2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA NO ESTUDO DE SEGMENTOS CONSTRUTÍVEIS

Ana Cristina Pinheiro Fernandes Meira [1]
Fábio Alexandre Matos[2]

Resumo: No presente trabalho analisamos quais medidas de segmentos são construtíveis utilizando apenas régua e compasso. Com o objetivo de abordar esse tema no escopo do Ensino Médio, propomos aplicação em sala de aula utilizando o software *Geogebra* como ferramenta didática.

Palavras-chave: Régua e Compasso. Segmentos construtíveis. Duplicação do cubo. Quadratura do círculo. Trisseccção de ângulos.

1 Introdução

Não há dúvidas de que a busca pela solução dos problemas clássicos gregos, envolvendo construções geométricas feitas apenas com régua e compasso, contribuíram significativamente para o desenvolvimento da matemática. Essa contribuição possibilitou o criação e aprimoramento dos conceitos básicos referente a estrutura da álgebra aliada à geometria.

> É indubitável que, na história da Matemática, alguns problemas têm significação especial: agindo como "catalisadores" eles influenciam muito o desenvolvimento da ciência. Tais problemas atraem devido à simplicidade e lucidez de seus enunciados, fascinando muitos matemáticos. Como resultado, são elaborados novos métodos e, até mesmo novas teorias e novas perguntas, profundas e abrangentes, são formuladas. (RAIGORODSKII, 2004 apud CARVALHO, 2009, p. 89).

Assim sendo, a relevância deste trabalho apóia-se na necessidade do estudante em formação experimentar os primeiros passos dessa grande criação, a fim de contribuir com a interpretação da matemática atual.

> [...] a fonte de novas descobertas na matemática esteve postulada, muitas vezes nos problemas e soluções apresentados no passado. Isso nos faz pensar acerca das diferentes formas de apresentação e demonstração de vários teoremas e postulados matemáticos fornecidos por fontes históricas e que podem levar-nos a novas elaborações (MENDES, 2001, p. 19).

[1] Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: anacris.pf@gmail.com
[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: fabio.ufsj@gmail.com

Os problemas envolvendo régua e compasso espelhavam o interesse quase lúdico dos matemáticos gregos em desafios intelectuais. O autor Stillwell (1994, p. 15) declara: "A régua e o compasso tem sido a marca registrada da geometria desde o aparecimento dos Elementos de Euclides em torno de 300 a.C.". Em especial, esse tempo ficou marcado na história pela busca das respostas para os 5 problemas clássicos de construção geométrica descritos a seguir. Em todos estes problemas clássicos a dificuldade da resolução consiste em desenhar, com razoável precisão, segmentos de medidas específicas utilizando apenas régua não graduada e compasso.

- Duplicação do cubo: construção da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro.
- Retificação da circunferência: construção de um segmento de reta cujo comprimento seja igual ao perímetro de uma dada circunferência.
- Quadratura do círculo: construção de um quadrado cuja área seja igual à de um dado círculo.
- Trissecção do ângulo: divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais.
- Construção de polígonos regulares: divisão da circunferência em n partes iguais.

Esses desafios perduraram por cerca de dois mil anos até que, à luz da teoria das equações algébricas, foram surgindo respostas definitivas para os problemas essencialmente geométricos. Foi a partir dos trabalhos de Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel (1802-1829) e Évariste Galois (1811-1832) que houve uma conexão entre a Geometria Euclidiana e as teorias algébricas modernas, tais como, da resolução de equações e extensão de corpos. Podemos dizer, segundo Courante e Robbins (2000), que a compreensão profunda dos problemas geométricos consiste em traduzi-los para a linguagem algébrica. Especificamente no que concerne a álgebra e os números construtíveis:

> Claro que, a pessoa é livre para estudar generalizações da noção de construtibilidade que envolve o uso de réguas e outros instrumentos. Porém, permanece o fato que a noção clássica de construtibilidade foi a mais frutífera para o desenvolvimento da álgebra. (STILLWELL, 1994, p. 04).

Sendo tema central da teoria algébrica presente nos problemas clássicos gregos de construções por régua e compasso, neste trabalho determinaremos um critério para identificar quando um segmento é construtível, nos seguintes termos:

Segmentos construtíveis: Um segmento de comprimento $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, diz-se construtível se pode ser desenhado a partir de um segmento de reta unitário em um número infinito de passos utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso.

