UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Grafos e Aplicações para o Ensino Médio

Maxsuel Gonçalves de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadora: $Prof^a$. Dr^a. Maria Isabelle Silva

Campina Grande - PB
Dez/2014

O482g Oliveira, Maxsuel Gonçalves de.
Grafos e aplicações para o ensino médio [manuscrito] / Maxsuel Gonçalves de Oliveira. - 2014.
45 p.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática".

1. Teoria dos grafos. 2. Inserção curricular. 3. Resolução de problemas. 4. Ensino médio. I. Título.

21. ed. CDD 511.322

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Grafos e Aplicações para o Ensino Médio

por

Maxsuel Gonçalves de Oliveira †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

† Bolsista CAPES

Maxsuel Gonçalves de Oliveira

Grafos e Aplicações para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 19 / 12 / 2014

Banca Examinadora:

UBJem

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Universidade Federal da Paraíba -UFPB
Examinador

DMEsteves

Prof.ª Dr.ª Divanilda Maia Esteves
Universidade Estadual da Paraíba -UEPB
Examinadora

Maria Isabelle Silva

Prof. ª Dr.ª Maria Isabelle Silva
Universidade Estadual da Paraíba -UEPB
Orientadora

Agradecimentos

Agradeço eternamente aos meus pais Antônio Porfírio de oliveira (in memoriam) e Bernadete Gonçalves Barros de Oliveira pela simplicidade e dedicação com que me criaram e pelo incentivo dado ao estudo.

Agradeço aos meus dois amores. Ály Caroline Vicente Diniz Gonçalves: esposa e companheira sem o qual não teria sido possível realizar este projeto e muitos outros ao longo de nossa união. Matheus Henrique Gonçalves Diniz, nosso maior projeto, filho maravilhoso e amado, a quem dedico todos os dias da minha vida.

Agradeço à Secretária Estadual de Educação da Paraíba pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Agradeço a minha orientadora Isabelle Aires pela confiança no projeto e pela generosidade e competência que marcam o seu trabalho. A sua presença foi constante e os momentos de reflexão que tivemos foram fundamentais no processo de construção deste trabalho.

Agradeço os colegas deste Mestrado: Cícero, Felipe, Herede, John, Josimar, Loana, Raimundo, Ronaldo, Stanley, Uelder, Weskley e Wilson. Os encontros começaram na forma de estudo, mas foram se constituindo como encontros de reflexão. Hoje, temos o carinho e a amizade que os encontros provocaram. A vocês a minha admiração.

Agradeço ao professor doutor Aldo Trajano, coordenador do projeto, por sempre nos mostrar éramos capazes de alcançar nosso objetivo.

Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba , em especial, ao departamento de Matemática, pela iniciativa de levar adiante um projeto tão importante quanto este.

Agradeço aos professores doutores que constituíram a banca pelas contribuições que deram ao trabalho final.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio. Procuramos, assim, fundamentar um embasamento teórico que possibilitasse a compreensão de um aluno desse nível de ensino. A teoria dos Grafos modela diversos problemas do cotidiano, aplicáveis às mais variadas áreas do conhecimento, propiciando ao aluno a oportunidade de resolução de problemas atuais e do seu dia-a-dia. Tais problemas podem envolver situações de simples compreensão, cuja exploração revela diversas propriedades matemáticas interessantes. Isso possibilita ao aluno desenvolver uma série de habilidades importantes, tais como analisar, explorar, modelar, dentre outras. A partir dessa constatação, apresentamos neste trabalho uma proposta de introdução de aspectos da Teoria dos Grafos no Ensino Médio apresentando os fundamentos teóricos dos Grafos, os quais introduzem alguns conceitos básicos dessa teoria como grau de vértice, caminho, coloração, etc, que possibilite a construção do conhecimento matemático através da investigação matemática.

Palavras Chaves: 1. Teoria de Grafos 2. Inserção Curricular 3. Resolução de Problemas

Abstract

The main objective of this work is to present a proposal for inclusion of Graph Theory in High School. We seek, therefore, support a theoretical foundation that would enable a student to understand this level of education. The theory of graphs modeling various real-world problems, applicable to various areas of knowledge, providing students the opportunity to solve current problems and their day-to-day. Such problems may involve situations of simple understanding, whose exploration reveals several interesting mathematical properties. This enables students to develop a range of important skills such as analyzing, exploring, modeling, among others. From this observation, in this paper we present a proposal to introduce aspects of Graph Theory in High School presenting the theoretical foundations of graphs, which introduces some basic concepts of this theory as vertex degree, path, color, etc, which enables the construction of mathematical knowledge through mathematics research.

Keywords: 1. Graph Theory 2. Curricular Integration 3. Troubleshooting

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Teoria dos Grafos pode ser considerada um ramo recente da matemática se comparada à Geometria, ao Cálculo, Topologia, Equações Diferenciais, etc. Apesar de ser atualmente utilizada em variados campos da ciência como a Física, Química, Computação, Bioinformática, Genética, Pesquisa Operacional, Eletricidade, Estatística, Psicologia, Sociologia, dentre outros, seu início foi tímido, cujo primeiro resultado, que não passava de uma charada matemática resolvida pelo grande matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736, não chamou muita atenção de outros matemáticos, inclusive do próprio Euler, de modo que durante os 150 anos seguintes poucos trabalhos afins surgiram.

Uma explicação para a Teoria dos Grafos não ter se desenvolvida logo após o resultado de Euler é apresentada por Boaventura [1] :

> "Parece razoável que tal desinteresse esteja relacionado à falta de aplicações práticas; o problema de Euler não passava de uma charada matemática e as primeiras incursões futuras no campo - mais de um século depois - foram vinculadas a aplicações em áreas bastante disjuntas entre si, o que não contribui para que os resultados fossem facilmente reunidos".

Alguns jogos e problemas de natureza prática foram instrumentos para o desenvolvimento dos primeiros resultados em Teoria dos Grafos. O conhecido problema das pontes de Konigsberg, que podemos entender como um desafio recreativo, é considerado como a inspiração para a teoria dos grafos Eulerianos. Já teoria dos grafos Hamiltonianos foi desenvolvida a partir do jogo "Around the World" criado por Sir William Hamilton (1805-1865). Grafos Eulerianos e Hamiltonianos encontraram aplicações um e dois séculos mais tarde no campo da pesquisa operacional. Os estudos sobre o Problema das Quatro Cores, proposto por Francis Guthrie a Augustus de Morgan em 1852, que consistia em saber se era possível pintar qualquer mapa com quatro cores, sem que duas regiões vizinhas possuam a mesma cor serviu de base para o desenvolvimento do conceito de planaridade muito estudado em Teoria dos Grafos e Topologia Combinatória. A Teoria dos Grafos Acíclicos foi desenvolvida para resolver o problema de redes elétricas; a criação do conceito de árvore e resultados iniciais foram desenvolvidos para o problema da enumeração de isômeros em Química Orgânica. Problemas de transporte em programação linear e pesquisa operacional podem ser modelados pela teoria dos fluxos em redes, os resultados mais elaborados foram surgindo, mas foi a partir de 1950 e 1960 que o avanço dos computadores ofereceu a oportunidade de resolver, em larga escala, problemas de roteamento e transporte em tempo razoável. Segundo Boaventura [1]:

> "O desenvolvimento da Teoria dos Grafos veio a se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional já na segunda metade do século XX. Evidentemente, tal desenvolvimento não teria sido dado sem a invenção do computador, sem o qual a imensa maioria das aplicações de grafos seria totalmente impossível. É interessante observar que, uma vez "descoberta"a teoria, diversas aplicações a muitos outros campos do conhecimento, tanto nas ciências físicas (exatas) como nas humanas, foram rapidamente desenvolvidas. Vale a pena registrar que o primeiro livro específico data da década de 30 e que a imensa maioria das publicações - livros e periódicos - apareceu a partir de 1970."

Neste trabalho objetivamos a inserção da Teoria de Grafos no Ensino Médio, bem como a resolução de problemas como perspectiva metodológica para que tal inserção seja feita.

No primeiro capítulo, faremos um breve passeio histórico mostrando o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, incluindo os grafos Eulerianos, grafos Hamiltonianos e o Problema do Carteiro Chinês. No segundo capítulo, apresentaremos definições e conceitos introdutórios em Grafos, incluindo algumas demonstrações de teoremas presentes no trabalho; far-se-á uma breve discussão sobre o conceito de complexidade. No terceiro capítulo terminamos com uma série de motivações e justificativas para o ensino de Grafos no Ensino Médio.

Capítulo 2

Passeio Histórico

Leonhard Paul Euler foi um matemático, nascido em Basiléia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707 e tendo falecido em São Petersburgo a 18 de setembro de 1783, vítima de um acidente vascular cerebral. Euler foi um grande matemático e físico suíço que passou a maior parte da sua vida na Rússia e na Alemanha. Foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel, recebendo ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas Orientais e Matemática.

Com o auxílio de Bernoulli entrou para a Academia de São Petersburgo, fundada por Catarina I, ocupando um lugar na seção de Medicina e Fisiologia, e em 1730 passando à seção de Filosofia por ocasião da morte de Nicolaus e afastamento de Daniel. Tornando-se o principal matemático já aos vinte e seis anos, dedicou-se profundamente à pesquisa compondo uma quantidade inigualável de artigos, inclusive para a revista da Academia.

Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada sendo o maior responsável pela linguagem e notações que usamos hoje. Também fez importantes descobertas em campos variados nos cálculos e grafos.

Em matemática e física, há um grande número de tópicos em honra de Leonhard Euler, muitos dos quais incluem a sua função própria, a equação, fórmula, identidade, número (simples ou sequência), ou outra entidade matemática. Muitas dessas entidades receberam nomes simples e ambíguos, como a função de Euler, a equação de Euler e a fórmula de Euler. O trabalho de Euler tocou tantas áreas que muitas vezes é a mais antiga referência escrita sobre uma determinada questão.

Euler contribuiu para criação de um novo ramo totalmente inédito da matemática, que para ficar mais fácil de entender será utilizado o exemplo das sete pontes de Königsberg.

O desafio era saber se era possível entrar e sair dessa cidade situada numa ilha, atravessando apenas uma vez todas as sete pontes que ela tinha. Euler mostrou que era impossível, dando início ao raciocínio topológico, que é o marco da teoria dos grafos, objeto de estudo neste trabalho,"percurso Euleriano".

