UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Logaritmos: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o seu ensino

Fluvio Alves Leitão

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LOGARITMOS: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o seu ensino

FLUVIO ALVES LEITÃO

Sob a Orientação da Professora

Dra. Aline Mauricio Barbosa

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Agosto de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FLUVIO ALVES LEITÃO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/08/2014

____

Aline Mauricio Barbosa. Dra. UFRRJ
(Orientadora)

____

Douglas Monsôres de Melo Santos. Dr. UFRRJ

____

José Roberto Linhares de Mattos. Dr. UFF

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu essa grande oportunidade e força nessa trajetória;

À professora Drª Aline Mauricio Barbosa, por ter me orientado e me conduzido com muita paciência durante esse processo;

Aos professores e tutores do PROFMAT, pela dedicação e paciência;

À minha esposa, que sempre me deu força para prosseguir nessa jornada e por ter tido paciência pela minha ausência nesse período;

Ao meu filho, que tanto sentiu a minha falta nos momentos de lazer e brincadeiras;

Aos amigos do mestrado, pelas manhãs de estudo e trocas de conhecimentos;

À CAPES, pela bolsa de mestrado, que me permitiu dedicar mais tempo aos estudos.

RESUMO

LEITÃO, Fluvio Alves. **Logaritmos: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o seu ensino.** 2014. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2014.

Esse trabalho foi realizado com a finalidade de reorientar o professor de matemática na ampliação de sua abordagem didática no ensino de logaritmos em sala de aula. O objetivo desse trabalho é investigar a interdisciplinaridade do conteúdo logaritmo, para que sirva de motivação para o aprendizado em uma turma de ensino médio. A pesquisa bibliográfica realizada para a produção deste trabalho apontou a possibilidade da apresentação de logaritmos de forma contextualizada e interdisciplinar. Utilizando alguns fatos da História da Matemática, o professor pode dar ao aluno mais sentido a este conteúdo e suas aplicações. A esse respeito, destacamos algumas aplicações práticas de logaritmos em estudo de fenômenos naturais como terremotos, além do uso de logaritmos para o cálculo de pH e aplicações na acústica. São citadas algumas sugestões de atividades, nas quais algumas foram aplicadas em duas turmas de ensino médio (NEJA), ensino de jovens e adultos, da Zona Oeste do Município do Rio de Janeiro. Primeiro, aplicamos um questionário inicial antes das atividades, avaliando o conhecimento prévio dos alunos sobre os fatos da história da matemática e a relação da matemática com outras ciências. Ao término da aplicação das atividades, aplicamos um questionário final, avaliando se as atividades motivaram ou não os alunos na busca do conhecimento. Ao final, relatamos a experiência e as opiniões dos alunos.

Palavras-chave: História da Matemática. Contextualização. Interdisciplinaridade. Logaritmos.

ABSTRACT

LEITÃO, Fluvio Alves. **Logarithms: its history, interdisciplinarity, contextualization and teaching suggestions for your education.** 2014. 78 pages. Dissertation. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2014.

This work was done in order to reorient the math teacher in expanding its didactic approach to teaching logarithms in the classroom. The aim of this study is to investigate the interdisciplinary content of the logarithm, to serve as a motivation for learning in a high school class. Literature search was undertaken to produce this work indicates the possibility of the presentation of logarithms of contextualized and interdisciplinary way. Using some facts from the history of mathematics teacher can give the student more sense to this content and applications. In this regard, we point out some practical applications of logarithms in the study of natural phenomena such as earthquakes, and the use of logarithms for the calculation of pH and applications in acoustics. Some suggestions of activities, in which some were applied to two groups of high school (NEJA), teaching young people and adults, the West Zone of the City of Rio de Janeiro are cited. First, we apply an initial questionnaire before the activities by assessing the students' prior knowledge about the facts of the history of mathematics and the relationship of mathematics and other sciences. At the end of the implementation of activities, we apply a final questionnaire assessing whether or not the activities motivated students in pursuit of knowledge. At the end we report the experience and opinions of students.

Keywords: History of Mathematics. Contextualization. Interdisciplinarity. Logarithms.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Mesmo com o passar do tempo e o surgimento de diversas tecnologias, a Matemática continua sendo um grande desafio e até mesmo um mistério para uma parte das pessoas. Devido a essa dificuldade, essa disciplina acaba gerando vários bloqueios no processo ensino-aprendizagem e os professores precisam encontrar ferramentas para facilitar essa aprendizagem e torná-la mais agradável e acessível aos alunos.

Tanto no segundo segmento do ensino fundamental quanto no ensino médio, o ensino da matemática tem sido um grande desafio para os professores. Na maioria das vezes, os alunos não conseguem dar sentido aos conteúdos da matemática que eles estão aprendendo, causando nessa hora certa frustração e desânimo. É nesse momento que o professor precisa intervir sendo o mediador dessa situação.

No entanto, por muitas vezes nós professores somos questionados para que servem determinados conteúdos. Um deles é o logaritmo, conteúdo no qual os alunos têm receio e muitas dificuldades. Será que nós professores estamos preparados para responder esse tipo de questionamento? Será que aproveitamos os recursos de contextualização e interdisciplinaridade dos logaritmos? Todos esses questionamentos nos levaram a pesquisar a história dos logaritmos e o desenvolvimento de seus conceitos e algumas propriedades. Precisamos pesquisar métodos que motivem e facilitem a aprendizagem dos alunos, quebrando assim as barreiras das dificuldades e do medo dos alunos antes mesmo de serem apresentados os conteúdos.

Este trabalho oferece uma nova orientação para uma tentativa de tornar a aprendizagem da matemática no ensino básico, em específico dos logaritmos, mais interessante e motivadora.

Para deixarmos o aprendizado mais prazeroso, devemos deixar nossos alunos curiosos e motivados a aprender. Para isso, acreditamos que devemos dar sentido ao que os alunos estão estudando. A História da Matemática, a contextualização e a interdisciplinaridade, se bem utilizadas, são ótimas ferramentas para atingirmos nossos objetivos. Por isso, esse trabalho visa à utilização da História da Matemática na construção dos conceitos de logaritmos, oferecer sugestões de atividades envolvendo logaritmos em fenômenos naturais, fazendo sua conexão com outras disciplinas.

Dessa maneira, poderemos nortear o assunto, para aqueles professores que desconhecem e também para aqueles que conhecem, mas, no entanto não têm um material sobre o assunto com sugestões de uma abordagem diferente sobre logaritmos. Assim poderemos fazer com que os alunos consigam enxergar uma aplicação daquilo que estão estudando. Aqui ficarão exemplificadas algumas aplicações de logaritmos em outras disciplinas, tentando despertar o interesse do aluno e fazendo com que se aprofundem nas aplicações de logaritmos e sua utilidade em algumas profissões.

O objetivo geral desse trabalho é investigar a interdisciplinaridade do conteúdo logaritmo, para que sirva de motivação para o aprendizado em uma turma de ensino médio.

Os objetivos específicos do trabalho são: investigar o surgimento dos logaritmos e o desenvolvimento de seus conceitos a partir da história da matemática, estudar as propriedades dos logaritmos e suas aplicações a outras ciências, pesquisar e apresentar atividades contextualizadas que envolvam logaritmos, e ao final, fazer um estudo de caso numa turma do ensino médio, envolvendo uma abordagem do tema logaritmos segundo os enfoques conceitual-histórico e interdisciplinar.

Esse trabalho está divido em 4 capítulos, conforme segue: O capítulo 1 é baseado em alguns fatos da História da Matemática. Através dela, faz-se um breve comentário sobre as vidas de John Napier, Henry Briggs e Jobst Burgi. Ao longo deste capítulo são citados alguns fatos da vida de Napier e por que e como ele construiu os seus logaritmos, fazendo referência à associação entre as sequências aritméticas e geométricas para a construção do conceito. Logo depois se faz referência ao encontro de Napier com Briggs e as mudanças no logaritmo proposta por ele. Após essas mudanças é mostrada, superficialmente, a ideia de Briggs na construção das tábuas de logaritmos na base 10 e logo após a conclusão de suas propriedades. Na vida de Burgi, comparamos seus logaritmos com os de Napier, explicando por que seu nome não é tão citado no meio matemático no ensino médio.

O capítulo 2 é baseado nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na utilização da contextualização e interdisciplinaridade no ensino de logaritmos. Dentro dos Parâmetros Curriculares Nacionais, em várias partes são citados que devemos utilizar a História da Matemática, não só como pretexto, mas sim, como elemento motivador para que ela desperte o lado curioso e investigativo dos alunos. Em conjunto com a História da

Matemática, está a contextualização e a interdisciplinaridade, que são ferramentas importantíssimas para fazer com que os alunos compreendam melhor a matemática, dando mais sentido a aquilo que está sendo aprendido.

No capítulo 3 é descrito qual metodologia utilizada no ensino de logaritmos junto com as sugestões de atividades utilizadas para o seu ensino. Comentamos nesse capítulo informações sobre o público alvo, descrevendo em quantas turmas foram aplicadas essa pesquisa e como foi feita a sondagem sobre os conhecimentos dos alunos acerca do assunto. Neste momento, explicamos de que maneira o questionário inicial foi aplicado, quais atividades foram aplicadas nessas turmas e para o fechamento, houve a aplicação de um questionário final.

No capítulo 4, apresentamos os resultados dos questionários aplicados antes e depois das atividades desenvolvidas nas turmas através de gráficos, fazendo alguns comentários sobre as respostas dos alunos. Neste capítulo, também relatamos as experiências na aplicação das atividades, citando os procedimentos e o tempo gasto em cada uma delas. Logo em seguida fazemos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1 – UM POUCO DA HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

1.1 Descoberta de Napier[1]

Assim como hoje, a matemática no passado tinha grandes aplicações na astronomia, na navegação, no comércio, na engenharia e na guerra, fazendo com que as demandas para que seus desenvolvimentos se tornassem cada vez mais rápidas e precisas, crescendo sempre e continuamente. Segundo Eves (2008), quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. Neste trabalho, iremos tratar e estudar um pouco dos logaritmos, inventados por John Napier perto do início do século XVII.

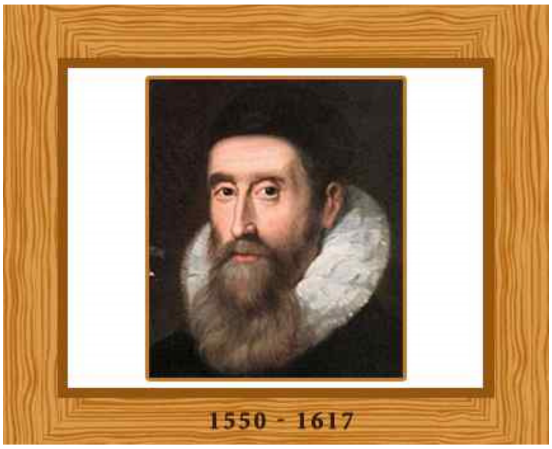


Figura 1 – Retirada de www.famousscientis.org

De acordo com Eves (2008) e Maor (2008), John Napier (1550-1617) nasceu quando seu pai tinha apenas dezesseis anos de idade e viveu a maior parte de sua vida na propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo na Escócia, e gastou parte de suas energias em controvérsias políticas e religiosas de seu tempo. Ele era anticatólico e, em 1593, publicou um libelo amargo e amplamente lido contra a igreja de Roma intitulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John,* no qual se propunha a provar que o papa era o anticristo. O livro atingiu vinte e uma edições, pelo menos dez ainda em vida do autor, e Napier acreditava piamente que sua reputação com a posteridade repousaria sobre esse livro. Porém os interesses de Napier não eram somente voltados à religião. Como dono de terras, interessado na melhoria de

[1] Também conhecido como Neper

colheitas e do gado, ele experimentou vários estercos e sais fertilizantes para o solo. Maor (2008) diz que, em 1579, Napier um parafuso hidráulico para controlar o nível da água nas minas de carvão. Também demonstrou um agudo interesse pelas questões militares, sem dúvida sendo afetado pelo temor geral de que o rei Felipe II da Espanha estivesse se preparando par invadir a Inglaterra. Napier fez planos para construir enormes espelhos, capazes de incendiar os navios inimigos, uma reminiscência dos planos de Arquimedes para a defesa de Siracusa, dezoito séculos antes de sua época.

De acordo com Eves (2008) e Maor (2008), profeticamente, Napier também escreveu sobre várias máquinas de guerra infernais, acompanhando seus projetos e diagramas. Ele previu que no futuro iria se desenvolver uma peça de artilharia que poderia eliminar um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura e que se construiriam máquinas para navegar debaixo d´água, que se criaria um carro de guerra com uma boca que se acenderia para espalhar a destruição por todas as partes. Podemos perceber que todas essas ideias se concretizaram na primeira guerra mundial, respectivamente, com as invenções da metralhadora, do submarino e do tanque de guerra. Toda essa imaginação de Napier levou a alguns acreditarem que ele fosse mentalmente desequilibrado e outros a considerá-lo um explorador de magia negra.

Alguns fatos curiosos também rondavam a vida de Napier. Ele parece ter sido um tipo brigão, envolvendo-se em disputas com seus vizinhos e inquilinos. De acordo com uma história descrita por Eves (2008) e Maor (2008), Napier teria ficado irritado com os pombos de um vizinho, que desciam em sua propriedade para comer seus grãos. Advertido por Napier de que, se não detivesse os pombos, eles seriam capturados, o vizinho ignorou a ameaça. No dia seguinte encontrou seus pombos caídos, semimortos, no jardim de Napier. Ele simplesmente empapara os grãos com uma forte solução alcoólica, de modo que os pássaros de embriagaram e quase não podiam se mover. De acordo com outra história descrita em Maor (2008), Napier suspeitava de que um de seus empregados o estava roubando. Ele anunciou que seu galo preto identificaria o transgressor. Os servos foram colocados em uma sala escura, onde cada um deveria passar a mão no dorso do galo. Sem que os servos soubessem, Napier tinha coberto a ave com uma camada de foligem. Ao saírem da sala, cada empregado deveria mostrar as mãos: ocupado, temendo tocar o galo, estava com as mãos limpas e revelou a sua culpa.

O século XVI e o início do século XVII ocorreram um grande desenvolvimento científico em todos os campos. A geografia, a física e a astronomia mudaram rapidamente a percepção do homem em relação ao universo, de acordo com Maor (2008). Depois de lutar por quase um século contra as resoluções da Igreja, o sistema Heliocêntrico de Copérnico teve aceitação. A circunavegação do globo, em 1521, anunciou uma nova era da exploração marítima, onde qualquer canto do mundo poderia ser visitado. Em 1569, foi publicado o novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galileu Galilei estabelecia fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do sistema geocêntrico dos gregos. Esses desenvolvimentos ofereceram uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo gigantescos cálculos. A época então pedia uma invenção que livrasse os cientistas desses cálculos. Foi nesse momento que Napier aceitou esse desafio.

Segundo Maor (2008), não sabemos como Napier teve a ideia que resultaria em sua invenção. Porém, ele era bem familiarizado com a fórmula:

$$senA\,.\,senB = \frac{1}{2}\,[cos(A-B) - cos(A+B)]$$

Esta fórmula, bem como outras semelhantes, $cosA\,.\,cosB$ e $senA\,.\,cosB$, eram conhecidas como **regras prostafaréticas**, da palavra grega que significa “adição e subtração”. Sua utilização consiste no fato de que o produto de duas expressões trigonométricas, tais como $senA\,.\,senB$ pode ser transformada em soma ou diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso $cos(A-B)$ e $cos(A+B)$. Como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para outra, mais simples. E provavelmente, foi essa ideia que colocou Napier no caminho certo.

