

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

A Geometria dos Números Complexos

por

Vanderlei Nemitz

Dezembro/2014

Curitiba – PR



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
COORDENAÇÃO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No dia 19 de dezembro de 2014, na Sala de Reuniões do Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Aldemir José da Silva Pinto, a Banca Examinadora para o Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFPR. Estiveram presentes ao Ato, professores alunos e visitantes. A banca examinadora foi constituída pelos professores: Sani de Carvalho Rutz da Silva, do Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR; Lucelina Batista dos Santos, do Departamento de Matemática da UFPR; e Aldemir José da Silva Pinto, orientador do artigo a quem coube a presidência dos trabalhos. Às 14 horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o aluno Vanderlei Nemitz a fazer a apresentação do trabalho intitulado "A Geometria dos Números Complexos". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca reuniu-se para a apreciação do desempenho dos estudantes. Tendo em vista o trabalho realizado e a arguição, os membros presentes da banca decidiram por sua aprovação, com nota 100, e conceito A.

Curitiba, 19 de dezembro de 2014.

Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto
Presidente

Profa. Dra. Sani de Carvalho Rutz da Silva
Titular

Profa. Dra. Lucelina Batista dos Santos
Titular

Agradecimentos

À minha mãe, Rose e à minha irmã, Ellen, pelo incentivo nos momentos de dificuldade e compreensão durante todo o tempo.

Ao Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto, pela paciência, pelo apoio e principalmente pela cuidadosa orientação durante todo o trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática, por oportunizar o PROFMAT.

Se é mais simples tratar os problemas de geometria plana por meio dos números complexos do que pelos métodos de Euclides, advogo o método mais simples.

FRANCIS D. MURNAGHAM

A Geometria dos Números Complexos

Vanderlei Nemitz

e-mail: vandermat11@gmail.com

Resumo

Os Números Complexos são geralmente apresentados na terceira série do Ensino Médio. Após um breve histórico, a abordagem é quase toda algébrica, exceto quando é estudada a forma trigonométrica. Além disso, raramente são apresentadas aplicações desses números no cotidiano, o que torna o estudo um tanto quanto desestimulante para os alunos desse nível de ensino.

O objetivo desse trabalho é mostrar como os Números Complexos estão fortemente relacionados com a Geometria. Além de apresentar alguns importantes resultados geométricos, resolveremos alguns problemas sob o ponto de vista dos Números Complexos, até então tratados pela maioria dos alunos (e professores) como exclusivos da Geometria. Abordaremos também algumas transformações geométricas elementares, em especial a transformação de Möbius, na qual podemos associar matrizes.

Palavras-chave: Números Complexos, Geometria, transformações geométricas

Abstract

The Complex Numbers are generally presented in the third year high school. After a brief history, the approach is almost all algebraic, except when it is studied in a trigonometric form. In addition, applications of this numbers in the day-to-day life are rarely presented, what gets he study a bit unencouraging for the students in this level of teaching.

The goal of this working paper is to show how the Complex Numbers are strongly related with the Geometry. Besides presenting some important geometric results, we will solve some problems by the point of view of Complex Numbers, until then approached by a high number of students (and teachers) as exclusive of Geometry. We will also approach some elementary geometric transformations, especially the Möbius transformation, in which we can associate matrices.

Key-words: Complex Numbers, Geometry, geometric transformations.

Sumário

1. Introdução	1
2. Números Complexos	3
2.1. O corpo dos números complexos.....	3
2.2. Representação geométrica de um número complexo.....	8
2.3. Raízes da unidade.....	18
2.4. Forma exponencial de um número complexo.....	20
3. Aplicações à Geometria	22
3.1. Ponto médio de um segmento.....	22
3.2. Distância entre dois pontos.....	22
3.3. Condição de alinhamento de três pontos.....	23
3.4. Equação da reta.....	24
3.5. Equação paramétrica da reta.....	25
3.6. Equação da reta paralela.....	25
3.7. Equação da mediatriz de um segmento.....	26
3.8. Equação da circunferência.....	30
3.9. Área de um triângulo.....	34
3.10. Distância de um ponto a uma reta.....	38
3.11. Semelhança de triângulos.....	41
3.12. Semelhança e triângulo equilátero.....	44
3.13. Baricentro de um triângulo.....	46
3.14. Circuncentro de um triângulo.....	48
3.15. Ortocentro de um triângulo.....	50
3.16. Lei dos senos.....	52
3.17. Lei do cosseno.....	54
3.18. Transformações geométricas.....	55
3.18.1. Translação.....	55
3.18.2. Rotação em torno da origem.....	55
3.18.3. Homotetia.....	56
3.18.4. Reflexão em torno de uma reta que passa pela origem.....	57

3.18.5. Inversão.....	59
3.19. Transformação de Möbius.....	60
3.19.1. Matriz associada a uma transformação de Möbius.....	62
4. Problemas	69
5. Conclusão	82
Referências	83

1. Introdução

Desde o primeiro momento em que meu orientador sugeriu que escrevêssemos sobre Geometria e Números Complexos, considerei a proposta motivadora e também um desafio, pois assim como grande parte dos professores, não tinha conhecimento de que essas duas áreas pudessem ser relacionadas de forma tão ampla. Portanto, acreditamos que esse trabalho possa ser útil principalmente para os professores do Ensino Médio que queiram estudar e se aprofundar no assunto, como também ampliar as possibilidades ao ensinar Números Complexos, comumente tratado nas salas de aula apenas do ponto de vista algébrico, exceto quando é apresentada a forma trigonométrica.

Este trabalho faz uma releitura de alguns resultados da Geometria sob a ótica dos Números Complexos e está dividido em três partes.

- No capítulo 2 definimos o conjunto dos números complexos e suas operações. Além disso, identificamos os números complexos com o plano \mathbb{R}^2 e com isso mostramos que podemos escrevê-los na forma trigonométrica ou polar e também realizar algumas operações nessa forma. Por fim, a título de curiosidade, mostramos ainda a forma exponencial de um número complexo.
- No capítulo 3 mostramos alguns resultados da Geometria utilizando números complexos. Iniciamos com a Geometria Analítica e apresentamos equações de retas e circunferências, além de conceitos elementares como ponto médio de um segmento, distância entre dois pontos, condição de alinhamento de três pontos, área de um triângulo e distância de um ponto a uma reta. Em seguida, em Geometria Plana, destacamos os triângulos, trabalhando com semelhança, caracterização de um triângulo equilátero no plano complexo, além de alguns dos pontos notáveis e as leis dos senos e do cosseno. Para finalizar o capítulo, apresentamos algumas transformações geométricas no plano complexo, além da transformação de Möebius, que pode ser escrita como uma composição de outras mais simples.
- O capítulo 4 é destinado à apresentação e resolução de dez problemas selecionados. Alguns deles, como os problemas 1, 2 e 3, são conhecidos da Geometria Analítica, agora resolvidos utilizando números complexos. Outros,

como por exemplo, os problemas 4 e 5, se caracterizam por apresentarem um elevado nível de dificuldade e talvez não seja conveniente apresentá-los em uma turma do Ensino Médio, mesmo que possam ser resolvidos utilizando unicamente conhecimentos adquiridos nesse nível de ensino. No entanto, são interessantes resultados que podem motivar todos aqueles que gostam de Matemática. Destacamos ainda o problema 7, que apresenta o Teorema de Napoleão e o problema 10, que mostra ludicamente uma aplicação dos números complexos.

2. Números complexos

2.1. O corpo dos números complexos

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Definimos o conjunto dos números complexos e indicamos por \mathbb{C} como sendo o conjunto:

(1) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, em que i é um número denominado unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$.

Definimos ainda duas operações em \mathbb{C} , uma de adição e outra de multiplicação. Se $z = a + bi$ e $w = c + di$ são números complexos, tem-se:

Adição: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

(2) $z + w = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

Multiplicação: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

(3) $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observamos que dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. De fato:

$$a + bi = c + di \Rightarrow a - c = (d - b)i \Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2 i^2 \Rightarrow (a - c)^2 = -(d - b)^2$$

Como o quadrado de um número real é não negativo, conclui-se que $a - c = 0$ e $d - b = 0$, ou seja, $a = c$ e $b = d$.

A divisão de um número complexo $z = a + bi$ por outro número complexo $w = c + di$ consiste em determinar um número complexo $x + yi$ tal que

$$a + bi = (c + di) \cdot (x + yi)$$

Assim:

$$a + bi = (c + di) \cdot (x + yi)$$

$$a + bi = (cx - dy) + (cy + dx)i$$

Pela igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtemos:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \text{ e } y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \text{ em que } c \neq 0 \text{ ou } d \neq 0$$

Portanto:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \text{ com } w \neq 0$$

Um corpo \mathbf{K} é um conjunto no qual estão definidas operações de adição e multiplicação, que satisfazem as seguintes propriedades, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbf{K}$:

$$A_1: (x + y) + z = x + (y + z) \text{ (associativa da adição)}$$

$$A_2: x + y = y + x \text{ (comutativa da adição)}$$

$$A_3: \exists 0 \in \mathbf{K} \text{ tal que } x + 0 = x \text{ (existência do elemento neutro da adição)}$$

$$A_4: \forall x \in \mathbf{K}, \exists (-x) \in \mathbf{K} \text{ tal que } x + (-x) = 0 \text{ (existência do oposto)}$$

$$M_1: (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ (associativa da multiplicação)}$$

$$M_2: x \cdot y = y \cdot x \text{ (comutativa da multiplicação)}$$

$$M_3: \exists 1 \in \mathbf{K} \text{ tal que } x \cdot 1 = x \text{ (existência do elemento neutro da multiplicação)}$$

$$M_4: \forall x \in \mathbf{K}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbf{K} \text{ tal que } x \cdot x^{-1} = 1 \text{ (existência do inverso)}$$

$$D_1: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ (distributiva da multiplicação em relação à adição)}$$

Proposição

\mathbb{C} é um corpo

Vamos mostrar que o conjunto \mathbb{C} com as operações de adição e multiplicação definidas em (2) e (3) é um corpo. De fato:

Sejam $x = a + bi$, $y = c + di$ e $z = e + fi$ números complexos. Mostraremos que valem $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4$ e D_1 .

$$\begin{aligned}
A_1: (x+y)+z &= x+(y+z) \\
(x+y)+z &= (a+bi+c+di)+e+fi \\
(x+y)+z &= (a+c)+(b+d)i+e+fi \\
(x+y)+z &= [(a+c)+e]+[(b+d)+f]i \\
(x+y)+z &= [a+(c+e)]+[b+(d+f)]i \\
(x+y)+z &= a+bi+(c+e)+(d+f)i \\
(x+y)+z &= a+bi+(c+di+e+fi) \\
(x+y)+z &= x+(y+z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2: x+y &= y+x \\
x+y &= a+bi+c+di \\
x+y &= (a+c)+(b+d)i \\
x+y &= (c+a)+(d+b)i \\
x+y &= c+di+a+bi \\
x+y &= y+x
\end{aligned}$$

$$A_3: \exists 0 \in K \text{ tal que } x+0 = x$$

Seja $0 = m + ni$, com $m, n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x+0 &= x \\
a+bi+m+ni &= a+bi \\
(a+m)+(b+n)i &= a+bi \\
\begin{cases} a+m = a \\ b+n = b \end{cases} &\Leftrightarrow m=0 \text{ e } n=0
\end{aligned}$$

Portanto, existe $0 = 0 + 0i$ tal que $x+0 = x$.

$$A_4: \forall x \in K, \exists (-x) \in K \text{ tal que } x+(-x) = 0$$

Seja $-x = p + qi$, com $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x+(-x) &= 0 \\
a+bi+p+qi &= 0+0i \\
(a+p)+(b+q)i &= 0+0i \\
\begin{cases} a+p = 0 \\ b+q = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow p = -a \text{ e } q = -b
\end{aligned}$$

Portanto, existe $(-x) = (-a) + (-b)i$ tal que $x+(-x) = 0$.

$$M_1: (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = [(a+bi) \cdot (c+di)] \cdot (e+fi)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = [(ac-bd) + (ad+bc)i] \cdot (e+fi)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = [(ac-bd) \cdot e - (ad+bc) \cdot f] + [(ac-bd) \cdot f + (ad+bc) \cdot e]i$$

$$(x \cdot y) \cdot z = [ace - bde - adf - bcf] + [acf - bdf + ade + bce]i$$

$$(x \cdot y) \cdot z = [a \cdot (ce - df) - b \cdot (de + cf)] + [a \cdot (de + cf) + b \cdot (ce - df)]i$$

$$(x \cdot y) \cdot z = (a+bi) \cdot [(ce - df) + (de + cf)i]$$

$$(x \cdot y) \cdot z = (a+bi) \cdot [(ce - df) + (cf + de)i]$$

$$(x \cdot y) \cdot z = (a+bi) \cdot [(c+di) \cdot (e+fi)]$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$M_2: x \cdot y = y \cdot x$$

$$x \cdot y = (a+bi) \cdot (c+di)$$

$$x \cdot y = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$x \cdot y = (ca-db) + (da+cb)i$$

$$x \cdot y = (ca-db) + (cb+da)i$$

$$x \cdot y = (c+di) \cdot (a+bi)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$M_3: \exists 1 \in K \text{ tal que } x \cdot 1 = x$$

Seja $1 = m + ni$, com $m, n \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = x$$

$$(a+bi) \cdot (m+ni) = a+bi$$

$$(am-bn) + (an+bm)i = a+bi$$

$$\begin{cases} am-bn = a \\ an+bm = b \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \text{ e } n = 0$$

Portanto, existe $1 = 1 + 0i$ tal que $x \cdot 1 = x$.

$M_4: \forall x \in K, x \neq 0, \exists x^{-1} \in K \text{ tal que } x \cdot x^{-1} = 1$

Seja $x^{-1} = p + qi$, com $p, q \in \mathbb{R}$.

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

$$(a + bi) \cdot (p + qi) = 1 + 0i$$

$$(ap - bq) + (aq + bp)i = 1 + 0i$$

$$\begin{cases} ap - bq = 1 \\ aq + bp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } q = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Portanto, para $x \neq 0$ existe $x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

$D_1: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$$x \cdot (y + z) = (a + bi) \cdot (c + di + e + fi)$$

$$x \cdot (y + z) = (a + bi) \cdot [(c + e) + (d + f)i]$$

$$x \cdot (y + z) = [a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f)] + [a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)]i$$

$$x \cdot (y + z) = [ac + ae - bd - bf] + [ad + af + bc + be]i$$

$$x \cdot (y + z) = [(ac - bd) + (ae - bf)] + [(ad + bc) + (af + be)]i$$

$$x \cdot (y + z) = (ac - bd) + (ad + bc)i + (ae - bf) + (af + be)i$$

$$x \cdot (y + z) = (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

O conjunto \mathbb{C} com as operações definidas em (2) e (3) é denominado corpo dos números complexos.

Em um número complexo $z = a + bi$, a e b são números reais: o número a é denominado parte real de z e o número b é denominado parte imaginária de z .

Utilizaremos as notações $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$.

- Se $b = 0$, o número complexo $z = a + 0i = a$ é real.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, o número complexo $z = 0 + bi = bi$ é imaginário puro.

Observação: Seja $\mathbb{C}' = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (a, b) \text{ e } b = 0\}$ e consideremos a aplicação

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (a, 0)$$

Temos que f é bijetora e conserva as operações de soma e multiplicação.

Dizemos então que \mathbb{R} está imerso em \mathbb{C} .

2.2. Representação geométrica de um número complexo

Antes de tratarmos da representação geométrica de um número complexo, vamos apresentar algumas importantes definições sobre vetores.