A contribuição de Euler no desafio acima foi demonstrar que o problema não tinha solução. Generalizou o resultado e enunciou o seu teorema em três regras: se há mais de duas áreas as quais leva um número ímpar de pontes, então tal entrada e saída é impossível, (este era o caso de Königsberg). Se, entretanto, o numero de pontes for ímpar para exatamente duas áreas, então é possível se começar em qualquer dessas áreas. Se, finalmente, não existem áreas às quais levam um número ímpar de pontes, então a jornada requerida pode ser realizada iniciando-a a partir de qualquer área. Veja figura 2.1 representada a cidade de Konigsberg.

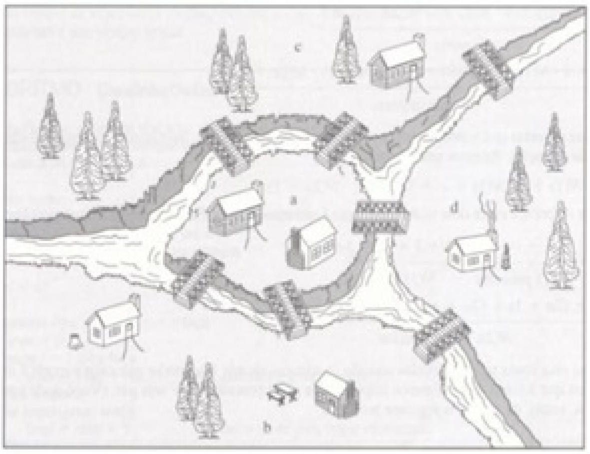

Figura 2.1: Cidade de Königsberg

Vejamos agora o problema das sete pontes com a ajuda da Figura 2.2. Imaginemos um rio com duas margens B e C. e com, duas ilhas A e D. A ilha A está ligada a cada uma das margens por duas pontes. Em cada margem há também uma ponte para a ilha D . A sétima ponte liga as ilhas entre si.

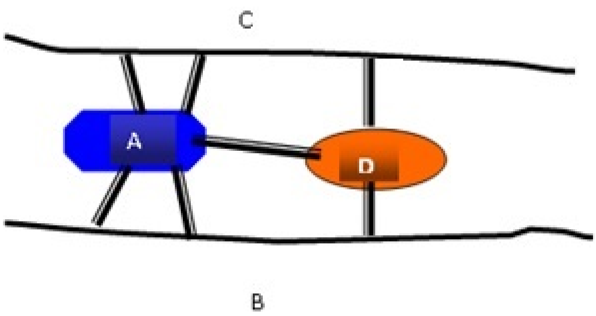

Figura 2.2: O problema das sete pontes

O problema consiste em achar um caminho, ao longo do qual um pedestre, partindo de uma das margens ou de qualquer das ilhas percorra todas as pontes, sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas.

Euler fez a observação fundamental que, para efeito da questão proposta, as margens e as ilhas são como se fossem pontos A,B,C e D. As pontes são como arestas que tem esses pontos como extremidades.

Tudo se resume a analisar a Figura 2.3, onde os arestas ligam os pontos, de acordo com a disposição das pontes dada no enunciado do problema.

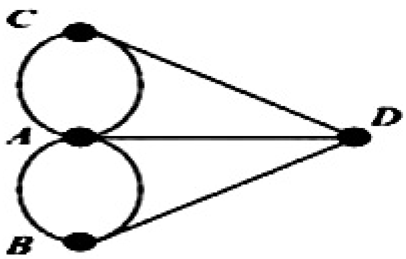

Figura 2.3: Primeiro esboço de um grafo

A distância entre as pontes, o comprimento de cada uma, e o quanto se anda não tem importância na solução do problema. Por isso, o grafo da Figura 2.3 sintetiza toda a informação relevante. O desenho da Figura 2.3 é, provavelmente, o primeiro esboço de um grafo a ocorrer como modelo matemático para resolver um problema, que agora se exprime da seguinte forma: partindo de um dos vértices A, B, C ou D achar um caminho que percorra todo o grafo sem passar mais de uma vez pelo o mesmo arco. De modo geral um grafo é: um conjunto finito de pontos, chamado de vértices do grafo, e um conjunto finito de arestas, chamado de arestas do grafo. As extremidades de cada aresta devem ser vértices.

Euler chamou atenção para uma noção muito simples, porém crucial, que é o grau de um vértice do grafo. O grau de um vértice é o número de arestas que emanam deles. Euler observou que toda vez que um caminho chega a um vértice, deve sair dele por um arco diferente daquele por onde chegou (a menos que esse vértice seja o fim do caminho). Portanto para conseguir passar por todas as sete pontes sem passar mais de uma vez pelo mesmo caminho, os vértices desse grafo devem ser todos com arestas par, com exceção ao início e ao fim do caminho. Se o início e o fim do caminho coincidirem (isto é, se o caminho for fechado), então todos os vértices do grafo, sem exceção, tem grau par.

Conclui-se então que se um grafo é dito Euleriano, ou todos os seus vértices têm grau par ou exatamente dois vértices têm ordem ímpar (semi-euleriano), deve começar em um vértice de ordem impar e terminar em outro. Segue então que o esboço do grafo da Figura 2.2 das pontes de Königsberg não é Euleriano, pois, seus quatro vértices têm ordem impar, o vértice A tem grau 5 enquanto os demais vértices B, C e D tem todos grau 3. A solução encontrada para o problema das pontes e a fórmula relacionando o número de faces, vértices e arestas de um poliedro V - A + F = 2 foram contribuições importantes de Euler à um campo da matemática chamado de Topologia.

Fica então resolvido o problema das sete pontes: é impossível percorrê um ou outro, sem passar duas vezes pela mesma ponte.

Associado ao problema de Euler, temos um problema da área de otimização conhecido como Problema do Carteiro Chinês, apresentado, dois séculos depois de Euler, pelo matemático Chinês Mei-Ko Kwan, em 1962. Neste problema temos um carteiro que deve entregar correspondências e/ou pedidos em domicílios localizados em uma determinada região, com um número evidentemente finito de ruas. Queremos que o carteiro realize seu trabalho dispendendo o menor esforço possível, e que seu esforço seja proporcional à distância percorrida. Como encontrar um circuito que passe por todas as ruas (arestas) e cuja distância total (a soma das distâncias (custos) das arestas no circuito) seja mínima?

Se o grafo for euleriano, a resposta é trivial, pois qualquer circuito constitui uma solução ótima, pois passa por cada aresta exatamente uma única vez. Conforme aponta Jurkiewicz [5]:

> "No caso do grafo G ser euleriano, já há o algoritmo de Fleury, bastante simples, que determina um caminho fechado euleriano (caminho fechado que atravessa cada aresta uma única vez), e então o Problema do Carteiro Chinês é facilmente resolvido (uma vez que qualquer caminho fechado euleriano de G é um caminho ótimo."

Se o grafo não for Euleriano, mas for semi-euleriano, isto é, possuir apenas dois vértices de grau ímpar, podemos utilizar o algoritmo de Dijkstra, como apresenta Jurkiewicz [5]:

> "Sejam u e v dois vértices de G, ambos de grau ímpar. Com a ajuda do Algoritmo de Dijkstra é possível encontrar o caminho de comprimento mínimo entre os vértices u e v e, a partir desse caminho, duplicamos cada uma de suas arestas. Feito isso ficamos com um grafo G* que é euleriano, pois G* é a união do grafo G com esse caminho e daí, os vértices u e v passam a ter grau dois cada um e os vértices internos desse caminho (que já tinham grau par antes da duplicação) também têm grau par. Daí agora, é só utilizar o Algoritmo de Fleury em G*"

A resolução do problema do Carteiro Chinês em grafos quaisquer, que passa pela determinação de um multigrafo euleriano H, com uma quantidade mínima de arestas, com H contendo G como subgrafo gerador, foge ao escopo deste trabalho. Para maiores detalhes ver Jurkiewicz [5].

Depois deste problema de Euler, alguns outros problemas inicialmente sem aplicação prática ou de aplicação bem específica deram origem a resultados que provaram, após algum tempo, serem de grande importância, sendo aplicados em diversas áreas do conhecimento.

O problema apresentado pelo matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) é um deles. Hamilton inventou, em 1859, um jogo a partir da representação plana de um dodecaedro (sólido com 12 faces pentagonais e 20 vértices). Cada um dos vinte vértices representava uma das seguintes cidades: Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapeste, Dublin, Edimburgo, Jerusalém, London, Melbourne, Moscow, Novosibirsk, New York, Paris, Pequim, Praga, Rio de Janeiro, Roma, San Francisco, Tokyo e Warsaw. O objetivo do jogo consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices (cidades), de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez.

No Problema de Hamilton, desejava encontrar um circuito que passe por todos os vértices de um Grafo exatamente uma vez, enquanto que no problema de Euler desejava-se um circuito passando por todos as arestas uma única vez.

A Figura 2.4 representa o grafo associado ao jogo bem como a solução apresentada (basta percorrer as arestas em negrito). Para formar o grafo abaixo basta imaginar um dodecaedro elástico e uma das faces sendo esticada pelos seus vértices até que todas as outras faces possam ser projetadas dentro dela.

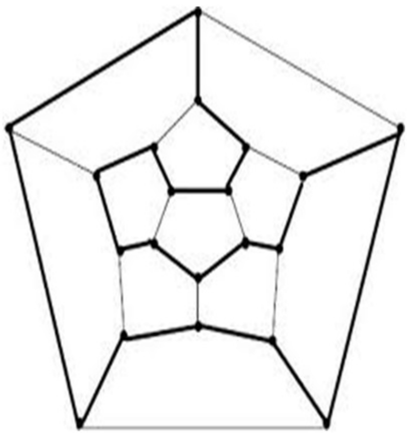

Figura 2.4: Grafo associado ao Jogo "Around the World"de Hamilton.

O grafo que possui um ciclo onde se passa por todos os vértices uma única vez é chamado de hamiltoniano. Hamilton exibiu a solução do problema (figura 2.4), mas dizer se um dado grafo é ou não hamiltoniano é um problema bem diferente do problema de Euler. É o que comenta Carvalho [3]

> "A situação do problema de verificar se um grafo é hamiltoniano é bem diferente da do problema anterior (Euler). Apesar de terem sido estudados por vários séculos, não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos. Há diversas famílias de grafos para os quais existe um circuito hamiltoniano (um exemplo trivial é um grafo completo, em que cada vértice é ligado a todos os outros); também é possível estabelecer certas condições que implicam na não-existência de um circuito. Mas uma caracterização geral não foi encontrada e, à luz de certos avanços em teoria da computação das últimas décadas, parece improvável que ela seja encontrada algum dia".