Mostraremos que são construtíveis todos os segmentos cujas medidas são números obtidos a partir de operações fundamentais da soma, subtração, multiplicação, divisão e de extrações de raízes quadradas a partir de um segmento unitário. Em seguida, anunciaremos um critério de construtibilidade que será aplicado à resolução de três dos problemas clássicos gregos. Por fim, propomos aplicação do presente estudo às aulas do 2º ano do ensino médio.

2 Segmentos e números construtíveis

Consideremos uma reta r, determinada pelos pontos A e B. Associando o número 0 ao ponto A e o número 1 ao ponto B, teremos cada ponto da reta determinando um único número real e reciprocamente.

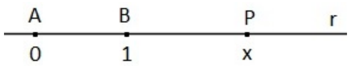

Figura 1: Números construtíveis

Pensando na reta numérica é possível definir *números construtíveis* e utilizar esse termo em lugar de segmentos ou figuras construtíveis:

Números construtíveis: Um número real α diz-se construtível se existir um segmento construtível de comprimento $|\alpha|$.

Tomando um ponto P qualquer, de abscissa x, sobre a reta r, o segmento AP será construtível a partir do segmento unitário AB se e somente se o ponto P, ou equivalentemente, o número real x, for construtível.

Confirmando a relação biunívoca entre números e pontos da reta temos os seguintes axiomas da Geometria Euclidiana Plana:

Axioma 2.1 ***(Axioma de medição 1)*** *A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se as extremidades coincidem.*

Axioma 2.2 ***(Axioma de medição 2)*** *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Queremos descobrir quais números são construtíveis a partir de uma régua não graduada e um compasso. Para iniciar este estudo consideraremos possíveis as seguintes construções geométricas:

(a) Dada uma reta r e um ponto A fora dela é possível sempre:
   i. Traçar uma reta s perpendicular a r passando por A:
   ii. Traçar uma reta s paralela a r passando por A:

(b) É possível transportar segmentos

(c) É possível traçar círculos cujo raio é um segmento dado;

(d) É possível outras construções que serão combinações das anteriores.

As instruções detalhadas das construções por régua e compasso citadas acima podem ser consultadas no livro *Construções Geométricas* de Eduardo Wagner [3].

[3] WAGNER , 1998, p.2

Dados dois números construtíveis a e b, mostraremos que também serão construtíveis $a+b$, $-a$, $a.b$, $\frac{1}{a}$ (se $a \neq 0$) e $\sqrt{a}$. Assim sendo, poderemos dizer que o conjunto de números construtíveis forma um "*corpo*". Tal expressão significa apenas que se trata de um conjunto de números reais que possui 0, 1 e é fechado para a adição, multiplicação e cálculo de simétricos e inversos (de elementos não nulos). De fato, observe as seguintes construções geométricas:

2.1 Soma, subtração e simétrico

Soma e subtração. Dado um segmento AB de medida a, para somar ou subtrair o segmento b basta traçar uma circunferência de raio b e centro B. Observe a figura 2.

Simétrico. Dado um segmento construtível de medida a, para encontrar o simétrico $-a$ basta traçar uma circunferência de raio a e centro 0. (figura 3)

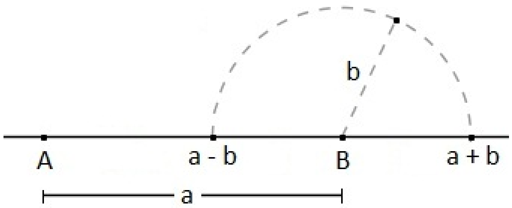

Figura 2: Adição e subtração

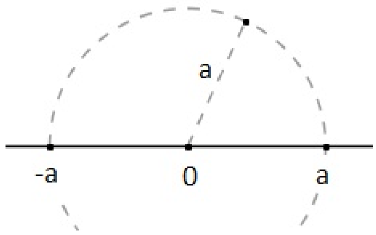

Figura 3: Simétrico

2.2 Multiplicação, divisão e inverso.

Utilizando o Teorema de Tales podemos mostrar que, dados dois segmentos construtíveis a e b não nulos, o produto entre eles é construtível e o inverso de cada um deles também o é.

Multiplicação. Primeiro construiremos $x = a.b$. Observe a figura 4 a seguir.

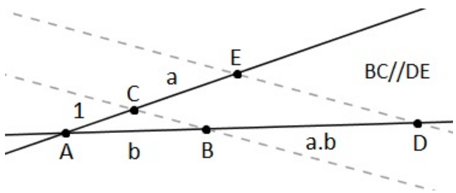

Figura 4: Multiplicação

Procedimento.

