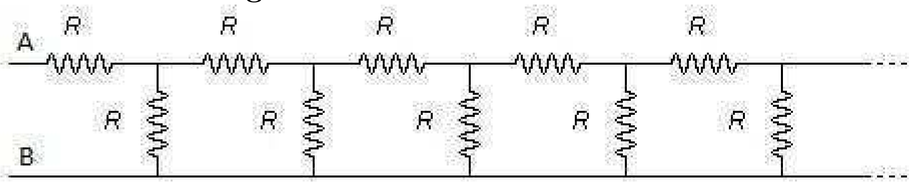
Com efeito, sejam X um conjunto infinito e $f : N \to X$ uma aplicação injetiva. Escrevamos, para cada $n \in N$, $f(n) = x_n$. Consideremos o subconjunto próprio $Y = X - \{x_1\}$. Definamos a bijeção $\varphi : X \to Y$ pondo $\varphi(x) = x$ se x não é um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ $(n \in N)$. Reciprocamente, se esiste uma bijeção de X sobre um seu subconjunto próprio então X é intinito, em virtude do corolário abaixo, visto em Lima [6] (2004, p. 4).

Corolário 2.1. *Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma sua parte própria.* O exemplo a seguir, encontra-se em Shigekiyo, Yamamoto e Fuke [10] (1998, p.

184), o qual é um livro didático destinado a disciplina de Física na 3ª série do Ensino Médio. O mesmo trata de uma situação fora da realidade prática, porém, em sua resolução, vamos aplicar a conclusão de Cantor sobre o "Paradoxo de Galileu" e um certo conhecimento sobre Frações Contínuas. O mesmo traz um problema de associação mista de resistores elétricos em uma malha infinita. Vejamos:

Exemplo 2.2.1. *"Considere uma rede infinita consistindo de resistores (cada qual com resistência R) como mostra a figura abaixo.*

Figura 2: **Malha de resistores infinita**



Fonte: Shigekiyo, Yamamoto e Fuke, 1998

Determine a resistência equivalente R_{AB}, entre os pontos A e B, que se encontram nos terminais do circuito, ou seja, os pontos à esquerda na figura." O autor do livro citado, sugere a seguinte solução para o problema.

Seja R_e a resistência equivalente pedida, temos

$$R_e = R + \frac{R.R_e}{R + R_e} = \frac{R(R + R_e) + RR_e}{R + R_e} \Rightarrow R_e^2 - RR_e - R^2 = 0$$

Resolvendo a equação acima e tomando o valor positivo de R_e, tem-se:

$$R_e = (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})R$$

□

Porém o mesmo não informa como obteve a igualda $R_e = R + \frac{R.R_e}{R+R_e}$, tendo em vista que no capítulo do conteúdo referente a questão ele não faz menção a rede infinita de resistores, nem traz exemplos resolvidos dessa situação.

Desta forma, apresentaremos uma outra sugestão de resolução usando os temas trabalhados neste texto.

Solução:

Lembremos, conforme Shigekiyo, Yamamoto e Fuke [10] (1998, pp. 154-159), que a associação em série de n resistências $R_1, R_2, \cdots, R_n$ leva a uma *resistência equivalente*

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n,$$

ao passo que a associação em paralelo leva a uma *resistência equivalente* R_p dada por

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Trabalhando um pouco com esta útima igualdade chegamos a uma igualdade equivalente a mesma, tendo isolado no primeiro membro apenas R_p. Como segue

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{R_p} = \tfrac{1}{R_1} + \tfrac{1}{R_2} + \cdots + \tfrac{1}{R_n} \\
\Rightarrow\ & \tfrac{1}{R_p} = \tfrac{R_2R_3\ldots R_n + R_1R_3R_4\ldots R_n + \cdots + R_1R_2\ldots R_{n-1}}{R_1R_2\ldots R_n} \\
\Rightarrow\ & R_p\left(R_2R_3\ldots R_n + R_1R_3R_4\ldots R_n + \cdots + R_1R_2R_3\ldots R_{n-1}\right) = R_1R_2\ldots R_n \\
\Rightarrow\ & R_p = \tfrac{R_1R_2\ldots R_n}{R_2R_3\ldots R_n + R_1R_3R_4\ldots R_n + \cdots + R_1R_2\ldots R_{n-1}} \\
\Rightarrow\ & R_p = \tfrac{R_1R_2\ldots R_n}{R_1R_2\ldots R_n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)} \\
\Rightarrow\ & R_p = \tfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}.
\end{aligned}$$

Montemos agora o circuito da Figura 2 gradativamente. Seja R_{AB} a resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B.