Existem alguns resultados simples que apresentam condições necessárias, isto é, todos os grafos hamiltonianos apresentam tais condições, mas ter tais condições não é garantia de que o grafo seja hamiltoniano. Esses resultados, juntamente com alguns algoritmos, têm ajudado a resolver alguns problemas envolvendo grafos hamiltonianos. Ainda segundo Carvalho [3], o problema de decidir se um grafo é hamiltoniano está na mesma lista de muitos outros problemas ilustres, que possuem características em comum:

1. O problema possui assimetria fundamental: é muito fácil convencer alguém da existência de um circuito hamiltoniano em um grafo: basta exibir tal caminho. No entanto, é difícil, em geral, convencer alguém da não-existência de um tal circuito.

2. Não se conhece um algoritmo eficiente para verificar se um grafo é hamiltoniano (por eficiente, entendemos aqui um algoritmo em que o número de passos seja limitado por um polinômio no número de vértices do grafo). Além disso, parece improvável que um tal algoritmo possa ser algum dia encontrado, porque sua existência implicaria na existência de algoritmos eficientes para um grande número de outros problemas, para os quais também não se conhecem algoritmos eficientes. Estes problemas (incluindo o de verificar a existência de circuito hamiltoniano) formam uma classe de problemas chamados NP-completos."

Notemos que as famílias dos grafos eulerianos e dos grafos hamiltonianos apresentam intersecções. Considerando U o conjunto de todos os grafos, E o conjunto dos grafos eulerianos e H o conjunto dos grafos hamiltonianos, podemos representar tal propriedade através do diagrama da Figura 2.5.

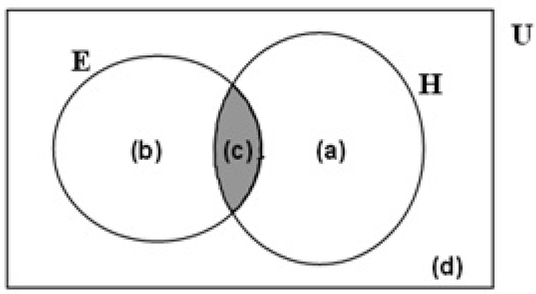

Figura 2.5: Diagrama de classificação de Grafos eulerianos e hamiltonianos.

Os grafos hamiltonianos possuem um famoso problema de otimização correspondente, conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Neste problema, temos um número finito de cidades que devem ser visitadas uma única vez por um único vendedor(caixeiro), que deve retornar à cidade onde partiu, de modo que sua rota tenha custo mínimo, onde o custo desta rota, geralmente associado à distância, é a soma dos custos das arestas pertencentes à rota. Conforme Santos[14], este problema é possivelmente o mais famoso da área de otimização combinatorial e ainda não são conhecidos algoritmos eficientes para resolver este problema e conjectura-se que tais algoritmos de fato não existam. É o que também indica Jurkiewicz [5].

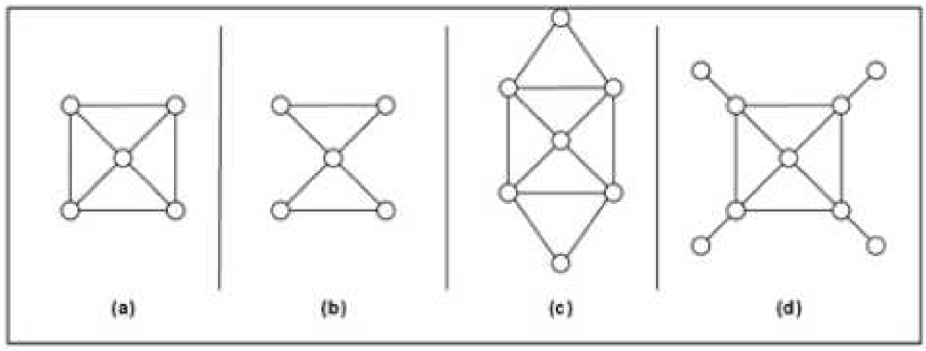

Figura 2.6: Exemplos de grafos eulerianos e/ou hamiltonianos.

"(...) Muito embora tenham sido dedicados anos de pesquisa à solução deste problema (PCV), progressos continuam a ser realizados. Este problema (PCV) pertence à classe de problemas NP-hard, ou seja, considerados difíceis no sentido de não existir um algoritmo em tempo polinomial capaz de permitir a obtenção de sua solução ótima."

Capítulo 3

Conceitos Introdutórios

Neste capítulo formalizamos conceitos básicos de grafos e suas principais características, através de algumas definições e resultados. Tais conceitos serão importantes para nossos estudos de campo.

Ressaltamos que neste trabalho estudamos grafos finitos e escrevemos apenas grafos.

Um grafo consiste de um conjunto de vértices (também conhecidos como pontos ou nós), e alguns pares desses (não necessariamente todos os pares) são conectados por arestas. Não importa se essas arestas são retas ou curvas; tudo o que importa é que par de vértices elas conectam. O conjunto de vértices de um grafo G é usualmente designado por V; o conjunto de arestas, por E. Portanto escrevemos $G = (V,E)$ para indicar que o grafo G tem o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E. A figura 3.1 abaixo representa o grafo.

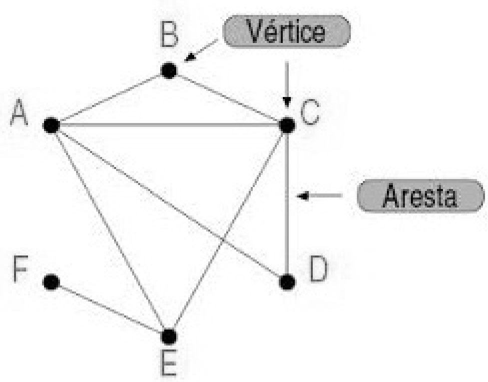

Figura 3.1: Grafo

Dizemos que dois vértices são adjacentes se há uma aresta conectando eles, ao passo que uma aresta é incidente aos vértices que ela conecta. Na literatura, é comum encontrarmos a diferença entre grafo e multigrafos. Multigrafos são grafos onde podemos ter arestas paralelas e laços. No presente trabalho, não será feita tal diferenciação. Laços são arestas incidentes a um mesmo vértice e arestas paralelas são arestas diferentes incidentes aos mesmos dois vértices. Observe o exemplo que segue:

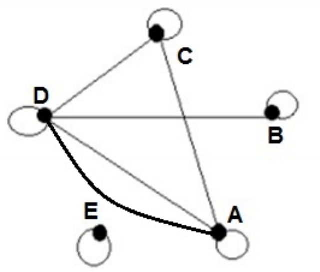

Figura 3.2: Grafo com laços e arestas paralelas

Na Figura 3.2 , todos os vértices apresentam laços e arestas paralelas.

Definição 3.1 *Chamamos grau de um vértice o número de arestas com extremidade neste vértice.*

Observemos que um laço contribui duas unidades para o grau do vértice sobre o qual ele é incidente.

Definição 3.2 *A soma dos graus dos vértices do grafo é chamada grau do grafo.*

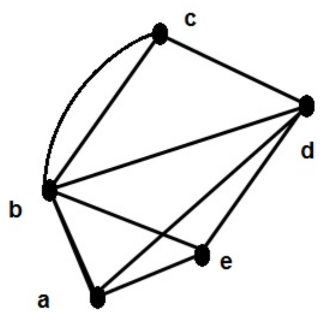

Figura 3.3: Grafo

Vértice	Grau
a	3
b	5
c	3
d	4
e	3

Tabela 3.1: Com grau de cada um dos vértices.

Do grafo representado na Figura 3.3, podemos concluir que o seu grau é 18.
Como decorrência destas definições podemos enunciar o teorema que segue.

Teorema 3.3 *A soma dos graus de todos os vértices em um grafo é duas vezes o número de arestas*

Demonstração Ao somarmos os graus dos vértices cada aresta é contada duas vezes. Logo, a soma será duas vezes o número de arestas □

Além da representação geométrica podemos representar um grafo através de matrizes. Segundo Santos [14] esta seria uma maneira útil de estabelecer uma relação entre grafos e a Álgebra. Boaventura Netto [1] destaca essa representação matricial para fins de cálculo. Ambos apontam duas matrizes possíveis de serem geradas por um grafo: a matriz de adjacência e a matriz de incidência. Vejamos a definição de cada uma delas.

Definição 3.4 *A matriz de incidência de um grafo $G = (VE)$ é uma matriz na qual as linhas estão associadas aos vértices e as colunas estão associadas às arestas. Um elemento da linha i e coluna j é 1 se a aresta j é incidente ao vértice i e 0 caso contrário.*

Definição 3.5 *A matriz de adjacência de um grafo $G = (VE)$ é uma matriz na qual as linhas e as colunas estão associadas aos vértices. O elemento da linha i e coluna j é o número de arestas que têm i e j como extremidades.*

Vejamos como ficaria a matriz de incidência e de adjacência do grafo que representa o Problema das Pontes de Konigsberg.