- Trace duas retas concorrentes em um ponto A,
- Transporte os segmentos de medidas 1, a e b marcando os segmentos AC, CE e AB, respectivamente,
- Trace a reta CB e, passando por E, trace $DE \parallel BC$.

Concluímos que o segmento BD terá medida $x = a.b$, já que pelo Teorema de Tales, como $DE \parallel BC$, temos $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$. Logo $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$. Daí $x = a.b$.

Divisão. Agora construiremos $x = \frac{b}{a}$. Observe na figura 5 abaixo que para isso basta trocar a e 1 de ordem:

Pelo Teorema de Tales $\frac{a}{1} = \frac{b}{x}$. Daí $x = \frac{b}{a}$.

Inverso. Construiremos $x = \frac{1}{a}$. Observe na figura 6 que basta fazer $b = 1$:

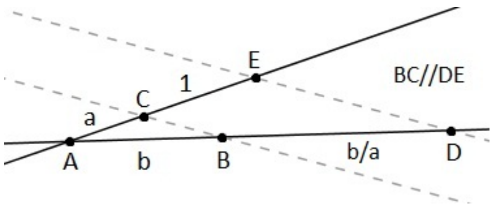

Figura 5: Divisão

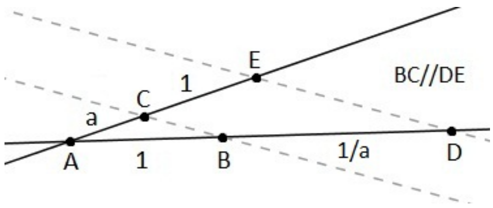

Figura 6: Inverso

Pelo Teorema de Tales $\frac{a}{1} = \frac{1}{x}$. Daí $x = \frac{1}{a}$.

2.3 Raíz quadrada

Utilizando semelhança de triângulos ou Teorema de Pitágoras podemos mostrar que, dado um número construtível a, a raiz quadrada dele também é construtível.

Raiz quadrada. Dado um segmento construtível a, construiremos o segmento $x = \sqrt{a}$.

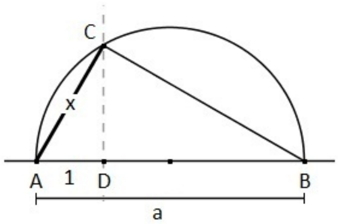

Figura 7: Raiz quadrada

Procedimento.

- Traçamos um segmento AB de medida $a > 1$,
- Construímos uma semicircunferência no diâmetro AB,
- Traçamos a perpendicular por um ponto D em AB distante uma unidade de A,
- Marcamos o ponto C de interseção entre a perpendicular e a semicircunferência,

Concluímos que o segmento AC terá medida $x = \sqrt{a}$. De fato, o ângulo inscrito $\hat{C}$ corresponde ao arco AB e portanto, $\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 90^o$. Logo, o triângulo ABC é retângulo em C e é semelhante ao $\triangle ACD$ pelo caso ângulo ângulo. Assim sendo, vale a relação $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, isto é, $\frac{a}{x} = \frac{x}{1}$. E daí, $x = \sqrt{a}$.

Por ser uma construção mais intuitiva, apresentamos a seguir outra maneira de realizar a construção de $\sqrt{a}$, que pode ser justificada através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Sabemos que em um triângulo retângulo isósceles de catetos unitários, a medida hipotenusa é $\sqrt{2}$. Construindo a partir de $\sqrt{2}$ um outro cateto unitário teremos um novo triângulo retângulo cuja hipotenusa medirá $\sqrt{3}$. Observe figura (8) a contrução de $\sqrt{4}, \sqrt{5}, ...$

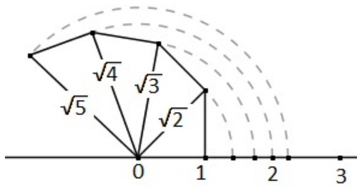

Figura 8: Localização na reta

Embora mais intuitiva, essa construção é um pouco mais trabalhosa, tendo em vista que para qualquer número natural n, determinar o segmento $\sqrt{n}$ implica em possivelmente construir a priori todos seguimentos $\sqrt{k}$ com $k < n$.

Os dois procedimentos apresentados permitem localizar, sobre a reta, os pontos correspondentes aos números irracionais $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$.