(1) Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos no plano, em que A é a origem e B é a extremidade.



Figura 1: Segmento orientado

Observações:

- Um segmento orientado da forma (A, A) é denominado segmento nulo.
- Se $A \neq B$, então (A, B) é diferente de (B, A) .

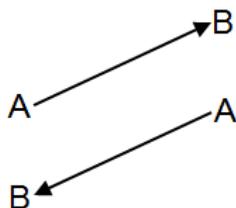


Figura 2: Segmentos orientados (A, B) e (B, A)

(2) Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm mesmo comprimento quando os segmentos AB e CD são congruentes.

(3) Dois segmentos orientados não nulos (A, B) e (C, D) são de mesma direção ou paralelos quando os segmentos AB e CD são paralelos (incluindo o caso em que AB e CD são colineares).

(4) Sejam (A, B) e (C, D) segmentos orientados paralelos.

- Quando as retas AB e CD são distintas, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de mesmo sentido quando os segmentos AC e BD não têm ponto em comum. Caso contrário, (A, B) e (C, D) são de sentidos contrários.

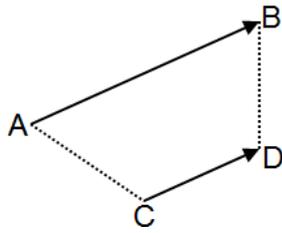


Figura 3: Segmentos orientados de mesmo sentido

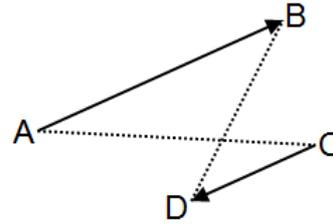


Figura 4: Segmentos orientados de sentidos contrários

• Quando as retas AB e CD “coincidem” (são a mesma reta), consideramos um segmento orientado (E, F) que não está contido na reta AB e de mesmo sentido de (A, B). Assim, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de mesmo sentido quando (E, F) e (C, D) são de mesmo sentido. Caso contrário, (A, B) e (C, D) são de sentido contrário.

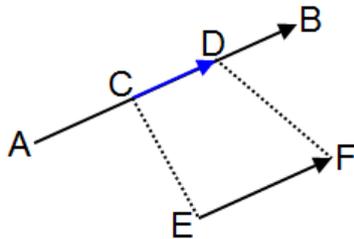


Figura 5: Segmentos orientados (A, B) e (C, D) de mesmo sentido

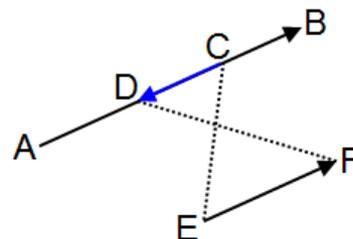


Figura 6: Segmentos orientados (A, B) e (C, D) de sentidos contrários.

(5) Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são **equipolentes** se ambos forem nulos ou quando, sendo ambos não nulos, tiverem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Indicamos a equipolência entre (A, B) e (C, D) por $(A, B) \sim (C, D)$.

(6) Denomina-se **classe de equipolência** de um segmento orientado (A, B) o conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a (A, B).

(7) Um **vetor** é uma classe de equipolência de segmentos orientados. O vetor representado pelo segmento orientado (A, B) é indicado por \overrightarrow{AB} .

Assim, se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes, então os vetores \overline{AB} e \overline{CD} são iguais.

Vetor nulo, indicado por $\vec{0}$, é aquele representado por um segmento orientado nulo.

Ao longo do texto, enunciaremos também algumas proposições. As demonstrações serão omitidas, pois não é o objetivo principal uma explanação extensa a respeito de vetores.

O conjunto dos números complexos pode ser identificado com o plano $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, por meio do isomorfismo $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $\psi(a, b) = a + bi$.

De fato, ψ é um isomorfismo, pois:

1) ψ é linear

Sendo $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$ vetores de \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\psi(v_1 + v_2) = \psi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = a_1 + b_1i + a_2 + b_2i$$

$$\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$$

$$\psi(\alpha v_1) = \psi(\alpha a_1, \alpha b_1) = \alpha a_1 + \alpha b_1i = \alpha(a_1 + b_1i) = \alpha\psi(v_1)$$

$$\psi(\alpha v_1) = \alpha\psi(v_1)$$

2) ψ é bijetora.

$$\psi(v_1) = \psi(v_2) \Rightarrow \psi(a_1, b_1) = \psi(a_2, b_2) \Rightarrow a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Rightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$$

$$\psi(v_1) = \psi(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

Logo, ψ é injetora.

Sendo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$\psi(a, b) = z \Rightarrow a + bi = x + yi \Rightarrow a = x \text{ e } b = y$$

Logo, ψ é sobrejetora.

Desta forma, o conjunto dos números complexos pode ser representado geometricamente. Na figura 7, o número complexo $z = a + bi$ está representado pelo par ordenado (a, b) ou ainda pelo vetor \overrightarrow{Oz} .

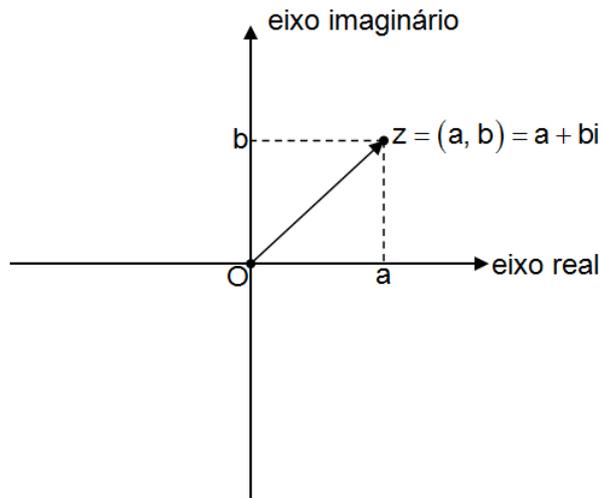


Figura 7

Definição

Definimos o conjugado do número complexo $z = a + bi$ como sendo o número complexo $\bar{z} = a - bi$. Geometricamente, o conjugado \bar{z} corresponde ao simétrico de z em relação ao eixo real (figura 8).

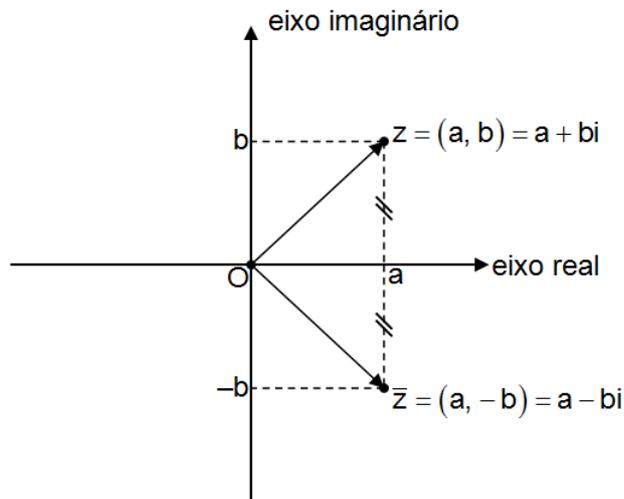


Figura 8

Definição

Dado o número complexo $z = a + bi$, denomina-se módulo de z o número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, o módulo $|z|$ é a distância entre O e z (figura 9).

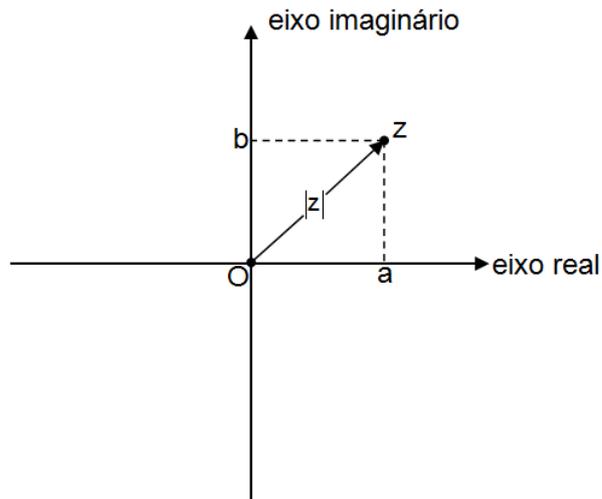


Figura 9

As propriedades a seguir podem ser verificadas a partir das definições.

$$P_1) \overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

De fato:

Sendo $z = a + bi$, tem-se:

$$\overline{\overline{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$$

$$P_2) z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$$

De fato:

Sendo $z = a + bi$, tem-se:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$P_3) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

De fato:

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tem-se:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$P_4) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

De fato:

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi) \cdot (c - di)$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = [a + (-b)i] \cdot [c + (-d)i]$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = [ac - (-b) \cdot (-d)] + [a \cdot (-d) + (-b) \cdot c]i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (ac - bd) + (-ad - bc)i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

Logo, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

P5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

De fato:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Como $|z_1 \cdot z_2|, |z_1|$ e $|z_2|$ são números reais não negativos, tem-se:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

P6) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$

De fato:

Observamos inicialmente que $\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$. Sendo $z_2 = c + di$, tem-se:

$$\left| \frac{1}{z_2} \right| = \left| \frac{1}{c + di} \right| = \left| \frac{1}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \right| = \left| \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right| = \left| \frac{c}{c^2 + d^2} + \frac{-d}{c^2 + d^2}i \right|$$

$$\left| \frac{1}{z_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{c}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(\frac{-d}{c^2 + d^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{c^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{1}{|z_2|}$$

Portanto, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

P7) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

De fato:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Seja um número complexo não nulo $z = a + bi$. Indiquemos por $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o módulo de z , ou seja, o comprimento do segmento com extremidades O e z , e por θ o ângulo que o eixo real forma com este segmento no sentido anti-horário (figura 10).

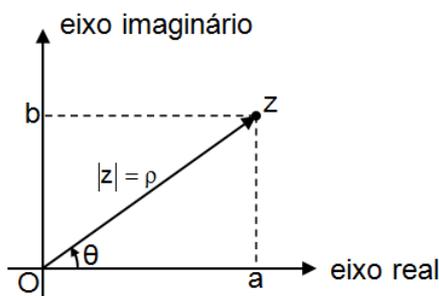


Figura 10

Portanto, tem-se:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen } \theta$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \text{cos } \theta$$

Assim, o número complexo z pode ser escrito da seguinte forma:

$$z = a + bi$$

$$z = \rho \cdot \text{cos } \theta + \rho \cdot \text{sen } \theta \cdot i$$

$$z = \rho(\text{cos } \theta + i \text{sen } \theta)$$

Essa representação é denominada forma trigonométrica ou polar do número complexo z . O ângulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) é denominado argumento principal de z .

Existem expressões interessantes para o produto e para o quociente de dois números complexos usando a forma polar.

1) Multiplicação de números complexos

Sejam $z_1 = \rho_1(\text{cos } \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\text{cos } \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\text{cos } \theta_1 + i \text{sen } \theta_1) \cdot \rho_2(\text{cos } \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot (\text{cos } \theta_1 + i \text{sen } \theta_1) \cdot (\text{cos } \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot (\text{cos } \theta_1 \cdot \text{cos } \theta_2 + \text{cos } \theta_1 \cdot i \text{sen } \theta_2 + i \text{sen } \theta_1 \cdot \text{cos } \theta_2 + i \text{sen } \theta_1 \cdot i \text{sen } \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot [(\text{cos } \theta_1 \cdot \text{cos } \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) + i(\text{sen } \theta_1 \cdot \text{cos } \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \text{cos } \theta_1)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot [\text{cos } (\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

2) Divisão de números complexos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2}{(\cos \theta_2)^2 - (i \operatorname{sen} \theta_2)^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1)}{\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_1)}{1}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

O produto de dois números complexos pode ser estendido para um produto de n fatores, ou seja:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

Proposição

Dados um número complexo não nulo $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e um número $n \in \mathbb{Z}$,

tem-se:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Demonstração

- $n \in \mathbb{N}$

Pelo princípio da indução finita:

$$\text{i) } n = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^0 = 1 \\ \rho^0 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow z^0 = \rho^0 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

ii) Supondo que a fórmula é válida para $n = k$: $z^k = \rho^k \cdot (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)$.

Então:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^k \cdot (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \cdot \rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z^{k+1} = \rho^k \cdot \rho \cdot (\cos (k\theta + \theta) + i \operatorname{sen} (k\theta + \theta))$$

$$z^{k+1} = \rho^{k+1} \cdot (\cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta)$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = k + 1$.

- $n \in \mathbb{Z}$

A fórmula é válida para $n = 0$. Supondo que seja válida para $n = k < 0$, tem-se:

$$z^{k-1} = \frac{z^k}{z} = \frac{\rho^k \cdot (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)}{\rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$$

$$z^{k-1} = \frac{\rho^k}{\rho} \cdot [\cos (k\theta - \theta) + i \operatorname{sen} (k\theta - \theta)]$$

$$z^{k-1} = \rho^{k-1} \cdot [\cos (k-1)\theta + i \operatorname{sen} (k-1)\theta]$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = k - 1$.

Como $z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$[\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$\rho^n \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

A última igualdade é denominada **fórmula de De Moivre**.

A partir da fórmula de De Moivre, podemos obter fórmulas para o seno e para o cosseno de um múltiplo do arco θ . Por exemplo, vamos determinar $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta$ e $\cos 3\theta$.

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

Para $n = 2$, tem-se:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\cos^2 \theta + 2 \cdot \cos \theta \cdot i \operatorname{sen} \theta + i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$$

$$(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + i(2 \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta) = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$$

- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

- $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta$

Para $n = 3$, tem-se:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

$$\cos^3 \theta + 3 \cdot \cos^2 \theta \cdot i \operatorname{sen} \theta + 3 \cdot \cos \theta \cdot i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta + i^3 \cdot \operatorname{sen}^3 \theta = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

$$(\cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta) + i(3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta) = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

$$\bullet \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\bullet \operatorname{sen} 3\theta = 3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta$$

Definição

Dado um número complexo z , denomina-se raiz n -ésima de z um número complexo w tal que $w^n = z$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Proposição

Se $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, então existem n raízes n -ésimas de z , da forma

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right], \text{ em que } \sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+ \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração

Seja $w = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ um número complexo tal que $w^n = z$. Então, temos:

$$w^n = z$$

$$r^n \cdot (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$\begin{cases} r^n \cdot \cos n\alpha = \rho \cdot \cos \theta & \text{(i)} \\ r^n \cdot \operatorname{sen} n\alpha = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta & \text{(ii)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r^n)^2 \cdot \cos^2 n\alpha = \rho^2 \cdot \cos^2 \theta & \text{(iii)} \\ (r^n)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 n\alpha = \rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta & \text{(iv)} \end{cases}$$

$$\text{(iii)} + \text{(iv)}$$

$$(r^n)^2 \cdot (\cos^2 n\alpha + \operatorname{sen}^2 n\alpha) = \rho^2 \cdot (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \Rightarrow (r^n)^2 = \rho^2 \Rightarrow r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$$

Assim, as equações (i) e (ii) podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \cos n\alpha = \cos \theta \\ \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow n\alpha = \theta + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Portanto, } w = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right], \text{ em}$$

que $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo k por $0, 1, \dots, n-1$, determinamos n raízes enésimas distintas

w_0, w_1, \dots, w_{n-1} , que correspondem aos ângulos $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta+2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta+(n-1) \cdot 2\pi}{n}$.