Podemos observar isso considerando a seguinte fórmula:

$$cosA\,.\,cosB = \frac{1}{2}\,[cos(A+B) + cos(A-B)]$$

Daí:

$$2\,.\,cosA\,.\,cosB = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad \text{(I)}$$

Suponhamos, por exemplo, que queremos multiplicar 969,6 por 69,47. Através de uma tábua trigonométrica podemos encontrar os ângulos A e B. Deslocamdo a vírgula de maneira adequada, observamos o seguinte:

Considere que:

$Cos\ A = \frac{0{,}9696}{2} = 0{,}4848$, logo A = 61º

Seja $Cos\ B = 0{,}6947$ então B = 46º

Assim obtemos:

$$cos(A+B) + cos(A-B) = \cos 107^o + \cos 15^o$$

Uma vez que:

$$\cos 107^o = -\cos 73^o = -0{,}2924,$$

Então, segue da fórmula (I) que:

$$2\ .\ \frac{0{,}9696}{2}\ .\ 0{,}6947 = \cos 107^o + \cos 15^o$$

$$0{,}9696\ .\ 0{,}6947 = -\cos 73^o + \cos 15^o$$

Daí, utilizando a tábua trigonométrica e ajustando-se as casas decimais obtemos os seguintes resultados:

$$0{,}9696\ .\ 0{,}6947 = -0{,}2924 + 0{,}9659$$

$$0{,}9696 \ . \ 0{,}6947 = 0{,}6735$$

Efetuando-se a multiplicação indicada no primeiro membro observamos que obtemos o resultado 0,67358112. Como no inicio queríamos multiplicar 969,6 por 69,47, ajustando as casas decimais obtemos 67350 que é um valor aproximado devido as casas decimais consideradas na tábua trigonométrica.

Eram tão amplas as dificuldades na multiplicação de números grandes que se buscaram métodos mecânicos para levar a cabo o processo. Nesse sentido a invenção de Napier conhecida como *Barras de Napier* ou *Ossos de Napier,* descrita em seu trabalho, *Rabdologiae* publicado em 1617, conseguiu alcançar muita fama.

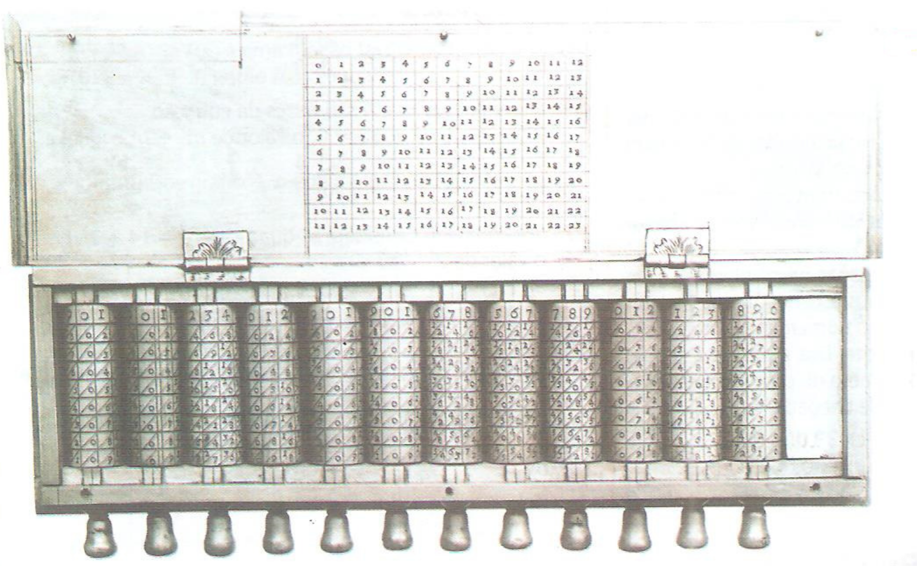


Figura 2 - imagem extraída do livro Matemática, Biachini e Paccola (2004, p.142)

O processo não difere da rede ou grade árabe, o método posto em prática com a ajuda de tiras de metal, ossos, madeira ou cartão e chamam a atenção. Esse dispositivo é considerado um dos precursores das máquinas de calcular.

Outra ideia mais direta, segundo Maor (2008), envolvia os termos de uma progressão geométrica, uma sequência de números com proporção fixa entre os termos sucessivos. Note que a sequencia 1, 2, 4, 8, 16, ... é uma progressão geométrica de razão 2. Se chamarmos a razão de q, começando a sequência pelo 1 teremos a progressão geométrica 1, q, q^2, q^3 e assim por diante (observe que o termo n é q^{n-1}). É válido citar que muito antes da época de Napier já fora notado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes ou índices, da razão comum. No livro *Arithmetica Íntegra* publicado em 1544 pelo matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), ele formulou a seguinte relação:

Se multiplicarmos quaisquer dos termos da progressão 1, q, q^2, ... o resultado será o mesmo que se somarmos os expoentes correspondentes. Por exemplo:

$$q^2 \cdot q^3 = (q \cdot q) \cdot (q \cdot q \cdot q) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5,$$

Esse resultado poderia ter sido obtido simplesmente somando os expoentes 2 e 3. Da mesma maneira, dividir um termo de uma expressão geométrica por outro equivale, a subtrair seus expoentes. Veja:

$$q^5 / q^3 = (q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q) / (q \cdot q \cdot q) = q \cdot q = q^2$$

E daí tiramos as regras:

$q^m \cdot q^n = q^{m+n}$

$q^m / q^n = q^{m-n}$

Na divisão, porém, se tivermos o expoente do denominador maior que o expoente do numerador, como em q^3 / q^5, pela regra obteríamos q^{-2}, uma expressão que ainda não definimos. Para evitar esse problema para expressões do tipo q^{-n} utilizamos $\frac{1}{q^n}$, de modo que $q^3 / q^5 = q^{3-5} = \frac{1}{q^2}$. Esse tipo de generalização não era muito difundido nessa época[2]. Observe que, de maneira consistente, com a regra $q^m / q^n = q^{m-n}$ quando m = n, nós precisamos definir $q^0 = 1$. Com essas definições podemos estender uma progressão geométrica infinitamente em ambas as direções:

$$\ldots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q, q^2, q^3, \ldots$$

[2] Expoentes negativos e fracionários têm sido sugeridos por alguns matemáticos desde o século XIV, mas o seu uso generalizado é devido ao matemático inglês John Walles (1616-1703) e ainda mais a Newton, que sugeriu a notação a^{-n} e $a^{m/n}$ em 1676.

Verificamos que cada termo é uma potência de razão comum q, e que os expoentes..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... formam uma progressão aritmética. Esta relação é a ideia chave por trás dos logaritmos, mas onde Stifel tinha em mente apenas expoentes inteiros, a ideia de Napier era estendê-los para uma faixa contínua de valores.

Sua ideia era a seguinte: se pudéssemos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Elevar um número a enésima potência, isto é, multiplica-lo por si mesmo n vezes, seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, ou seja, multiplica-lo por n. Encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a dividir o seu expoente por n.

Observe a tabela 1 que mostra as potências sucessivas de 2.

Tabela 1

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

De acordo com a tabela 1, podemos obter o resultado da multiplicação sem multiplicar 128 por 32. Procuramos nessa tabela, os expoentes correspondentes a 32 e 128 e observamos que são respectivamente, 5 e 7. Fazendo a soma desses expoentes, obtemos 12. Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente é 12, logo o número é 4096. Se quisermos agora dividir 4096 por 128, nós procuramos na tabela 1 os expoentes correspondentes a 4096 e 128 encontrando respectivamente, 12 e 7. Subtraindo esses expoentes, obtemos 5. Revertendo o processo e procurando o número cujo expoente é 5, encontramos como resposta 32. Esse esquema tão elaborado não se faz necessário com números inteiros, ele tem mais utilidade prática com expoentes fracionários, que não eram tão conhecidos na época de Napier. Logo para preencher os grandes espaços entre os números da tabela 1, Napier escolheu como base um número suficientemente pequeno de modo que suas potências cresçam de uma maneira razoavelmente lenta. Observe que se essa base for muito pequena suas potências crescerão muito devagar, o que tornaria o sistema de pouco uso prático. Um número muito próximo de um seria razoável, porém que número deveria ser esse? De acordo com Eves (2008), depois de anos lutando contra esse problema, Napier decidiuse por 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$. O motivo foi pela preocupação de Napier em minimizar o uso de frações decimais. As frações já eram usadas por milhares de anos antes da época de Napier, mas elas eram escritas quase sempre como frações comuns, isto é, proporções entre números inteiros. As frações decimais, ou seja, a extensão de nosso sistema de numeração decimal para número menores que 1, tinham sido introduzidas na Europa recentemente pelo cientista flamengo Simon Stevin (ou Stevinius, 1548-1620) e o público ainda não estava familiarizado com elas. Para minimizar seu uso Napier fez o que fazemos hoje em dividir um real em cem centavos ou um quilômetro em mil metros. Ele dividiu a unidade num grande número de subunidades, considerando cada uma como uma nova unidade. E como seu principal objetivo era reduzir o enorme trabalho nos cálculos trigonométricos, ele seguiu a prática tão usada na trigonometria de dividir o raio de um círculo unitário em 10 000 000 ou 10^7 partes. Assim ao subtrair de uma parte inteira sua 10^7 parte, obtemos um número mais próximo de 1 nesse sistema, ou seja, $1 - 10^{-7}$ ou 0,9999999. Napier dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria, explicando sua teoria em termos geométricos. De acordo com EVES (2008), ele concebeu seus logaritmos da seguinte maneira:

> Considere um segmento de reta AB e uma semireta DE, de origem D conforme a figura 3. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB, isto é, pondo DF = X e CB = Y.

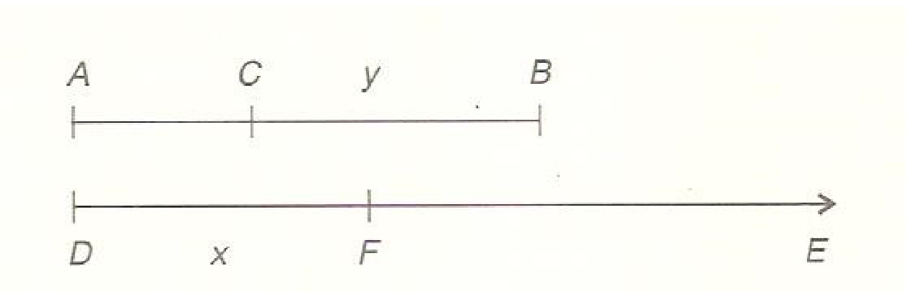


Figura 3 – Imagem retirada do livro, Introdução à História da Matemática, Eves (2008,p.344)

Com base nessa experiência adotada por Napier foi possível provar que $x = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$. Napier considera AB = 10^7 pois as melhores tábuas trigonométricas do seno estendiam-se até 7 casas decimais.

Sabendo que AB = 10^7, temos que AC = 10^7 – y. Como C parte de A, ao longo da linha com a mesma velocidade inicial, só alcançará velocidade numericamente constante quando:

$$\text{velocidade de C} = \text{CB} = \frac{-dy}{dt} = y$$

que é dado pela derivada da equação AC de y em relação ao tempo (t), isto é:

$$-\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow -dy = dt\,.\,y \Rightarrow -\frac{dy}{y} = dt \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt$$

Integrando-se ambos os membros:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dt \Rightarrow \ln y = -t + c$$

Pelo cálculo da constante de integração, fazendo t = 0, obtém-se:

$$\ln y = -0 + c \Rightarrow \ln y = c$$

Por outro lado, quando a velocidade C alcança AC ao longo da linha, ou seja, quando a velocidade de C = AC, sua velocidade não é constante. Napier considerou essa velocidade desprezível, então, a velocidade de:

$$C = AC = 0$$

Portanto temos:

$$AC = 10^7 - y = 0 \Rightarrow y = 10^7$$

Logo:

$$\ln y = c \Rightarrow c = \ln 10^7$$

Pelo que se viu anteriormente:

$$\ln y = -t + c \Rightarrow \ln y = -t + \ln 10^7 \Rightarrow t = \ln 10^7 - \ln y$$

Ao longo da outra semirreta DE, F define-se a partir de D com velocidade nitidamente uniforme, ou seja, temos que a velocidade de DF = $\frac{dx}{dt}$ = x (que foi obtido extraindo a derivada de x em relação a t). Então a velocidade inicial que parte de F é a mesma que C, ou seja,

$$DF = CB \Rightarrow x = y = 10^7$$

Então, tem-se $\frac{dx}{dt} = 10^7 \Rightarrow dx = 10^7 dt$. Integrando ambos os membros obtêm:

$$\int dx = \int 10^7 dt \Rightarrow x = 10^7 . t$$

Substituindo o valor de t em $t = \ln 10^7 - \ln y$ obtemos:

$$\frac{x}{10^7} = \ln 10^7 - \ln y$$

$$x = 10^7 . (\ln 10^7 - \ln y)$$

$$x = 10^7 . \ln \frac{10^7}{y}$$

$$x = 10^7 . \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{10^7}\right)$$

Então partindo da ideia do que Napier chegou, observa-se que:

$$10^7 . \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{10^7}\right) = x \Rightarrow \log_{\frac{1}{e}} \left[\left(\frac{y}{10^7}\right)\right]^{10^7} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^x = \left(\frac{y}{10^7}\right)^{10^7} \Rightarrow$$

$$e^x = \left(\frac{10^7}{y}\right)^{10^7} \Rightarrow \ln e^x = \ln\left(\frac{10^7}{y}\right)^{10^7} \Rightarrow x = 10^7 ln\frac{10^7}{y} \Rightarrow$$

$$x = 10^7 . \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$$

Nota-se que sobre uma sucessão de períodos de tempos iguais, y descreve uma progressão geométrica enquanto x cresce em progressão aritmética. Observamos que com o uso do cálculo chegamos a esse resultado. É valido lembrar que Napier na sua época não contava com esse tipo de conhecimento.

Segundo Mendes e Soares (2008) essa ideia fez Napier prosperar na busca de uma resolução para os cálculos logaritmos, pois a sua invenção envolvia esses procedimentos.

Então sendo N um número e L o seu respectivo logaritmo, Napier assim o definia:

$$N = 10^7 . \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L \text{ ou seja:}$$

$$N = 10^7 . \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}$$

Olhando para dentro do colchete e observando a grandeza do seu expoente, percebe-se que quanto mais se aumenta o valor na potência de 10, mais próximo N está de certo valor, o número **e** de Euller. Esse valor fixo designado por Napier caracteriza uma sequência que só é representada sob essa abordagem no século XVIII com o surgimento da álgebra.

Napier publicou sua invenção em 1614, num tratado em latim chamado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos Logaritmos). Um trabalho posterior *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), foi publicado após sua morte por seu filho Robert em 1619.

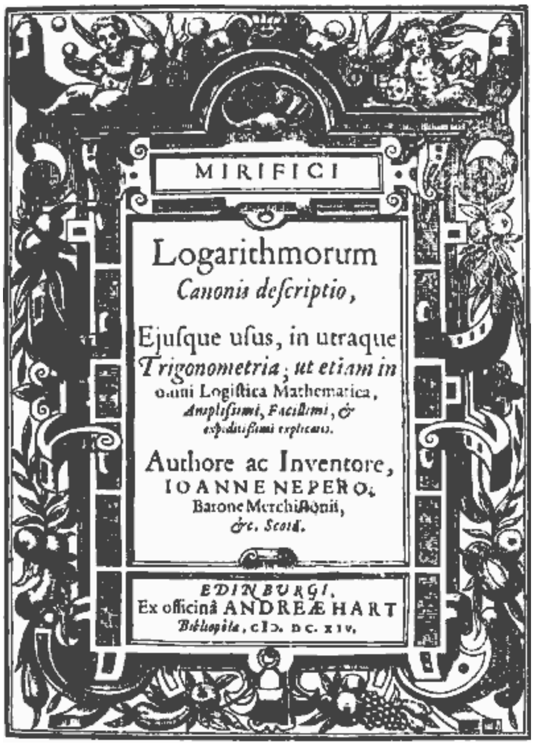


Figura 4 - Capa do trabalho de Napier publicado em 1614, Knott (1915)

Figura 5 - Capa do trabalho de Napier publicado em 1619, Knott (1915)

1.2 Analisando o Conceito de Logaritmo Segundo Napier

Um dos modos mais utilizados para se compreender o significado lógico de logaritmos são as progressões geométricas e as progressões aritméticas. A relação entre as duas facilita a compreensão desse conceito. Observe a tabela 2.