Agora, vamos seguir os passos:

1º PASSO: Seja R_1 a resistência equivalente do primeiro retângulo do circuito da Figura 3.2, então

$$R_1 = R + R = 2R.$$

2º PASSO: Seja R_2 a resistência equivalente dos dois primeiros retângulos do circuito, então

$$R_2 = R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}\right) = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}.$$

3º PASSO: Seja R_3 a resistência equivalente dos três primeiros retângulos do circuito, então

$$R_3 = R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}}\right) = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}.$$

4º PASSO: Seja R_4 a resistência equivalente dos quatro primeiros retângulos do circuito, então

$$R_4 = R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}\right) = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}}}.$$

n-ésimo PASSO: Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos

$$R_n = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}.$$

Assim, sendo R_{AB} o valor da resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B quando n tende ao infinito, temos que:

$$R_{AB} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \dots}}}.$$

Como se trata de uma rede infinita, então supondo a remoção do seu primeiro segmento obtemos uma nova rede também infinita.

Sejam $H_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_n, \dots\}$ o conjunto dos infinitos resistores da malha inicial e $H_2 = \{r_3, r_4, r_5, r_6, \dots, r_{n+2}, \dots\}$ o conjunto dos também infinitos resistores da malha após removido seu primeiro segmento, cada r_i com resistencia R. Existe então, pelo "Paradoxo de Galileu", uma bijeção entre os elementos de H_1 e H_2, haja vista que H_2 é um subconjunto próprio de H_1.

Deste modo, com base no "Paradoxo de Galileu" temos que

$$R_{AB} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \dots}}}}} \Longrightarrow R_{AB} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{AB}}}.$$

Esta útima igualdade faz-nos obter à seguinte equação do segundo grau em R_{AB}:

$$R_{AB}^2 - RR_{AB} - R^2 = 0$$

Resolvendo, obtemos

$$R_{AB} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) R.$$

A raiz negativa deve ser desprezada porque a resistência, por definição, deve ser positiva. Portanto, a resposta é

$$R_{AB} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) R.$$

□

3 APLICAÇÕES

Neste capítulo vamos aproveitar a estreita relação existente entre a Física e a Matemática, resolvendo, com o auxílio dos temas trabalhados nos dois capítulos anteriores, dois problemas da Educação Básica de ambas as disciplinas. Iremos apresentar um caminho que normalmente não é mostrado para os alunos de tal nível de ensino, caminho este que além de promover a interdisciplinaridade entre tais disciplinas, também ajuda a diminuir o grande abismo existente entre o ensino médio e o superior.

Nossa sugestão é que tais conteúdos sejam apresentados para turmas da 3ª série do Ensino Médio, até porque um dos problemas que serão apresentados neste capítulo diz respeito a eletricidade que por sua vez é normalmente vista nesta série. Porém, a primeira das duas aplicações que iremos apresentar, pode perfeitamente ser exposta no Ensino Fundamental, desde que seja definido antes, pelo menos, uma fração contínua finita simples, que é relativamente uma definição simples. Além dessa definição, o que vamos precisar para a resolução da mesma são operações básicas com frações, que os educandos veem no Ensino Fundamental. Vejamos:

"A fração $\frac{37}{13}$ tem como representação sobre a forma de fração contínua a expressão $2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$. Quais os valores de x, y e z ?"

Antes de apresentarmos a solução desta aplicação, vamos apresentar uma sugestão de abordagem de frações contínuas para a Educação Básica, mas precisamente para 3ª série do Ensino Médio, como dito anteriormente.