3 Critério de Construtibilidade

Como as construções de $a+b$, $-a$ e a/b descritas foram feitas a partir de 0 e 1, utilizando apenas régua não graduada e compasso, temos por consequência imediata, que são construtíveis os números $1+1=2$; $2+1=3$; $3+1=4$ e assim por diante. Ou seja, são construtíveis todos os números naturais. Assim como são construtíveis seus simétricos -1, -2, -3, etc. Daí podemos concluir que são construtíveis, todos os números inteiros. Ainda mais, concluímos que são construtíveis todos os quocientes de inteiros, ou seja, todos os números racionais. Além disso, não só os racionais são construtíveis. Vimos que se a é construtível, então o número $\sqrt{a}$, que pode ser irracional, também será construtível.

Uma pergunta natural é se podemos construir todos os números reais. E podemos dizer que não! P.L. Wantzel[4] (1837 apud GARBI. G. G., 1997) mostrou que o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível. Então como podemos determinar quais são os números construtíveis?

Em essência, uma construção geométrica com régua e compasso é apenas um combinação de circunferências, retas e pontos determinados através das interseções destas curvas. Tais interseções podem ser então de três tipos: retas com retas, retas com circunferências ou circunferências com circunferências. Analiticamente, tais interseções correspondem a pontos (x, y), soluções de sistemas de duas equações. Podemos então definir:

[4]WANTZEL, P. L. *Recherches sur le moyens de reconnaitre si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.* Paris: Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1837. vol. 2, p. 366 - 372.

Pontos Construtíveis: São pontos construtíveis com régua e compasso aqueles pontos do plano cartesiano obtidos pela interseção de retas e circunferências.

Proposição 3.1 *Um ponto $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é construtível se e somente se as sua coordenadas $a, b \in \mathbb{R}$ são números construtíveis.*

Demonstração: ($\Rightarrow$): Seja $A = (a, b)$ um ponto construtível, seja O a origem do plano cartesiano e M o ponto médio do segmento construtível OA.

Segue imediatamente da geometria elementar que o ponto $A_0 = (a, 0)$ é a interseção da reta do eixo $\overrightarrow{OX}$ e da circunferência C de centro M passando por A como na figura (9). De fato, $\hat{A}_0$ é ângulo inscrito correspondente ao arco OA. Assim sendo, o triângulo OA_0A é retângulo em A_0 o que faz de OA_0 a projeção do ponto A sobre o eixo OX.

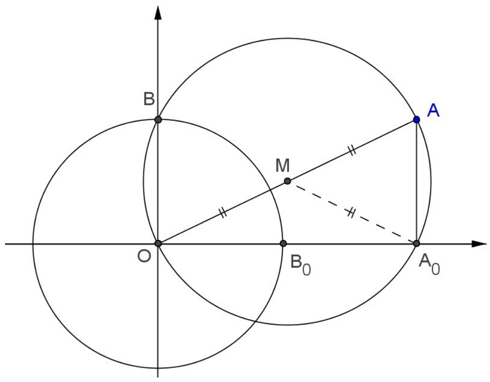

Figura 9: Localização no plano

Determinado $A_0 = (a, 0)$ pertencente a reta $\overrightarrow{OX}$, podemos encontrar um ponto $B_0 = (b, 0)$ traçando a partir de O uma circunferência de raio $\overline{A_0A}$

($\Leftarrow$): Reciprocamente suponhamos a e b construtíveis. É fácil ver que a reta determinada por O e por $(1, 0)$ é construtível. Assim sabemos construir $(a, 0)$ e $(b, 0)$. A partir de uma circunferência de centro em O passando por $(b, 0)$ podemos construir também $(0, b)$. Enfim, traçando paralelas (ou perpendiculares) segue imediatamente a construção de (a, b) a partir de $(a, 0)$ e $(0, b)$, e isto prova a proposição.

$\blacksquare$

Como já sabemos que os números racionais são construtíveis, segue da proposição acima que são construtíveis todos os pontos do plano com ambas as coordenadas racionais.

No âmbito da geometria analítica, podemos computar as coordenadas de novos pontos a partir dos coeficientes das equações de retas e circunferências. A interseção entre duas retas corresponde à solução de um sistema de duas equações do 1º grau em x e y. Já a interseção entre uma reta e uma circunferência corresponde a solução de um sistema formado por uma equação de 1º grau (reta) e por outra de 2º grau (circunferência). Por fim, a interseção entre duas circunferências corresponde à solução de um sistema de duas equações de 2ª grau.

Vamos investigar se existe um formato padrão para todos esses pontos de interseção. Ou seja, se existe um critério que possa determinar quais pontos são construtíveis.