Para $k=n$, o ângulo é dado por $\frac{\theta+n \cdot 2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$, congruente a $\frac{\theta}{n}$. Para

$k=n+1$, o ângulo é igual a $\frac{\theta+(n+1) \cdot 2\pi}{n} = \frac{\theta+2\pi}{n} + 2\pi$, congruente a $\frac{\theta+2\pi}{n}$ e

assim sucessivamente. Analogamente, para $k=-1, -2, \dots$ obtemos ângulos já obtidos para $k=0, 1, \dots, n-1$. Portanto, um número complexo z possui exatamente n raízes enésimas.

2.3. Raízes da unidade

O número real 1 pode ser escrito como $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$. Assim, as raízes enésimas de 1 são os números complexos w tais que $w^n = 1$. Esses números são dados por:

$$w_k = \sqrt[n]{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{0+k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+k \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$w_k = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Por exemplo, as raízes quadradas da unidade são:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \\ n = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} w_0 = \cos\left(\frac{0 \cdot 2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 \cdot 2\pi}{2}\right) = 1 \\ w_1 = \cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1 \cdot 2\pi}{2}\right) = -1 \end{array}$$

Analogamente, as raízes cúbicas da unidade são:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \\ n = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} w_0 = \cos\left(\frac{0 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 \cdot 2\pi}{3}\right) = 1 \\ w_1 = \cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1 \cdot 2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_2 = \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Todas as raízes n -ésimas da unidade têm módulo 1 e, portanto, pertencem a uma circunferência de raio unitário. Os argumentos de w_0, w_1, \dots, w_{n-1} formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim, para $n \geq 3$, esses números complexos são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência. Para $n=2$, são pontos diametralmente opostos. Além disso, como os argumentos são $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$, podemos representar as raízes n -ésimas da unidade por: $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$.

Nas figuras 11 e 12 estão representadas geometricamente raízes n -ésimas da unidade para $n=3$ e $n=5$.

- $n=3$: As raízes cúbicas da unidade são vértices de um triângulo equilátero.

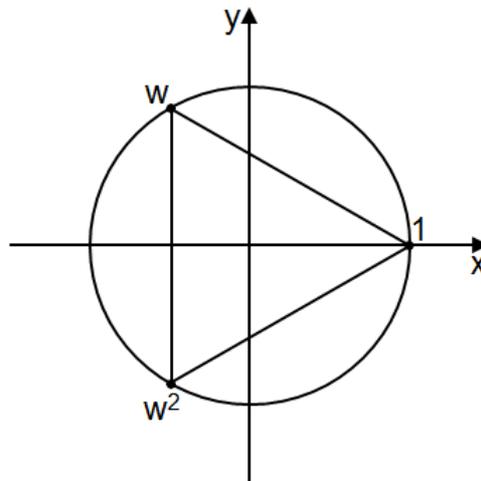


Figura 11

- $n=5$: As raízes quintas da unidade são vértices de um pentágono regular.

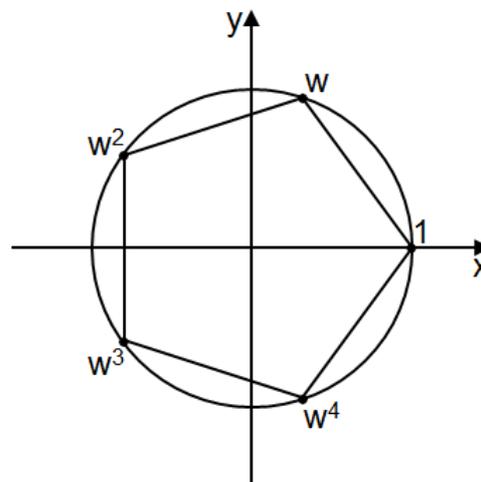


Figura 12

2.4. Forma exponencial de um número complexo

Vamos admitir as seguintes séries de MacLaurin, válidas para todo x real:

$$\bullet e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

$$\bullet \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2)$$

$$\bullet \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3)$$

De (1), obtemos a constante de Euler ($e = 2,71828\dots$), fazendo $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Vamos agora utilizar (1) para definir e^z , sendo z um número complexo. Seja $z = iy$ um número complexo cuja parte real é nula.

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2 \cdot y^2}{2!} + \frac{i^3 \cdot y^3}{3!} + \frac{i^4 \cdot y^4}{4!} + \frac{i^5 \cdot y^5}{5!} + \frac{i^6 \cdot y^6}{6!} + \frac{i^7 \cdot y^7}{7!} + \dots$$

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \cdot \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i \cdot \frac{y^7}{7!} + \dots$$

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right)$$

De (2) e (3), podemos escrever que:

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y$$

Mais geralmente, sendo $z = x + iy$, temos:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y)$$

Considere agora que $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Como $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, temos:

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = \rho e^{i\theta} \text{ (forma exponencial de } z\text{)}$$

Uma igualdade interessante envolvendo cinco importantes números da Matemática pode ser obtida substituindo y por π na equação $e^{iy} = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y$.

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \cdot \operatorname{sen} \pi$$

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Na época de Euler, as funções complexas não eram bem compreendidas e a equação $e^{iy} = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y$ gerou algumas igualdades inesperadas, como por exemplo, $e^{i\pi} = -1$. Mais tarde, com uma melhor compreensão das funções complexas, conclui-se que a equação proposta por Euler é a única possibilidade, de modo a manter para os números complexos as propriedades dos números reais.

3. APLICAÇÕES À GEOMETRIA

A partir de agora, estudaremos algumas aplicações dos números complexos à Geometria Euclidiana. Para isso, iremos referir como $z = (a, b)$ o ponto do plano complexo correspondente ao número $z = a + bi$.

3.1. Ponto médio de um segmento

Proposição

O ponto médio do segmento de extremidades z_1 e z_2 é dado por $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

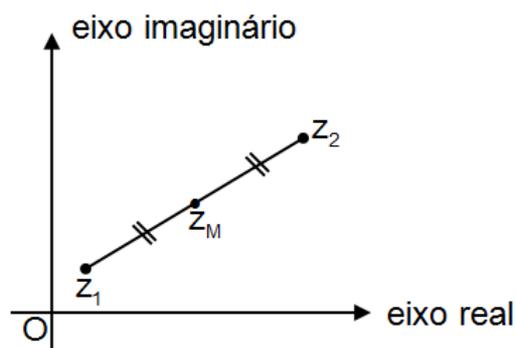


Figura 13

Demonstração

Seja z_M o ponto médio do segmento z_1z_2 . Assim, $\overrightarrow{z_1z_M} = \overrightarrow{z_Mz_2}$, ou seja:

$$z_M - z_1 = z_2 - z_M \Leftrightarrow 2 \cdot z_M = z_1 + z_2 \Leftrightarrow z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

3.2. Distância entre dois pontos

Proposição

A distância entre os pontos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ é dada por:

$$D(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$$

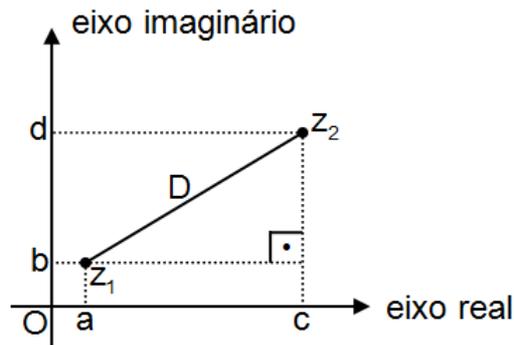


Figura 14

Demonstração

$$D(z_1, z_2) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$z_2 - z_1 = c + di - (a + bi) = (c-a) + (d-b)i \Rightarrow |z_2 - z_1| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Portanto, $D(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$.

3.3. Condição de alinhamento de três pontos

Proposição

Dois vetores não nulos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são paralelos se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$.

Proposição

Três pontos z_1, z_2 e z_3 são colineares se, e somente se, $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.

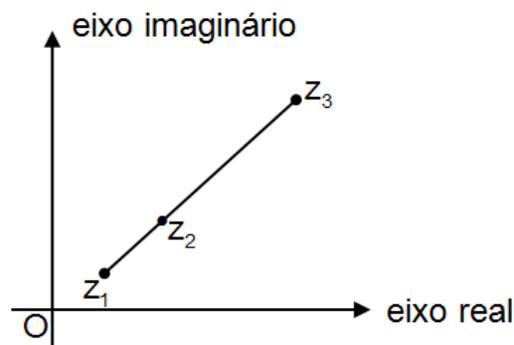


Figura 15

Demonstração

Os pontos z_1 , z_2 e z_3 são colineares se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{z_1 z_2}$ e $\overrightarrow{z_1 z_3}$ são paralelos, ou seja, $z_3 - z_1 = \lambda \cdot (z_2 - z_1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Portanto,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

3.4. Equação da reta

Proposição

A equação da reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 é dada por:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

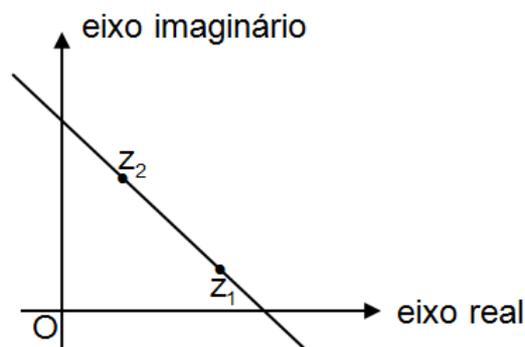


Figura 16

Demonstração

Seja z um ponto qualquer da reta determinada pelos pontos z_1 e z_2 . Como z_1 ,

z_2 e z são pontos colineares, temos que $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$. Como o conjugado de um

número real é o próprio número, temos:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)} \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Podemos escrever a equação anterior de outra maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) &= z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z} - \bar{z}_1) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) + z_1(\bar{z} - \bar{z}_1) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1(-\bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z} - \bar{z}_1) + z_2(-\bar{z} + \bar{z}_1) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1(\bar{z} - \bar{z}_2) + z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}) + z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z\bar{z}_1 - z\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z} + z_2\bar{z} - z_2\bar{z}_1 &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z} - z_2\bar{z}_2 &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

3.5. Equação paramétrica da reta

Seja z um ponto qualquer da reta determinada pelos pontos z_1 e z_2 . Como z_1 ,

z_2 e z são colineares, podemos escrever que $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \lambda \\
z - z_1 &= \lambda(z_2 - z_1) \\
z &= \lambda z_2 - \lambda z_1 + z_1 \\
z &= (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2
\end{aligned}$$

A equação é denominada equação paramétrica da reta determinada pelos pontos z_1 e z_2 .

3.6. Equação da reta paralela

Proposição

A equação da reta que passa por z_3 e é paralela à reta determinada por z_1 e z_2 é dada por:

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

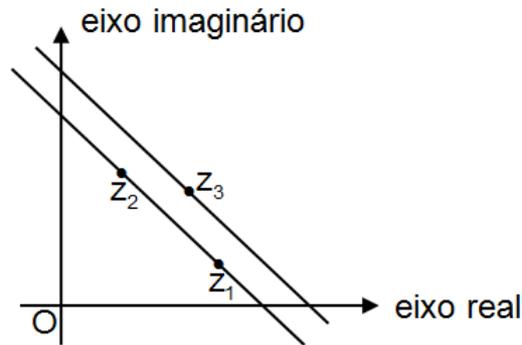


Figura 17

Demonstração

Seja z um ponto distinto de z_3 da reta paralela à reta determinada por z_1 e z_2 e que passa por z_3 . Os vetores $\overrightarrow{z_1 z_2}$ e $\overrightarrow{z_3 z}$ são paralelos, ou seja,

$z - z_3 = \lambda \cdot (z_2 - z_1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Assim, como $\lambda = \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z - z_3}}{\overline{z_2 - z_1}} &\Leftrightarrow \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) &= \bar{z}(z_2 - z_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_1 - z_2) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_1 - z_2) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, essa equação pode ser escrita na forma $Az - \bar{A}\bar{z} + B = 0$, em que:

$$A = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$$

$$B = -z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_1 - z_2)$$

3.7. Equação da mediatriz de um segmento

Proposição

A reta determinada por z_1 e z_2 é perpendicular à reta determinada por z_3 e z_4

se, e somente se, $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$ tem parte real nula.

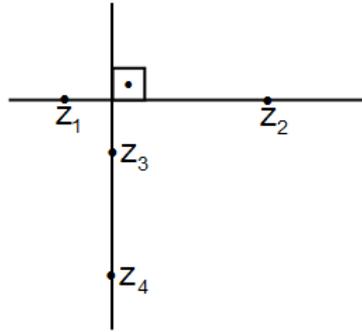


Figura 18

Demonstração

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_3 = (x_3, y_3)$ e $z_4 = (x_4, y_4)$.

$$\begin{aligned} \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} &= \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{\overline{z_2 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \cdot (x_2 - x_1, y_1 - y_2)}{|z_2 - z_1|^2} = \\ &= \frac{((x_4 - x_3) \cdot (x_2 - x_1) - (y_4 - y_3) \cdot (y_1 - y_2), (x_4 - x_3) \cdot (y_1 - y_2) + (y_4 - y_3) \cdot (x_2 - x_1))}{|z_2 - z_1|^2} = \\ &= \left(\frac{(x_4 - x_3) \cdot (x_2 - x_1) + (y_4 - y_3) \cdot (y_2 - y_1)}{|z_2 - z_1|^2}, \frac{(x_4 - x_3) \cdot (y_1 - y_2) + (y_4 - y_3) \cdot (x_2 - x_1)}{|z_2 - z_1|^2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Da Geometria Analítica, sabemos que $\overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_3 z_4} \Leftrightarrow \overrightarrow{z_1 z_2} \cdot \overrightarrow{z_3 z_4} = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_3 z_4} &\Leftrightarrow \overrightarrow{z_1 z_2} \cdot \overrightarrow{z_3 z_4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot (x_4 - x_3, y_4 - y_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot (x_4 - x_3) + (y_2 - y_1) \cdot (y_4 - y_3) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) e (2), temos:

$$\overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_3 z_4} \Leftrightarrow \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} = \left(0, \frac{(x_4 - x_3) \cdot (y_1 - y_2) + (y_4 - y_3) \cdot (x_2 - x_1)}{|z_2 - z_1|^2} \right)$$

Assim, $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$ tem parte real nula.