Começaremos com o seguinte exemplo:

Consideremos o número racional $\frac{18}{7}$. Efetuando a divisão de 18 por 7 encontramos quociente 2 e resto 4, assim, de acordo com o Algoritmo de Euclides temos a seguinte igualdade

$$18 = 2.7 + 4.$$

Dividindo-a por 7, temos

$$\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7}.$$

Como

$$\frac{4}{7}=\frac{1}{\frac{7}{4}},$$

temos que

$$\frac{18}{7}=2+\frac{1}{\frac{7}{4}}\cdot$$

Agora, dividindo 7 por 4 temos quociente 1 e resto 3, logo

$$7=1.4+3.$$

Dividindo esta igualdade por 4, temos

$$\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}\cdot$$

Logo

$$\frac{18}{7}=2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}\cdot$$

Continuando com esse procedimento, obtemos a igualdade

$$\frac{18}{7}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}},$$

onde o segundo membro é denominado uma representação em termos de Fração Contínua do número racional $\frac{18}{7}\cdot$

Generalizando, temos que uma expressão da forma

$$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\frac{1}{a_5+\ddots}}}} \tag{6}$$

é chamada de *fração contínua* e os números $a_1, a_2, \ldots$ são chamados de quocientes parciais. Quando o número de quocientes parciais for finito dizemos que a Fração Contínua é finita e, caso contrário, dizemos que é infinita.

Se $a_1, a_2, \ldots$ são números inteiros, então a expressão (6) é dita Fração Contínua simples.

Feito esta breve exposição sobre Frações Contínuas para os educandos, podemos então fazer uso deste conhecimento na resolução da aplicação, anteriormente citada:

"A fração $\frac{37}{13}$ tem como representação sobre a forma de fração contínua a expressão $2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$. Quais os valores de x, y e z ?"

Solução:

Temos, do enunciado da questão, que

$$\frac{37}{13}=2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}\cdot(*)$$

Pela divisão euclidiana,

$$37=2.13+11\Rightarrow\frac{37}{13}=2+\frac{11}{13}\cdot$$

Mas

$$\frac{11}{13}=\frac{1}{\frac{13}{11}},$$

logo

$$\frac{37}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{11}}\cdot$$

Novamente pela divisão euclidiana temos

$$13=1.11+2\Rightarrow\frac{13}{11}=1+\frac{2}{11},$$

assim

$$\frac{37}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{11}}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{11}}\cdot$$

Continuando este processo temos

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{\frac{11}{2}},$$

mas

$$11=5.2+1\Rightarrow\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2},$$

daí

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}.$$

Logo, temos que $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$ é a representação de $\frac{37}{13}$ sobre a forma de Fração Contínua. Assim, substituindo em $(*)$ temos

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} \Rightarrow 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}.$$

Desta última igualdade, concluímos pela unicidade da representação de um número racional sobre a forma de Fração contínua que a solução da aplicação que é:

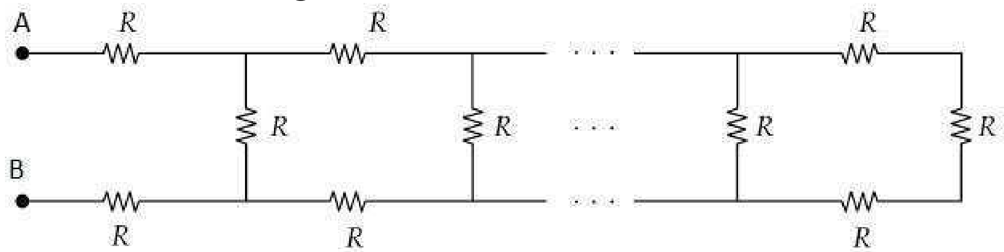
$$x = 1, y = 5 \text{ e } z = 2$$

$\square$

A última aplicação que iremos apresentar, encontra-se em Portilho e Lima [8] (2006, p. 26). Esta traz um problema de associação mista de resistores elétricos, similar ao do Exemplo 2.2.1, diferindo apenas pelo fato da malha desta vez, apesar de muito grande, ser finita e de cada sub-malha retangular ter uma resistência a mais, ou seja, uma situação uma pouco mais condizente com a realidade.

"O problema em questão é um exercício d eletricidade envolvendo uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência R, conforme ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3: Malha de resistores finita



Fonte: Portilho e Lima, 2006

As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas retângulares é muito grande, podendo ser considerado, para efeito de cálculos, infinito. O exercício consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito (à esquerda da Figura)."