Para tanto, considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de coordenadas construtíveis, a equação da reta que une esses dois pontos é dada por:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0$$

que em sua forma geral pode ser escrita como,

$$ax + by + c = 0$$

em que $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ e $c = y_1x_2 - x_1y_2$ são números construtíveis uma vez que são obtidos a partir de números construtíveis através de operações de soma, subtração e multiplicação.

Os pontos de interseção entre duas retas serão dados pela solução de um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, a interseção será o ponto:

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

Sendo a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 construtíveis, as coordenadas do ponto acima existem para $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ e também são construtíveis.

Concluímos que a interseção de duas retas produz pontos construtíveis, obtido através de operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números construtíveis.

Consideraremos agora a caso de interseção de uma reta com uma circunferência. Suponhamos que é dado o ponto construtível (x_0, y_0) e um número construtível r, sendo $r > 0$. A equação da circunferência é dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

isto é,

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

de forma geral,

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Onde $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$ e $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ são claramente números construtíveis, uma vez que são expressos a partir de números construtíveis por meio de operações de adição, subtração e multiplicação.

Assim sendo, a interseção entre uma reta e uma circunferência é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

A solução do sistema acima se restringe a um ou dois pontos, dependendo se a reta é secante ou tangente à circunferência. Para resolver o sistema podemos isolar y na segunda equação:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

e mediante substituição na primeira equação, temos para a abscissa x uma equação quadrática da forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

em que $A = a^2 + b^2$, $B = 2ac + \alpha b^2 - \beta ba$ e $C = c^2 - \beta bc + \gamma$, cuja solução é dada pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Para obter a ordenada y podemos proceder de forma análoga.

Ambas as coordenadas desse(s) ponto(s) são construtíveis, pois são da forma: $p + q\sqrt{s}$, onde p, q e s são construtíveis, $s > 0$. Concluímos assim que os pontos construtíveis, obtidos a partir da interseção de uma reta e uma circunferência, são obtidas por meio das operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas.

De forma semelhante, a interseção entre duas circunferências é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Que pode ser trocado por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \end{cases}$$

Onde o segundo sistema é equivalente ao primeiro, obtido através do processo de linha equivalência.

Esse sistema recai na solução do sistema (1) para $a = \alpha_1 - \alpha_2$, $b = \beta_1 - \beta_2$ e $c = \gamma_1 - \gamma_2$ e, portanto, a interseção corresponde a um ou dois pontos de coordenadas construtíveis da forma $p + q\sqrt{s}$, onde p, q e s são construtíveis, $s > 0$.

Concluimos, a partir da discussão acima, o seguinte:

Teorema 3.1 *Se a é construtível, então é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a* 2 *com coeficientes construtíveis.*

Aplicaremos este resultado na solução de problemas clássicos da geometria, e apresentaremos na próxima seção.

4 Aplicações do critério de construtibilidade

Dada a relevância histórica desses famosos problemas gregos, esperamos que sirvam de estímulo aos alunos aumentando o interesse na aprendizagem. Frequentemente os alunos questionam a utilidade de se estudar determinados conteúdos e, segundo Nobre (1996), a partir do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos: “Ao invés de se ensinar a praticidade dos conteúdos escolares, investe-se na fundamentação deles. Em vez de se ensinar o para quê, se ensina o porquê das coisas”(p. 31).

4.1 Duplicação do cubo

Uma das lendas acerca da origem desse problema é mitológica e afirma que por volta de 427 a.C. o oráculo anunciou aos habitantes de Delos, que para se livrarem da peste eles deveriam dobrar o altar cúbico de Apolo. Assim sendo, os arquitetos dobraram as dimensões do altar, com o que conseguiram multiplicar por oito o seu volume, e não duplicá-lo, como pedira o oráculo.

Vários matemáticos propuseram soluções para o problema. Entre eles podemos citar Hipócrates, Platão, Erástotenes, Nicomedes, Arquitas, Menécmo, Diocles, Hierão, Viète, Descartes, Fermat, Newton, Clairaut, entre outros.

Dado um cubo de aresta a construtível, o problema consiste em encontrar um outro cubo de aresta x construtível cujo volume seja o dobro. Ou seja:

$$x^3 = 2a^3$$
$$x = \sqrt[3]{2}a$$

Uma vez que a é construtível, devemos descobrir se $\sqrt[3]{2}$ é também um número construtível. Ora, tendo determinado o critério de construtibilidade expresso no teorema (3.1), basta verificar se $\sqrt[3]{2}$ é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a 2 com coeficientes construtíveis. Note que $\sqrt[3]{2}$ é raíz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$, que é irredutível sobre os irracionais. Desta forma, temos que o número $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído, e consequentemente, não é possível fazer a duplicação do cubo com régua e compasso.