Proposição

A equação da reta que passa por z_3 e é perpendicular à reta determinada por z_1 e z_2 é dada por:

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0$$

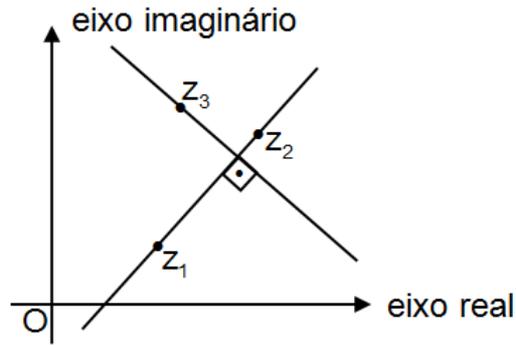


Figura 19

Demonstração

Seja z um ponto distinto de z_3 e que pertence à reta perpendicular à reta determinada por z_1 e z_2 . Como $\overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_3 z}$, o número complexo $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$ tem parte real nula. Como o conjugado de um número cuja parte real é nula é o oposto desse número, temos:

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = -\overline{\left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = -\left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}\right) \Leftrightarrow \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0$$

Essa equação é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} &= \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) &= \bar{z}_3(z_2 - z_1) - \bar{z}(z_2 - z_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, essa equação pode ser escrita na forma $Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$, em que:

$$A = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$$

$$B = -z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1)$$

Definição

Em um plano, a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

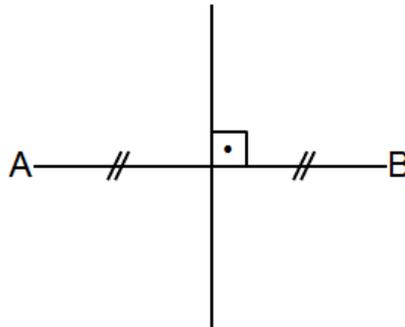


Figura 20

Proposição

A equação da mediatriz do segmento de extremos z_1 e z_2 é dada por:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

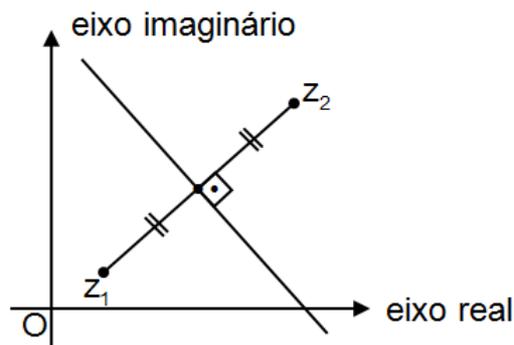


Figura 21

Demonstração

A equação da reta perpendicular à reta determinada por z_1 e z_2 e que passa por z_3 é dada por $z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)$. Como a mediatriz de um segmento é perpendicular a ele em seu ponto médio, então seja $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ o ponto médio do segmento determinado por z_1 e z_2 .

Substituindo na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned}
z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}\right)(z_2 - z_1) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= \frac{z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \bar{z}_1z_2 - \bar{z}_1z_1 + \bar{z}_2z_2 - \bar{z}_2z_1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= |z_2|^2 - |z_1|^2
\end{aligned}$$

3.8. Equação da circunferência

Definição

Seja P um ponto pertencente a um plano π e r um número positivo. A circunferência de centro P e raio r é o conjunto de todos os pontos desse plano cuja distância ao ponto P seja igual a r.

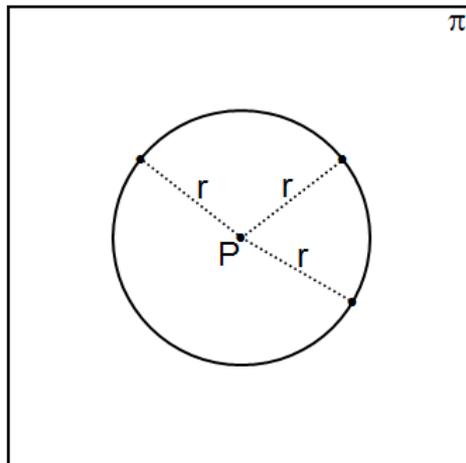


Figura 22

Proposição

A equação da circunferência que passa pelos pontos z_1 , z_2 e z_3 é dada por:

$$A \cdot (z - z_1) - \bar{A} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_1) = B \cdot (|z|^2 - |z_1|^2), \text{ sendo:}$$

$$A = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)$$

$$B = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)$$

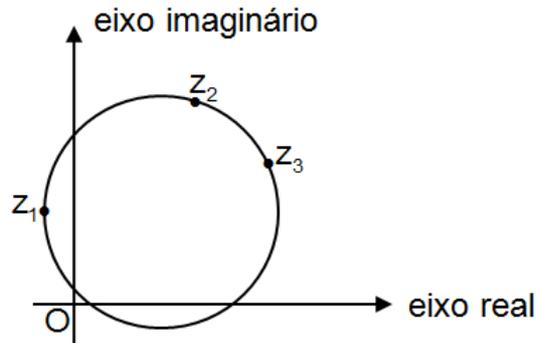


Figura 23

Demonstração

Seja z_0 o centro e R a medida do raio da circunferência, temos:

$$|z_1 - z_0| = R \Rightarrow |z_1 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)$$

$$|z_2 - z_0| = R \Rightarrow |z_2 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_2 - z_0) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_0)$$

$$|z_3 - z_0| = R \Rightarrow |z_3 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_3 - z_0) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_0)$$

A partir das igualdades anteriores, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = (z_2 - z_0) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_0) \\ (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = (z_3 - z_0) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_0) \\ \begin{cases} z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_1 + z_0 \bar{z}_0 = z_2 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_2 + z_0 \bar{z}_0 \\ z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_1 + z_0 \bar{z}_0 = z_3 \bar{z}_3 - z_3 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_3 + z_0 \bar{z}_0 \end{cases} \\ (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z_0 + (z_2 - z_1)\bar{z}_0 = |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z_0 + (z_3 - z_1)\bar{z}_0 = |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{cases}$$

A solução do sistema é:

$$z_0 = \frac{(|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)}$$

$$\bar{z}_0 = \frac{(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)}$$

Seja z um ponto qualquer da circunferência, temos:

$$\begin{aligned}
|z - z_0| &= |z_1 - z_0| \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow |z - z_0|^2 &= |z_1 - z_0|^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) &= (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 &= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_1 + z_0\bar{z}_0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\bar{z}_1 - \bar{z})z_0 + (z_1 - z)\bar{z}_0 &= z_1\bar{z}_1 - z\bar{z} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\bar{z}_1 - \bar{z}) \frac{(|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} + \\
+(z_1 - z) \frac{(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} &= z_1\bar{z}_1 - z\bar{z} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (\bar{z}_1 - \bar{z}) \left[(|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) \right] + \\
+(z_1 - z) \left[(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \right] &= \\
= (z_1\bar{z}_1 - z\bar{z}) \left[(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) \right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left[(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \right] (z - z_1) - \\
- \left[(|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) \right] (\bar{z} - \bar{z}_1) &= \\
= \left[(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) \right] (|z|^2 - |z_1|^2)
\end{aligned}$$

Portanto, a equação da circunferência que passa pelos pontos z_1 , z_2 e z_3 é dada por $A \cdot (z - z_1) - \bar{A} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_1) = B \cdot (|z|^2 - |z_1|^2)$, sendo:

$$A = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)$$

$$B = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)$$

Podemos também escrever a equação de uma circunferência em função do centro z_0 e da medida R do raio. Sendo z um ponto qualquer da circunferência, temos:

$$|z - z_0| = R \Leftrightarrow |z - z_0|^2 = R^2 \Leftrightarrow (z - z_0) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$$

Proposição

A equação $Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$, com B e γ reais e $B\gamma < |A|^2$, representa uma reta ou uma circunferência, conforme $\gamma = 0$ ou $\gamma \neq 0$.

Demonstração

Sabemos que a equação da mediatriz do segmento z_0z_1 é dada por:

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) = |z_1|^2 - |z_0|^2$$

Sendo $A = \bar{z}_1 - \bar{z}_0$ e $B = |z_0|^2 - |z_1|^2$, a equação anterior é escrita como:

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$$

A equação da circunferência pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(z - z_0) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - R^2 + |z|^2 = 0$$

Sendo $\alpha = -\bar{z}_0$ e $\beta = z_0\bar{z}_0 - R^2$, temos:

$$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta + |z|^2 = 0, \text{ com } \beta = z_0\bar{z}_0 - R^2 = |z_0|^2 - R^2 = |\alpha|^2 - R^2 \Rightarrow \beta < |\alpha|^2$$

Multiplicando a equação anterior pelo número real $\gamma \neq 0$, temos:

$$\alpha\gamma z + \bar{\alpha}\gamma\bar{z} + \beta\gamma + \gamma|z|^2 = 0$$

Sendo $\alpha\gamma = A$, $\bar{\alpha}\gamma = \bar{A}$ e $\beta\gamma = B$, a equação é escrita como:

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$$

Portanto:

- Se $\gamma = 0$, a equação reduz-se à equação de uma reta.
- Se $\gamma \neq 0$, obtemos a equação de uma circunferência dividindo por γ .

Como $\frac{A}{\gamma} = \alpha$, $\frac{\bar{A}}{\gamma} = \bar{\alpha}$ e $\frac{B}{\gamma} = \beta$, temos a seguinte condição:

$$\beta < |\alpha|^2 \Rightarrow \frac{B}{\gamma} < \left| \frac{A}{\gamma} \right|^2 \Rightarrow \frac{B}{\gamma} < \frac{|A|^2}{\gamma^2} \Rightarrow B\gamma < |A|^2$$

3.9. Área de um triângulo

Definição

Sejam z_1 e z_2 números complexos. O **produto escalar** de z_1 e z_2 , indicado por $\langle z_1, z_2 \rangle$, é definido por $\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$.

Sendo $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, temos:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}[\overline{(x_1, y_1)} \cdot (x_2, y_2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}[(x_1, -y_1) \cdot (x_2, y_2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}[(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Proposição

O produto escalar de z_1 e z_2 é dado por:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

Demonstração

Sendo $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2) &= \frac{1}{2} \cdot [(x_2 + iy_2) \cdot (x_1 - iy_1) + (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [x_2 \cdot x_1 - ix_2 \cdot y_1 + iy_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot x_2 - ix_1 \cdot y_2 + iy_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2x_1 \cdot x_2 + 2y_1 \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2) = \langle z_1, z_2 \rangle \end{aligned}$$

Proposição

Seja α o ângulo formado por z_1 e z_2 , tal que $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. O produto escalar de z_1 e z_2 é dado por:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha$$

Demonstração

Observe a figura 24:

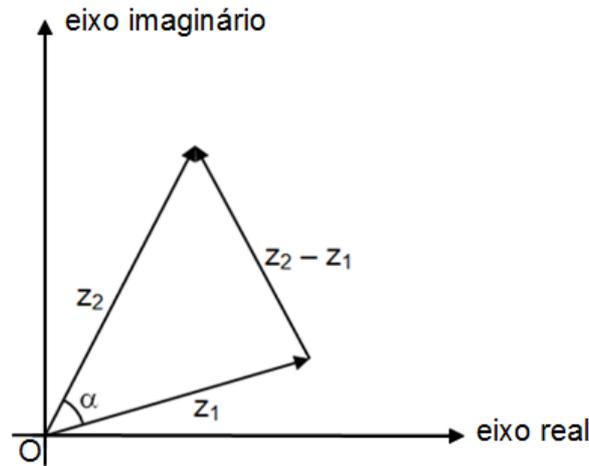


Figura 24

Da lei do cosseno, temos:

$$\begin{aligned}
 |z_2 - z_1|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (z_2 - z_1) \cdot \overline{(z_2 - z_1)} &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (z_2 - z_1) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_1 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow |z_2|^2 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + |z_1|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 &= -2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1) &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \langle z_1, z_2 \rangle &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Corolário

Os números complexos z_1 e z_2 são ortogonais se, e somente se, $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$.

Demonstração

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = 0$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ (0 \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

Definição

Sejam z_1 e z_2 números complexos. O **produto vetorial** de z_1 e z_2 , indicado por $z_1 \wedge z_2$, é definido por $z_1 \wedge z_2 = \text{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$.

Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, temos:

$$z_1 \wedge z_2 = \text{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$$

$$z_1 \wedge z_2 = \text{Im}[\overline{(x_1, y_1)} \cdot (x_2, y_2)]$$

$$z_1 \wedge z_2 = \text{Im}[(x_1, -y_1) \cdot (x_2, y_2)]$$

$$z_1 \wedge z_2 = \text{Im}[(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)]$$

$$z_1 \wedge z_2 = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$$

Proposição

O produto vetorial de z_1 e z_2 é dado por:

$$z_1 \wedge z_2 = \frac{1}{2i} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

Demonstração

Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2) &= \frac{1}{2i} \cdot [(x_2 + iy_2) \cdot (x_1 - iy_1) - (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)] = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot [x_2 \cdot x_1 - ix_2 \cdot y_1 + iy_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1 - (x_1 \cdot x_2 - ix_1 \cdot y_2 + iy_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)] = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot (-2iy_1 \cdot x_2 + 2ix_1 \cdot y_2) = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 = \text{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2) = z_1 \wedge z_2 \end{aligned}$$

Proposição

Seja α o ângulo formado por z_1 e z_2 , tal que $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. O módulo de $z_1 \wedge z_2$ é dado por:

$$|z_1 \wedge z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \cos^2 \alpha = \\
 &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - \langle z_1, z_2 \rangle^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2) \right)^2 = \\
 &= |z_1 \cdot z_2|^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \right) = \\
 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} - \frac{1}{4} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 = \\
 &= z_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 - \frac{1}{4} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 = \\
 &= -\frac{1}{4} \cdot [(z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - 2 \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2) + (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2] = \frac{1}{4i^2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)^2
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha &= \frac{1}{4i^2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (|z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha)^2 &= (z_1 \wedge z_2)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow |z_1 \wedge z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha
 \end{aligned}$$

Geometricamente, o módulo do produto vetorial de dois números complexos corresponde à área do paralelogramo cujos lados são determinados por z_1 e z_2 . Observe a figura 25:

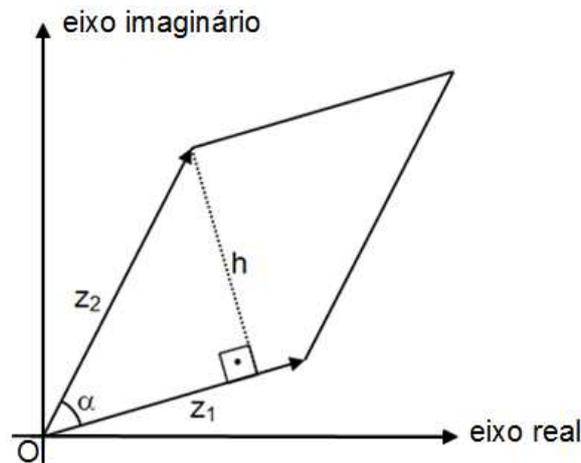


Figura 25

$$\text{sen} \alpha = \frac{h}{|z_2|} \Leftrightarrow h = |z_2| \cdot \text{sen} \alpha$$

A área S do paralelogramo é dada por:

$$S = |z_1| \cdot h = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha = |z_1 \wedge z_2|$$

Proposição

A área S de um triângulo cujos vértices são z_1 , z_2 e z_3 é dada por:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

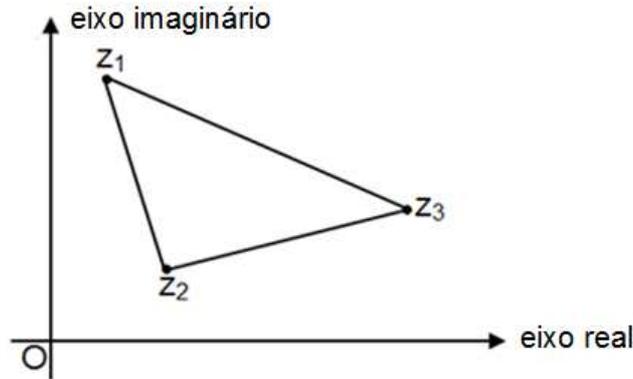


Figura 26

Demonstração

A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo determinado por $z_1 - z_2$ e $z_1 - z_3$, ou seja:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |(z_1 - z_2) \wedge (z_1 - z_3)|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2i} \cdot [(z_1 - z_3) \cdot \overline{(z_1 - z_2)} - (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_3)}] \right|$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |[(z_1 - z_3) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)]|$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot \left| \begin{vmatrix} (z_1 - z_3) & (z_1 - z_2) \\ (\bar{z}_1 - \bar{z}_3) & (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{4} \cdot \left| \begin{vmatrix} (z_3 - z_1) & (z_2 - z_1) \\ (\bar{z}_3 - \bar{z}_1) & (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{4} \cdot \left| \begin{vmatrix} (z_3 - z_1) & (\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \\ (z_2 - z_1) & (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \end{vmatrix} \right|$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot \left| \begin{vmatrix} z_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{4} \cdot \left| \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

3.10. Distância de um ponto a uma reta

Proposição

Dados os pontos z_1 , z_2 e z_3 , a distância de z_3 à reta determinada por z_1 e z_2 é dada por:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}{2 \cdot |z_1 - z_2|}$$

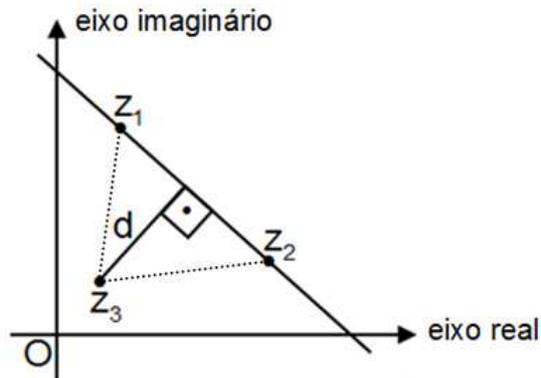


Figura 27

Demonstração

A área do triângulo cujos vértices são z_1 , z_2 e z_3 pode ser calculada por

$\frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot d$, em que d é a distância de z_3 à reta determinada por z_1 e z_2 .