Devido ao fato desta malha poder ser considerada infinita, então na solução deste problema, além dos conhecimentos sobre frações contínuas que já teríamos mostrado aos educandos na resolução da aplicação anterior, vamos precisar dos conhecimentos do resultado dado por Cantor do paradoxo de Galileu. Sendo assim, antes de apresentarmos sua solução iremos mais uma vez sugerir como poderia ser visto de forma resumida tal conteúdo na Educação Básica. Inicialmente precisariamos definir um subconjunto próprio. Podemos fazer isso da seguinte forma:

Dados dois conjuntos N e A dizemos que A é um *subconjunto próprio* de N se $A \subset N$ e $A \neq N$.

Consideremos agora N e A, respectivamente, os conjuntos dos números naturais e dos números quadrados perfeitos, ou seja,

$$N = \{0, 1, 2, 3, ...\} \text{ e } A = \{0, 1, 4, 9, ...\}$$

Observamos que A é um subconjunto próprio de N, pois $A \subset N$ e $A \neq N$. Temos ainda que, elevando ao quadrado em sequência os elementos do conjunto N, vamos encontrar justamente a sequência dos elementos de A, o que, de acordo com o estudado na 1ª série do Ensino Médio, caracteriza uma bijeção de N sobre A, pois cada elemento de N estará associado a um elemento diferente de A, o que caracteriza uma injeção, e ainda não terá elemento de A sem associação com elementos de N, o que caracteriza uma sobrejeção. O exposto acima é um exemplo clássico do "Paradoxo de Galileu" que será enunciado abaixo:

"Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$."

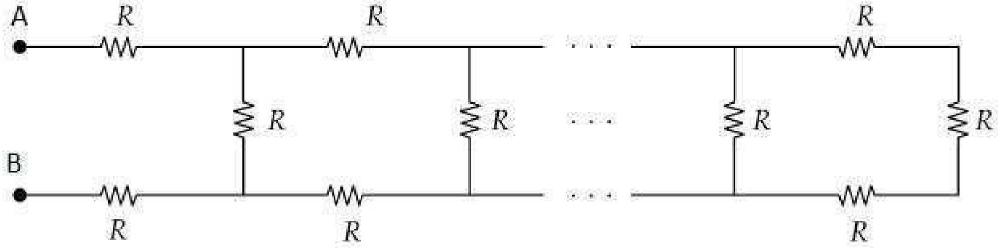
Feito o resumo paradoxal acima, podemos então apresentar a solução do problema já citado:

"O problema em questão é um exercício d eletricidade envolvendo uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência R, conforme ilustrado na Figura 3.1.

As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas retângulares é muito grande, podendo ser considerado, para efeito de cálculos, infinito. O exercício consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito (à esquerda da Figura)."

Solução:

Figura 4: **Malha de resistores finita**



Fonte: Portilho e Lima, 2006

Lembremos, do Exemplo 2.2.1, que a associação em série de n resistências $R_1, R_2, \cdots, R_n$ leva a uma *resistência equivalente*

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n,$$

ao passo que a associação em paralelo leva a uma *resistência equivalente* R_p dada por

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n},$$

ou seja,

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}.$$

Estas informações são vistas pelos educando da 3ª série do Ensino Médio, normalmente por volta do fim do primeiro semestre ou início do segundo, no entanto é sempre válido que o professor de Física seja consultado antes da exposição de tais informações, ou até mesmo que ele seja o expositor dessa aplicação, haja vista que uma das intenções deste trabalho é a interdisciplinaridade, como citado anteriormente.

Montemos agora o circuito da Figura 3.2 gradativamente. Seja R_{AB} a resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B.

Agora, vamos seguir os passos:

1º PASSO: Seja R_1 a resistência equivalente do primeiro retângulo do circuito da Figura 3.2, então

$$R_1 = R + R + R = 3R.$$

2º PASSO: Seja R_2 a resistência equivalente dos dois primeiros retângulos do circuito, então

$$R_2 = R + R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}\right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}.$$

3º PASSO: Seja R_3 a resistência equivalente dos três primeiros retângulos do circuito, então

$$R_3 = R + R\left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}}\right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}.$$