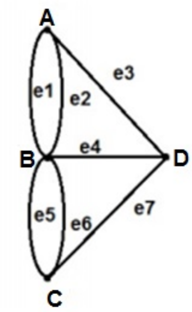

Figura 3.4: Grafo que representa o problema das Pontes de Koingsberg

Matriz de Incidência:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Adjacência:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.6 *Se G é um grafo com vértices $v_1; v_2; ... ; v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz An representa o número de caminhos de comprimento n de v_i até v_j.*

Definição 3.7 *Dizemos que um grafo é simples quando não possui laços nem arestas paralelas.*

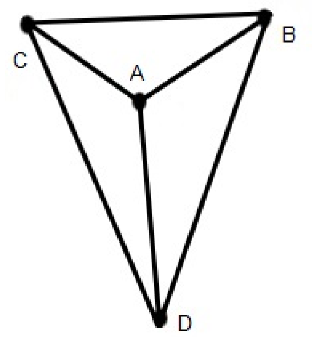

Figura 3.5: Grafo Simples

Definição 3.8 *Um Grafo completo de n vértices, denotado por K_n, é um grafo simples em que cada um dos n vértices é adjacente a qualquer outro.*

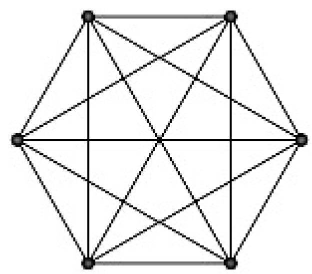

Figura 3.6: Grafo Completo K_6

Definição 3.9 ***Caminho*** *Um caminho entre os vértices v_1 e v_n é uma sequência alternada de vértices e arestas $v_1e_1v_2e_2 \ldots e_{n-1}v_n$ que começa no vértice v_1 e termina no vértice v_n sem que haja repetição de vértices. Pode ser representado por P_n. Um exemplo de caminho podemos ver na Figura 3.7 onde temos dois caminhos que leva de v_1 a v_4 ($v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4$ e $v_1e_1v_2e_2v_3e_4v_5e_5v_4$).*

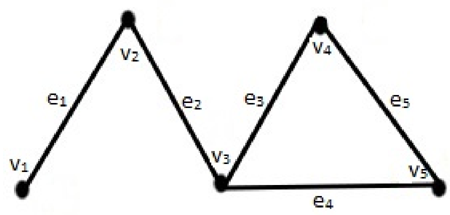

Figura 3.7: (a) Grafo P_5

Definição 3.10 *Dois vértices são ditos conectados se existe um caminho de um até o outro.*

Definição 3.11 *Grafo conexo é um grafo em que quaisquer dois vértices são conectados.*

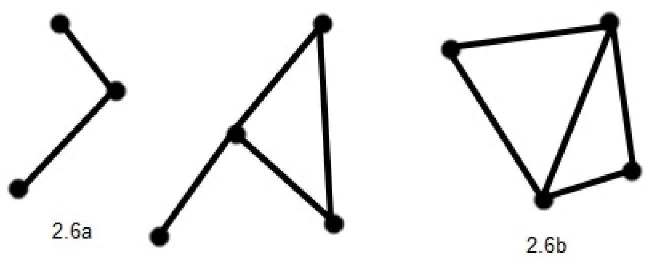

Figura 3.8: (a) Grafo não Conexo e (b) Grafo Conexo

Definição 3.12 *Grafos bipartidos são grafos nos quais o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos de tal maneira que vértices de um mesmo subconjunto não sejam adjacentes.*

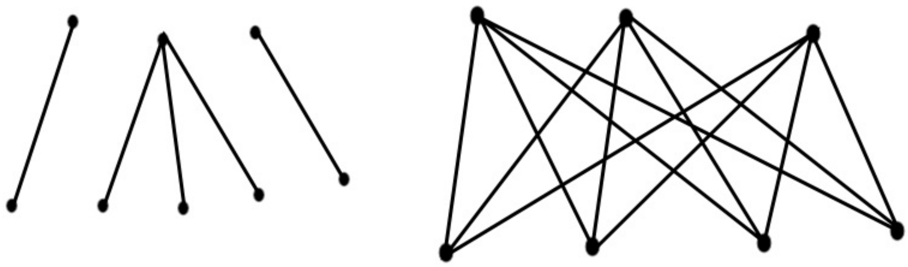

Figura 3.9: Grafo bipartido e grafo bipartido completo

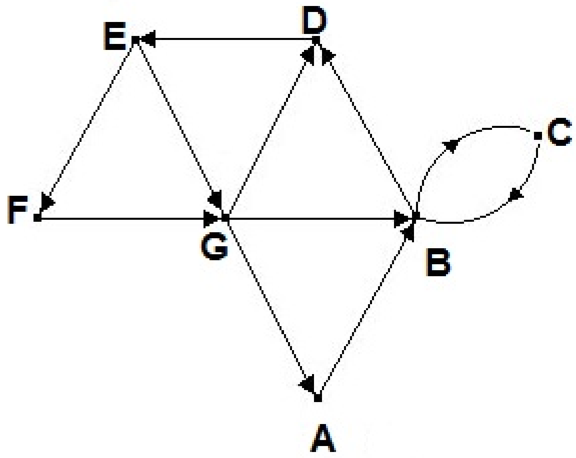

Figura 3.10: Dígrafo

Definição 3.13 *Dígrafo é todo grafo em que as arestas têm uma orientação.*

Uma aplicação importante que necessita de dígrafo para representá-la pode ser encontrada na Biologia. A cadeia alimentar, ou dependência alimentar pode ser representada por um grafo orientado, ou seja, um dígrafo. Temos, na Figura 3.10, um exemplo de dígrafo.

3.1 Caminhos Eulerianos

Um caminho Euleriano é um caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Podemos ter um caminho aberto ou fechado. A diferença entre um caminho euleriano aberto e um fechado está no final do caminho, que se iniciou, caso a partida não coincida com a chegada teremos um caminho euleriano aberto, caso contrário, termos um caminho fechado. Um grafo é dito euleriano se possuir um caminho euleriano.

Como já foi dito antes, os caminhos eulerianos levam este nome em homenagem a Leonard Euler. O problema das Pontes de Konigsberg, resolvido por Euler em 1736, é o exemplo histórico deste tipo de caminho. Hoje, podemos incluir além dos problemas de rotas, passatempos como desenhar figuras sem retirar o lápis do papel.

A seguir damos uma condição necessária suficiente para que um grafo seja euleriano.

Lema 3.14 *Se todo vértice de um grafo G (não necessariamente simples) tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice v_0 qualquer, iniciamos nosso caminho. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. □

Teorema 3.15 *Um grafo G conexo (não necessariamente simples) é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração: (⇒)Suponhamos que G tenha um caminho fechado de comprimento m. Cada vez que o caminho passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

(⇐) Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo, o qual é um caminho fechado. Dentre todas os caminhos fechados em G escolhemos um caminho T de comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem um caminho fechado que passa por todos os vértices de H, e podemos formar um caminho fechado maior concatenando (ligando) T com um caminho em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T. □

Teorema 3.16 *Um grafo G conexo (não necessariamente simples) é semieuleriano se, e somente se, contém exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Se existirem dois vértices de grau ímpar, a adição de uma aresta a um desses vértices conduz a um grafo euleriano, o circuito que contém essa aresta será fechado e, pela eliminação da aresta suplementar, o grafo torna-se semieuleriano. Como nunca haverá um número ímpar de vértices de grau ímpar, o teorema está demonstrado. □

3.2 Caminhos Hamiltonianos

Cerca de um século após Euler ter resolvido o famoso problema das Pontes de Konigsberg, Sir Willian Hamilton, em 1856, cria um jogo que não teve tanto sucesso quanto a sua representação. O jogo intitulado por Hamilton como Icosain Game era um "mundo" na forma de um dodecaedro.

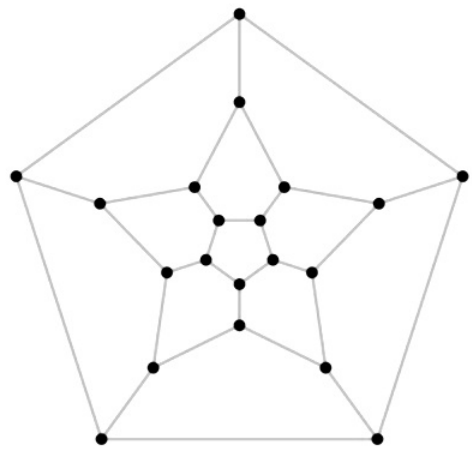

Figura 3.11: Icosain Game

A proposta do jogo era sair de Londres, uma das cidades do jogo, e voltar a Londres sem repetir cidades. A representação plana do jogo é obtida pelo "achatamento" do sólido dodecaedro, de tal forma que uma das faces seja esticada" como se as arestas fossem elásticas. A representação planar do jogo gera um grafo. No grafo, as cidades estariam representadas pelos vértices e as arestas representariam as ligações entre as cidades. A Figura 3.11 mostra esta representação. Tal situação gera a definição do que hoje conhecemos como hamiltonianos.

Definição 3.17 *Um caminho hamiltoniano em um grafo $G = (V,E)$ é um caminho que possa exatamente uma vez por cada vértice. Dizemos que um grafo é hamiltoniano se ele possui um caminho hamiltoniano.*

Apesar do simples enunciado do problema a caracterização deste tipo de caminho é complexa de ser enunciada. Pode-se verificar se um grafo possui ou não caminhos eulerianos apenas analisando o grau de cada vértice. Por outro lado, com relação aos caminhos hamiltonianos, não temos uma caracterização simples como esta; no entanto, temos como resolvê-lo, como será indicado mais adiante.

Um problema decorrente desse modelo de caminho é conhecido como o Problema do Caixeiro Viajante que poderia ser assim enunciado:

Suponha que um caixeiro viajante tenha de visitar n cidades diferentes, iniciando e encerrando sua viagem na primeira cidade. Suponha, também, que não importa a ordem com que as cidades são visitadas e que de cada uma delas pode-se ir diretamente a qualquer outra. O problema do caixeiro viajante consiste em descobrir a rota que torna mínima a viagem total.

O problema consiste em fazer esta trajetória pelo menor caminho possível. Podemos resolver este problema por enumeração, ou seja, achamos todas as rotas possíveis e, com

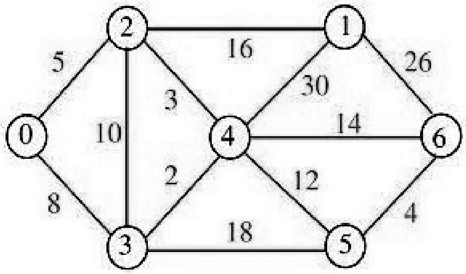

Figura 3.12: Grafos que representa a situação do caixeiro viajante

a ajuda de um computador, calculamos o comprimento de cada uma e, então vemos qual a menor. Parece simples para um leigo mas, até mesmo enumerando poderíamos levar um tempo proporcional ao fatorial do número de vértices do grafo. Com um número reduzido de cidades o problema de enumerar as rotas é relativamente simples, mas a busca por um método de resolução mais eficaz envolvendo um tempo polinomial na sua resolução tem envolvido muitos matemáticos aplicados pelo mundo todo. Acredita-se que tal método não exista. A complexidade do problema pode ser facilmente verificada à medida que aumentamos o número de cidades em questão. O problema ainda hoje é fonte e fruto de muita pesquisa, pois a sua única solução conhecida envolve um tempo computacional que é proporcional ao fatorial, ou seja, que cresce como função exponencial do número de cidades. Este problema costuma ser chamado de um problema NP Completo, que é uma classe de problemas cuja solução em tempo proporcional a um polinômio não é conhecida. Hoje é um dos problemas que merece a atenção de muitos matemáticos pelo mundo todo. Mas muitos esforços no sentido de encontrar algum método mais eficiente ainda tem motivado muitos pesquisadores.