Portanto:

$$\frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot d = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = \frac{1}{2 \cdot |z_1 - z_2|} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}{2 \cdot |z_1 - z_2|}$$

Passaremos agora a algumas aplicações dos números complexos à Geometria Plana. Iniciaremos com os triângulos. Antes de apresentar a semelhança de triângulos, considere a seguinte definição:

Definição

Dizemos que um triângulo é orientado quando especificamos a ordem de seus vértices. Essa orientação pode ser no sentido horário ou anti-horário. Na figura 28, o triângulo cujos vértices são z_1 , z_2 e z_3 tem orientação no sentido horário, enquanto que o triângulo cujos vértices são w_1 , w_2 e w_3 tem orientação no sentido anti-horário.

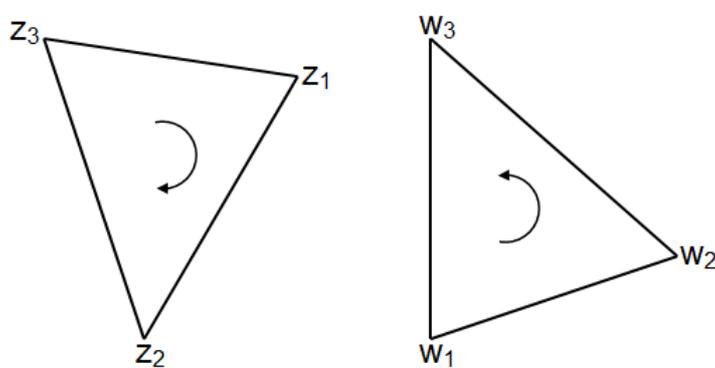


Figura 28

Na figura 29, os triângulos $z_1z_2z_3$ e $w_1w_2w_3$ têm orientações contrárias e os triângulos $z_1z_2z_3$ e $v_1v_2v_3$ têm a mesma orientação.

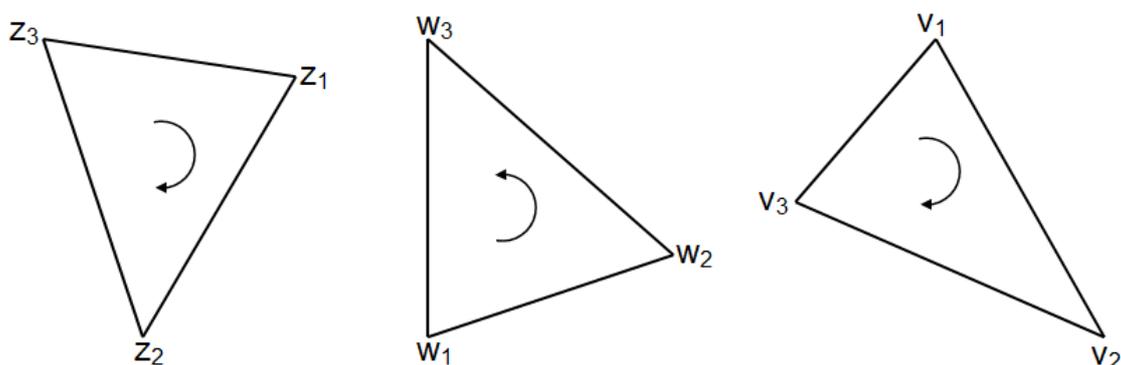


Figura 29

3.11. Semelhança de triângulos

Definição

Dois triângulos $z_1z_2z_3$ e $w_1w_2w_3$ são semelhantes quando o ângulo em z_k é congruente ao ângulo em w_k , para $k \in \{1, 2, 3\}$ e os lados forem proporcionais.

Considere os números complexos z_1 e z_2 , representados na figura 30.

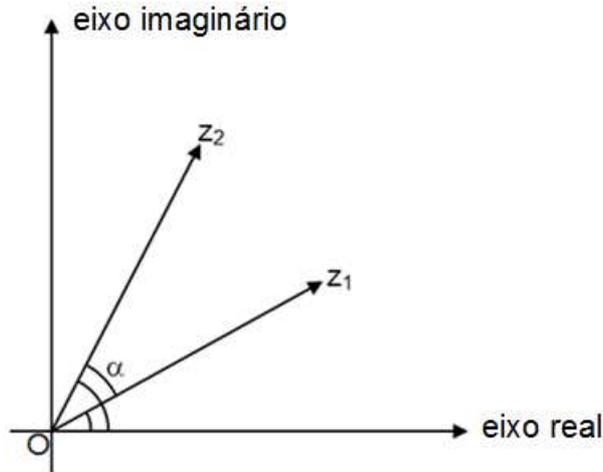


Figura 30

O ângulo $\alpha = z_1\widehat{O}z_2$ (orientado no sentido horário) é dado por:

$$\alpha = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \left(\frac{z_2}{z_1} \right)$$

Dados z_1 , z_2 e z_3 , para determinar o ângulo $\alpha = z_2\widehat{z_1}z_3$, inicialmente fazemos uma translação de eixos, que transforma z_1 em O.

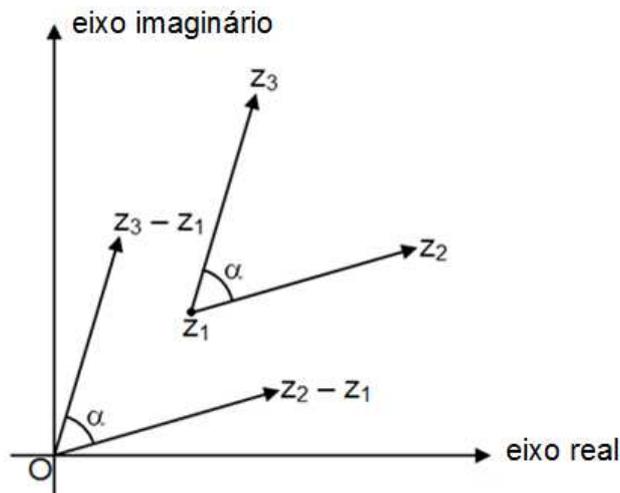


Figura 31

Pode-se observar na figura 31 que:

$$\alpha = z_2 \widehat{z_1 z_3} = (z_2 - z_1) \widehat{(z_3 - z_1)} = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$$

Proposição

Dois triângulos $z_1 z_2 z_3$ e $w_1 w_2 w_3$ com a mesma orientação são semelhantes,

que indicamos por $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$,

ou seja,
$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração

Da Geometria Plana, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, as razões entre as medidas de dois pares de lados homólogos são iguais e os ângulos formados por esses lados são congruentes (LAL).

Portanto:

$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 &\Leftrightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|w_2 - w_1|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|w_3 - w_1|} \text{ e } z_2 \widehat{z_1 z_3} \equiv w_2 \widehat{w_1 w_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|} \text{ e } \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Proposição

Dois triângulos $z_1 z_2 z_3$ e $w_1 w_2 w_3$ com orientações contrárias são semelhantes,

que indicamos por $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ (reverso) se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}, \text{ ou seja, } \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração

Pode-se observar na figura 32 os triângulos $w_1w_2w_3$ e $\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3$, em que o segundo é obtido pela reflexão do primeiro em torno do eixo real.

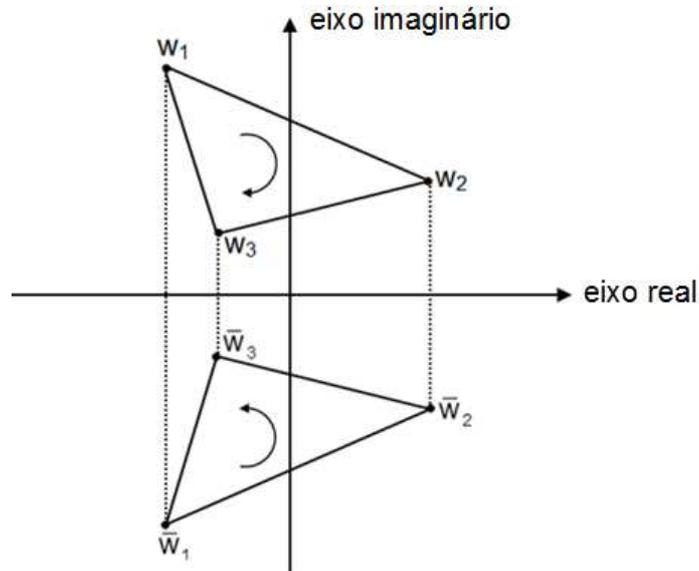


Figura 32

Os triângulos $w_1w_2w_3$ e $\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3$ são semelhantes e têm orientações contrárias.

Assim:

$$\begin{cases} \Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3 \text{ (reverso)} \\ \Delta w_1w_2w_3 \sim \Delta \bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3 \text{ (reverso)} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta \bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3$$

De acordo com a proposição anterior, temos:

$$\Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta w_1w_2w_3 \text{ (reverso)} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \Leftrightarrow \Delta z_1z_2z_3 \sim \Delta \bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.12. Semelhança e triângulo equilátero

Proposição

Um triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero se, e somente se, é semelhante ao triângulo $z_2z_3z_1$.

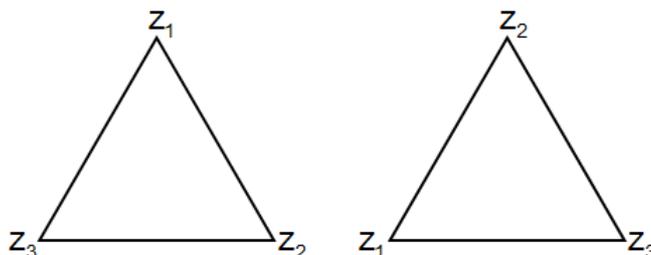


Figura 33

Demonstração

Se $z_1z_2z_3$ é equilátero, então os ângulos \widehat{z}_1 e \widehat{z}_2 são congruentes, assim como os ângulos \widehat{z}_2 e \widehat{z}_3 . Portanto, pelo caso AA (ângulo-ângulo), os triângulos $z_1z_2z_3$ e $z_2z_3z_1$ são semelhantes.

Por outro lado, se os triângulos $z_1z_2z_3$ e $z_2z_3z_1$ são semelhantes, os seguintes pares de ângulos são congruentes:

$$\widehat{z}_1 \text{ e } \widehat{z}_2; \widehat{z}_2 \text{ e } \widehat{z}_3; \widehat{z}_3 \text{ e } \widehat{z}_1$$

Portanto, \widehat{z}_1 , \widehat{z}_2 e \widehat{z}_3 são congruentes e medem 60° cada um, sendo $z_1z_2z_3$ um triângulo equilátero.

Proposição

Os pontos z_1 , z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero se, e somente se, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

Demonstração

$$\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle z_2z_3z_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

Outra maneira para caracterizar um triângulo equilátero é por meio das raízes cúbicas da unidade. Observe a figura 34.

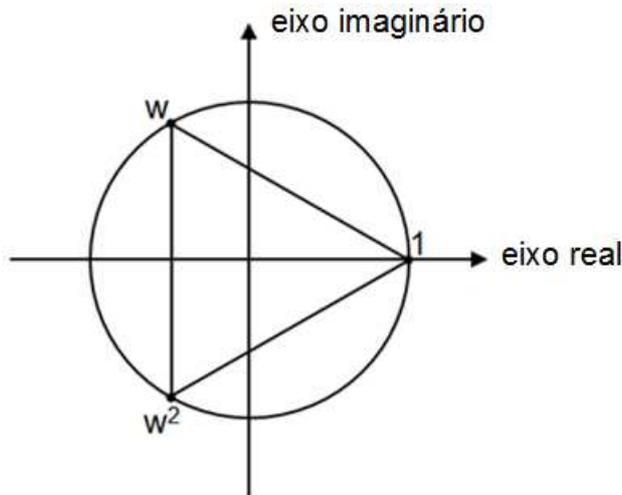


Figura 34

Dessa forma, um triângulo $z_1z_2z_3$ é equilátero se, e somente se, é semelhante ao triângulo $1ww^2$ ou ao triângulo $1w^2w$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1ww^2 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1w + z_3 + z_2w^2 - z_3w - z_2 - z_1w^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z_1(w - w^2) + z_2(w^2 - 1) + z_3(1 - w) = 0 \end{aligned}$$

Como $w \neq 1$ é uma raiz cúbica da unidade, então $w^3 = 1$ e $w^2 + w + 1 = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} z_1(w - w^2) + z_2(w^2 - 1) + z_3(1 - w) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1(w - w^2) + z_2(w^2 - w^3) + z_3(w^3 - w) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1w(1 - w) + z_2w^2(1 - w) - z_3w(w + 1)(1 - w) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1 + z_2w - z_3(w + 1) = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2w - z_3(-w^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1 + z_2w + z_3w^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1w^2w &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w^2 & 1 \\ z_3 & w & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1w^2 + z_3 + z_2w - z_3w^2 - z_2 - z_1w = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1(w^2 - w) + z_2(w - 1) + z_3(1 - w^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1(w^2 - w) + z_2(w - w^3) + z_3(w^3 - w^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1w(w - 1) + z_2w(1 + w)(1 - w) + z_3w^2(w - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1 - z_2(1 + w) + z_3w = 0 \Leftrightarrow z_1 - z_2(-w^2) + z_3w &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z_1 + z_2w^2 + z_3w = 0 \end{aligned}$$

3.13. Baricentro de um triângulo

Definição

Uma mediana de um triângulo é um segmento cujas extremidades são um dos seus vértices e o ponto médio do lado oposto.

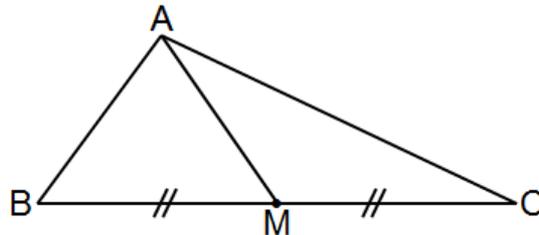


Figura 35: Mediana relativa ao lado BC ou ao vértice A

Todo triângulo tem três medianas, uma relativa a cada vértice (ou lado).

Proposição

As três medianas de um triângulo se intersectam em um ponto denominado **baricentro**.