Tabela 2

2	4	8	16	32	64	128	256	512	P.G.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.A.

De acordo com a tabela 2, na progressão aritmética 2 + 3 = 5. Enquanto que seus correspondentes na progressão geométrica são respectivamente 4 e 8, então 4 . 8 = 32. Reescrevendo essa ideia na base 2, como na tabela 3, temos:

Tabela 3

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	P.G.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.A.

De acordo com o conceito de logaritmo proposto por Napier os elementos postos sobre a progressão geométrica saem com velocidade variada, enquanto que os elementos postos na progressão aritmética saem com velocidade constante. Ou seja, os termos da progressão aritmética são os logaritmos dos respectivos termos da progressão geométrica. Observe que o valor 2 é uma constante elevada aos valores 1, 2, 3, 4, ..., 9. Essa constante denomina-se base do logaritmo. Os resultados de cada potenciação 2, 4, 8, 16, ..., 512 denominam-se de logaritmando. E os logaritmos são os respectivos valores de cada expoente, que elevados à base encontram o logaritmando. Sendo assim, os logaritmos são os respectivos valores que acompanham os termos de uma progressão aritmética. Por exemplo:

$$\log_2 64 = 6 \quad \text{logo} \quad 2^6 = 64$$

De forma geral, na tabela 4, tem-se:

Tabela 4

a	a^2	a^3	a^4	...	a^m	P.G.
1	2	3	4	...	m	P.A.

Diz-se que $a^m = b$ então $\log_a b = m$

Podemos dizer que m é o logaritmo de b na base a, onde $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, para quaisquer a, b e m reais.

Concluímos que a progressão aritmética e a progressão geométrica são um dos meios mais importantes para explicar e justificar o conceito de logaritmo.

1.3 O Encontro de Napier com Henry Briggs

Henry Briggs (1561-1631) era professor de geometria do Colégio Gresham em Londres, quando a notícia das tabelas de Napier chegou ao seu conhecimento.

Figura 6 – Henry Briggs – www.famousscientists.org

Segundo Maor (2008), Briggs ficou tão impressionado que resolveu ir até a Escócia para conhecer Napier. Naquele encontro Briggs propôs duas modificações que tornariam as tabelas de Napier mais convenientes: Fazer o logaritmo de 1 igual a zero, no lugar de 10^7, e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10. Depois de considerarem várias possibilidades, eles finalmente decidiram que $\log 10 = 1 = 10^0$.

Isso significa dizer que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então L é o Briggsiano ou logaritmo "comum" de N, escrito como $\log_{10} N$, ou simplesmente log N. Assim nasceu o conceito de base.

Napier aceitou suas sugestões, porém com a idade já avançada não tinha mais energia para computar as novas tabelas. Briggs fez esse trabalho, publicando esses resultados em 1624 sob o título *Arithmetica Logarithmica*. Suas tábuas davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, com uma precisão de quatorze casas decimal.

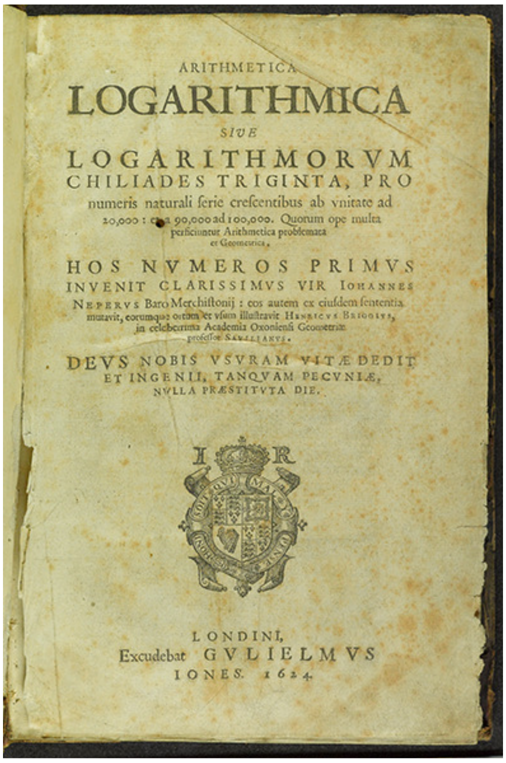


Figura 7 – Capa da publicação do
livro Arithmetica Logarithmica – Figura retirada de www.maa.org

O espaço entre 20000 e 90000 foi mais tarde preenchido por Adriaan Vlacq (1600-1667), um editor holandês, e seus acréscimos foram incluídos na segunda edição da *Arithmetica logarithmica* (1628). Com pequenas revisões esse trabalho se manteve como a base para todas as tabelas de logaritmos subsequentes, até o nosso século.

Através das mudanças propostas por Briggs onde log 1 = 0 e log 10 = 1, sendo matematicamente provado pela relação anterior, porque $\log 1 = 0 \Rightarrow 10^0=1$ e $\log 10 = 1 \Rightarrow 10^1=10$. Seguindo esse raciocínio, Briggs definiu seus logaritmos como é conhecido nos dias de hoje como logaritmos de base 10. Para montar essas tábuas ele usou a média geométrica entre os números. Observe como ele fez para encontrar, por exemplo, o logaritmo de 2 na base 10:

Sabendo-se que $10^0=1$ e $10^1=10$, devemos achar n tal que $10^n=2$. De imediato temos:

$$10^0 < 10^n < 10^1$$

Isto significa que o valor do expoente n, que é o logaritmo de 2 na base 10, está entre 0 e 1. Partindo da ideia de Napier que foi adquirida através da relação entre progressão aritmética e progressão geométrica, obtém-se a tabela 5:

Tabela 5

1	2	10	Progressão Aritmética
10^0	10^n	10^1	Progressão Geométrica

Como $10^0 < 10^n < 10^1$ então $0 < \log 2 < 1$. Briggs começou a trabalhar com a média geométrica entre os extremos da tabela 5 da seguinte maneira:

$$\sqrt{1\ .\ 10} = \sqrt{10} \cong 3{,}1623$$

$$como\ \sqrt{10} = 10^{0,5} \cong 3{,}1623$$

$$então\ \log 3{,}1623 \cong 0{,}5$$

Em notação atual:

$$\log\sqrt{1\,.\,10} = \log\sqrt{10} \cong \log 3{,}1623 = \cong log(\,1\,.\,10\,)^{\frac{1}{2}}, \qquad então$$

$$\log 3{,}1623 = \frac{1}{2}\,(\log 1 + \log 10)\ então\ log 3{,}1623 = 0{,}5$$

Observe que $1 < 2 < 3{,}1623$, daí $10^0 < n < 10^{0,5}$ logo $0 < \log 2 < 0{,}5$.

Obtém-se assim a tabela 6:

Tabela 6

1	2	3,1623	10
10^0	10^n	$10^{0,5}$	10^1

Fazendo novamente a média geométrica entre os extremos temos:

$$\sqrt{1\,.\,3{,}1623} = \sqrt{3{,}1623} \cong 1{,}7783.$$

É válido ressaltar que Briggs trabalhava com dez casas decimais.

Observe:

$$\sqrt{1\,.\,3{,}1623} = \sqrt{10^{0}.\,10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}5}} = 10^{\frac{0{,}5}{2}} = 10^{0{,}25}$$

Então podemos concluir que:

$$\log 1{,}7783 \cong 0{,}25$$

Em notação atual seria da seguinte forma:

$$\log\sqrt{1\,.\,3{,}1623} = \log 1{,}7783 = \log\sqrt{\sqrt{10}} = \log\sqrt[4]{10} = \log 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log 10 = 0{,}25.$$

Temos então que:

$$10^{0{,}25} < 10^{n} < 10^{0{,}5} \quad \text{logo } 0{,}25 < \log 2 < 0{,}5$$

Obtém-se assim a tabela7:

Tabela 7

1	1,7783	2	3,1623	10
10^{0}	$10^{0{,}25}$	10^{n}	$10^{0{,}5}$	10^{1}

Extraindo novamente a média geométrica entre os extremos, da tabela 7, temos:

$$\sqrt{1{,}7783\,.\,3{,}1623} \cong \sqrt{5{,}6235} \cong 2{,}3714 \text{ ou ainda:}$$

$$\sqrt{1{,}7783\,.\,3{,}1623} \cong \sqrt{10^{0{,}25}\,.\,10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}75}} = 10^{\frac{0{,}75}{2}} = 10^{0{,}375}.$$

Assim podemos afirmar que:

$$\log 2{,}3714 \cong 0{,}375 \text{ e que } 0{,}25 < \log 2 < 0{,}375$$

Obtém-se assim a tabela 8.

Tabela 8

1	1,7783	2	2,3714	3,1623	10
10^0	$10^{0,25}$	10^n	$10^{0,375}$	$10^{0,5}$	10^1

Novamente fazendo a média geométrica nos extremos, da tabela 8, obtemos:

$$\sqrt{1{,}7783\ .\ 2{,}3714} \cong \sqrt{4{,}2171} \cong 2{,}0535$$

Ou ainda:

$$\sqrt{1{,}7783\ .\ 2{,}3714} \cong \sqrt{10^{0,25}.\ 10^{0,375}} = \sqrt{10^{0,625}} = 10^{\frac{0,625}{2}} = 10^{0,3125}$$

Assim $\log 2{,}0535 \cong 0{,}3125$ e também:

$$0{,}25 < \log 2 < 0{,}3125$$

Obtém-se assim a tabela 9 :

Tabela 9

1	1,7783	2	2,0535	2,3714	3,1623	10
10^0	$10^{0,25}$	10^n	$10^{0,3125}$	$10^{0,375}$	$10^{0,5}$	10^1

Fazendo a média geométrica entre os extremos, na tabela 9, obtemos:

$$\sqrt{1{,}7783\ .\ 2{,}0535} \cong \sqrt{3{,}6517} \cong 1{,}911$$

Ou ainda:

$$\sqrt{1{,}7783\ .\ 2{,}0535} \cong \sqrt{10^{0{,}25}\ .\ 10^{0{,}3125}} = \sqrt{10^{0{,}5625}} = 10^{\frac{0{,}5625}{2}} = 10^{0{,}28125}$$

Assim log 1,911 ≅ 0,28125. Observamos que quanto mais o valor se aproxima de 0,3 mais próximo de 2, tanto pela esquerda e pela direita, ele se aproxima. Assim por aproximação chegou a se estabelecer que:

$$10^{0{,}301029995} \cong 2 \text{ ou } \log 2 = 0{,}301029995$$

Briggs conseguiu fazer uma tábua dos logaritmos compreendidos entre 1 e 1000, baseado no método anteriormente apresentado. Deste modo os logaritmos de Briggs passaram a ser reconhecidos tanto quanto os de Napier. Nesse contexto, os livros didáticos se apoiam na proposta de Briggs e desvendam os seus logaritmos em forma de exercícios teóricos, mas não exploram esse lado construtivo. A proposta neste momento é oferecer ao professor uma maneira de mostrar ao aluno como se deu historicamente a construção dos logaritmos, deixando de lado as teorias já prontas e utilizando a criatividade e o raciocínio.

Um outro método para se construir os logaritmos Briggsianos é assim:

* Sabendo que $2^{10} = 1024$, achar n tal que $10^n = 2$.

De imediato $10^0 < n < 10^1$. Isso significa que o logaritmo de 2 na base 10, está entre 0 e 1. Daí, utilizando-se uma aproximação com erro de 2,4% pode-se escrever:

$$2^{10} = 1024 \text{ como } 2^{10} \cong 1000 \text{ ou ainda } 2^{10} \cong 10^3.$$

Dividindo-se os expoentes por 10, obtemos:

$$2^{\frac{10}{10}} \cong 10^{\frac{3}{10}} \text{ logo } 2 \cong 10^{0{,}3}.$$

Então o valor de n é 0,3, que é aproximadamente o log 2.

Observe o próximo exemplo feito pelo mesmo raciocínio do anterior.

* Sabendo que $3^9 = 19683$, achar n tal que $10^n = 3$

De imediato $10^0 < n < 10^1$. Isso significa que o logaritmo de 3 na base 10, está entre 0 e 1. Daí, utilizando-se uma aproximação com erro de 3,4% pode-se escrever:

$3^9 \cong 20000$

$3^9 \cong 2 \,.\, 10000$

$3^9 \cong 2 \,.\, 10^4$

Dividindo-se todos os expoentes por 9, temos:

$3^{\frac{9}{9}} \cong 2^{\frac{1}{9}} . 10^{\frac{4}{9}}$

$3^1 \cong 2^{0,111} . 10^{0,444}$

Sabendo-se que $2 = 10^{0,3}$, temos:

$3 \cong (10^{0,3})^{0,111} \,.\, 10^{0,444}$

$3 \cong 10^{0,033} \,.\, 10^{0,444}$

Usando a propriedade de multiplicação de mesma base, temos:

$3 \cong 10^{0,477}$

Então o valor encontrado para n é 0,477. Daí tem-se que log 3 $\cong$ 0,477, ou ainda, em duas casas decimais log 3 $\cong$ 0,48.

Essa proposta usada por Briggs foi fundamental para encontrar as relações objetivas dos logaritmos. Essas relações objetivas são reconhecidas como *propriedades dos logaritmos.* A demonstração dessas propriedades é difícil de ser compreendida devido ao uso algébrico e simbólico abordado nos livros didáticos.

Para facilitar a compreensão dessas propriedades utilizaremos como referência o estudo utilizado por Briggs sobre logaritmos de base 10. Observe os exemplos a seguir.

* Encontre log 4, ou seja, n tal que $10^n = 4$.

Sabemos que log 2 = 0,3010. Devemos encontrar n tal que $10^n = 4$. Logo:

$10^n = 2 . 2$, mas $2 = 10^{0,3010}$ então:

$10^n = 10^{0,3010} . \ 10^{0,3010}$ logo

n = 0,3010 + 0,3010, mas sabemos que log 2 = 0,3010, então:

n = log 2 + log 2

n = 2 . log 2

n = 2. 0,3010

n = 0,6020

Portanto observamos que:

log 4 = log (2 . 2) = log 2 + log 2, ou ainda:

log 4 = log 2^2 = 2 . log 2.

Concluímos que log 4 = 0, 6020.

* Determine agora o log 5, ou seja, n tal que $10^n = 5$.

Sabemos que log 10 = 1 e que log 2 = 0,3010.

$10^n = 5$ porém $5 = \frac{10}{2}$ logo:

$10^n = \frac{10}{2}$, sabendo que $2 = 10^{0,3010}$ temos que:

$10^n = \frac{10}{10^{0,3010}} \Rightarrow 10^n = 10^{1-0,3010}$ logo

n = 1 – 0,3010

logo n = log 10 – log 2 ou seja

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$

Portanto

log 5 = 0,6990

Então desses dois exemplos citados, log 4 e log 5, podemos concluir as três propriedades de logaritmos:

1ª) O produto transforma-se em soma

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

2ª) A divisão transforma-se em diferença

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3ª) A potenciação transforma-se em multiplicação

$$\log_a x^m = m\,.\ \log_a x$$

Onde: $a > 0$ e $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

Vale ressaltar que somente 1924 que começou o trabalho num novo conjunto de tabelas, com precisão de 20 casas decimais, feito na Inglaterra como parte das celebrações do tricentenário da invenção dos logaritmos. Esse trabalho foi terminado em 1949.

1.4 Os Logaritmos de Burgi

Segundo Eves (2008) e Maor (2008), outra pessoa que competiu como inventor dos logaritmos foi Jobst ou Joost Burgi (1552-1632), um fabricante de relógios, nascido em uma aldeia na Suíça.