4.2 Quadratura do círculo

Possivelmente o problema de construir um quadrado cuja área seja igual ao de um círculo dado foi um dos que exerceu um fascínio maior ou mais duradouro em toda história. Expresso por meio de um enunciado muito simples, a resolução utilizando apenas régua e compasso se revelou como grande desafio a várias gerações de matemáticos e permaneceu sem solução por cerca de 2.000 anos.

Em 1800 a.C, os egípcios haviam feito uma aproximação para a solução, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado. Mas o registro da primeira tentativa de se quadrar o círculo com exatidão remonta Anaxágoras, no século V a.C. As tentativas de demonstrar uma solução ou a sua impossibilidade serviram como motivação à criação de novas teorias, principalmente aquelas referentes à gênese do número π.

O problema consiste em construir com régua e compasso um quadrado cuja área seja igual à de um dado círculo de raio a construtível. Se denotarmos por x o lado de tal quadrado, teremos então que:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \pi a^2 \\
x &= a\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Observe que $\sqrt{\pi}$ é raiz do polinômio do 2º grau $x^2 - \pi = 0$. Porém, para que o teorema 3.1 se aplique, tal polinômio precisa possuir os coeficientes construtíveis. Resta saber então se π é construtível.

O matemático Lindemann[5] (1882 apud REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, Mª. L. B., 2000) provou que o famoso número π não é construtível e portanto o círculo não é quadrável.

4.3 Trissecção do ângulo

Trisseccionar um ângulo construtível consiste em dividi-lo, utilizando régua e compasso, em três ângulos de mesma medida. Equivalentemente, dado o ângulo de medida 3θ construtível, queremos construir três ângulos de medida θ.

Observe que não basta argumentar que a divisão de números construtíveis é um número construtível, pois tal número representaria um segmento e não um ângulo como o problema requer.

Identificando o ângulo dado em ciclo trigonométrico, podemos afirmar, de acordo com o teorema 3.1, que seu cosseno também é construtível, e vice e versa. Assim, dado $cos3\theta$ construtível, vamos investigar se $cos\theta$ é construtível.

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
cos3\theta =& cos(\theta + 2\theta) \\
=& cos\theta cos2\theta - sen\theta sen2\theta \\
=& cos\theta(cos^2\theta - sen^2\theta) - sen\theta(2sen\theta cos\theta) \\
=& cos\theta[cos^2\theta - (1 - cos^2\theta)] - 2sen^2\theta cos\theta \\
=& cos\theta(2cos^2\theta - 1) - 2(1 - cos^2\theta)cos\theta \\
=& 2cos^3\theta - cos\theta - 2cos\theta + 2cos^3\theta \\
=& 4cos^3\theta - 3cos\theta
\end{aligned}
$$

Tomando $x = 2cos\theta$, temos:

$$cos3\theta = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

Podemos observar que para alguns valores de $cos3\theta$ o polinômio acima é redutível a um polinômio de 2º grau. De fato, para $cos3\theta = -1$, ou seja, $3\theta = 180^o$ temos:

[5] LINDEMANN, F. *Ueber die Zahl* π. In: XX Mathematische Annalen. Freiburg: Springuer, 1882. p. 226 - 230.

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} + 1 = 0$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

Concluímos que nesse caso é possível trisseccionar o ângulo 180º utilizando régua e compasso. Os valores obtidos são raízes de um polinômio de 2° grau de coeficientes construtíveis, portanto são construtíveis. A saber, $x = 1$ ou $x = -2$, o que determina $\theta = 60^o = \frac{180^o}{3}$ ou $\theta = 180^o$ são ângulos construtíveis.

Já o ângulo de 60º não pode ser trisseccionado, tomando $3\theta = 60^o$ temos $cos3\theta = \frac{1}{2}$, o que corresponde ao polinômio:

$$\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Tal polinômio não é redutível a um polinômio de 2º grau, logo o ângulo 20º não é construtível e daí segue que o ângulo 60º não pode ser trisseccionado.