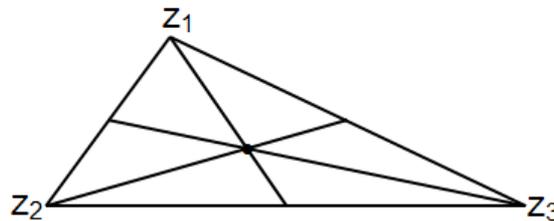


Figura 36

Demonstração

Sejam z_1 , z_2 e z_3 os vértices de um triângulo. A equação da reta suporte da mediana relativa ao lado z_2z_3 é dada por:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ \frac{z_2 + z_3}{2} & \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$z\bar{z}_1 + \bar{z}\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) + z_1\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) - \bar{z}_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) - \bar{z}z_1 - z\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) = 0$$

$$z\left(\bar{z}_1 - \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) + \bar{z}\left(\frac{z_2 + z_3}{2} - z_1\right) + z_1\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) - \bar{z}_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) = 0$$

$$z(2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3) + \bar{z}(z_2 + z_3 - 2z_1) + z_1(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) - \bar{z}_1(z_2 + z_3) = 0 \quad (I)$$

Analogamente, as equações das retas suporte das medianas relativas aos lados z_1z_3 e z_1z_2 são dadas, respectivamente, por:

$$z(2\bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}(z_1 + z_3 - 2z_2) + z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_3) - \bar{z}_2(z_1 + z_3) = 0 \quad (II)$$

$$z(2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_1 + z_2 - 2z_3) + z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - \bar{z}_3(z_1 + z_2) = 0 \quad (III)$$

Cada uma das equações (I), (II) e (III) é combinação linear das outras duas. De fato, adicionando, por exemplo, as equações (II) e (III), obtemos:

$$z(-2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) + \bar{z}(-z_2 - z_3 + 2z_1) - z_1(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) + \bar{z}_1(z_2 + z_3) = 0 \quad (IV)$$

As equações (I) e (IV) são opostas. Portanto, (I) é combinação linear de (II) e (III). Dessa forma, as retas se intersectam em um único ponto.

Para determinar o ponto de intersecção das três medianas, vamos escrever as equações (I), (II) e (III) na forma paramétrica:

$$z = (1 - \lambda_1)z_1 + \lambda_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) = (1 - \lambda_1)z_1 + \frac{\lambda_1}{2}z_2 + \frac{\lambda_1}{2}z_3 \quad (I)$$

$$z = (1 - \lambda_2)z_2 + \lambda_2\left(\frac{z_1 + z_3}{2}\right) = \frac{\lambda_2}{2}z_1 + (1 - \lambda_2)z_2 + \frac{\lambda_2}{2}z_3 \quad (II)$$

$$z = (1 - \lambda_3)z_3 + \lambda_3\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \frac{\lambda_3}{2}z_1 + \frac{\lambda_3}{2}z_2 + (1 - \lambda_3)z_3 \quad (III)$$

Comparando as equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1}{2} = 1 - \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

Analogamente, $\lambda_3 = \frac{2}{3}$.

Substituindo λ por $\frac{2}{3}$ em qualquer uma das equações, tem-se que:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \text{ (baricentro do triângulo } z_1 z_2 z_3 \text{)}$$

3.14. Circuncentro de um triângulo

Proposição

As três mediatrizes de um triângulo se intersectam em um ponto denominado **circuncentro**.

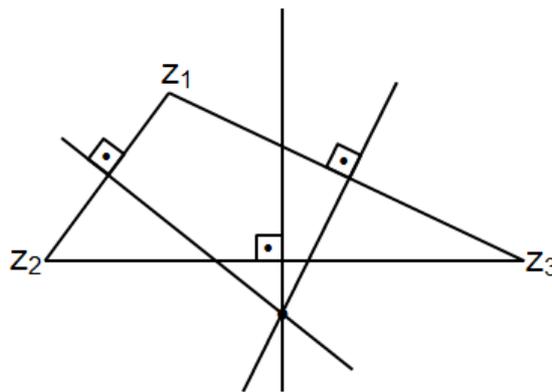


Figura 37

Demonstração

Sejam z_1 , z_2 e z_3 os vértices de um triângulo. A equação da mediatriz do lado $z_1 z_2$ é dada por:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 \quad \text{(I)}$$

Analogamente, as equações das mediatrizes dos lados $z_1 z_3$ e $z_2 z_3$ são dadas, respectivamente, por:

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2 \quad \text{(II)}$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) = |z_3|^2 - |z_2|^2 \quad \text{(III)}$$

Cada uma das equações (I), (II) e (III) é combinação linear das outras duas. De fato, subtraindo, por exemplo, a equação (III) da equação (II), obtemos:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 \quad \text{(IV)}$$

As equações (I) e (IV) são iguais. Portanto, (I) é combinação linear de (II) e (III).

Dessa forma, as retas se intersectam em um único ponto.

Para determinar o ponto de intersecção das três mediatrizes, resolvemos o sistema formado pelas equações (I), (II) e (III).

$$\begin{cases} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 & \text{(I)} \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2 & \text{(II)} \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) = |z_3|^2 - |z_2|^2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Como as três retas se intersectam em um único ponto, tomamos duas quaisquer das equações anteriores.

$$\begin{cases} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 & \text{(I)} \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos:

$$\begin{aligned} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) &= |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ \bar{z}(z_2 - z_1) &= |z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ \bar{z} &= \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

Substituímos o resultado anterior em (II):

$$\begin{aligned} z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \left[\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{z_2 - z_1} \right] (z_3 - z_1) &= |z_3|^2 - |z_1|^2 \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) + (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) &= (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) \\ z[(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1)] &= (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) \\ z &= \frac{|z_3|^2(z_2 - z_1) - |z_1|^2(z_2 - z_1) - |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_1|^2(z_3 - z_1)}{\bar{z}_3 z_2 - \bar{z}_3 z_1 - \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 z_1 - \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 + \bar{z}_1 z_3 - \bar{z}_1 z_1} \\ z &= \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\bar{z}_1(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\bar{z}_1(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)} \quad (\text{circuncentro do triângulo } z_1 z_2 z_3)$$

3.15. Ortocentro de um triângulo

Definição

Uma altura de um triângulo é um segmento perpendicular à reta suporte de um dos seus lados, cujas extremidades são um ponto dessa reta e o vértice oposto ao lado considerado.

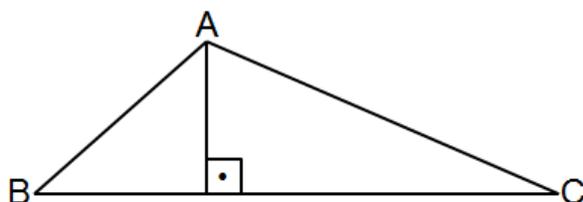


Figura 38: Altura relativa ao lado BC ou ao vértice A

Proposição

As retas suportes das três alturas de um triângulo se intersectam em um ponto denominado **ortocentro**.

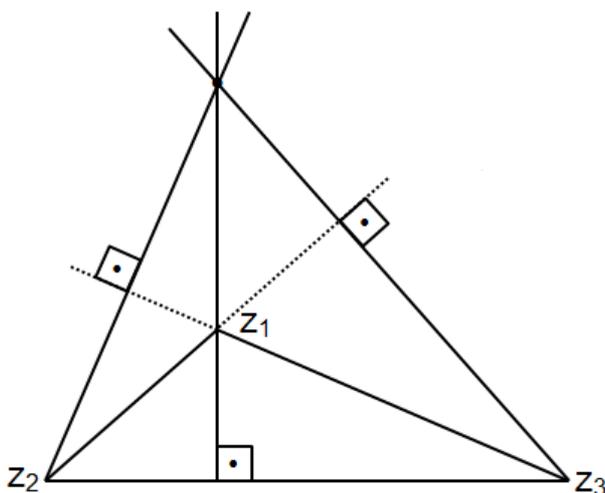


Figura 39

Demonstração

Sejam z_1 , z_2 e z_3 os vértices de um triângulo. A equação da reta suporte da altura relativa ao z_1z_2 é dada por:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) = 0 \quad (I)$$

Analogamente, as equações das retas suporte das alturas relativas aos lados z_1z_3 e z_2z_3 são dadas, respectivamente, por:

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) = 0 \quad (II)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) - z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \bar{z}_1(z_3 - z_2) = 0 \quad (\text{III})$$

Novamente, qualquer uma das equações anteriores é combinação linear das outras duas. De fato, subtraindo, por exemplo, a equação (III) da equação (II), obtemos:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) = 0 \quad (\text{IV})$$

Como as equações (I) e (IV) são iguais, as retas se intersectam em um único ponto.

Considerando, por exemplo, as equações (II) e (III):

$$\begin{cases} z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) = 0 & (\text{II}) \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) - z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \bar{z}_1(z_3 - z_2) = 0 & (\text{III}) \end{cases}$$

Da equação (II), temos:

$$\begin{aligned} z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) &= 0 \\ \bar{z} &= \frac{z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{z_3 - z_1} \end{aligned}$$

Substituímos o resultado anterior em (III):

$$\begin{aligned} z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \left[\frac{z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{z_3 - z_1} \right] (z_3 - z_2) &= z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}_1(z_3 - z_2) \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + [z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)](z_3 - z_2) &= \\ = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + \bar{z}_1(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) & \\ z[(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2)] + z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) &= \\ = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + \bar{z}_1(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) & \\ z = \frac{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2) + z_1^2(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + z_2^2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + z_3^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\bar{z}_1(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)} & \end{aligned}$$

Como aplicação do resultado obtido, vamos obter o ortocentro de um triângulo inscrito em uma circunferência com centro na origem e com raio 1. Dessa

forma, tem-se que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e, portanto, que $\bar{z}_k = \bar{z}_k \cdot \frac{z_k}{z_k} = \frac{|z_k|^2}{z_k} = \frac{1}{z_k}$,

para $k \in \{1, 2, 3\}$.

Assim:

$$z = \frac{(z_2 - z_3) + (z_3 - z_1) + (z_1 - z_2) + z_1^2 \cdot \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right) + z_2^2 \cdot \left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}\right) + z_3^2 \cdot \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)}{\frac{1}{z_1} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{1}{z_2} \cdot (z_1 - z_3) + \frac{1}{z_3} \cdot (z_2 - z_1)}$$

$$z = \frac{z_1^3 \cdot (z_3 - z_2) + z_2^3 \cdot (z_1 - z_3) + z_3^3 \cdot (z_2 - z_1)}{z_1 z_2 z_3}$$

$$z = \frac{z_1^3 \cdot (z_3 - z_2) + z_2^3 \cdot (z_1 - z_3) + z_3^3 \cdot (z_2 - z_1)}{z_2 z_3 \cdot (z_3 - z_2) + z_1 z_3 \cdot (z_1 - z_3) + z_1 z_2 \cdot (z_2 - z_1)}$$

$$z = \frac{z_1^3 \cdot (z_3 - z_2) + z_2^3 \cdot (z_1 - z_3) + z_3^3 \cdot (z_2 - z_1)}{z_2 z_3 \cdot (z_3 - z_2) + z_1 z_3 \cdot (z_1 - z_3) + z_1 z_2 \cdot (z_2 - z_1)}$$

Observe o resultado obtido ao multiplicarmos o denominador da fração anterior por $z_1 + z_2 + z_3$.

$$\begin{aligned} & [z_2 z_3 \cdot (z_3 - z_2) + z_1 z_3 \cdot (z_1 - z_3) + z_1 z_2 \cdot (z_2 - z_1)] \cdot (z_1 + z_2 + z_3) = \\ & = z_1 z_2 z_3 \cdot (z_3 - z_2) + z_2 z_3 \cdot (z_3^2 - z_2^2) + z_1 z_2 z_3 \cdot (z_1 - z_3) + z_1 z_3 \cdot (z_1^2 - z_3^2) + \\ & + z_1 z_2 z_3 \cdot (z_2 - z_1) + z_1 z_2 \cdot (z_2^2 - z_1^2) = \\ & = z_2 z_3 \cdot (z_3^2 - z_2^2) + z_1 z_3 \cdot (z_1^2 - z_3^2) + z_1 z_2 \cdot (z_2^2 - z_1^2) = \\ & = z_2 z_3^3 - z_2^3 z_3 + z_1^3 z_3 - z_1 z_3^3 + z_1 z_2^3 - z_1^3 z_2 = \\ & = z_1^3 \cdot (z_3 - z_2) + z_2^3 \cdot (z_1 - z_3) + z_3^3 \cdot (z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Portanto, $z = z_1 + z_2 + z_3$.

3.16. Lei dos senos

Existem duas importantes relações da trigonometria válidas em um triângulo qualquer: a lei dos senos e a lei do cosseno.

Proposição

Em um triângulo ABC, em que a, b e c são as medidas dos lados opostos aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} , tem-se que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$.

Demonstração

Sejam z_1 , z_2 e z_3 os vértices do triângulo ABC (figura 40).

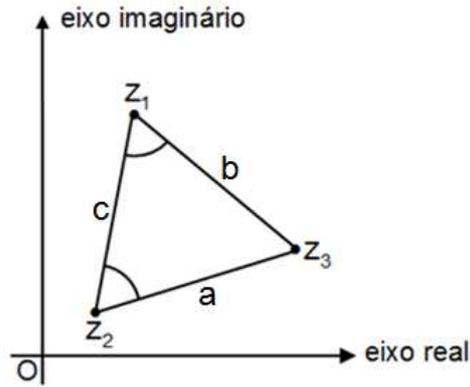


Figura 40

Considere os números complexos $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ e $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$. O argumento do primeiro

corresponde à medida do ângulo interno $\hat{A} = \widehat{z_2 z_1 z_3}$, pois a orientação é dada no sentido horário. O argumento do segundo corresponde ao oposto da medida do ângulo interno $\hat{B} = \widehat{z_1 z_2 z_3}$, pois a orientação é dada no sentido anti-horário.

Utilizando a identidade $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = 1$, temos:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = \operatorname{Im}(1) = 0$$

A parte imaginária de um número complexo é o produto de seu módulo pelo seno de seu argumento. Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| \cdot \operatorname{sen} \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) + \left|\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right| \cdot \operatorname{sen} \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \cdot \operatorname{sen} \hat{A} + \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2|} \cdot \operatorname{sen}(-\hat{B}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2|} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z_3 - z_1| \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = |z_3 - z_2| \cdot \operatorname{sen} \hat{B} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = a \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \Leftrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \end{aligned}$$

3.17. Lei do cosseno

Proposição

Em um triângulo ABC, em que a, b e c são as medidas dos lados opostos aos ângulos internos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , tem-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.

Demonstração

Sejam z_1 , z_2 e z_3 os vértices do triângulo ABC (figura 41). A medida do ângulo interno $\hat{A} = \widehat{z_2 z_1 z_3}$ corresponde ao argumento do número complexo $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

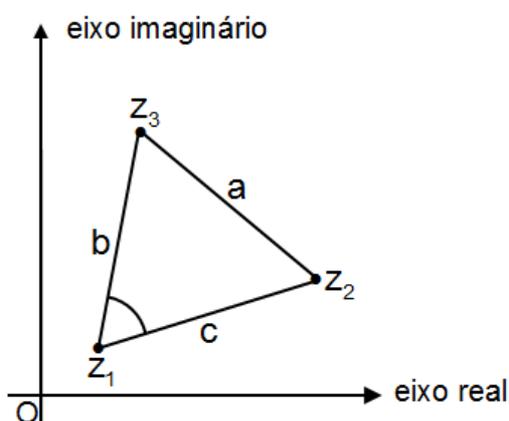


Figura 41

Considere ainda que $|z_3 - z_2| = a$. Temos:

$$\begin{aligned} |z_3 - z_2|^2 &= |(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)|^2 = [(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)] \cdot [(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)] \\ |z_3 - z_2|^2 &= (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - (z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ |z_3 - z_2|^2 &= |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - [(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)] \end{aligned}$$

Dados $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ z_1 \bar{z}_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \\ \bar{z}_1 z_2 &= |z_1| \cdot (\cos \theta_1 - i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ \bar{z}_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \operatorname{sen} \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \\ z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot 2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \\ z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

Assim:

$$(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = 2 \cdot |z_3 - z_1| \cdot |z_2 - z_1| \cdot \cos \hat{A}$$

$$|z_3 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - 2 \cdot |z_3 - z_1| \cdot |z_2 - z_1| \cdot \cos \hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

3.18. Transformações geométricas

3.18.1. Translação

Definição

Sejam z e w números complexos. Denomina-se translação de z por w a função $\tau: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\tau(z) = z' = z + w$.