Em termos de aplicação podemos citar aqui problemas genéricos de rotas, isto é, problemas em que são conhecidos pontos de entrega/passagem/distribuição/coleta de produtos via algum tipo de transporte e o problema é determinar a menor distância (mais geralmente o menor custo) a ser percorrida. Exemplos concretos desse tipo de problema incluem coleta de lixo urbano, distribuição/coleta postal, transporte de produtos, distribuição de combustíveis, transporte de passageiros (urbano/regional/rodoviário/aéreo/ferroviário) e inúmeros outros problemas de logística.

3.3 Planaridade

3.3.1 Grafo Planar

Um grafo é chamado de *planar*, se ele pode ser desenhado como um mapa no plano, isto é, podemos representar seus vértices por pontos diferentes no plano, e suas arestas por curvas conectando os pontos apropriados, de modo que essas curvas não se intersectam (exceto, é claro, quando duas arestas têm uma extremidade comum, caso em que as duas curvas correspondentes terão esse ponto em comum).Pelikán [12]

Apesar de estarmos definindo planaridade através do desenho, não bastaria a observação do mesmo para caracterizar um grafo como planar ou não. Um grafo cujas arestas se cruzem não é, necessariamente, não planar. Pode ocorrer que haja uma outra forma de desenhar o mesmo grafo de tal forma que suas arestas não se cruzem. Um exemplo desse tipo de situação está retratada na figura 3.13 em que o mesmo grafo tem uma representação planar.

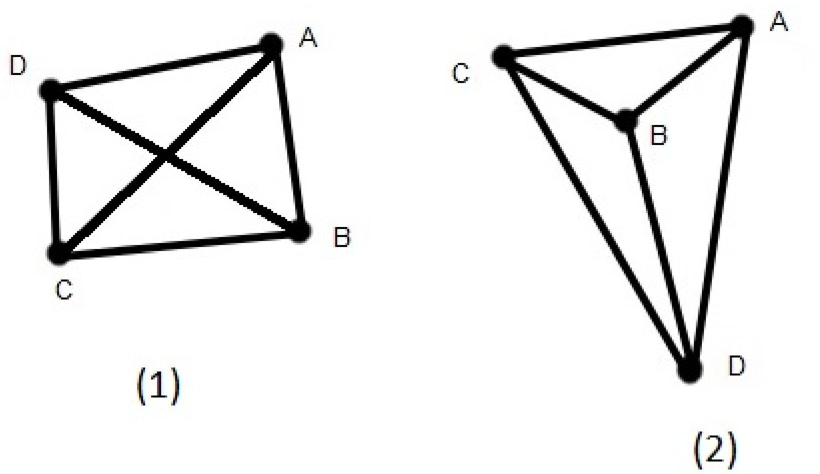

Figura 3.13: Imagem (2) representa a forma planar da imagem (1)

Há outras formas de caracterização da planaridade que não são somente geométricas, como aparece em Boaventura Netto [1] , que fazem uso de teoremas importantes como Teorema de Kuratowski, MacLane e Whitney. Com o uso destes teoremas podemos fornecer condições necessárias e suficientes para que um grafo seja planar. O estudo destes resultados foge ao desígnio deste trabalho.

Há importantes aplicações de planaridade relacionadas a problemas modernos. O desenvolvimento de circuitos impressos, por exemplo é uma delas. Distribuição de energia, desenho de redes de comunicação, projetos de tráfego/mobilidade urbana, projetos de circuitos elétricos e de construção civil são outros exemplos que aplicam soluções de problemas de planaridade.

A Figura 3.14 retrata um caso clássico de três casas que precisam ser ligadas a três utilidades via ligações subterrâneas a uma central de distribuição de cada uma destas utilidades. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem? Note-se que, em linguagem de teoria de grafos, essa pergunta é equivalente a saber se o grafo bipartido completo apresenta uma representação planar.

O grafo da Figura 3.14 é denotado por $k_{3,3}$. De maneira geral o grafo $k_{n,n}$ é um grafo bipartido com n vértices em cada um dos 2 subconjuntos de vértices. Onde cada vértice de

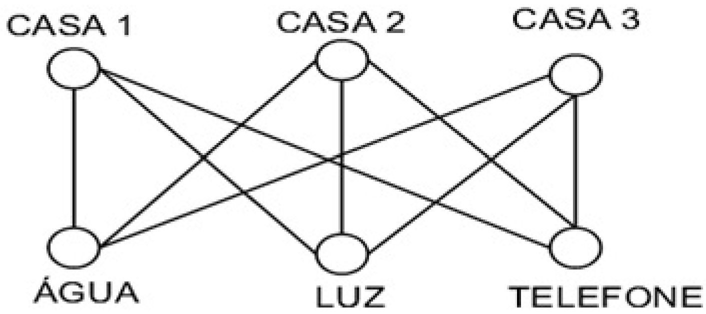

Figura 3.14: Distribuição de Utilidades

um conjunto está conectado a todos os vértices do outro conjunto.

Um teorema que se destaca em planaridade é o Teorema de Euler que dá uma condição necessária a ser satisfeita por um grafo planar. A representação planar de um grafo divide o plano em um número finito de regiões chamadas face. Vejamos o Teorema de Euler e sua demonstração.

Teorema 3.18 ***(Euler)*** *Num grafo planar convexo vale.*

$$f - m + n = 2 \tag{3.1}$$

Demonstração: Esse teorema é demonstrado por indução sobre o número de arestas. Tomemos um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore, tem-se:

$$\begin{aligned} f - m + n &= 2 \\ 1 - (n-1) + n &= 2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora suponha que o grafo é conexo e não é árvore, e considere que o teorema é válido para uma aresta menor. Desta forma existe um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo, e o grafo fica com uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação vale para o novo grafo. Temos então:

$$(f-1) - (m-1) + n = 2,$$

e portanto,

$$f - m + n = 2. \square \tag{3.3}$$

Nota-se que se pode acrescentar arestas a um grafo planar sempre que uma porção do plano estiver limitada por um ciclo de comprimento maior do que 3. Sendo assim, um **grafo maximal planar**, que é definido como um grafo ao qual não se pode acrescentar arestas sem comprometer a planariedade; tem uma representação compostas por ciclos de comprimento 3. O que nos mostra outra relação importante.

Teorema 3.19 *Num grafo planar conexo G vale m* $\leq$ *3n - 6; a igualdade vale se G é maximal planar.*

Demonstração: Ao se contarem as arestas de cada face, conta-se duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face tem no mínimo 3 arestas (a igualdade valendo no caso maximal), temos:

$$3f \leq 2m, \tag{3.4}$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} f - m + n &= 2, \\ 3f - 3m + 3n &= 6, \\ 2m - 3m + 3n &\geq 6, \\ m \leq 3n &- 6\square \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorema 3.20 *O grafo completo* K_5 *não é um grafo planar.*

Ao se conhecer este Teorema 3.19, prova-se que realmente K_5 não é planar, como é afirmado no 3.20.

Para K_5 :

$$\begin{aligned} m &\leq 3n - 6 \\ 10 &> 3 \cdot 5 - 6. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Teorema 3.21 *Num grafo planar bipartido conexo G vale :*

$$m \leq 2n - 4. \tag{3.7}$$

Demonstração: Observa-se que em um grafo bipartido só tem ciclos pares. Cada face tem no mínimo 4 arestas.

$$4f \leq 2m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} f - m + n &= 2, \\ 4f - 4m + 4n &= 8, \\ 2m - 4m + 4n &\geq 8, \\ m \leq 2n &- 4.\square \end{aligned}$$

Vemos que $K_{3,3}$ não é planar, pois:

$$\begin{aligned} m &\leq 2n - 4 \\ 9 &> 26 - 4 \end{aligned}$$

Definição 3.22 *Dois grafos são homeomorfos se puderem ser obtidos a partir de um mesmo grafo por subdivisões elementares, nas quais uma única aresta x-y é substituída por duas novas arestas, x - v e v - y que se conectam a um novo vértice.*

Exemplo:

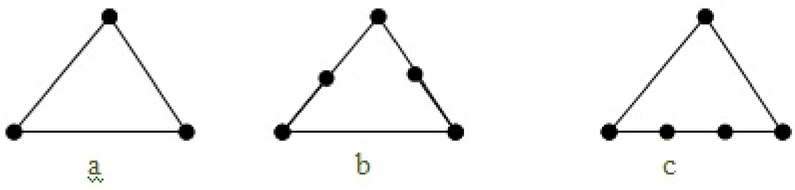

Figura 3.15:

Os grafos b e c são homeomorfos porque forem obtidos de a por divisões elementares mas não podem ser obtidos um do outro pelo mesmo procedimento.

Teorema 3.23 *(Teorema de Kuratowski). Um grafo é não-planar se, e somente se, contém um subgrafo homeomorfo K_5 ou $K_{3,3}$*

3.4 Coloração

Em Santos [14] encontramos a referência ao Problema das Quatro Cores como sendo o mais famoso e conhecido da teoria de grafos, que desafiou matemáticos famosos por muito tempo, sendo este um problema envolvendo grafos planares.

Sabe-se que a cartografia teve uma importância muito significativa no desenvolvimento das civilizações. Muito cedo, mapas foram sendo desenhados e podemos atribuir a eles descobertas e indicativos para que novas descobertas pudessem ser feitas. Na época das navegações a sua difusão atinge o seu auge. O homem de hoje, com tanta tecnologia como recurso disponível, talvez tenha dificuldades de compreender que nem sempre foi assim.

Os mais jovens já nasceram num mundo informatizado e ligado em rede (Internet).