Figura 8 – Jobst Burgi – Figura retirada de www.famousscientists.org

Era considerado um matemático amador e auto didático. Chamou a atenção dos grandes cientistas de sua época pela fabricação de relógios astronômicos, os trabalhosos cálculos apresentados na astronomia e pela publicação de suas tábuas de logaritmos em 1620. Seu trabalho não trouxe muita repercussão, pois nessa data de publicação, Napier já havia publicado os seus logaritmos em 1614.

Burgi era de família pobre, modesta e muito numerosa. Deixou sua terra natal para viver uma vida pobre e difícil. Essa decisão foi para se afastar do meio intelectual, pois se sentia inferior ao que seus dons lhe mostravam. Era muito habilidoso na construção de relógios e apaixonado por ciências astronômicas. Nunca chegou à Universidade e não publicou nenhum livro, exceto as tábuas de logaritmos. A falta de cultura literária e o seu domínio do latim foram fatores importantes para os empecilhos quanto às suas invenções e publicações, pois era a língua oficial da época. Sua habilidade matemática ajudou Kepler e seus companheiros a desvendarem alguns cálculos que envolviam os trabalhos dos astrônomos da época.

Burgi foi o primeiro homem a propor os logaritmos pela comparação das progressões aritmética e geométrica. Seus logaritmos ficaram conhecidos como logaritmos naturais. Não foi tão reconhecido quanto Napier, pois demorou muito a publicar seus trabalhos. As ideias propostas eram quase as mesmas, o que diferenciava eram as bases que foram tomadas por valores diferentes. Onde Napier tinha usado a proporção comum $1 - 10^{-7}$, que é ligeiramente menor que 1, Burgi usou $1 + 10^{-4}$, um número um pouco maior que 1. Daí que os logaritmos de Burgi aumentavam a medida que os números aumentavam, enquanto que os de Napier diminuíam. Assim como Napier, Burgi estava preocupado em evitar frações decimais, tornando sua definição dos logaritmos mais complicada do que era necessário. Se um número inteiro positivo N foi escrito na forma $N = 10^8 . (1 + 10^{-4})^L$, então Burgi chamava o número 10L (em vez de L), de "número vermelho" correspondente ao "número negro" N. Em sua tabela esses números eram realmente impressos em vermelho e preto, daí a nomenclatura. Ele colocava os números vermelhos – isto é, os logaritmos – na margem e os números pretos no corpo da página, construindo assim uma tabela de "antilogaritmos". Existem evidências de que Burgi chegou a essa invenção por volta de 1588, seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma ideia, mas, por algum motivo, ele só publicou em 1620, quando sua tabela foi impressa, anonimamente, em Praga. Ao atrasar essa publicação, Burgi perdeu seu direito a prioridade em uma descoberta histórica. Hoje seu nome está quase esquecido, exceto entre os historiadores da ciência.

CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO

O trabalho será baseado em trechos dos parâmetros curriculares nacionais (PCN) que indicam que os conteúdos devem ser conduzidos de maneira contextualizada, interdisciplinar e usando também tópicos da história da matemática.

Os PCN servem como um guia para nortear as escolas no melhor planejamento das disciplinas visando uma maior integração entre elas, fazendo com que os alunos se posicionem no mundo que vivem, estimulando seu raciocínio, tendo uma visão crítica, e uma participação mais ativa nas atividades propostas a eles propiciando assim, suas trocas de experiências. Além disso, através dos PCN, a escola e o corpo docente devem fazer com que os alunos compreendam que a matemática estimula o raciocínio, a elaboração de estratégias para a resolução de problemas, fazendo assim com que eles possam compreender melhor sua vida e o que acontece ao seu redor.

Nesta pesquisa, a História da Matemática é utilizada como alternativa, para mostrar como os conceitos de logaritmos foram construídos historicamente. Sobre isso, os parâmetros curriculares nacionais (PCN) faz referência à utilização do uso da História da Matemática no ensino da matemática.

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propícia compreensão mais ampla das trajetórias dos conceitos e métodos da ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa de apresentação dos fatos ou biografias de matemáticos famosos (BRASIL, 1998, p.23).

O papel da História da Matemática nesse trabalho é mostrar uma associação entre o conhecimento da matemática e suas aplicações, o que pode fazer com que o aluno perceba as conexões possíveis da matemática com outras ciências e outras áreas de conhecimento.

> Assim, a consciência desse caráter disciplinar ou transdisciplinar, numa visão sistêmica, sem cancelar o caráter necessariamente disciplinar do

> conhecimento científico, mas completando-o, estimula a percepção da interrelação entre os fenômenos, essencial para boa parte das tecnologias, para compreensão da problemática ambiental e para o desenvolvimento de uma visão articulada do ser humano em seu meio natural, como construtor e transformador deste meio (BRASIL, 2000,p.9).

Um dos focos desse trabalho é a utilização da História da Matemática para a construção dos conceitos de logaritmos, elaborando estratégias matemáticas com a finalidade de aplicar esses conceitos em outras situações, ciências ou áreas de conhecimento. De acordo com os PCN:

> As finalidades do ensino de matemática no ensino médio indicam como objetivo levar o aluno a:
>
> - Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.
> - Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas. (BRASIL, 2000, p.42)

Através da História da Matemática, temos a possibilidade de encontrar uma forma diferente de ver e entender a matemática, tendo a possibilidade de torná-la mais contextualizada e mais conectada a outras disciplinas. Segundo D`Ambrosio:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D`AMBRÓSIO, 1999, p.97)

Através da História da Matemática, podemos perceber que a matemática sempre esteve presente na evolução das civilizações e, por isso, ela teve papel fundamental no desenvolvimento humano. Portanto, os conceitos matemáticos estão ligados a fenômenos naturais e sociais, não devendo ser separados das outras disciplinas. De acordo com D`Ambrosio[3] (1999) apud Gapari e Pacheco (2014,p.4) : "Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a matemática das outras atividades humanas."(2014,p.4)

Pelo ponto de vista de D`Ambrosio, a História da Matemática no ensino deve ser usada como ferramenta de motivação. Através dela, deve-se estimular a curiosidade dos alunos.

Apesar do conteúdo de matemática ser muito extenso, e muitos professores serem obrigados a finalizar seus planejamentos, eles devem destinar algum tempo para enriquecer suas aulas com problemas históricos, reconstrução de conceitos, promovendo atividades diferenciadas. Para reforçar essa ideia, D`Ambrosio faz a seguinte consideração:

> Sei que muitos estão pensando que não vai sobrar tempo para darmos conteúdo de matemática se gastarmos tanto tempo falando sobre matemática. Pois eu digo que a solução é cortar conteúdos, retirando coisas desinteressantes, obsoletas e inúteis, tais como os cálculos aritméticos e algébricos e inúmeras técnicas de derivação e de integração. Tudo isso se faz trivialmente com uma calculadora de bolso – nem é necessário usar computador. (D`Ambrosio, 1996, p.16)

Este trabalho não foca somente a História da Matemática. Ela servirá para a construção de um conceito e, a partir daí, fazer a ligação dos logaritmos com outras ciências e áreas de aplicações. De acordo com os PCN:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como a sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL,2000, p.43).

[3] A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97.

Particularmente, no ensino médio, uma visão ambiciosa do aprendizado científico-tecnológico diferente daquela praticada hoje na maioria das escolas, pode ser efetivamente posta em prática no ensino da biologia, da física, da química e da matemática, e ainda das tecnologias correlatas a essas ciências. Porém, toda a escola e sua comunidade, não só o professor e o sistema escolar, precisam se envolver para produzir as novas condições de trabalho para promover essa transformação educacional desejada (BRASIL, 2000).

De acordo com o DIEB (Dicionário Interativo da Educação Brasileira): "a contextualização é a maneira de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação". Utilizamos contexto para inserirmos determinados conteúdos a algumas situações do cotidiano, assim o aluno poderá ter a possibilidade de compreender melhor alguns conceitos de maneira mais prática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais são guias que orientam as escolas e os professores nesse novo modelo de ensino. Temos de alguma maneira fazer com que os alunos participem mais de nossas aulas, nesse momento, segundo os PCN: "O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo." (BRASIL, 2000,p.78). A contextualização tem o aluno como protagonista no processo ensino-aprendizagem, deste modo, para que haja uma maior participação do aluno, devemos levar em conta o cotidiano e a realidade de cada região, as experiências vividas pelos alunos, suas afinidades com as áreas de atuação profissional, sua posição enquanto cidadão, ou seja, levar em conta o contexto do aluno. Para que o aluno tenha uma aprendizagem mais significativa e ampla, ele deve se questionar sobre seus próprios conhecimentos e sobre os novos conhecimentos que está adquirindo, assim ele se tornará um sujeito participativo nesse processo de ensino-aprendizagem. Conforme Nardi[4] (2004) apud Santos e Santos (2014, p.4) :

> [...] aspecto que merece destaque, no âmbito do processo ensino-aprendizagem, fazendo, portanto, diferença significativa na construção e reconstrução do conhecimento científico, relaciona-se à capacidade do aluno perceber e refletir sobre seu próprio processo de ensino-aprendizagem. O efeito que estas estratégias podem desempenhar, tanto para uma progressão da aprendizagem, quanto para a auto-regulação, tem sido cada vez mais reconhecida pelos educadores. Pesquisas nas áreas de

[4] NARDI, R. (Org.) Pesquisa e ensino de ciências: Contribuições para formação de professores. São Paulo: Escrituras, 2004.

> práticas educacionais e didáticas das ciências, claramente nos apontam a necessidade de repensarmos as formas de abordagem do conteúdo, proporcionado ao aluno a utilização de diversas estratégias de ensino, ampliando assim sua rede de significados. (NARDI, 2004, p.114)

O conhecimento carregado pelos alunos deve ser aproveitado no momento da aprendizagem, a fim de dar significado a aquilo que está sendo aprendido e assim, se criar um diálogo no processo ensino-aprendizagem. Daí será possível desenvolver conhecimentos mais gerais. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> Um dos pontos de partida para esse processo é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. A partir disso é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver conhecimentos de alcance mais universal. Muitas vezes, a vivência, tomada como ponto de partida, já se abre para questões gerais, por exemplo, quando através de meios de comunicações os alunos são sensibilizados para problemáticas ambientais globais ou questões econômicas continentais. Nesse caso, o que se denomina vivencial tem mais a ver com a familiaridade dos alunos com os fatos do que com esses fatos serem parte de sua vizinhança física e social. (BRASIL, 2000,parteIII,p.7)

Devemos considerar o que está ao redor do aluno, suas experiências e suas vivências. O papel da contextualização é, a partir do saber do aluno, desenvolver um saber formal a fim de ampliar seus conhecimentos. Nesse ponto, D`Ambrosio cita:“ Educação é um conjunto de estratégias desenvolvidas pela sociedade para: Possibilitar a cada indivíduo atingir seu potencial criativo; estimular e facilitar a ação comum com vistas a viver em sociedade e exercer cidadania.” (1999, p. 99)

Baseado nesses fatos é que o conhecimento ganhará um real significado para os alunos. A contextualização faz com que o aluno seja participativo no processo ensino-aprendizagem, fazendo as conexões entre os conhecimentos, sendo assim capaz de situá-lo numa condição de participação plena de construção e execução deste processo.

Então, existe a necessidade que o professor crie estratégias que levem os alunos a utilizarem seus conhecimentos em sala de aula, ou seja, fazendo com que os conteúdos aprendidos tenham relação com o seu cotidiano.

Sendo assim, dentro desse contexto abrangente de conhecimentos, a matemática pode se conectar a outras disciplinas nos quais o aluno pode ter uma maior afinidade. A interdisciplinaridade, que é a integração de dois ou mais componentes curriculares, é muito importante nesse momento, pois ajudam, junto com a contextualização, a dar sentido as coisas. Quando contextualizamos os conhecimentos matemáticos em conteúdos das outras disciplinas, estamos utilizando a matemática como ferramenta para a resolução de problemas que envolvam essas disciplinas. Neste momento começamos a falar de interdisciplinaridade, que de acordo com Fernandes (2014,p.9)" consiste em utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema ou compreender melhor um fenômeno através de outros pontos de vista."

Realmente observamos, enquanto professor, que uma pergunta ainda ronda todas as salas de aula das escolas brasileiras durante as aulas de matemática e, às vezes, o professor se sente inseguro em respondê-la. Em entrevista concedida a revista *Cálculo: Matemática para todos*, o professor Iran Abreu Mendes (UFRN) fez considerações muito importantes:

> - Professor, por que estamos estudando isso? Para que serve isso?
>
> Para Iran Abreu Mendes, quando o estudante levanta a mão e faz essa pergunta, ele *não está querendo saber das aplicações práticas*. Talvez ele pense que sim, que gostaria de conhecer as aplicações práticas, mas, na verdade ele se contentaria com respostas de outro quilate. (Revista Cálculo: Matemática para todos. Edição 33 – Outubro/2013- p.40)

Segundo Iran Abreu Mendes, o professor pode direcionar essa resposta de três maneiras diferentes, citadas na revista *Cálculo: Matemática para todos*:

> (1) "Você está estudando isso para aprender a raciocinar corretamente sobre assuntos difíceis, que resistem a julgamentos apressados ..."
>
> (2) "Você está estudando isso porque isso é útil na profissão X", e, logo depois de dizer tais palavras, o professor explica uma aplicação prática. Como esse método em geral funciona muito bem, os professores recorrem a ele sempre que podem, até porque os autores de livros didáticos recorrem a ele sempre que podem. "O risco disso", diz Iran, "é fazer o aluno pensar que tudo que estuda na escola deve ter uma aplicação

> prática e direta. Acontece que não estudamos na matemática só o que tem aplicação imediata e direta – ao contrário.”
>
> (3) Suponha o leitor que isso significa logaritmos. Daí o professor pede à classe que faça uma tabela com três colunas cujo título é *Calculadoras Rudimentares*, dá instruções e ajuda os alunos a ver como a multiplicação de dois termos da progressão geométrica tem algo a ver com a soma de dois termos da progressão aritmética. O que o professor fez aqui? Ele não contou a história de John Napier, mas usou a história para dar sentido ao que os alunos fazem na escola... . “A história”, diz Iran “é uma maneira importante de dar significado ao conteúdo da matemática.” (MENDES, 2013, p.40 e 41)

Portanto o papel da história da matemática nesse momento é se desfazer das decorebas de fórmulas e definições para se compreender melhor os conceitos dos conteúdos. Ainda segundo o professor Iran Abreu Mendes: “... não dou aula de história, mas estudo a história da matemática para ver o que ela me oferece em termos conceituais...” (2013, p.41)

Particularmente, dentro de logaritmos, devemos mostrar suas aplicações em outras áreas de conhecimento, dando assim mais sentido a esse conteúdo. Em relação a isso, de acordo com os PCN (Ensino Médio +): “Esse aprendizado, no entanto, perderia contexto se não se explicitasse a importância dos logaritmos, em questões tecnológicas e em outras ciências. [...]” (BRASIL, 2002, p.26).

Dentro dessas possibilidades de aplicações de logaritmos, é que devemos mostrar sua utilização em outras ciências. Dentre elas estão a física com a acústica, a geografia com os abalos sísmicos e a química com a medição do pH. Nessas três áreas citadas os PCN (Ensino médio +) descreve o seguinte:

> Por exemplo, o ouvido humano pode ouvir ruídos um trilhão de vezes menores que o mais intenso a que resiste, no limiar da dor. Para conseguir abranger esse imenso intervalo criou-se a partir da potência sonora a escala logarítmica de decibéis.[...]Também é logarítmica a escala Richter dos abalos sísmicos, [...]. Usa-se ainda uma escala logarítmica para definir o pH de substâncias, coeficiente que caracteriza a condição mais ácida ou básica de soluções.(BRASIL, 2002, p.26)

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

3.1 Público-Alvo, Métodos e Etapas da Pesquisa

A pesquisa realizada neste trabalho envolveu um levantamento bibliográfico sobre o referencial teórico, além da realização de um estudo de caso. Para este estudo, o público-alvo foi composto por duas turmas de Módulo II do Ensino de Jovens e Adultos (Nova EJA), de uma escola estadual noturna localizada na Zona Oeste do Rio de Janeiro. Essa escola atende, na sua maioria, a comunidade ao seu redor e, pelo fato de ser uma turma de jovens e adultos, a faixa etária dos alunos das turmas varia de 18 a 60 anos aproximadamente. A maioria tem o seu emprego, levando para a sala de aula suas vivências em suas áreas de atuação. Através da idade mais avançada de alguns, pudemos observar que determinados alunos ficaram por muito tempo afastado da escola. A pesquisa foi efetuada em três etapas e foi realizada no período de 5 a 29 de novembro de 2013. Durante esse período, foi aplicado um questionário inicial (veja Apêndice A), foram desenvolvidas algumas atividades dentre aquelas explanadas na seção 3.2 e, posteriormente, foi aplicado um questionário (veja Apêndice B).