4º PASSO: Seja R_4 a resistência equivalente dos quatro primeiros retângulos do circuito, então

$$R_4 = R + R\left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}\right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}}}.$$

n-ésimo PASSO: Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos

$$R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}.$$

Como sugerido no enunciado, vamos usar o argumento de que o número de sub-malhas retângulares pode ser considerado infito. Assim, chamando de R_{AB} o valor da resistência equivalente do circuito entre os pontos A e B quando n tende ao infinito, temos que:

$$R_{AB} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \cdots}}}.$$

Daí, como no Exemplo 2.2.1, temos pelo "Paradoxo de Galileu" que

$$R_{AB} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \cdots}}} \Rightarrow R_{AB} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{AB}}},$$

o que nos leva a seguinte equação do segundo grau em R_{AB}

$$R_{AB}^2 - 2RR_{AB} - 2R^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$R_{AB} = R\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Como, por definição, a resistência deve ser positiva, então devemos desprezar a raiz negativa da equação. Portanto, a soluçao do problema é

$$R_{AB} = R\left(1+\sqrt{3}\right).$$

□

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho, consideramos que Frações Contínuas é um tema bem relevante e com boa aplicabilidade na Educação Básica, como mostramos ao longo do texto. E, apesar da proposta apresentada ser para aplicação no Ensino Médio, nota-se que tais frações podem perfeitamente serem lecionadas no Ensino Fundamental, tendo em vista que neste nível os educandos veem os conjuntos numéricos, como o conjunto dos números recionais e irracionais. Como foi visto, tais frações podem ser usadas para encontrar boas aproximações de números irracionais partindo de um racional e, além disso, podemos usá-las para encontrar aproximações de raízes quadradas.

O "Paradoxo de Galileu" é outro tema bastante relevante em aplicações na Educação Básica, pois, neste nível de ensino já se fala em conjuntos infinitos, e uma ferramenta como esta, que nos ajuda a comparar quantidades de elementos de dois conjuntos infinitos se torna bem pertinente, como foi visto nas aplicações de associações de resistores elétricos e também na definição de um determinado conjunto ser ou não infinito.

Outro ponto positivo que notamos é o fato de podermos promover a interdisciplinaridade entre entre as disciplinas Matemática e Física que naturalmente já é bem forte, mas algumas vezes pouco explorada pelos professores destas disciplinas. Porém, com a proposta aqui apresentada de trazer uma aplicação de Física para aula de matemática ou até mesmo não só a aplicação mas também o próprio professor de Física, acreditamos que venha fortalecer ainda mais esta relação entre tais disciplinas dentro da escola, que vemos como um dos pontos mais importantes do trabalho.

Assim, avaliamos como positiva a exposição e aplicação destes temas na Educação Básica, pois como vimos, os mesmos se adaptam a conteúdos já lecionados neste nível de ensino, trazendo boas alternativas para resolução de alguns problemas nos Ensinos Fundamental e Médio.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F. *Frações Contínuas: algumas propriedades e aplicações.*[S.l: s.n]. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/MC34.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2014.

[2] BOYER, C.B. *História da Matemática*, tradução de Elza F. Gomide, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

[3] EUCLIDES, *Os elementos*, Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo, Editora UNESP, 2009.

[4] EVES, H.W. *Introdução à História da Matemática*, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

[5] FREITAS,C.; GONÇALVES, E.; SILVA, E. *O Infinito*, Trabalho de Projecto. Núcleo de estágio da EB 2,3 de Vila Verde, 2008.

[6] LIMA, E.L. *Análise Real*, v.1, Rio de Janeiro: IMPA, 2004. [7] NASCIMENTO, A.M. *Frações Contínuas e Aplicações no Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás, 2013.

[8] PORTILHO, D.F.J; LIMA, F.M.S. *Usando Frações Contínuas para Resolver um Problema de Eletricidade de Forma Criativa*, Artigo, Física na Escola, v.7, n.1, 2006. Disponível em: < www.sbfisica.org.br/fne/vol7/Num1/v1a08.pdf >. Acesso em: 21 mar. 2014.

[9] SANTOS, J.P.O. *Introdução à Teoria dos Números*, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[10] SHIGEKIYO, C.T.; YAMAMOTO, K.; FUKE, L.F. *Os Alicerces da Física: Eletricidade*, 11. ed. São Paulo: Saraiva, 1998 v.3.

[11] SILVA, J.C.R. *O Estudo das Frações Contínuas.* Brasília, DF, [2007]. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12007/JoseCarlosRamos
daSilva.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2014.