Desde muito cedo se conjecturou que quatro cores bastariam para colorir mapas; ou seja, cartógrafos acreditavam que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Matemáticos tomaram conhecimento deste fato e perseguiram por muito tempo a sua prova. A conjectura seguiu até 1976 quando foi possível, através do uso de aproximadamente 1200 horas de cálculo computacional, provar que, de fato, tal conjectura era verdade, este resultado pode ser encontrado nos artigos de Apple e Haken publicados em 1977. Hoje podemos afirmar que todo mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores. Sabe-se também que outras situações, além da cartografia, fazem uso deste resultado. O teorema hoje é conhecido como Teorema das Quatro Cores.

A prova do Teorema das Quatro Cores está muito além da proposta deste trabalho.

A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Se usarmos a mesma representação do problema das pontes de Konigsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteira comum, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Vejamos como o mapa da Figura 3.16 será representado como Grafo que está representado na Figura 3.17.

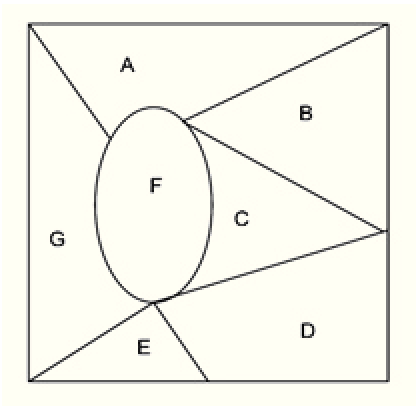

Figura 3.16: Mapa

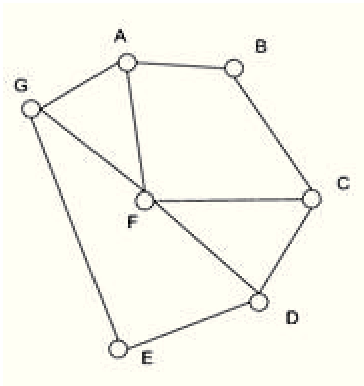

Figura 3.17: Grafo correspondente ao mapa da figura 3.16

Dessa forma, a coloração de mapas é equivalente a **colorir grafos planares**, ou seja, atribuir cores a vértices de um grafo planar de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Naturalmente, o problema de coloração não se limita a grafos planares. E, portanto, o Teorema das Quatro Cores não se aplica. Note-se que, por exemplo,o grafo completo K_n de n vértices necessita de n cores distintas para ser colorido. Logo, se $n \geq 4$, mais de quatro cores são necessárias.

Chamamos de **número cromático** de um grafo G o menor inteiro k para o qual o grafo G pode ser colorido com k cores.

Problemas modernos que utilizam o conhecimento acumulado sobre o problema das quatro cores são problemas de atribuição em geral. Um exemplo concreto é a atribuição de horários para reunião de comissões que têm membros em comum.

Teorema 3.24 ***(Teorema das 4 cores.)*** *Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.*

Capítulo 4

Aplicações

O presente capítulo apresenta a prática desenvolvida no Ensino Médio com os conceitos de Teoria de Grafos. As aulas foram estruturadas pensando no desenvolvimento histórico da Teoria de Grafos. Pensamos que seria importante apresentar aos alunos envolvidos na proposta os problemas históricos conhecidos em Teoria de Grafos. Cada aula foi planejada e refletida quanto aos objetivos que teríamos com a mesma. Neste capítulo apresentaremos as aulas com seus respectivos objetivos e atividades de como deve ser abordado a teoria dos Grafos e depois avaliar como os alunos reagiram frente a proposta de trabalho.

A escola que foi aplicada as atividades foi A E.E.E.M. MARIA SOLEDADE ASSIS FREITAS, localizada na cidade de cajazeirinhas, nas turmas de 2^o A (manhã) com um total de 19 alunos, 2^o EJA (noite) com o total de 11 alunos e 3^o EJA (noite) com o total de 12 alunos. Os discentes, a princípio, acharam que as aulas iram ser tediosas, mas com o desenvolvimento do projeto percebemos a aceitação das atividades e a motivação em participar.

Discussões pertinentes foram levantadas, e a surpresa com a potencialidade desta assunto, revelada nos momentos de exposição e investigação, motivou os discentes a realizarem diversas perguntas, contribuindo ainda mais para o aprimoramento do trabalho.

4.1 Aula 1: A História

4.1.1 Objetivo

Na primeira aula sugerimos por objetivo uma retomada histórica do surgimento da Teoria de Grafos na matemática bem como a sua importância nos dias atuais.

4.1.2 Atividade.

A revisão histórica abordou:

1. Matemática Discreta como um dos campos da Matemática.

2. Desenvolvimento da Matemática Discreta até a Segunda Guerra Mundial com destaque para os três problemas:

   (a) Problema das Pontes de Konisgberg (1736) resolvido por Leonhard Euler transformando o problema em um grafo.

   (b) Caminhos hamiltonianos (1859), Sir Willian Hamilton.

   (c) Problema das quatro cores (1852/1878) prova em 1976 com publicação em 1977.

3. Desenvolvimento da Matemática Discreta após a Segunda Guerra, início do século XX.

4. Acontecimentos e mudanças na sociedade que geraram a necessidade do desenvolvimento desta área da Matemática: mundo industrializado, necessidade de otimização e organização de alguns processos, recursos e serviços básicos (distribuição de energia, comunicação, correios, coletas de lixo, entregas em grandes cidades, rotas, entre outros).

Após esta introdução foi proposto o Problema das Pontes Konisgberg (1736). Um desenho da cidade de Konisgberg foi projetado e foi colocada ao grupo a questão tal e qual conhecemos:

> "Os moradores da cidade de Konisgberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada ponte exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida".

O problema foi proposto a Euler e agora está posto para vocês para que respondam se é possível ou não. Para qualquer resposta deve ser dado um argumento que sustente a resposta dada. Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes de uma maneira sintética, mas fiel aos elementos essenciais.

A idéia era que o grupo pensasse no problema e verificasse se é possível solucioná-lo. Caso não fosse deveriam argumentar o motivo. Foram estimulados a criar uma representação para o problema (modelagem). Acreditávamos que fariam uma representação na forma de um grafo e com base nela partiríamos para a definição dos elementos de grafos (vértices, arestas, faces).

Figura 4.1: Pontes de Koenigsberg

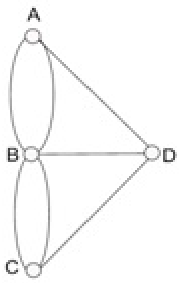

Figura 4.2: Grafo representando o Problema das Pontes

4.2 Aula 2: Os caminhos Eulerianos

4.2.1 Objetivo

A segunda aula tem por objetivos: explorar atividades de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel e, generalizar a situação estabelecendo uma condição para que figuras possam ser desenhadas desta forma.

4.2.2 Atividade

Algumas atividades deram continuidade a aula: a exploração inicial foi com o problema da aula anterior e atividades que exploravam a possibilidade de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel. A ideia era trabalhar com as condições para que um grafo tenha um caminho euleriano.

1. Retomar a atividade da aula anterior. Verificar quais foram as representações que os grupos fizeram. Definir o que é um grafo, quais são os seus elementos.

2. Os alunos formarão grupos de no máximo quatro alunos. Encontre um caminho que percorra todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel.

Regra: só pode ir de bolinha para bolinha.

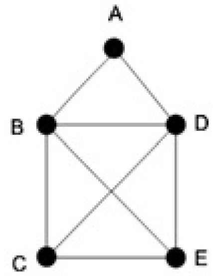

Figura 4.3: Encontre o caminho sem tirar o lápis do papel.

(a) Qual o caminho encontrado?

(b) É possível começar por qualquer ponto da figura?

(c) Por quê?

(d) Discuta, no grupo, possíveis argumentos que sustentem a sua resposta.

Atividade 2

Observe as figuras que seguem e conclua se é possível encontrar um caminho passando por todos os pontos sem tirar o lápis do papel. (Sem repetição de aresta.)

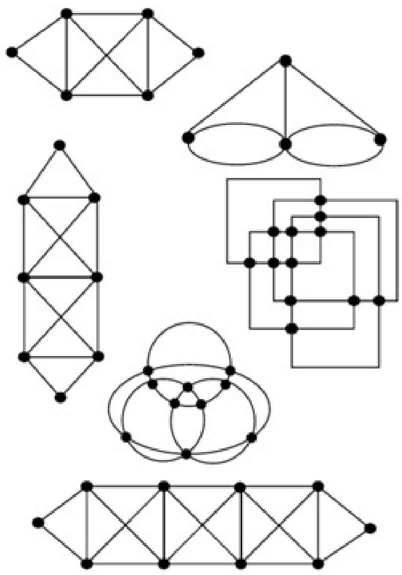

Figura 4.4: É possível desenhar sem tirar o lápis do papel?

4.3 Aula 3: Conceitos Importantes da Teoria de Grafos.

4.3.1 Objetivo

A aula três tinha como objetivo retomar a representação de grafos, destacando os seus elementos (vértices e arestas), definir grau dos vértices e grau de um grafo. Pretendia-se, através da determinação do grau dos vértices de vários grafos e do grau dos grafos apresentados, chegar à generalização de que todo grafo tem grau par.

Pretendia-se também definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e chegar na condição de existência para que um grafo tenha um caminho euleriano.

No final da aula seria proposto um problema e solicitado que os alunos fizessem um grafo para modelar a situação posta no problema.

4.3.2 Atividade

Atividade 1:

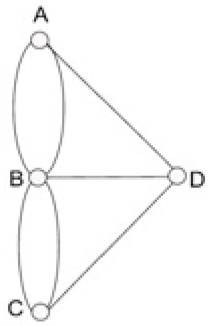

Figura 4.5: Grafo representando o Problema das Pontes.

Voltando ao nosso problema inicial das Pontes. Já vimos na aula anterior que esta maneira de representar a situação é chamada de grafo. Ou seja, um grafo é um conjunto de pontos no plano, chamados de vértices, ligados por linhas chamadas de arestas.

A partir da retomada, foi definido grau de um vértice, grau de um grafo e o que vem a ser caminhos eulerianos.