Em um primeiro momento, utilizamos a história da matemática como tema disparador do conteúdo, comentando com os alunos a utilização da matemática na astronomia e navegação. Através dela, promovemos alguns debates e discussões, a fim de fazer uma sondagem sobre o conhecimento dos alunos a respeito da história da matemática, questionando-os sobre a utilidade da matemática no passado em outras áreas não citadas no início de nossa conversa, assim como as personalidades que contribuíram para o seu desenvolvimento e o legado deixado por eles. Além disso, os alunos também foram questionados de que maneira esses conteúdos da matemática têm aplicações nos dias de hoje e como ela está presente no nosso cotidiano.

Após toda essa sondagem e debate preliminar, foi aplicado o questionário inicial, com o objetivo de registrar todas as opiniões dos alunos referentes ao conhecimento da história da matemática, assim como o nome de alguma personalidade do passado que contribuiu com o desenvolvimento da matemática. Esse questionário visava também registrar o grau de conhecimento dos alunos com respeito à aplicação da matemática em algumas profissões e até mesmo em outras disciplinas. Após esse momento, foram aplicadas algumas atividades (veja a seção 3.2) com o objetivo de estimular a curiosidade, fazer com que o aluno compreendesse o conceito e as propriedades de logaritmos e mostrar a ligação do logaritmo a outras profissões. Após o desenvolvimento dessas atividades, foi aplicado um questionário final para analisar a satisfação do aluno em relação ao uso desses recursos e métodos no ensino de logaritmos, verificando inclusive se eles se sentiam mais estimulados em pesquisar sobre o assunto.

Após o encerramento dos questionários, todas as informações foram tabuladas. Com essas informações, através de gráficos, analisamos a satisfação e as opiniões dos alunos sobre seus conhecimentos a respeito da história da matemática e sobre as atividades.

3.2 Materiais e Atividades

Nesta seção tomando como base fatos históricos, contextualização e aspectos interdisciplinares, foram elaboradas algumas atividades para as aulas de logaritmos.

3.2.1 Atividade 1: Utilizando potências grandes

Essa atividade foi baseada na história da matemática, onde Napier pensou em escrever qualquer número positivo como uma potência de algum número dado e, a partir daí, associar multiplicação à soma e divisão à subtração.

Observe a tabela 10 abaixo:

Tabela 10

2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024
2^{11}	2048
2^{12}	4096
2^{13}	8192
2^{14}	16384
2^{15}	32768
2^{16}	65536
2^{17}	131072
2^{18}	262144

Observe que:

$4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, então se fizermos:

$4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 32 = 2^5$, observamos que o resultado do produto de duas potências de mesma base é igual a essa base elevada a soma dos expoentes das bases anteriores. Assim transformamos uma multiplicação numa operação mais simples que é a adição.

Seguindo esse critério, usando a tabela acima, determine o valor de:

a) 256 . 64 =

b) 128. 2048 =

c) 32 . 512 =

d) 131072 : 32768 =

e) 262144 : 16384 =

f) 32768 : 1024 =

3.2.2 Atividade 2: Usando tabelas de logaritmos decimais.

Essa atividade foi montada a partir de uma tábua de logaritmos. Podemos expô-la no quadro e os alunos copiarem-na. Através dela, o objetivo é fazer com que o aluno transforme multiplicação em soma e divisão em subtração utilizando logaritmos e assim encontrar o resultado. Assim como aconteceu historicamente na utilização de logaritmos, aqui os alunos poderão perceber sua utilidade na hora de encontrar os resultados sem precisar efetuar as multiplicações ou divisões.

I- Usando a tábua de logaritmos decimais abaixo, calcule:

Tabela 11

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS			
log 25	1,3979	log 875	2,9420
log 125	2,0969	log 21875	4,3399
log 175	2,2430	log 39375	4,5952
log 315	2,4983	log 275625	5,4403

a) 125 . 175 =

b) 315 . 875 =

c) 39375 : 315 =

d) 21875 : 875 =

e) 275625 . 125 : 39375 =

f) 21875 . 315 : 275625 =

g) 39375 . 21875 : 125 : 25 =

Na próxima atividade, os alunos terão que completar a tabela utilizando os logaritmos dados. Para isso, ele utilizará a propriedade de transformar multiplicação em soma através dos logaritmos. Uma atividade onde podemos simplesmente colocar a tabela no quadro e os alunos podem copiá-la no caderno. Aqui o aluno poderá perceber como a tabela de logaritmos decimais foi preenchida a partir de alguns valores já conhecidos.

II - Sabendo que:

log 2 = 0,3010

log 3 = 0,4771

log 7 = 0,8451

Complete a tabela abaixo:

Tabela 12

n	4	6	8	9	14	28	42
log n							

3.2.3 Atividade 3 : Medindo o pH da água

Essa atividade tem como objetivo mostrar aos alunos uma das aplicações de logaritmos. Neste momento, estamos utilizando a interdisciplinaridade, onde o logaritmo é utilizado no cálculo de pH de substâncias. As informações abaixo foram retiradas de um livro de química (CANTO; PERUZZO, 2010, p.291-295), digitado e entregue aos alunos para agilizar a aula. Essa atividade foi consultada diretamente ao livro de química e adaptada para executar a aplicação de logaritmos.

O equilíbrio de ionização da água se dá a 25ºC, salvo menção em contrário. Nessa temperatura, o produto de [H^+] e [OH^-] vale 1,0 . 10^{-14}.

$$\boxed{[\ H^+\ ]\ .\ [\ OH^-\ ] = 1{,}0\ .\ 10^{-14}\ (\text{ a } 25ºC)}$$

Para efetuar os cálculos de pH e pOH, são indispensáveis o conceito e as propriedades dos logaritmos decimais (logaritmos de base 10). A definição abaixo é muito importante:

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$$

De acordo com Canto e Peruzzo (2010), o químico dinamarquês Sorensen, durante sua pesquisa que visava melhorar os métodos de controle de qualidade em indústrias de fermentação, criou o conceito de pH. A ideia dele era expressar as acidez de um meio aquoso por meio da concentração de [H^+], em potências de 10.

- Potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução: $pH = -\log [\ H^+\ ]$
- Potencial hidroxiliônico (pOH) de uma solução: $pOH = -\log [\ OH^-\ ]$

Na expressão do produto iônico da água, aplicando log a ambos os membros:

$[\ H^+\ ]\ .\ [\ OH^-\ ] = 1{,}0\ .\ 10^{-14} \quad \Rightarrow \quad \log [\ H^+\ ] + \log [\ OH^-\ ] = -14$

Multiplicando tudo por (-1):

$-\log [\ H^+\ ] + (-\log [\ OH^-\ ]) = 14$, onde:

$pH = -\log [\ H^+\ ]$ e $pOH = -\log [\ OH^-\ ]$, logo:

$$\boxed{pH + pOH = 14}$$

Observando então que:

Meio neutro:

- $[\ H^+\ ] = 1{,}0\ .\ 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pH = 7
- $[\ OH^-\ ] = 1{,}0\ .\ 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pOH = 7

Meio ácido

- $[H^+] > 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pH < 7
- $[OH^-] < 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pOH > 7

Meio básico (ou alcalino)

- $[H^+] < 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pH > 7
- $[OH^-] > 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol/L $\Rightarrow$ pOH < 7

Como consequência da definição pH = - log $[H^+]$, decorre que a concentração hidrogeniônica (isto é, concentração de íons de hidrogênio, $[H^+]$ é igual a 10^{-pH} mol/L. Observe a tabela abaixo:

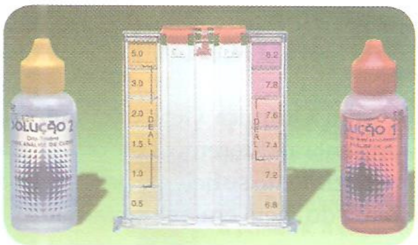
TABELA 6 Valor aproximado de pH para alguns materiais

HCℓ 1 mol/L	0	
Suco gástrico	1,0 - 3,0	
Suco de limão	2,2 - 2,4	
Vinagre	2,4 - 3,4	
Vinho	2,8 - 3,8	
Suco de laranja	3,0 - 4,0	Acidez crescente
Água com gás	3,9	
Tomate	4,0 - 4,4	
Cerveja	4,0 - 5,0	
Queijo	4,8 - 6,4	
Leite de vaca	6,3 - 6,6	
Saliva humana	6,5 - 7,5	
Água do mar	7,0 - 8,3	
Sangue humano	7,35 - 7,45	Basicidade crescente
Clara de ovo	7,6 - 8,0	
Leite de magnésia	10,5	
Limpador com amônia	11,9	
NaOH 1 mol/L	14	

Fontes: LIDE, D. R. (Ed.) *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 84. ed. Boca Raton: CRC Press, 2003. p. 7-16; EBBING, D. D.; GAMMON S. D. *General Chemistry*. 8. ed. Boston: Houghton Mifflin, 2005. p. 678.

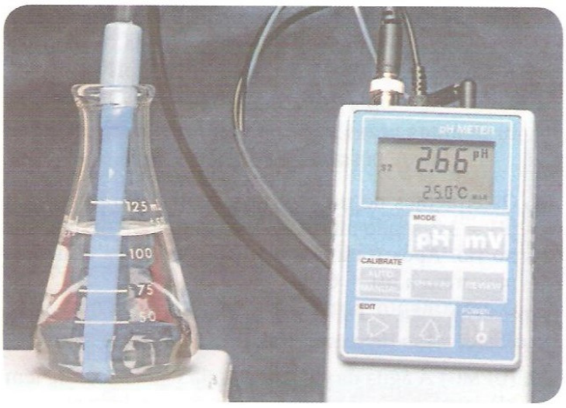
Figura 9 – (CANTO; PERUZZO, 2010, p.293)

Existem métodos para medição do pH:



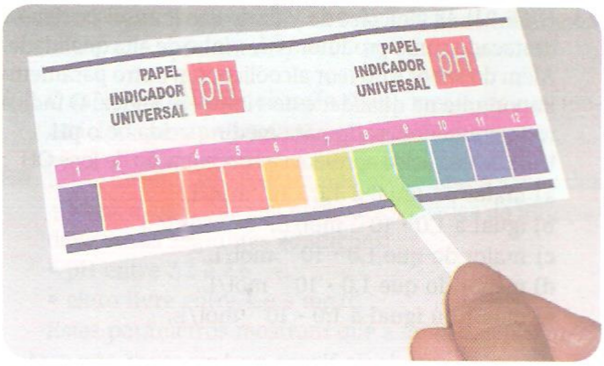
▲ *Kit* para a medida de pH de piscinas, usando o líquido vermelho e a escala à direita. O *kit* também permite medir a concentração de cloro na água, em partes por milhão (ppm), utilizando a solução e a escala à esquerda.

Figura 10 - (CANTO; PERUZZO, 2010,p.293)



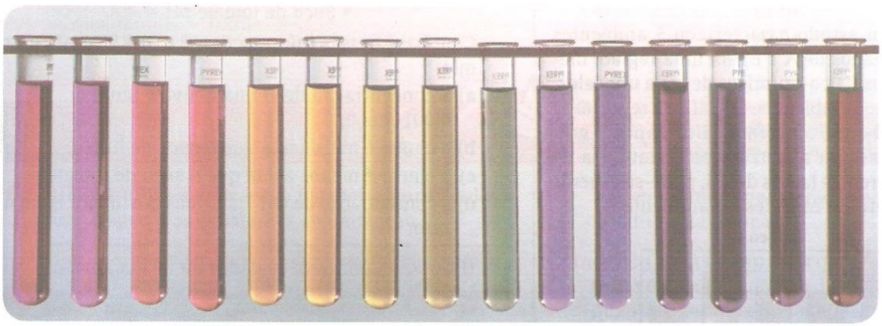
▲ Um **medidor eletrônico de pH** (**peagâmetro digital**) em uso para medir o pH de uma solução aquosa de ácido metanoico (HCOOH).

Figura 11- (CANTO; PERUZZO, 2010,p.295)



▲ Existem papéis indicadores que adquirem não apenas duas cores possíveis, mas sim várias delas, que, por comparação com uma escala colorida, permitem estimar o pH de um meio. São chamados de **indicadores universais** e são obtidos por meio da mistura apropriada de vários indicadores ácido-base.

Figura 12- (CANTO; PERUZZO, 2010,p.295)



Solução aquosa de indicador universal adicionada a quinze soluções aquosas. A primeira, à esquerda, tem pH = zero. A segunda, pH = 1, e assim por diante, até a décima quinta, que tem pH = 14.

Figura 13 - (CANTO; PERUZZO, 2010,p.295)

Nas atividades I e II a seguir, utilizamos um kit de medidor de cloro e acidez de água de piscinas. Esse kit pode ser encontrado em lojas de equipamento de limpeza de piscinas ou até mesmo em lojas de ferragem ou de materiais de construção. Além disso, levamos para a sala de aula algumas marcas de diferentes águas minerais, água sanitária e vinagre para medir a acidez de cada um deles. Os outros recursos e aparelhos também são encontrados nessas lojas, porém o medidor eletrônico é muito mais caro. Além disso, por mais que o experimento seja simples ele deve ser feito com a supervisão do professor.

Atividade I:

Através da utilização do **kit** da **figura 10**, medir a qualidade da água da escola, calculando a concentração de íons $[H^+]$ dessa água.

Atividade II:

Medir a acidez de outras substâncias aquosas também com a utilização do mesmo **kit** da **figura 10**.

3.2.4 Atividade 4: Logaritmos e terremotos

Esta atividade mostra a ligação entre da matemática com a física e a geologia. Mais uma vez, estamos nos referindo à interdisciplinaridade. As informações que abaixo foram retiradas de um livro de matemática (DINIZ;SMOLE, 2010, p.211-212). O texto abaixo foi digitado e dado aos alunos para que agilizar a aula e, através dele foram feitos os comentários.

Sismologia é a parte da ciência que estuda as vibrações da Terra, sejam elas de ordem natural (causadas pelos movimentos das placas tectônicas) ou devido a grandes explosões em minas, pedreiras ou perfurações de poços petrolíferos.

A onda sísmica é medida por aparelhos muito sensíveis chamados sismógrafos. Essas máquinas foram inventadas e desenvolvidas a partir de 1935 por Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, tornando possível hoje determinar o epicentro (a origem) de um tremor, assim como sua magnitude.

O sismógrafo é graduado na escala Richter, que é uma escala logarítmica na qual mede a amplitude e a frequência da frente de onda, utilizando uma equação logarítmica da forma:

$$M = log\left(\frac{A}{T}\right) + f(\Delta, h) + c, \text{ onde:}$$

M é a magnitude do sismo em uma escala de 1 a 9;

A é a amplitude;

T é o período da onda;

f é uma função para corrigir os efeitos da distância e da profundidade do foco sísmico;

c é uma correção para as estruturas locais na estação.