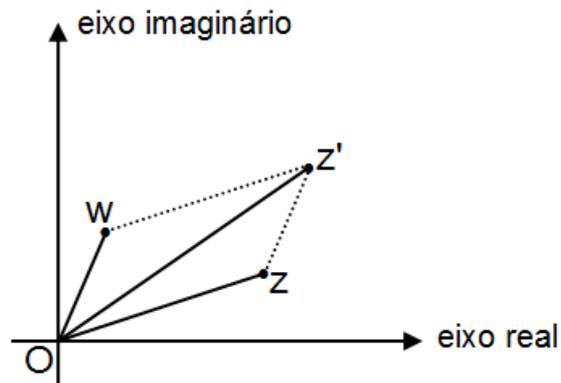


Figura 42

3.18.2. Rotação em torno da origem

Definição

Seja $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ um número complexo. Denomina-se rotação em torno da origem O , de amplitude α , a função $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\pi(z, \alpha) = z' = z \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = \rho[\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]$.

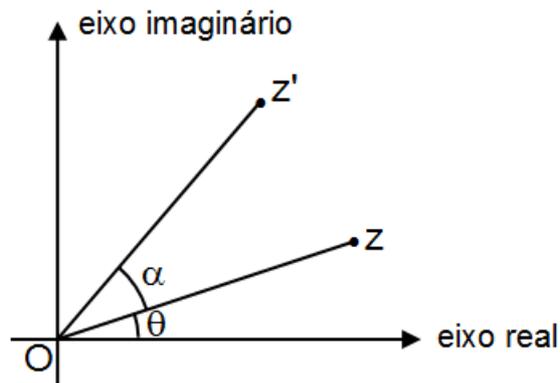


Figura 43

Dessa forma, para rotacionar um número complexo 90° em torno da origem, basta multiplicá-lo por $\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$, ou seja:

$$\pi(z, 90^\circ) = \rho[\cos(\theta + 90^\circ) + i \operatorname{sen}(\theta + 90^\circ)] = \rho(-\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta)$$

Na forma algébrica, o resultado anterior equivale a multiplicar o número complexo z por i , pois $\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$. Assim:

$$\pi(z, 90^\circ) = (a + bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$$

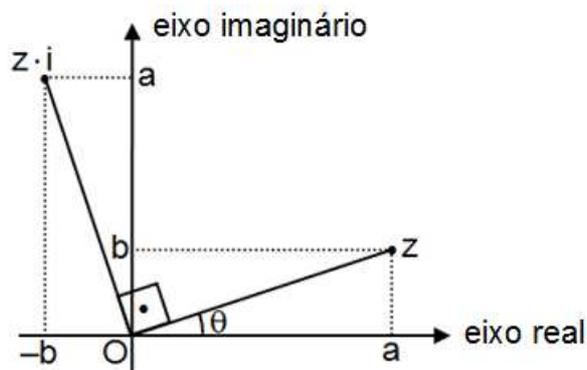


Figura 44

3.18.3. Homotetia

Definição

Sejam z um número complexo e k um número real. Denomina-se homotetia com centro na origem O e razão k a função $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\sigma(z) = z' = k \cdot z$.

Quando $k > 0$ a homotetia é direta e quanto $k < 0$ é inversa.

Para $|k| > 1$ tem-se uma dilatação e para $0 < |k| < 1$ uma contração.

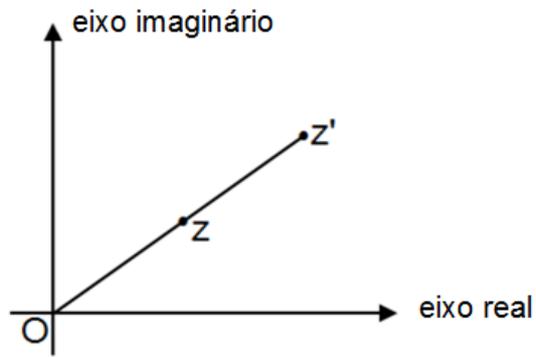


Figura 45: Dilatação direta

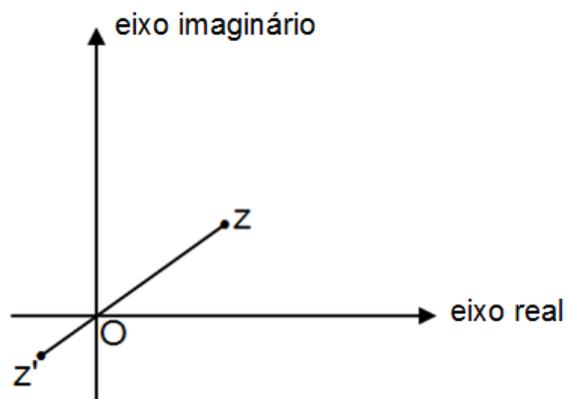


Figura 46: Contração inversa

3.18.4. Reflexão em torno de uma reta que passa pela origem

Definição

Seja z um número complexo e r uma reta. Denomina-se simétrico de z em relação à reta r o número complexo z' tal que r seja a mediatriz do segmento zz' .

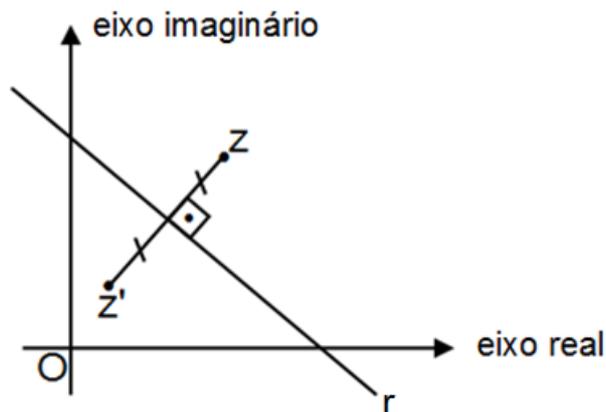


Figura 47

Considere agora uma reta r de inclinação θ e que passa pela origem O e um número complexo z . (Figura 48). O simétrico de z em relação à reta r é z' .

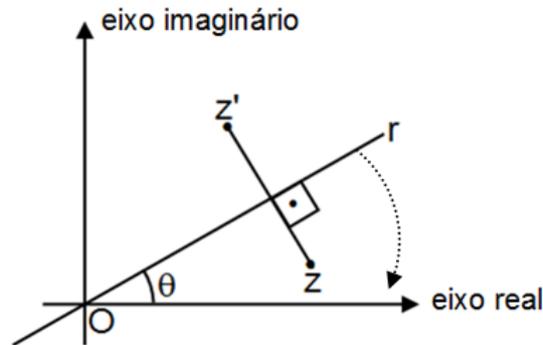


Figura 48

Girando r , z e z' um ângulo igual a $-\theta$ em torno da origem, a reta coincidirá com o eixo real e os pontos z e z' são transformados respectivamente em $\frac{z}{w}$ e $\frac{z'}{w}$, sendo $w = \cos\theta + i\sin\theta$. Mas $\frac{z}{w}$ e $\frac{z'}{w}$ são números complexos conjugados.

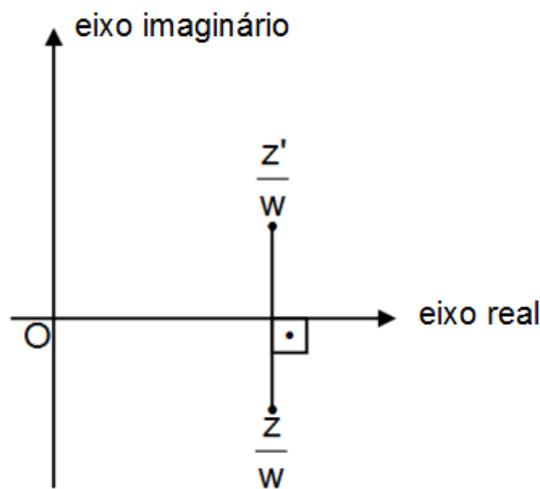


Figura 49

Assim:

$$\frac{z'}{w} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \Leftrightarrow \frac{z'}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow z' = \bar{z} \cdot \frac{w}{\bar{w}} \Leftrightarrow z' = \bar{z} \cdot \frac{w}{\bar{w}} \cdot \frac{w}{w} \Leftrightarrow z' = \bar{z} \cdot \frac{w^2}{|w|^2} \Leftrightarrow z' = \bar{z} \cdot w^2$$

Se $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, temos:

$$z' = \rho(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \cdot (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \rho(\cos(2\theta - \alpha) + i\sin(2\theta - \alpha))$$

3.18.5. Inversão

Definição

Sejam z um número complexo não nulo e C uma circunferência de raio 1 e centro na origem O . Denomina-se inversão, em relação a C , a função

$\xi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, definida por $\xi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

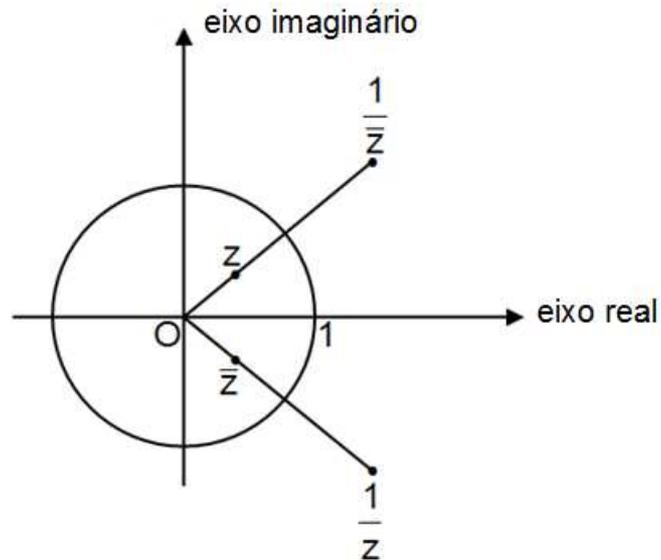


Figura 50

Proposição

A inversão transforma:

- circunferências que passam pela origem, sem a origem, em retas que não passam pela origem.
- retas que passam pela origem, sem a origem, nelas mesmas.
- circunferências que não passam pela origem, nelas mesmas.
- retas que não passam pela origem, em circunferências que passam pela origem, sem a origem.

Demonstração

Já sabemos que a equação $Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$, com B e γ reais e $B\gamma < |A|^2$, representa uma reta ou uma circunferência, conforme $\gamma = 0$ ou $\gamma \neq 0$.

Pela inversão $w = \frac{1}{\bar{z}}$, a equação anterior transforma-se em:

$$w = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{w} \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma z\bar{z} = 0$$

$$A \cdot \frac{1}{\bar{w}} + \bar{A} \cdot \frac{1}{w} + B + \gamma \cdot \frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} = 0$$

$$Aw + \bar{A}\bar{w} + Bw\bar{w} + \gamma = 0$$

$$Aw + \bar{A}\bar{w} + B|w|^2 + \gamma = 0$$

- Se $B = 0$ e $\gamma = 0$, a inversão transforma reta que passa pela origem, de equação $Az + \bar{A}\bar{z} = 0$, em reta que passa pela origem, de equação $Aw + \bar{A}\bar{w} = 0$.
- Se $B \neq 0$ e $\gamma = 0$, a inversão transforma reta que não passa pela origem, de equação $Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$, em circunferência que passa pela origem, de equação $Aw + \bar{A}\bar{w} + B|w|^2 = 0$.
- Se $B = 0$ e $\gamma \neq 0$, a inversão transforma circunferência que passa pela origem, de equação $Az + \bar{A}\bar{z} + \gamma|z|^2 = 0$, em reta que não passa pela origem, de equação $Aw + \bar{A}\bar{w} + \gamma = 0$.
- Se $B \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, a inversão transforma circunferência que não passa pela origem, de equação $Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$, em circunferência que não passa pela origem, de equação $Aw + \bar{A}\bar{w} + B|w|^2 + \gamma = 0$.

3.19. Transformação de Möbius

Definição

A transformação $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, em que a, b, c, d são números complexos constantes, tais que $ad - bc \neq 0$ é denominada transformação de Möbius ou transformação homográfica.

O quociente $\frac{az+b}{cz+d}$ faz sentido apenas se c e d não forem simultaneamente nulos. Caso tivéssemos $ad - bc = 0$, ou seja, $ad = bc$, teríamos as seguintes possibilidades:

- Se $c \neq 0$, então $b = \frac{ad}{c}$.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a \cdot (cz+d)}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

Portanto, a função f é constante.

- Se $c = 0$, então d deve ser diferente de zero. Da igualdade $ad = bc$, temos que $ad = 0$, o que implica em $a = 0$.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d}$$

Portanto, a função f é constante.

Suponhamos então que $ad - bc \neq 0$, isto é, que f não é constante.

Vamos escrever a transformação f de outra maneira. Sendo $c \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz+bc}{c \cdot (cz+d)} = \frac{acz+bc+ad-ad}{c \cdot (cz+d)} = \frac{a \cdot (cz+d) + bc - ad}{c \cdot (cz+d)} = \\ &= \frac{a \cdot (cz+d)}{c \cdot (cz+d)} + \frac{bc-ad}{c \cdot (cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{c \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)} \end{aligned}$$

Portanto:

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

- Se $c = 0$, a expressão $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ reduz-se a $f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$.

A transformação é formada por uma rotação de amplitude $\arg\left(\frac{a}{d}\right)$, de uma

homotetia de razão $\left|\frac{a}{d}\right|$ e de uma translação de amplitude $\frac{b}{d}$.

- Se $c \neq 0$, consideramos a expressão $f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$.

A transformação é formada por:

$z + \frac{d}{c}$: Uma translação de amplitude $\frac{d}{c}$.

$\frac{1}{z + \frac{d}{c}}$: Uma inversão e uma simetria em relação ao eixo real.

$\frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$: Uma rotação de amplitude $\arg\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right)$ e uma homotetia de

razão $\left|\frac{bc - ad}{c^2}\right|$.

$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$: Uma translação de amplitude $\frac{a}{c}$.

Considere as seguintes funções:

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad f_2(z) = \frac{1}{z} \quad f_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z \quad f_4(z) = \frac{a}{c} + z$$

$$\begin{aligned} (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) &= (f_4 \circ f_3 \circ f_2)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (f_4 \circ f_3)\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) = \\ &= f_4\left(\frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = f(z) \end{aligned}$$

Desta forma, a transformação de Möbius é uma composição de funções mais simples.

3.19.1. Matriz associada a uma transformação de Möbius

A transformação $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ pode ser obtida multiplicando a matriz $(z \ 1)$

pela matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ e em seguida dividindo-se o primeiro elemento pelo

segundo da matriz linha resultante.

$$(z \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (az + b \quad cz + d)$$

Assim, dizemos que a matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ está associada à transformação de Möbius definida por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, em que a, b, c, d são números complexos constantes, tais que $ad - bc \neq 0$.