5 Proposta de oficina

Sugerimos que o tema desse trabalho seja aplicado nas aulas de matemática do 2º ano do ensino médio, uma vez que, de acordo com o que define a proposta curricular CBC (MINAS GERAIS, 2005), é previsto que tais alunos já tenham estudado em anos anteriores os conteúdos de semelhança de triângulos, Teorema de Tales e construções geométricas com régua e compasso. Além disso, estarão desenvolvendo o estudo de sistemas lineares e geometria analítica o que torna ainda mais propícia essa proposta.

No entanto, vale ressaltar que, tendo em vista as diversidades de cada localidade, cabe ao professor observar as características do público alvo para avaliar o momento ideal para a aplicação da oficina bem como as adaptações necessárias.

Tendo em vista que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e os PCN's apontam para a importância do ensino da Matemática integrada as novas tecnologias, propormos a utilização da ferramenta didática *Geogebra* cujo manual oficial de utilização, *Ajuda GeoGebra*[6], encontra-se disponível na internet.

[6]HOHENWARTER, M; HOHENWARTER, J., 2009.

> Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, p. 88).

No *Geogebra* pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura, daí serem denominados programa de geometria dinâmica. A partir desse recurso é possível alterar os valores das medidas a e b dos segmentos e conjecturar a respeito da construção das medidas $\sqrt{a}$, $a.b$, a/b, entre outros.

5.1 Roteiro de Oficina

Título: Construa!

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tempo estimado: Quatro aulas de 50min (3h20min).

Definições iniciais:

1. Segmentos construtíveis são aqueles que podem ser construídos, a partir de um segmento unitário dado, utilizando apenas régua não graduada e compasso.
2. Número construtível é a medida de um segmento construtível por régua e compasso.
3. Pontos construtíveis são aqueles que resultam da interseção de duas retas feitas com régua, duas circunferências feitas com compasso, ou uma reta e uma circunferência.

Objetivos da investigação:

1. Determinar se todos os números inteiros são construtíveis ou não.
2. Determinar se todos os números racionais são construtíveis ou não.
3. Determinar se todos os números irracionais são construtíveis ou não.
4. Definir qual o critério que determina se um número é ou não construtível.
5. Aplicação do critério aos problemas clássicos gregos.

1ª parte - Referêncial histórico

Aula expositiva dialogada contendo introdução histórica do tema de construções gregas por régua e compasso, definições iniciais e enunciados dos três problemas clássicos gregos.

2ª parte - Questões para resolução com auxílio do *Geogebra*:

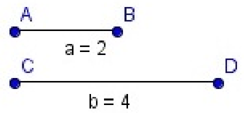

Figura 10: Segmentos a e b

1) a) Construa os segmentos a e b de medidas quaisquer, e a partir deles construa também os segmentos $a+b$, e $a-b$, utilizando apenas as ferramentas ponto, reta e compasso no *Geogebra*.

b) Clicando com o botão direito do mouse sobre cada um dos segmento, selecione: "propriedades", "exibir rótulo", "valor". Movimente o ponto B do segmento a construido no *Geogebra* no item anterior e observe o que acontece com a medida de $a+b$. Seriam todos os números naturais construtíveis?

2) a) Desenhe uma reta e sobre ela defina a origem, ou seja, o ponto O associado ao número zero. A partir do segmento a dado, construa apenas com reta e compasso o ponto associado ao número $-a$.

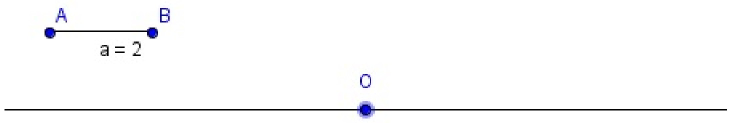

Figura 11: Segmentos a

b) Movimente o ponto B do segmento a e observe o que acontece com o valor de $-a$. Seriam todos os números inteiros construtíveis?

3) a) Construa duas retas r e s concorrentes em um ponto O. Marque os pontos A e B sobre r a direita de O. Trace por A e por B duas retas paralelas entre si e transversais às retas r e s. Marque os pontos de interseção das paralelas com a reta s e chame-os C e D. Calcule as razões $\frac{OA}{AB}$ e $\frac{OC}{CD}$. O que podemos observar? Arraste o ponto A sobre a reta r e veja o que acontece com essas razões.

b) O enunciado do Teorema de Tales diz que "*Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmento proporcionais.*". A partir desse teorema e do que observou no item anterior, dado um segmento qualquer de medida a, construa com régua e compasso, um segmento de medida $\frac{1}{a}$.

c) A construção do item anterior nos permite afirmar que são construtíveis todos os números do conjunto dos ...?