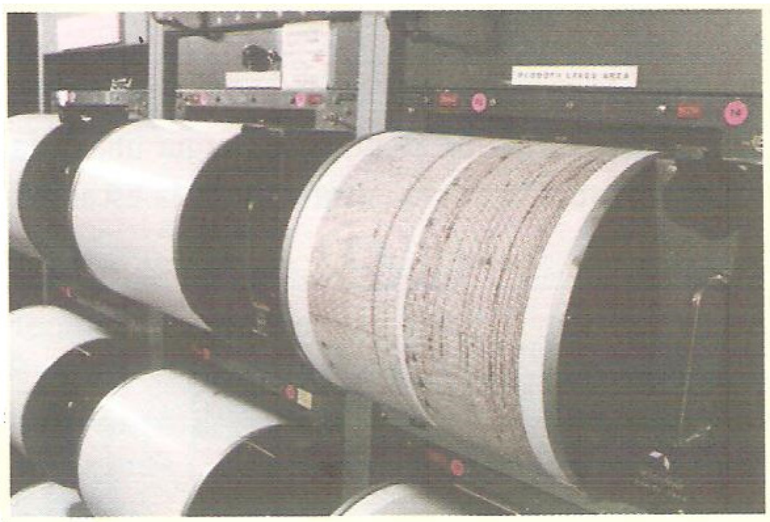


Figura 14: Imagem de um Sismógrafo (DINIZ; SMOLE, 2010, p.211)

Em uma das primeiras investigações de Richter, no Sul da Califórnia, nos Estados Unidos, ele utilizou a equação:

$$M = \log(A) + 3.\log(8\ .\ \Delta t) - 2{,}92, \text{ onde:}$$

M é a magnitude de um terremoto;

A é a amplitude;

Δ t é a variação do tempo entre as ondas longitudinal e transversal

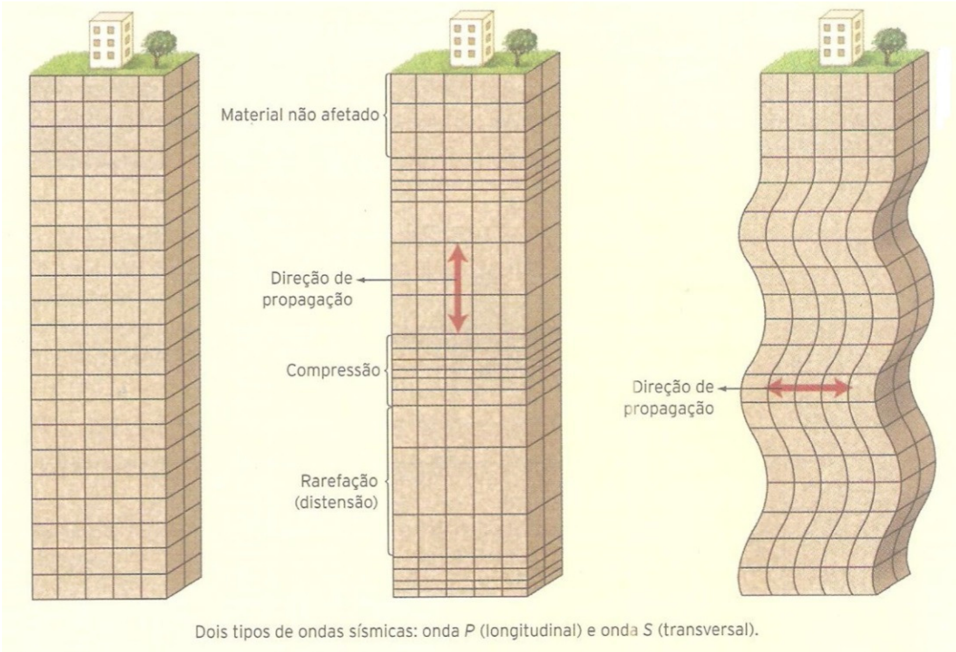


Figura 15- Tipos de ondas sísmicas (DINIZ; SMOLE, 2012, p.211)

A figura 16 mostra o abalo registrado na Califórnia e as medições necessárias para se calcular a magnitude desse terremoto.

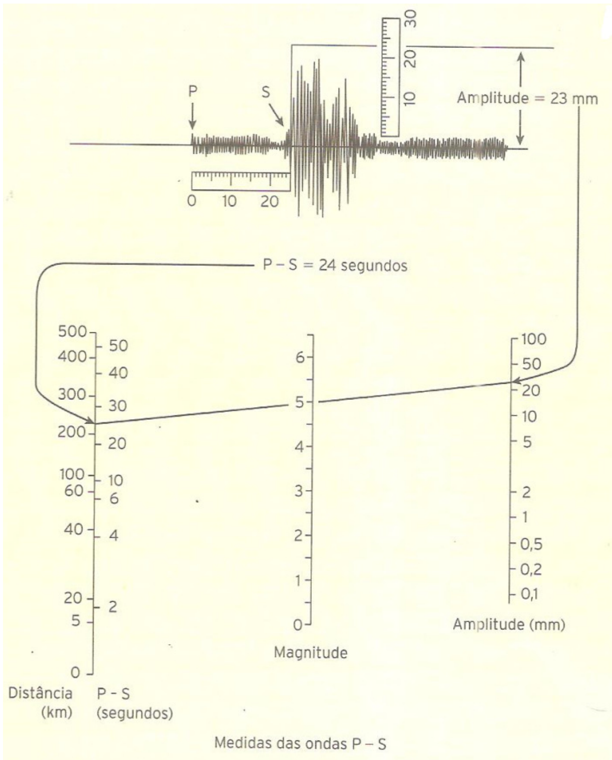


Figura 16 - Registro de um abalo sísmico. (DINIZ; SMOLE, 2012, p.212)

Fazendo as substituições desses valores na equação logarítmica, obtemos uma magnitude na ordem de 5,2 graus na escala Richter. Vale ressaltar que, nessa escala logarítmica, a cada unidade a mais na magnitude de um abalo equivale a um movimento do solo 10 vezes mais forte.

Nessa atividade utilizamos uma tabela de logaritmos decimais. Caso não utilizemos essa tabela, poderemos pedir que os alunos utilizem uma calculadora para determinar os valores. A maioria dos celulares hoje possui o recurso de logaritmos, mesmo assim se alguns não possuírem, podemos pedir que trabalhassem em duplas. Essa atividade foi retirada e adaptada de Diniz e Smole (2012). A atividade II tem como objetivo mostrar ao aluno como funciona um sismógrafo. Nela montaremos um sismógrafo caseiro. Essa atividade foi retirada do site www.feiradeciencias.com.br.

Sugestões:

Levem o sismógrafo pronto pois, ao tentar montá-lo na escola podem surgir alguns problemas na sua confecção. Na hora de prender as madeiras devemos fazê-lo com furadeira e buchas para fixar firmemente.

Atividade I

Usando os dados anteriores, e uma tabela de logaritmos, mostrar que a magnitude é na ordem de 5,2 graus.

Atividade II

Montar um sismógrafo caseiro.

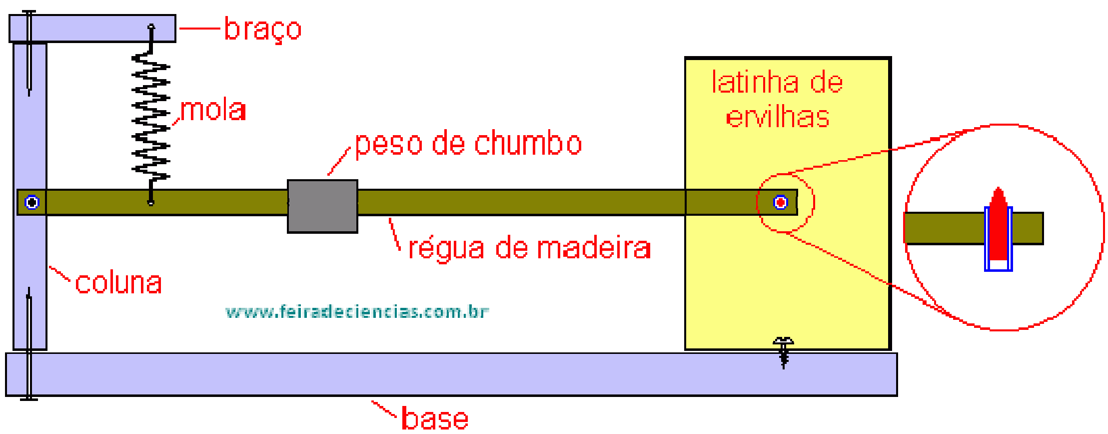


Figura 17
Modelo de um sismógrafo caseiro - www.feiradeciencias.com.br

Montagem

(a) Para construir um sismógrafo de Milne, utilize uma base de madeira de (2 x 15x30) cm.

(b) Fixe numa das extremidades dessa base um sarrafo de (3 x 3 x 12) cm com cola e pregos,

(c) e sobre esse sarrafo, a 90^o, um outro sarrafo de (2 x 3 x 7) cm.

(d) Utilize uma vareta de madeira leve de (0,5 x 1,5 x 25) cm para fazer o pêndulo.

(e) Faça um furo de 3 mm de diâmetro, afastado de 1 cm de cada ponta dessa vareta, e mais um a 5 cm para prender a mola.

(f) Encaixe nos furos das pontas dois pedacinhos de tubo plástico (aquele que fica dentro das canetas esferográficas). Em um desses tubinhos encaixe uma ponta porosa de caneta hidrocor (hidrográfica), conforme se ilustra no detalhe da figura acima.

(g) Fixe o outro lado da vareta-pêndulo, com um prego por dentro do tubinho, na coluna lateral, a 4 cm da base. A vareta deve se mover facilmente.

(h) Utilize uma mola com um arame de aço e prenda no braço, como se ilustra.

(i) Consiga um pedaço de chumbo, dobre em U e coloque-o 'montado' sobre a vareta-pêndulo. Ajuste a mola ou desloque o chumbo ao longo da vareta até nivelar o pêndulo.

(j) Arranje uma latinha de ervilhas, vazia, para fazer o registrador. Cuidado! Martele as rebarbas da tampa para não cortar os dedos. Aparafuse a latinha pelo centro se seu fundo de modo que ela encoste na ponta do 'traçador' (ponta macia entintada) e não aperte muito o parafuso para que a lata possa girar.

(k) Cole um pedaço de papel em volta da latinha com fita adesiva e coloque uma gota de tinta na ponta porosa se essa estiver seca.

Nota: Se você for bastante cuidadoso e habilidoso, poderá dar um "jeitinho" da lata ficar girando o tempo todo dando uma volta a cada 12 horas, ou a cada 1 hora ou a cada minuto. Já vislumbrou a técnica?
Basta comprar um desses relógios com uma pilha; retirar o plástico que recobre o mostrador e retirar cuidadosamente os ponteiros. A seguir, instale esse relógio na horizontal e adapte o centro da lata no lugar do ponteiro que interessar; das horas, dos minutos ou dos segundos. Se você usar o eixo do ponteiro dos segundos a latinha irá girar dando "pulinhos" a cada segundo, realizando uma volta completa a cada minuto.

Atividade III

Fonte: Adaptado de http://www.brasilescola.com

A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terreno. A fórmula utilizada é a seguinte:

$$M = \log A - log A_0, \text{ onde:}$$

M é a magnitude;

A é a amplitude máxima;

A_0 é a amplitude de referência

Utilize a fórmula acima para comparar um terremoto de 6 graus com outro de 8 graus de magnitude, todos na escala Richter.

Atividade IV

Fonte: Adaptado de http://www.brasilescola.com

Para calcular a energia liberada por um terremoto, usamos a seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}, \text{ onde:}$$

I é a intensidade que varia de 0 a 9;
E é a energia liberada em Kwh;
$E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ Kwh

Admita que um homem consiga converter toda a energia liberada por um terremoto em energia elétrica e observe a conta de luz residencial abaixo.

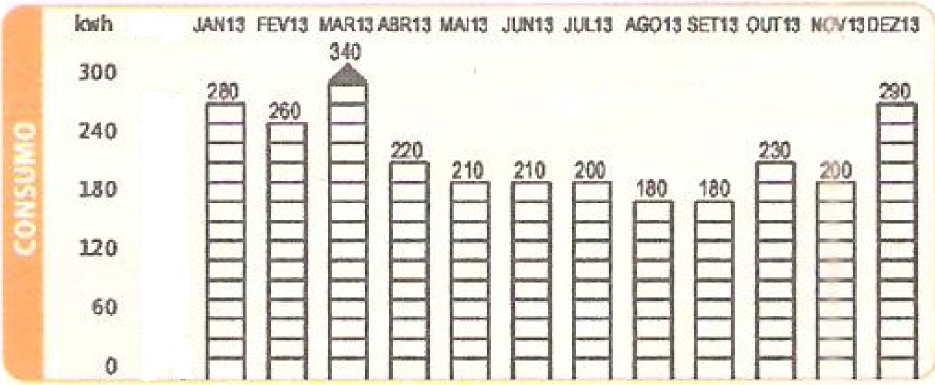


Figura 18 - Conta de luz residencial, referente ao ano de 2013.

Considere, o ano de 2013 como base e, que nesse ano, o consumo anual de todas as casas pesquisadas seja constante e idêntico ao apresentado, determine quantas casas, com consumo de energia exatamente igual a esse, um terremoto de intensidade 6 na escala Richter poderia abastecer em um ano.

3.2.5 Atividade 5 : Acústica e logaritmos

Essa atividade tem o objetivo de mostrar a interdisciplinaridade da matemática e a física. Nela expomos alguns contextos da aplicação de logaritmos. As informações abaixo forma retiradas de um livro de física (NICOLAU; RAMALHO; TOLEDO, 1994, v.2, p.482). O texto abaixo foi digitado e dado aos alunos para que agilizar a aula e, através dele foram feitos os comentários.

Quando estudamos ondas sonoras, percebemos que o som apresenta características como: altura, intensidade e timbre.

A **intensidade** (I) é representada pela potência de uma onda sonora por unidade de área $\left(\frac{W}{m^2}\right)$ e através dela encontramos detalhes interessantes como o caso da limitação auditiva.

Para que uma onda sonora seja perceptível ao tímpano humano, é necessário que ela tenha no mínimo uma intensidade $I_0 = 10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$, que é chamada de **limiar de audibilidade** e, no máximo, de 1 $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, que é chamada **limiar da dor**.

O nível sonoro (N) representa a comparação entre a intensidade sonora (I) e o limiar da audibilidade (I_0). A sua unidade mais prática é o decibel (dB). O nível sonoro (N) obedece a uma escala logarítmica definida por:

$$N = 10 \,.\log\frac{I}{I_0}$$

A tabela abaixo fornece o nível sonoro aproximado (em dB) de alguns ruídos produzidos:

Tabela 13 – Ruídos sonoros em dB. (FERRARO;SANTOS;SOARES. 1984, p.253)

Relógio de parede	10 dB
Interior de um templo	20 dB
Conversa a meia voz	40 dB
Rua de tráfego intenso	70 dB a 90dB
Britadeira	100 dB
Buzina de caminhão	100 dB
Salão de “Discoteque”	120 dB
Avião a jato aterrissando	140 dB

Através da análise da tabela 13, elaboramos as atividades I e II. Utilizando a interdisciplinaridade e a contextualização dos logaritmos, os alunos poderão colocar em prática a utilização dos logaritmos.

Atividade I

De acordo com a tabela 11, determine o quanto maior a intensidade sonora de um avião a jato é em relação a intensidade sonora de uma conversa a meia voz.

Atividade II

Ainda de acordo com a tabela 11 fornecida, indique qual situação representa uma intensidade sonora de 1 $\left(\frac{W}{m^2}\right)$.