Definição 4.1 *Chamamos de grau de um vértice o número de arestas com uma das extremidades neste vértice. Anotaremos grau de um vértice A como d (A). Caso o grafo apresente laços, o mesmo contará duas unidades.*

Definição 4.2 *Chamamos de grau de um grafo a soma dos graus dos vértices deste grafo.*

Definição 4.3 *Caminho euleriano é todo caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um caminho euleriano é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada ou, é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.*

Atividade 2:

1. Num grupo de quatro pessoas queremos representar as possibilidades de diálogo entre elas. Observe os idiomas que cada uma fala:

A: inglês, espanhol, italiano e português

B: inglês, espanhol e português

C: inglês e espanhol

D: inglês.

Construa um grafo que represente as possibilidades de diálogo entre essas pessoas.

Atividade 3:

Para cada grafo representado abaixo, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

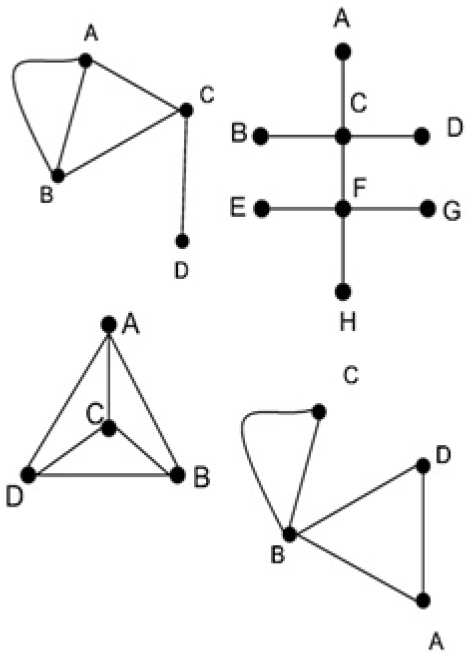

Figura 4.6: Determine o grau dos grafos e dos vértice dados.

Observando os graus de cada grafo acima daria para fazer alguma generalização? Discuta com o colega e tente fazê-la.

4.4 Aula 4: Grafos e Representação Matricial

4.4.1 Objetivo

A quarta aula tinha por objetivo o uso de matrizes no estudo de grafos. Foi destacada a necessidade de representar um grafo de uma maneira que pudesse ser tratada ou processada no computador. Apesar de a um grafo podermos associar uma matriz de incidência e uma matriz de adjacência, optamos por trabalhar apenas com a matriz de adjacência. As atividades propostas incluíram uma linguagem bem específica de uma forma intencional. Os alunos se depararam com definições e teoremas e tiveram que buscar o entendimento das informações ali postas. Julgava-se que neste momento fazia-se necessário o aparecimento da linguagem. As atividades buscaram a representação nos dois sentidos: dado um grafo determinar a matriz de adjacência e, dada a matriz determinar o grafo a ela associado. Esperava-se que os alunos compreendessem a importância da matriz de adjacência e a sua importante aplicação.

4.4.2 Atividade

As atividades apresentavam definições e teoremas em linguagem matemática.

Definição 4.4 *Seja G um grafo com vértices ordenados* v_1, v_2, v_3,... *A matriz de adjacência de G, A =(*a_{ij}*) onde* a_{ij} *é o número de arestas de* v_i *até* v_j.

1. Determine a matriz de adjacência de cada grafo representado abaixo:

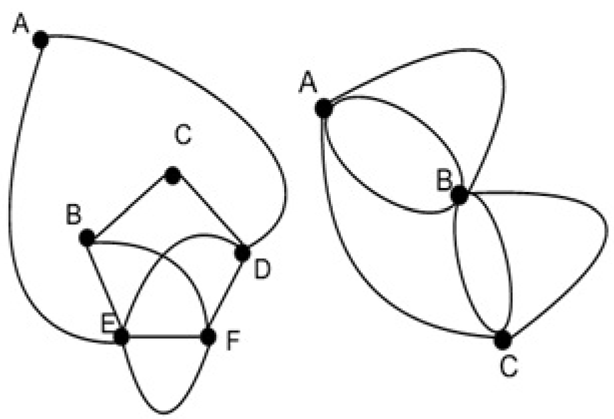

Figura 4.7: Qual é a matriz de adjacência de cada grafo?

2. Para cada matriz de adjacência dada abaixo determine o seu grafo correspondente:

(a)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	0
E	0	1	1	0	0

(b)

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	1	1
B	1	0	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	0	1	1
D	0	1	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	1	0
F	1	1	1	0	1	0	0
G	1	0	1	0	0	0	0

(c)

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	1	2	0	2
D	1	0	1	0

(d)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	1	1	1	1	0

(e)

	A	B	C	D	E
A	0	1	3	0	2
B	1	0	2	0	0
C	3	2	0	1	0
D	0	0	1	0	3
E	2	0	0	3	0

3. (a) Analisando o segundo grafo da Figura 4.7, determine quantos caminhos de comprimento 2 temos de A até C.

   (b) Analisando o grafo (e) construído a partir da matriz da questão 2 determine quantos caminhos de comprimento 2 temos de A até D.

4. Teorema: Se G é um grafo com vértices $v_1; v_2; \ldots ; v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz An representa o número de passeios de comprimento n de vi até v_j.

   Faça a verificação deste teorema no segundo grafo da da figura 4.4.2 e no item (c) da atividade três para $n = 2$ e $n = 3$.

4.5 Aula 5: Avaliação

4.5.1 Objetivo

No mês de outubro foi dada aos alunos uma previsão de todas as atividades que teriam até o final do período letivo. Foi combinado para esta data uma avaliação final que abordaria matrizes, determinantes e grafos. A avaliação abordou o que cada grupo trabalhou até o momento em termos de grafos. Esperávamos que aplicassem adequadamente a condição de existência de caminhos eulerianos, abertos ou fechados, que soubessem encontrar a matriz de adjacência de um grafo e soubessem, dada a matriz, representar o grafo correspondente bem como o número de caminhos de tamanho 2. Também foi proposto um problema inédito que pode ser respondido através do conceito de grau de um grafo (número de amigos).

4.5.2 Atividade

Questões de grafos que faziam parte da avaliação proposta:

1. Num grupo de 6 pessoas é possível que cada uma tenha exatamente 3 amigos? E num grupo de 5 pessoas é possível que cada pessoa tenha exatamente 3 amigos? Justifique a sua resposta.

2. Determine o grau de cada vértice e o grau do grafo representado na figura 4.8 Este grafo pode ter um caminho euleriano? Por quê?

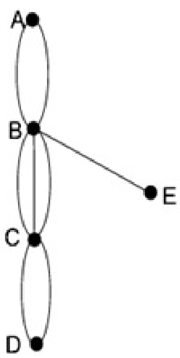

Figura 4.8: Grafo da questão 2

3. A figura 4.9 pode ser feito sem tirar o lápis do papel? Por quê?

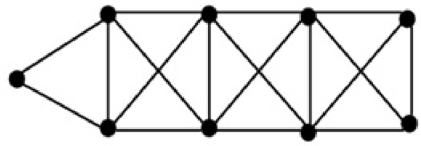

Figura 4.9: Grafo da questão 3

4. Determine a matriz de adjacência do grafo da figura 4.8.

5. Construa o grafo cuja matriz de adjacência é dada abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Faça o quadrado da matriz de adjacência dada acima e dê uma interpretação para os resultados obtidos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.6 Aula 6: Caminhos Hamiltonianos

4.6.1 Objetivo

O objetivo da sexta aula é trabalhar com o Problema do Caixeiro Viajante. Num primeiro momento propor para o grupo o problema proposto por Hamilton que seria de sair de Londres e percorrer um determinado número de cidades sem passar por uma cidade mais de uma vez e retornar para Londres. Mostrar um dodecaedro para que os alunos visualizem o problema tal e qual Hamilton propôs.

4.6.2 Atividade

Inicialmente mostrar aos alunos o dodecaedro e contar a proposta de Hamilton de representar Londres por um dos vértices e os demais vértices como outras cidades do mundo. Propor em seguida que façam um grafo que represente a situação.

Na sequência solicitar que os alunos encontrem uma solução para o problema de Hamilton que era sair de Londres, percorrer todas as cidades do "mundo" representado pelo dodecaedro, sem repetir cidade e voltar para Londres.

Fazer uma comparação entre este problema e o problema de Euler. Enquanto Euler preocupava-se em percorrer todas as pontes (arestas) uma única vez, Hamilton desejava que se passasse por todas cidades (vértices) uma única vez. Assim, nos caminhos eulerianos passamos por todas as arestas uma única vez. Já nos caminhos hamiltonianos passamos por todos os vértices uma única vez.

1. ICOSAIN GAME

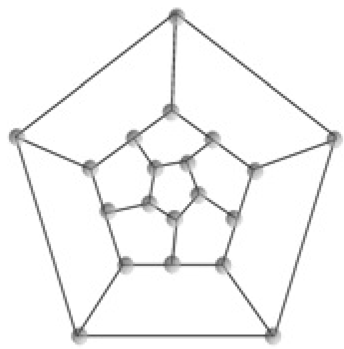

Figura 4.10: Icosain Game

   Em 1856, Hamilton inventou um jogo que chamou de "Icosain Game" e que consistia em descobrir uma maneira de, partindo de Londres, visitar cada cidade do "mundo" exatamente uma vez. Entendendo-se por "mundo" o dodecaedro representado acima, no qual os vértices representam as cidades e as arestas representam os caminhos entre as cidades. Encontre um caminho que cumpra a proposta de Hamilton, ou seja, sair de Londres e visitar todas as cidades do "mundo"passando uma única vez por cada uma delas.

2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

   Um caixeiro viajante trabalha com 4 cidades conhecidas, e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela abaixo, em quilômetros.

   (a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

   (b) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia no ponto A

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

3. PROBLEMA DE ENTREGA

   Um supermercado faz entregas de ranchos a domicílio. A empresa tem a seguinte política: a entrega deve ser feita da melhor forma possível, ou seja, o caminho percorrido pelo caminhão de entrega deve ser otimizado (o caminho deve ser o menor possível). Hoje devem ser entregues 7 ranchos e as distâncias estão expressas na tabela dada:

	SUPER	A	B	C	D	E	F	G
SUPER	0	100	200	300	400	500	600	700
A	100	0	100	200	300	400	500	600
B	200	100	0	100	200	300	400	500
C	300	200	100	0	100	200	300	400
D	400	300	200	100	0	100	200	300
E	500	400	300	200	100	0	100	200
F	600	500	400	300	200	100	0	100
G	700	600	500	400	300	200	100	0

   (a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

   (b) É possível encontrar tal caminho? De que maneira podemos determinar o melhor caminho? Qual a dificuldade de tratar este problema? Quantos caminhos diferentes temos nestas condições?