4) a) Construa um triângulo retângulo qualquer utilizando apenas régua e compasso no *Geogebra*. Chame de a a hipotenusa e de b e c os catetos. Verifique o Teorema de Pitágoras que afirma que "*O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.* ".

b) Construa com régua e compasso, segmentos de medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

c) Construa com régua e compasso a figura (12) e calcule o valor de x.

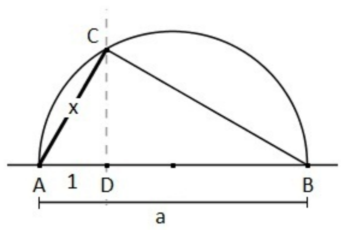

Figura 12: Raiz quadrada

d) A partir do item anterior é possível afirmar que todos os irracionais são construtíveis com régua e compasso?

3ª parte: Questões para resolução em sala de aula:

5) a) Todos os pontos construtíveis são interseções entre retas e círculos. Quais são as equações gerais de retas e círculos?

b) Calcule os pontos construtíveis pela reta que passa por $(1, 3)$ e $(3, 7)$ e pela circunferência de centro na origem e raio 3.

c) Existe um teorema que afirma que "Se a é construtível, então é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a 2 com coeficientes construtíveis.". Justifique esse fato a partir do número construtível obtido no item anterior.

d) O teorema citado no item anterior é chamado critério de construtibilidade. Prove esse critério utilizando as equações gerais do item a).

e) O número $\sqrt[3]{2}$ é ou não é construtível?

f) Dado um cubo de aresta a construtível, é possível construir com régua e compasso outro cubo de aresta x cujo volume seja o dobro?

g) Com o auxílio do professor, aplique o critério de construtibilidade aos problemas gregos de quadratura do círculo e trissecção de ângulos.

6 Considerações finais

A partir do estudo realizado vimos, através da execução de construções básicas, que todo número que é obtido a partir de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas de números construtíveis é construtível. Já a partir do estudo da interseção de retas e circunferências vimos a recíproca desse fato. Ou seja, todo número construtível é obtido a partir da soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas.

Por fim mostramos que todo número construtível é raiz de um polinômio com coeficientes construtíveis e de grau menor ou igual a 2.

Sugerimos que o tema seja trabalhado com turmas do 2º ano do Ensino Médio, sendo observadas as orientações curriculares de cada localidade e as adaptações necessárias tendo em vista o público alvo.

Vale ressaltar que o presente trabalho constitui ponto de partida para novas pesquisas que venham a ampliá-lo e/ou discutir sua aplicabilidade em sala de aula.

Referências

BARBOSA, J. P. C.; NETO, F. R. A. *Pierre Laurent Wantzel:* O último capítulo de dois dos três problemas clássicos In: ANAIS DO IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2011, São Paulo. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011. 9 p.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio* Brasília: 2006. vol. 2. 135 p.

BRASIL. Ministério da Educação, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF, 1998.

CARVALHO, J. P. *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.* Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. 183 p.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *Construções Geométricas:* A álgebra dos corpos numéricos. In: O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. p. 141 - 200.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Higino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004. 844p.

GARBI. G. G. *A Rainha das Ciências:* Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 3ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 462 p.

GARBI. G. G. *O Romance das Equações Algébricas.* 1ª ed. São Paulo: Makron Books, 1997. 255 p.

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 107 p.

HOHENWARTER, M; HOHENWARTER, J. *Ajuda GeoGebra:* Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução: António Ribeiro. 2009, 97 p. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> Acesso em: 02 jan. 2013.

MENDES, I. A.. *O uso da História no ensino de Matemática:* reflexões teóricas e experiências. Belém: Eduepa, 2001. (Série Educação 1)

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. *Conteúdo Básico Comum:* Matemática. Minas Gerais, 2005.

NOBRE, S. *Alguns "porquês"na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática.* In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, 1996, p.29-35.

RAIGORODSKII, A. M. *The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary.* The mathematical intelligencer, 2004. vol. 26, n. 3, p. 4-12. apud CARVALHO, J. P. *Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega.*Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. p.81.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, Mª. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2000. 149 p.

STILLWELL, J. *Elements of Algebra. Geometry, Numbers, Equations.* New York: Springer-Verlag, 1994. 181 p.

WAGNER, E. *Construções Geométricas.* 2ª ed. Rio de Janeiro. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. 109 p.