Atividade III

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), sons de até 55 *dB* são aceitáveis. Vejam abaixo uma tabela com níveis de intensidade de alguns tipos de som:

Níveis de Ruído em Decibels					
Conforto Acústico	Muito baixo	0 *dB*		Limiar do som	
		5 *dB*	Passarinho		
		10 *dB*	Cochicho		
		15 *dB*	Torneira		
		20 *dB*	Conversa		
	Baixo	25 *dB*	Relógio		
		30 *dB*	Biblioteca	Limite para o sono	
		35 *dB*	Enfermaria		
		40 *dB*			
	Moderado	45 *dB*			
		50 *dB*	Aspirador de pó		
	Moderado	55 *dB*	Bebê chorando	Irritação	
	Moderado Alto	60 *dB*		Irritação aumenta consideravelmente	
Riscos de Danos à Saúde	Moderado Alto	65 *dB*	Cachorro latindo		
		70 *dB*			
		75 *dB*	Sala de aula		
		80 *dB*	Piano		
	Alto	85 *dB*	Telefone tocando	Tolerâncias diárias de exposição	8 h
		90 *dB*	Secador de cabelos		4 h
		95 *dB*	Moto		2 h
		100 *dB*	Cortador de grama		1 h
	Muito alto	105 *dB*	Caminhão		30 min
		110 *dB*	Pátio no intervalo das aulas		15 min
		115 *dB*	Banda tocando		7 min
		120 *dB*	Tiro		
		125 *dB*	Auto-falante		
		130 *dB*	Britadeira		
		135 *dB*	Avião		
		140 *dB*			

Figura 19 – OMS (2011) – Retirado de www.obaricentrodamente.blogspot.com,br

a) Utilizando a tabela acima, um som com intensidade $10^{-7}\left(\frac{w}{m^2}\right)$ produz um ruído de que tipo?

b) De acordo com essa tabela, que aparelho produz uma intensidade sonora de $10^{-3}\left(\frac{w}{m^2}\right)$?

c) Sabe-se que a diferença entre dois níveis de ruídos N_1 e N_2 é de 10 dB. Determine quantas vezes o nível sonoro I_1 é maior que o nível sonoro I_2.

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Resultados sobre o Questionário Inicial

A pesquisa foi feita em duas turmas, como citado no capítulo 3, que denominaremos aqui como turma A e turma B. A turma A continha 43 alunos e a turma B, 42 alunos. No dia da aplicação desse questionário inicial, compareceram 32 alunos da turma A e, 31 alunos da turma B. Como o trabalho desenvolvido foi o mesmo nas duas turmas, registramos os resultados utilizando o total de 63 alunos.

Através desse questionário inicial, pudemos perceber que grande parte dos alunos desconhecem curiosidades, fatos e principalmente nomes associados ao desenvolvimento da matemática. Alguns citaram as construções das pirâmides do Egito e surgimento dos números naturais como fatos da história da matemática e o nome citado pelos alunos foi somente o de Pitágoras. Todos eles concordaram que a matemática tem aplicações em outras áreas de conhecimento, mesmo que essa aplicação seja pequena. Em relação a logaritmos, alguns já tinham ouvido falar, porém não sabiam o motivo dessa invenção. Outra parte, nem tinha o conhecimento da existência de logaritmos. Nas turmas pesquisadas, todos opinaram no sentido de que a matemática tem ligação com outras disciplinas, entre elas biologia, química, física e geografia.

Após a tabulação desses dados, montamos os gráficos referentes a cada pergunta. Abaixo, colocamos as perguntas com alguns comentários e os gráficos.

1. Você sabe o nome de alguma personalidade da matemática no passado?

Nessa pergunta, tentamos analisar o conhecimento que os alunos traziam de anos anteriores de estudo. Percebemos aqui que poucos se lembravam de nomes relacionados a matemáticos. Acreditamos que alguns fatores que contribuem para isso sejam o afastamento da escola por um determinado período, a não utilização de história da matemática ou até mesmo a falta de interesse em pesquisar alguns assuntos.

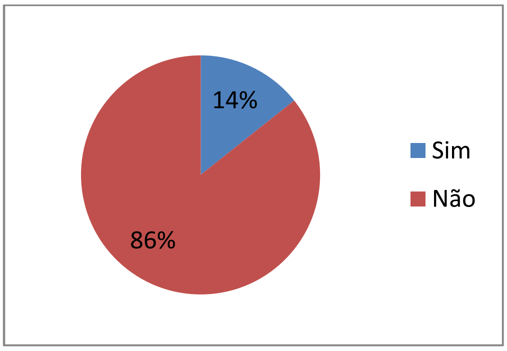


Gráfico 1

Observação: O nome citado pelos 14% foi o de Pitágoras. Ficamos surpresos, pois, nenhum deles citou Bhaskara ou Tales.

2. Você conhece alguma coisa a respeito da História da Matemática?

Alguns alunos citaram as construções das pirâmides do Egito e o surgimento dos números naturais. Nesse momento, quisemos também associar a resposta da pergunta 1 com a pergunta 2. Através das perguntas 1 e 2, gostaríamos de analisar se as respostas dadas tinham relação. Verificamos que o nome citado na pergunta 1 não tinha relação com o fato histórico da pergunta 2 pois, os alunos não conseguiram associar qual a utilidade das criações de Pitágoras com as construções das pirâmides e a criação dos números.

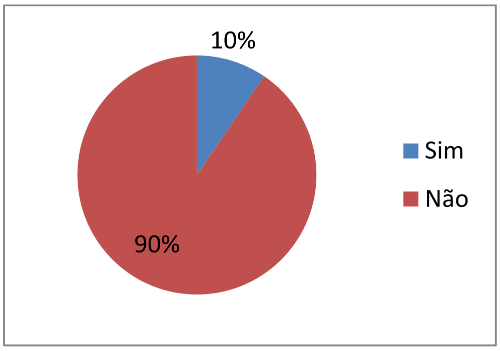


Gráfico 2

3. Você considera que a matemática tenha aplicações em outras áreas profissionais?

Aqui o objetivo era verificarmos se os alunos conseguiam perceber as diversas aplicações da matemática em outras áreas profissionais. Foram citadas nesse momento, de acordo com as respostas dos alunos, áreas como: engenharia, arquitetura, administração, contabilidade, medicina, enfermagem, vendedor, merendeira, bancário, torneiro mecânico e pedreiro. O interessante foi o reconhecimento da importância da matemática em nossas vidas.

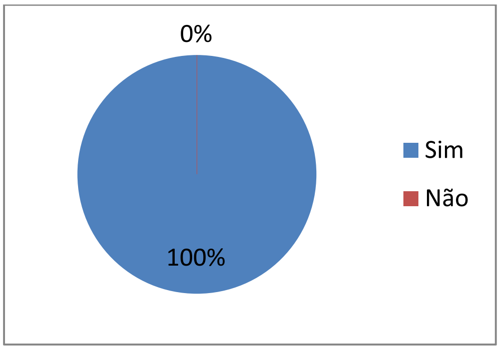


Gráfico 3

4. Você já ouviu falar em logaritmos?

Pelo fato de serem turmas de jovens e adultos, acreditamos que alguns, em algum momento da vida, já teriam ouvido falar em logaritmos. Esse fato se confirmou e muitos já carregavam a ideia de que se tratava de um conteúdo muito difícil.

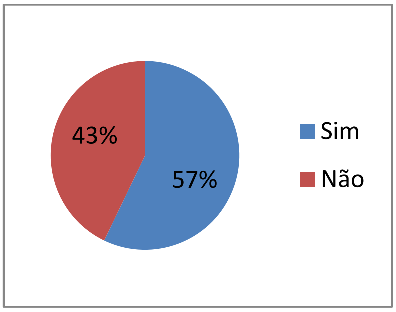


Gráfico 4

Observação: Muitos frequentaram o ensino médio no passado e abandonaram a escola, retornando nesse momento. Por isso boa parte deles já ouviu falar de logaritmos.

5. Você já ouviu falar ou já leu algo sobre John Napier ou Henry Briggs?

Apesar de já terem ouvido falar de logaritmos, verificamos que não conheciam, e nem mesmo ouviram falar, de Napier ou Briggs.

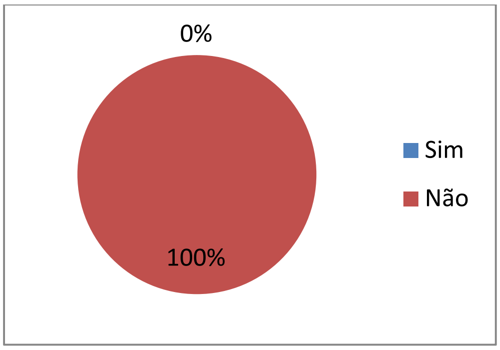


Gráfico 5

6. Qual deles?

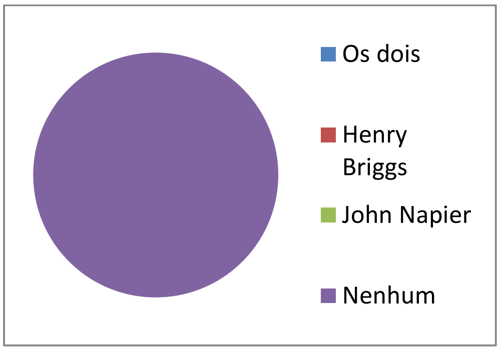


Gráfico 6

Observação: Não foi surpreendente eles não terem conhecimento desses nomes, pois até então não tiveram acesso à história da matemática.

7. Você acredita que a matemática possa ter ligação, ou até mesmo, aplicação com outras disciplinas?

Mais uma vez aqui, fica registrada a importância que os alunos deram à matemática. Observamos que as turmas consideraram que a matemática tem aplicação em outras disciplinas. Nesse momento é que devemos aproveitar a interdisciplinaridade e a contextualização.

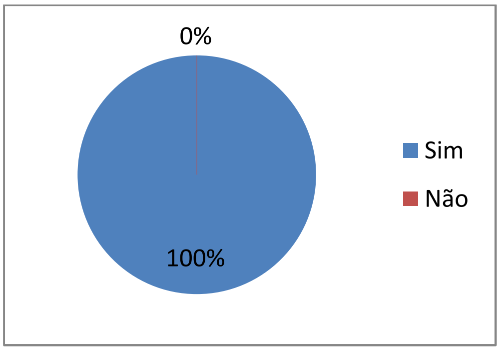


Gráfico 7

Observação: Apesar de reconhecerem que a matemática tem ligação com outras disciplinas, não conseguiam compreender como o tema logaritmo estaria conectado a elas.

8. Em qual (ou quais) disciplina(s) você considera que a matemática possa ter aplicação? (Você pode marcar mais de uma opção)

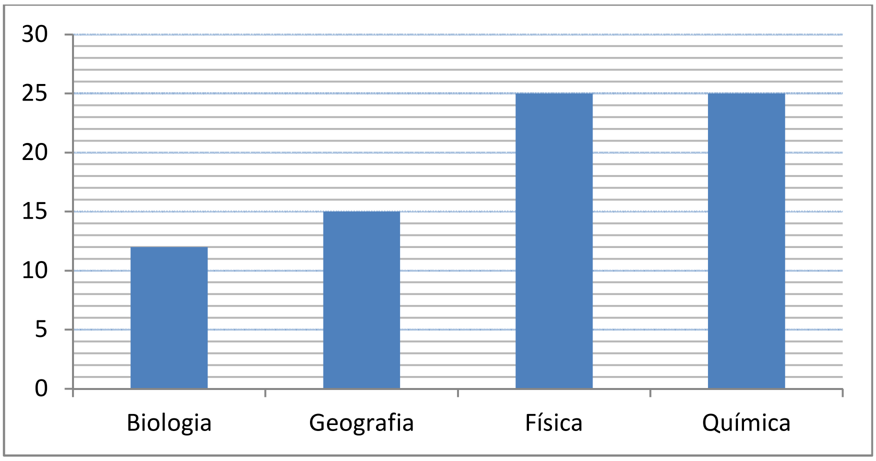


Gráfico 8

Observação: Devido a possibilidade de marcação de mais de uma opção pelo aluno, a quantidade de cada resposta apresentada no Gráfico 8 foi expressa em valor absoluto. Para a grande maioria, a aplicação da matemática em outras disciplinas na área de exatas se dá pela utilização das quatro operações. Aqui registramos as disciplinas em que os alunos consideraram que a matemática tenha aplicação. Observamos que as mais citadas foram a Química e a Física.

4.2 Comentários sobre as Atividades

Nas duas turmas pesquisadas, foram aplicadas quatro das cinco atividades descritas na seção 3.2: a atividade 1 (Utilizando potências grandes), a atividade 2

(Usando tabelas de logaritmos decimais), a atividade 3 (Medindo o pH da água e a atividade 4 (Logaritmos e terremotos).

O primeiro objetivo era fazer com que os alunos percebessem que o logaritmo está associado ao expoente, por isso, a atividade 1 foi desenvolvida primeiro. A aplicação do questionário inicial e a atividade 1 teve a duração de 2 tempos de 45 minutos. Nessa atividade, construímos a tabela de potências de 2 juntos, sempre dando enfoque no valor do expoente para obtermos um determinado resultado. Com isso retomamos o enfoque na história da matemática, ressaltando como poderíamos obter os resultados de multiplicações e divisões de maneira mais rápida. A partir daí, eles começaram a transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações a fim de fazer essas contas com mais facilidade. Os alunos ficaram surpresos e encantados com a veracidade dos resultados. Nesse momento, alguns alunos utilizaram a calculadora para confirmar as respostas. A turma executou a atividade sem problemas e alguns deles logo se lembraram das propriedades de potências.

Acreditávamos que a atividade 2 seria a que os alunos sentiriam mais dificuldade, pois foram dados muitos números decimais. Essa atividade teve a duração de 2 tempos de 45 minutos. Pelo fato de a turma já carregarem a ideia de relacionar multiplicação com a soma e a divisão com a subtração, perceberam logo o que deveriam fazer com os valores das tabelas e, por consequência, chegaram à conclusão das propriedades de logaritmos (logaritmo de um produto, do quociente e da uma potência). Mais uma vez aqui, o objetivo era, através da história da matemática, mostrar a utilização dos logaritmos ao multiplicarmos ou dividirmos números de bases diferentes.

Na atividade 3, o foco principal era mostrar o aspecto interdisciplinar, no caso a relação com a química. Nessa atividade foi utilizado um medidor de pH de piscinas e uma escala colorida chamada indicadores universais, onde pode-se estimar o valor do pH através da cor. Sem se preocupar com os fatores que pudessem influenciar nos resultados, calculamos o pH da água da escola, de marcas de água mineral, vinagre e água sanitária. Através da fórmula de pH, calculamos a concentração de íons $[H^+]$ dessas substâncias. Vale ressaltar que o objetivo maior dessa atividade era mostrar a interdisciplinaridade e aplicar a fórmula que envolve logaritmos no cálculo de pH. Essa atividade teve a duração de 1 tempo de 45 minutos. A maioria dos alunos não teve dificuldades em resolver as questões propostas. Alguns alunos tiveram dificuldades em algumas manipulações algébricas que foram trabalhadas posteriormente para sanar esses problemas.

Na atividade 4, foi mostrado que os logaritmos têm aplicações na geologia e na física, assim pudemos contextualizar o assunto com abalos sísmicos. Foi apresentado aos alunos um sismógrafo caseiro, definindo o que é magnitude de um terremoto e os estragos que um terremoto pode causar. Essa atividade teve a duração de 1 tempo de 45 minutos. A maior dificuldade encontrada pelos alunos foi novamente nas manipulações algébricas, principalmente quando, em uma mesma atividade, tínhamos que aplicar mais de uma propriedade. Apresentadas essas dificuldades, foram trabalhados exercícios de fixação para melhorar o desenvolvimento dessas manipulações.

Pudemos perceber que, no decorrer das aulas, os alunos se interessaram em buscar mais curiosidades a respeito da história da matemática, se tornando um pouco mais participativos e questionadores, não aceitando tão facilmente as coisas prontas. Alguns alunos, inclusive, pesquisaram na internet e em outros livros didáticos coisas a respeito de logaritmos. Como se trata de turmas de Nova Eja (jovens e adultos) ressaltamos que o conteúdo não foi aprofundado, sendo trabalhado com eles os conceitos básicos e as propriedades. Muitos, em suas pesquisas, descobriram e comentaram que logaritmos não paravam por ali e suas teorias e aplicações são bem mais complexas do que as apresentadas. Foi nesse momento que percebemos que muitos utilizaram algum tempo de suas vidas para pesquisarem e se enriquecerem culturalmente fora de sala de aula, o que já é um grande passo.