4. O PROBLEMA DA COLETA DE CORRESPONDÊNCIAS

   A Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos mantém vários postos de coleta de correspondência espalhados pela cidade, inclusive em bairros mais afastados. A localização e a quantidade destes postos são por vezes modificados de forma que diariamente o motorista responsável por recolher a correspondência recebe um esquema que mostra o melhor caminho para passar por todos os postos de coleta. Este esquema é montado manualmente por um funcionário da E.C.T. Este funcionário não aguenta mais as reclamações dos motoristas de que as rotas que ele traça nunca são as melhores e pede demissão. O chefe, sem saber como tratar o problema, resolve contratar um especialista (você), para resolvê-lo. Como você modelaria o problema? Como encontrar a melhor rota? Que peculiaridades devem ser tratadas?

4.7 Aula 7: Coloração

4.7.1 Objetivo

A sétima aula tem por objetivo trabalhar com Coloração de Mapas.

4.7.2 Atividade

1. Propor inicialmente uma atividade de colorir figuras com o menor número de cores possíveis respeitando a condição de que regiões com fronteiras comuns não pode ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto podem ter a mesma cor.

A partir desta atividade enunciar o Teorema das Quatro Cores e fazer uma pequena retomada histórica do problema como segue:

2. Todo mapa gera um grafo planar e reciprocamente todo grafo planar gera um mapa.

   "Assim, o teorema das quatro cores pode ser enunciado na teoria de grafos da seguinte maneira: todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores."

Qual a relação que coloração de mapas tem com grafos ? É bastante forte. Se usarmos a mesma representação do problema das pontes de Konigsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteira comum, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Colorir um grafo significa dar cores aos seus vértices de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Também pretende-se que as figuras sejam transformadas em grafos. Neste momento dar a definição de grafo planar. Sugerimos que seja feita uma retomada histórica do problema de coloração de mapas.

O problema de coloração de mapas é um antigo e importante problema que foi um dos primeiros estímulos para o desenvolvimento da teoria de grafos. Anunciou-se que um mapa pode ser colorido com quatro cores. Por mais de 100 anos, era uma conjectura que qualquer mapa poderia ser colorido com quatro cores ou menos cores. No entanto, apesar do trabalho de algumas das melhores mentes matemáticas do mundo, esta conjectura das quatro cores não era nem provada nem refutada e, o problema das quatro cores continuava sem solução. Finalmente, em 1977, a conjectura das quatro cores foi provada. A prova original do teorema das quatro cores envolveu o uso de computadores de alta velocidade para checar com certeza casos difíceis e envolveu cerca de 1200 horas de tempo de uso dos computadores (ou tempo computacional). Uma das mais importantes intervenções do tratamento do problema de coloração de mapas e k-colorações de mapas foi a transferência do problema da coloração de mapas para um problema equivalente, mas um tanto mais tratável.

3. A proposta é partir dos problemas históricos, mas também trazer à discussão problemas contemporâneos que lançam mão da teoria de grafos no seu tratamento. Sugerimos a proposta de um problema afim à coloração: o problema de planejamento de horários:

É necessário fazer uma programação (planejamento) dos encontros semanais de algumas comissões do governo estadual eleito recentemente. Para fazer tal programação (planejamento) é preciso ter cuidado para não programar encontros num mesmo dia de comissões que têm membros em comum. Suponhamos que os encontros devam ser 3a, 4ª e 5ª feiras pela manhã. A tabela abaixo representa um resumo das comissões que têm membros em comum.

	Finanças	Educação	Meio ambiente	Saúde	Transporte	Segurança
Finanças	0	0	0	0	0	1
Educação	0	0	1	1	0	1
Meio ambiente	0	1	0	1	0	0
Saúde	0	1	1	0	1	1
Transporte	0	0	0	1	0	1
Segurança	1	1	0	1	1	0

Observação: A entrada a_{ij} da tabela é 1 quando as comissões i e j têm membros comuns, e 0 caso não tenham membro comum. Construa um grafo que represente as informações da tabela. Sugestão: represente as comissões por vértices e as arestas indicando que determinadas comissões têm membros comuns. Encontre uma solução para o problema. Será que ela é única?

4.7.3 Aula 8: Planaridade

4.7.4 Objetivo

A oitava aula tem por objetivo a abordagem da planaridade em grafos.

4.7.5 Atividade

Problema 1:

Na construção de uma casa é necessário abastecê-la com água, luz e telefone. Na cidade de Brasília, todo o abastecimento é subterrâneo. Se você já esteve na capital brasileira deve ter notado que não há fiação aparente. Faça um grafo que represente o abastecimento de três casas vizinhas com as utilidades citadas (água, luz e telefone). Observe a representação feita. É possível que em tal abastecimento não haja o cruzamento das respectivas utilidades?

Problema 2:

A figura 4.11 apresenta três pontos A, B e C e três triângulos. É possível ligar os pontos A, B e C com os três triângulos sem que as linhas se cruzem?

Qual a relação que existe entre o problema das utilidades e o problema dos triângulos?

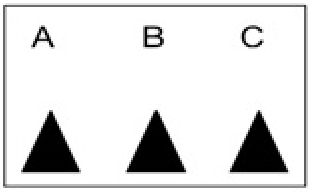

Figura 4.11: Ligue A, B e C com os triângulos.

Capítulo 5

Conclusões

Acreditamos que esta experiência foi significativa e que os objetivos iniciais foram plenamente atingidos. A escolha por Teoria de Grafos numa perspectiva de resolução de problemas foi coerente com a nossa intenção. A sensibilidade na implementação do projeto foi extremamente importante. As discussões depois de cada encontro e reflexões a partir das nossas percepções contribuíram para o sucesso do projeto.

As atividades foram pensadas com muito cuidado e houve uma preocupação em usar a linguagem matemática relativa a esta teoria. Acreditamos que o planejamento foi um dos fatores que contribuiu para o sucesso do projeto.

A escola onde a prática foi realizada contribuiu e muito para que os objetivos propostos fossem alcançados. A proposta de trabalho fundamentada em resolução de problemas faz parte da proposta pedagógica da escola. Acreditamos que esse fator confirma a fundamentação teórica que apresentamos no sentido de que a resolução de problemas não pode ser vista como algo isolado. Todos os componentes curriculares devem estar engajados nessa perspectiva metodológica. Precisamos pensar a educação de uma forma ampla e não restrita a recortes. Caso a realidade de alguns seja diferente da que apresentamos, fica o desafio do estudo conjunto e a busca por um caminho possível. Aliás, não temos a pretensão de apresentar uma receita pronta que se aplique a qualquer situação. Pretendemos compartilhar a nossa proposta no sentido de mostrar que é possível fazer diferente.

Teoria de Grafos é um assunto que pode ser inserido no Ensino Médio. É preciso incluir no Currículo atual uma matemática com tópicos como este que são aplicados no dia a dia da sociedade atual bem como apresentar aos alunos uma matemática dinâmica, no sentido de ainda estar sendo pesquisada. Em Teoria de Grafos, temos uma excelente oportunidade de atingir tais objetivos.

Esperamos, também, que os resultados das atividades aqui realizadas apontem para a possibilidade, importância, relevância, e potencialidade desse assunto no Ensino Médio.

Este trabalho tem um caráter introdutório, apesar do enfoque formativo. Estamos certos de que os assuntos da Teoria dos Grafos, aqui tratados e aplicados, provavelmente, não permitirão resolver um problema real de roteamento ou de transporte, porém permitirão que seja entendido os princípios básicos que um profissional da área utilizaria na resolução do problema real.

Temos, portanto, no ensino de grafos, mais uma oportunidade de contribuir para um ensino de Matemática que seja experimental, contextualizado, atual e relevante para os dias de hoje.

Referências Bibliográficas

[1] BOAVENTURA, Paulo Oswaldo Netto. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. Edgard Blücher, 2003.

[2] BRIA, J. Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade. D.Sc. tese, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2001.

[3] CARVALHO, Paulo César Pinto . Dois problemas sobre grafos. *Revista Eureka*, 1:51–57, 1988.

[4] FRIEDMANN, C. V. P. Matemática Discreta: Algoritmos, Modelos, Tendências do Ensino de Matemática no Início do Século XXI. PhD Thesis, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2003.

[5] JURKIEWICZ, Samuel e Ivail Muniz Junior. Qual é o menor caminho? (Conceitos, Aplicações e Experiências no Ensino Médio com Teoria dos Grafos & Algoritmos). 2007.

[6] LEVENTHAL, A. Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio. M.Sc. dissertação. COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2005.

[7] LIPSCHUTZ, Seymour, Matemática Discreta, Artmed Editora S.A P. Alegre, 2004.

[8] MENEZES, P. Blaut Aprendendo matemática discreta com exercícios. Ed. Bookman, Inst. de Infor, UFRGS, 2009.

[9] MUNIZ Jr., I. Encontrando, Minimizando e Planejando Percursos: Uma Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio. M. Sc. dissertação. CEFET, RJ, Brasil, 2007

[10] NETTO, P. O. B. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1979.

[11] OLIVEIRA, J. B. P. Introduzir o estudo de grafos com texto, jogos e situações interdisciplinares. Projeto Fundão RJ. 2007

[12] PELIKÁN J. Vesztergombi K. Lovász, L. e tradução de Ruy J. G. B. de Queiroz. Matemática discreta (textos universitários). 2013.

[13] PERDIGÃO, C. Um breve olhar sobre os Grafos. Educação e Matemática. n.29, p.19 -20. Portugal, 1994.

[14] SANTOS, José Plínio de Oliveira ; Mello ,Margarida Pinheiro e Idani Theresinha Calzolari Murari. *Introdução à análise combinatória*. Ed. Ciencia Moderna, 2007.

[15] WALLIS, W. D. A Beginnerś Guide to Graph Theory. 2. ed. Boston: Birkhauser, 2007.

[16] WILSON, R. J. Introduction to Graph Theory. 4. ed. Harlow: Longman, 1996.

[17] WHITE, N. Theory of Matroids. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications p.26, Cambridge University Press, 1986.

[18] WHITE, N. Combinatorial Geometries. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications p.29, 1987.