4.3 Resultados sobre o Questionário Final

Logo após as aplicações das atividades, os alunos responderam a um questionário final para avaliar as impressões deixadas durante esse período da pesquisa. Nesse momento da pesquisa, estavam presentes 40 alunos da turma A e 38 alunos da turma B. Após a tabulação desses dados, construímos os gráficos a seguir. Vejamos os seguintes resultados:

1. Você considera que a descoberta dos logaritmos tem uma grande importância nos dias de hoje?

Através das atividades interdisciplinares e contextualizadas, queríamos mostrar as aplicações práticas dos logaritmos. Sua conexão com a química nos mostrou como podemos calcular a acidez das substâncias e com a geologia como se calcula a intensidade de um terremoto.

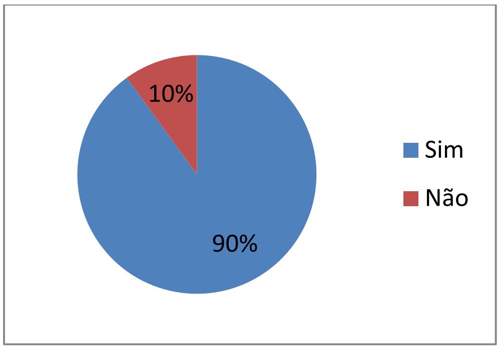


Gráfico 9

Mesmo com as atividades mostrando as aplicações práticas dos logaritmos, foi surpreendente notar que uma parte dos alunos considerou que eles não têm utilidade.

2. Os fatos históricos lhe permitiram compreender melhor os motivos do surgimento dos logaritmos?

Através da história da matemática, gostaríamos de perceber aqui, se os alunos compreenderam que o logaritmo foi uma ferramenta importante nos cálculo com números grandes utilizados no passado.

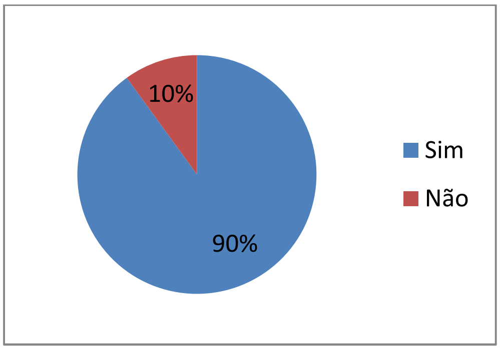


Gráfico 10

Mesmo comentando a utilidade dos logaritmos no passado e sua utilidade naquele período, alguns alunos não compreenderam motivo de seu surgimento.

3. Você achou as aplicações dos logaritmos interessantes?

Com essa pergunta, gostaríamos de analisar a satisfação dos alunos em relação à aplicação das atividades.

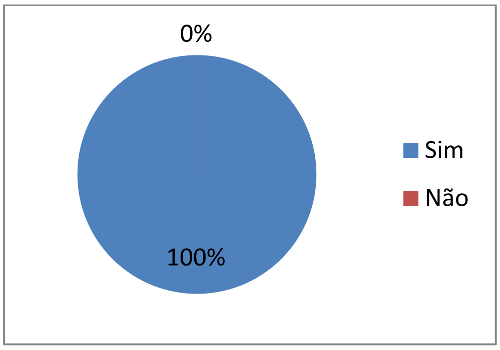


Gráfico 11

Aqui percebemos que todos consideraram as atividades interessantes e gostaram das atividades e da abordagem dada no ensino de logaritmos.

4. Você se sentiu estimulado a pesquisar (na internet ou livros) as aplicações dos logaritmos ou até mesmo da matemática?

Gostaríamos de saber o quanto os alunos ficaram motivados com as atividades aplicadas e analisar se esse estímulo teria reflexo para além da sala de aula.

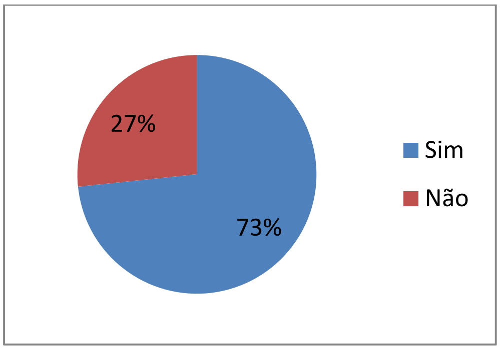


Gráfico 12

Muitos alunos, por iniciativa própria, pesquisaram na internet e em outros livros didáticos a respeito do assunto estudado, trocando ideias e participando cada vez mais nas aulas seguintes.

5. Comente o que você achou das atividades. O que você mais gostou?

Gostaríamos de analisar aqui a opinião de cada aluno com relação a cada atividade aplicada. Ressaltamos aqui que os alunos deveriam escolher somente uma atividade como a que mais gostou.

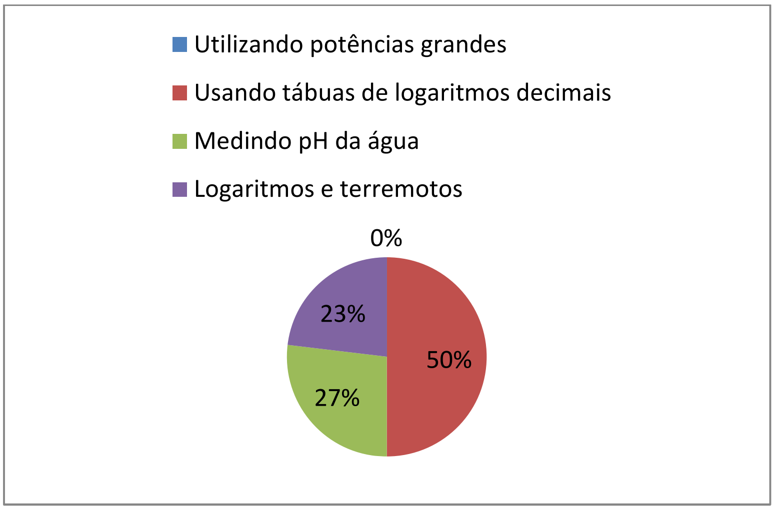


Gráfico 13

Percebemos, por esse gráfico, que a atividade 1 (Utilizando potências grandes) não foi citada. Ficamos surpresos observando que metade dos alunos pesquisados elegeram a atividade 2 (Usando tabelas de logaritmos decimais) por se tratar de uma atividade teórica. Acreditamos que isso aconteceu, pois os próprios alunos foram percebendo as propriedades dos logaritmos e as aplicando, se sentindo "donos" daquela descoberta.

Após a aplicação do questionário final, os alunos concordaram com a importância dos logaritmos e suas aplicações nos dias de hoje. Muitos comentaram, através desses questionários, a importância da utilização de logaritmos na química, na física, na economia, ou ainda, fazer contas enormes facilmente, abrir a mente, utilização dos logaritmos para caminhar pela história. Consideramos a declaração de um aluno X muito interessante: "... no meu caso eu despertei um grande interesse e sinto como se abrisse mais uma janela de esclarecimento (conhecimento nunca é demais)." Através do modelo do sismógrafo caseiro, um dos alunos associou a matemática com a geografia através das seguintes palavras: "... calcular a intensidade dos terremotos das placas tectônicas.".

Grande parte dos alunos considerou que os fatos históricos permitiram entender melhor o surgimento dos logaritmos, considerando também interessante suas aplicações nos dias de hoje. De acordo com alguns deles, sem os logaritmos, muitos cálculos que são usados no dia a dia seriam mais difíceis de serem calculados. Durante as atividades e entre as aulas percebemos entre alguns deles a busca pelo conhecimento e a curiosidade de pesquisar, mesmo sem o comando do professor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foram utilizadas informações históricas sobre o surgimento dos logaritmos e sua utilidade no passado. A partir dessas informações, foram construídas as noções, os conceitos e as propriedades de logaritmos. Após a utilização da História da Matemática, os logaritmos foram envolvidos em situações do cotidiano, através de suas aplicações em algumas profissões e áreas de conhecimento, dando assim mais sentido ao seu ensino e tentando, através desse modelo, facilitar o processo de ensino-aprendizagem.

Para tentar melhorar esse processo de ensino-aprendizagem, este trabalho, de maneira geral, apresentou uma sugestão de como esse assunto pode ser desenvolvido em sala de aula pelo professor do Ensino Médio. O trabalho apresentou subsídios ao professor, com finalidade de minimizar as dúvidas e despertar um maior interesse dos alunos. A partir das considerações citadas no trabalho, o professor pode ser o mediador na apresentação deste conteúdo, mostrando as áreas de aplicação de logaritmos e citando algumas profissões nas quais ele pode ser aplicado.

Assim sendo, a abordagem histórica faz com que o aluno possa entender melhor o motivo pelo qual os logaritmos foram inventados e assim entender melhor seu conceito e suas propriedades. Além disso, pode ser mostrado também como a tábua de logaritmos decimais foi montada, pois, particularmente, confessamos que não conhecíamos. Tal curiosidade pode ser assim compartilhada com os colegas professores que também desconheciam esse processo. A partir daí, em tempos mais modernos, através da contextualização e interdisciplinaridade, os alunos podem conhecer as diversas áreas de aplicações dos logaritmos. Segundo essa linha, o trabalho apresenta algumas aplicações mais práticas sobre logaritmos fazendo assim com que os alunos tenham a possibilidade de, eles mesmos, chegarem a algumas conclusões sobre o conteúdo. Dessa maneira, os alunos podem ser mais participativos durante as aulas, expondo suas opiniões e sugestões para a modelagem e resolução de problemas.

Nesse sentido a contextualização de logaritmos em fenômenos naturais é muito útil, pois desperta o interesse e o instinto investigativo dos alunos. Através da interdisciplinaridade, podemos envolver outros professores, como no caso da atividade envolvendo a medição do pH. A aula acaba sendo diferente, pois, com dois professores, enquanto um explica os fenômenos químicos o outro utiliza a matemática na resolução dos problemas. Podemos deixar assim a aula mais interessante e despertar ainda mais o interesse dos alunos. As atividades devem ser bem planejadas, pois algumas delas requerem construções como a do sismógrafo. Sugerimos que todas elas sejam testadas antes de serem levadas para a sala de aula, a fim de minimizar os problemas.

Portanto, o enfoque dado ao surgimento dos logaritmos e o desenvolvimento de seus conceitos neste material, assim como toda a sua contextualização e interdisciplinaridade existente acerca deste conteúdo, pode servir como uma proposta didática a ser usada pelo professor na tentativa de incentivar e motivar a participação dos alunos durante as aulas, melhorando assim a aprendizagem deste conteúdo.

Apesar de trabalharmos com todas essas atividades diversificadas, observamos, pelo questionário final, que nem todos os alunos se sentiram mais estimulados. Por isso devemos continuar buscando meios para incentivar os alunos a pesquisarem mais, se enriquecendo intelectualmente.

Verificamos que nossos objetivos nesse trabalho foram atingidos, pois grande parte dos alunos se sentiu estimulado a estudar, pesquisar ou compreender a utilidade dos logaritmos nos dias de hoje. Por isso, consideramos que nossos esforços foram válidos, pois, os alunos passaram a enxergar melhor as aplicações dos logaritmos, dando assim mais sentido ao que estão estudando.

Portanto, após a utilização da história da matemática, da contextualização e da interdisciplinaridade no ensino de logaritmos, sugerimos que os logaritmos possam ser trabalhados com outros tópicos importantes, tais como: formulações das funções logarítmicas, construção de gráficos e suas aplicações em fenômenos físicos e naturais que podem ser abordadas em modelagem matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática por Aula**: 1ª série. São Paulo: FTD, 2005.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf >. Acesso em: 16 ago. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação e Cultura. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ministério da Educação e Cultura. MEC/SEF. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2014.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2004. v. 1.

CANTO E. L.; PERUZZO, F. M. **Química na abordagem do cotidiano**. São Paulo: Moderna, 2010.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. **Cadernos CEDES**, Campinas, n.40, p.7-17.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2011. v. 1.

DIEB, **Dicionário Interativo da Educação Brasileira**, Agência Educa Brasil. Disponível em: <www.educabrasil.com.br>. Acesso em: 16 ago. 2014.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Ed. Unicamp, 2004.

FERNANDES, S. S. **A contextualização no ensino da matemática.** Disponível em: <www.ucb.br>. Acesso em: 17 jul. 2014.

FERRARO, N. G.; SANTOS, J. I. C.; SOARES, P. A. T. **Aulas de Física**. São Paulo: Atual, 1984. v. 2.

GASPARI, W. N. H.; PACHECO, E. R. **A História da Matemática Como Instrumento Para a Interdisciplinaridade na Educação Básica**, 2014. Disponível em: <www.diaadiaeducaçãopr.go.br>. Acesso em: 15 maio 2014.

MAOR, E. **e**: a história de um número. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MENDES, I. A.; SOARES, E. C. A criação dos logaritmos nos fins do século XVI: As contribuições de Napier, Briggs e Burgi. In: MENDES, I. A. (Org.). **A matemática no século de Andreo Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008, p.19-22.

RAMALHO JÚNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. T. **Os Fundamentos da Física**. São Paulo: Moderna, 1994. v. 2.

RAMALHO JÚNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. T. **Os Fundamentos da Física.** 6. ed. São Paulo: Moderna, 2004. v. 2.

SILVA, C. X.; FILHO B. B. **Matemática Aula por Aula**. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2010.

SANTOS, J. P.; SANTOS J. S. **Estudo crítico das ações de contextualização e interdisciplinaridade presente no conteúdo da matemática ministrado nas séries iniciais do Ensino Fundamental**. Disponível em: <www.uesb.br>. Acesso em: 25 jun. 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Questionário Aplicado Antes das Atividades

1. Você sabe o nome de alguma personalidade da matemática no passado? Caso a resposta seja SIM, escreva o nome dessa personalidade.

(   ) Sim (   ) Não

Nome: ____

2. Você conhece alguma coisa a respeito da História da Matemática?

(   ) Sim (   ) Não

Caso a resposta seja SIM, aponte um ou mais assuntos na História da Matemática que você já estudou ou já ouviu falar.

____

3. Você considera que a matemática tenha aplicações em outras áreas profissionais?

(   ) Sim (   ) Não

Caso a resposta seja SIM, escreva uma profissão onde você acredita que ela possa ser aplicada:

____

4. Você já ouviu falar em logaritmos?

(   ) Sim (   ) Não

5. Você já ouviu falar ou já leu algo sobre John Napier ou Henry Briggs?

(   ) Sim (   ) Não

6. Qual deles?

(   ) Os dois (   ) John Napier

(   ) Henry Briggs (   ) Nenhum dos dois

7. Você acredita que a matemática possa ter ligação, ou até mesmo, aplicação com outras disciplinas?

( ) Sim ( ) Não

8. Em qual (ou quais) disciplina(s) você considera que a matemática possa ter aplicação? (Você pode marcar mais de uma opção)

( ) Biologia ( ) Física ( ) Química ( ) Geografia

APÊNDICE B - Questionário Aplicado Após as Atividades

1. Você considera que a descoberta dos logaritmos tem uma grande importância nos dias de hoje?

(   ) Sim   (   ) Não

Caso sua resposta seja SIM aponte um motivo.

____

2. Os fatos históricos lhe permitiram compreender melhor os motivos do surgimento dos logaritmos?

(   ) Sim   (   ) Não

3. Você achou as aplicações dos logaritmos interessantes?

(   ) Sim   (   ) Não

Por quê?

____

4. Você se sentiu estimulado a pesquisar (na internet ou livros) as aplicações dos logaritmos ou até mesmo da matemática?

(   ) Sim   (   ) Não

5. Comente o que você achou das atividades. O que você mais gostou?

____