Vamos agora analisar alguns tipos especiais de matrizes.

- Considere a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$, ou seja, a matriz associada à transformação de Möbius quando $c = 0$. Neste caso, devemos considerar os números complexos a, b e d , com $ad \neq 0$.

Essa transformação é dada por $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Sejam ρ o módulo do número complexo z e θ seu argumento. Já vimos que a transformação é formada por uma rotação de amplitude $\arg\left(\frac{a}{d}\right) = \alpha$, de uma homotetia de razão $\left|\frac{a}{d}\right|$ e de uma translação de amplitude $\frac{b}{d}$ (figura 51).

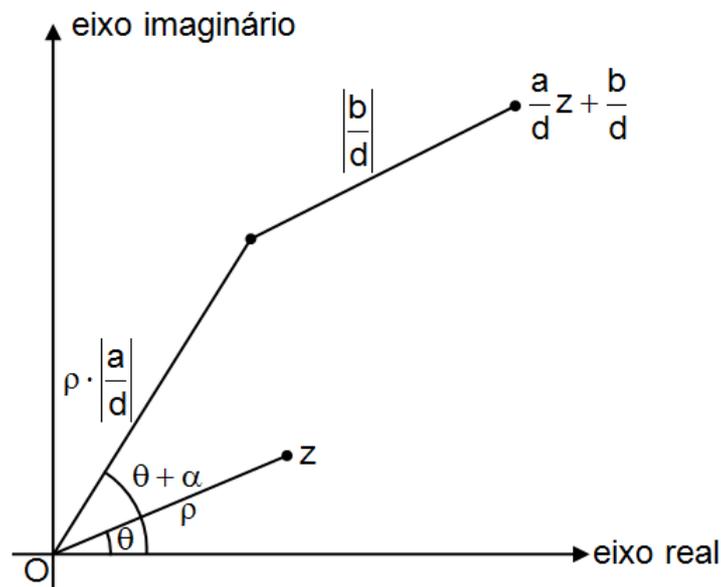


Figura 51

• Se $a = d = 1$ e b é um número complexo não nulo, a transformação consiste de uma **translação**, que pode ser verticalmente (b é um número imaginário puro), horizontalmente (b é um número real diferente de zero) ou ainda nas duas direções.

$$(z_k \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = (z_k + b \ 1) \Rightarrow f(z_k) = z_k + b$$

Exemplo:

Sejam $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - 2i$ e $z_3 = 2 + i$ vértices de um triângulo e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+3i & 1 \end{pmatrix}$ a

matriz associada à transformação.

$$(z_k \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+3i & 1 \end{pmatrix} = (z_k + 1 + 3i \ 1) \Rightarrow f(z_k) = z_k + 1 + 3i$$

Assim:

$$f(z_1) = z_1 + 1 + 3i = 1 - i + 1 + 3i = 2 + 2i$$

$$f(z_2) = z_2 + 1 + 3i = 3 - 2i + 1 + 3i = 4 + i$$

$$f(z_3) = z_3 + 1 + 3i = 2 + i + 1 + 3i = 3 + 4i$$

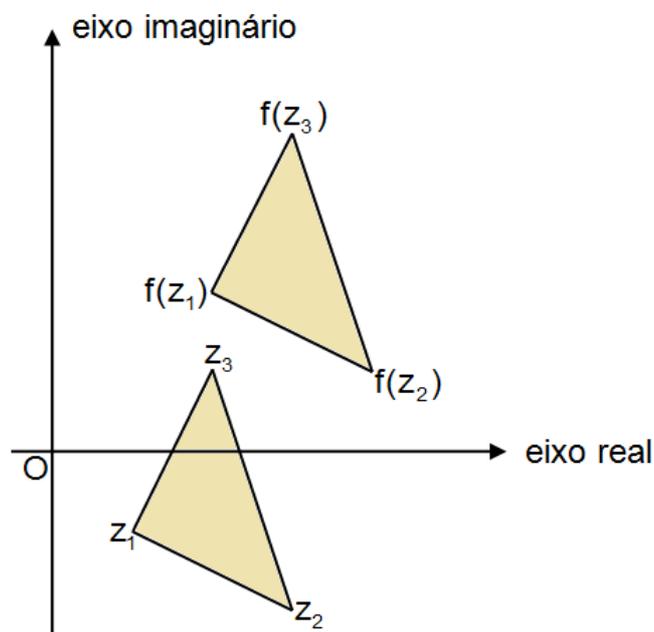


Figura 52

Cada um dos pontos do triângulo é deslocado de $|1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ unidades na direção do vetor correspondente ao número complexo $1 + 3i$. Esse deslocamento é composto de dois outros, um horizontal de 1 unidade e um

vertical de 3 unidades. Podemos observar também que esse tipo de transformação preserva os ângulos e os comprimentos. Assim, o triângulo inicial e o transformado são congruentes.

- Se $b = 0$, $d = 1$ e a é um número real não nulo, a transformação consiste de uma **homotetia**, que pode caracterizar uma dilatação ($|a| > 1$) ou uma contração ($0 < |a| < 1$), direta ($a > 0$) ou inversa ($a < 0$).

$$\begin{pmatrix} z_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a \cdot z_k \quad 1) \Rightarrow f(z_k) = a \cdot z_k$$

Exemplo:

Sejam $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - 2i$ e $z_3 = 2 + i$ vértices de um triângulo e $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz associada à transformação.

$$\begin{pmatrix} z_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2z_k \quad 1) \Rightarrow f(z_k) = -2z_k$$

Assim:

$$f(z_1) = -2z_1 = -2 \cdot (1 - i) = -2 + 2i$$

$$f(z_2) = -2z_2 = -2 \cdot (3 - 2i) = -6 + 4i$$

$$f(z_3) = -2z_3 = -2 \cdot (2 + i) = -4 - 2i$$

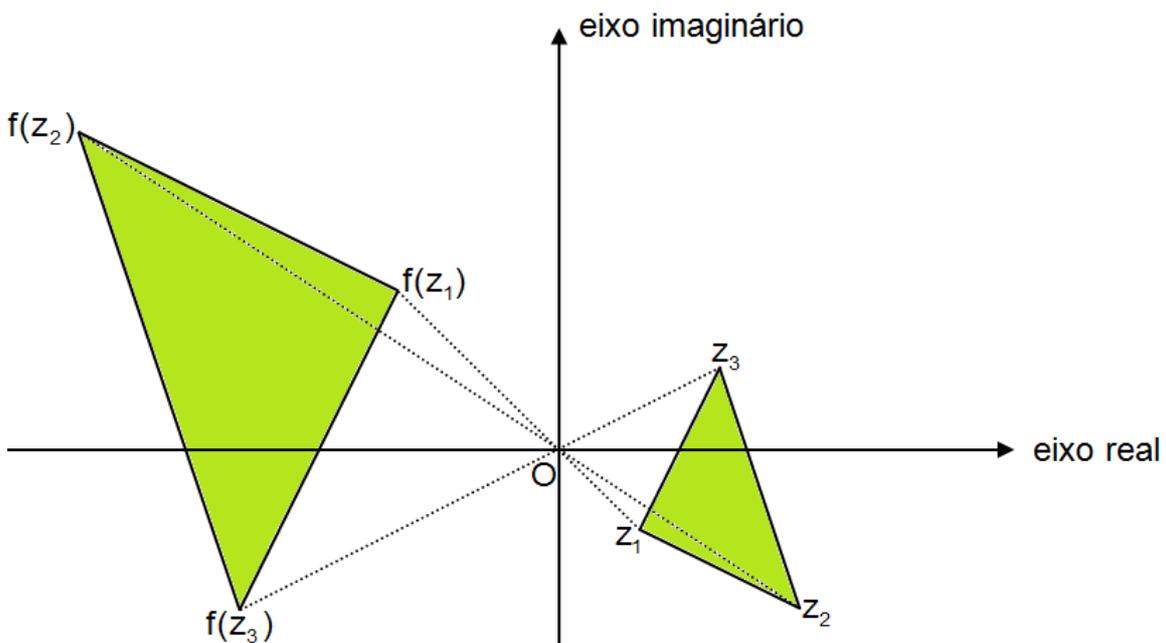


Figura 53

Esse tipo de transformação preserva os ângulos e gera comprimentos proporcionais. Assim, o triângulo inicial e o transformado são semelhantes. A dilatação ou a contração se dá em relação à origem do plano complexo.

- Se $a = 1$, $b = 0$ e $d = \pm i$, a transformação consiste em uma rotação de 90° em torno da origem, que pode se dar no sentido horário ($d = i$) ou anti-horário ($d = -i$).

$$(z_k \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = (z_k \ d) \Rightarrow f(z_k) = \frac{z_k}{d}$$

Para $d = i$, tem-se que $f(z_k) = \frac{z_k}{i}$.

Para $d = -i$, tem-se que $f(z_k) = \frac{z_k}{-i} = \frac{z_k}{-i} \cdot \frac{i}{i} = i \cdot z_k$.

Como $i = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$, então $f(z_k) = \frac{z_k}{i} = \rho [\cos(\theta - 90^\circ) + i \sin(\theta - 90^\circ)]$

e $f(z_k) = i \cdot z_k = \rho [\cos(\theta + 90^\circ) + i \sin(\theta + 90^\circ)]$, em que ρ e θ são o módulo e o argumento do número complexo z , respectivamente.

Exemplo:

Sejam $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - 2i$ e $z_3 = 2 + i$ vértices de um triângulo e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ a

matriz associada à transformação.

$$(z_k \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = (z_k \ -i) \Rightarrow f(z_k) = \frac{z_k}{-i} = \frac{z_k}{-i} \cdot \frac{i}{i} = i \cdot z_k$$

Assim:

$$f(z_1) = i \cdot z_1 = i \cdot (1 - i) = 1 + i$$

$$f(z_2) = i \cdot z_2 = i \cdot (3 - 2i) = 2 + 3i$$

$$f(z_3) = i \cdot z_3 = i \cdot (2 + i) = -1 + 2i$$

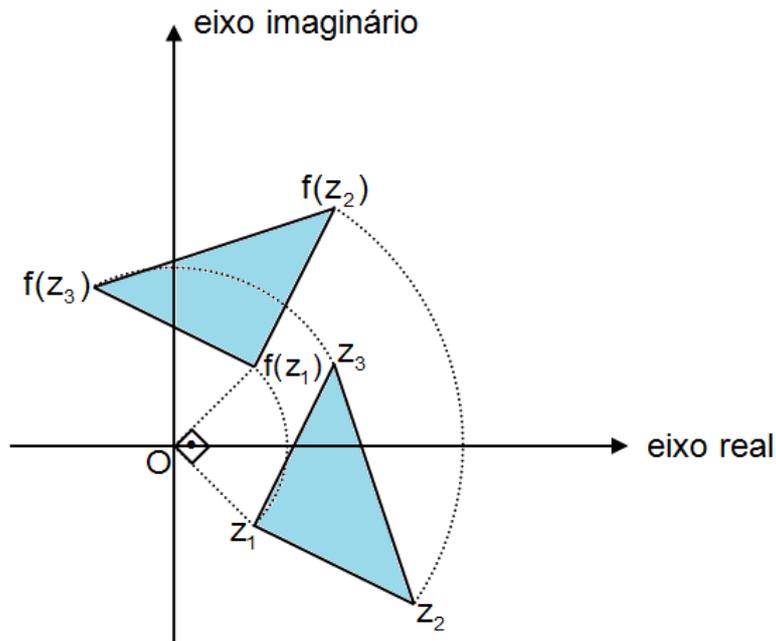


Figura 54

De acordo com os números complexos a , b e d , podemos ter mais de uma transformação em concomitância.

Por exemplo, considere a matriz $\begin{pmatrix} -2+4i & 0 \\ -1+3i & 1+i \end{pmatrix}$. Observe que $ad \neq 0$.

Calculemos: $(z_k \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -2+4i & 0 \\ -1+3i & 1+i \end{pmatrix} = ((-2+4i)z_k - 1+3i \ 1+i)$

Sejam $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3-2i$ e $z_3 = 2+i$ vértices de um triângulo Assim:

$$f(z_k) = \frac{(-2+4i)z_k - 1+3i}{1+i} = (1+3i)z_k + 1+2i$$

$$f(z_k) = (1+3i)z_k + 1+2i \Rightarrow \begin{cases} f(z_1) = (1+3i)(1-i) + 1+2i = 5+4i \\ f(z_2) = (1+3i)(3-2i) + 1+2i = 10+9i \\ f(z_3) = (1+3i)(2+i) + 1+2i = 9i \end{cases}$$

Representando geometricamente, temos:

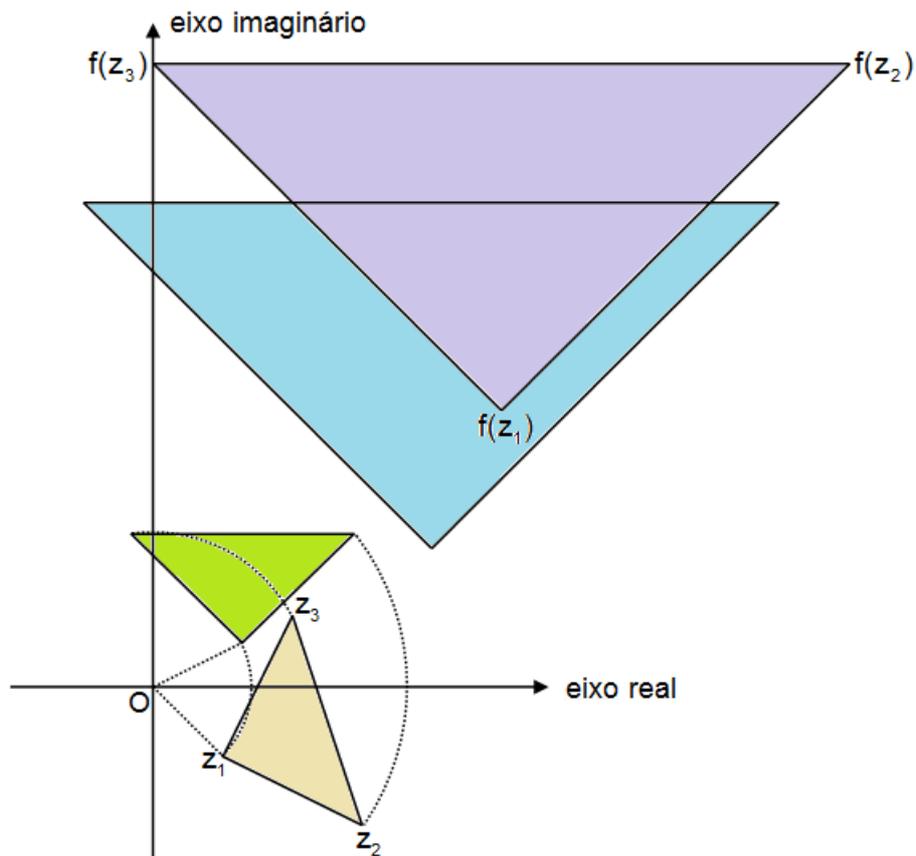


Figura 55

A transformação é composta de:

- Uma rotação de amplitude $\arg(1+3i) = \arctg 3 \simeq 71,6^\circ$.
- Uma dilatação de razão $|1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.
- Uma translação de amplitude $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ na direção do vetor correspondente ao número complexo $1+2i$.

4. Problemas

Para finalizar, apresentamos 10 problemas que podem ser resolvidos utilizando números complexos. Os problemas 4 e 5 apresentam resultados interessantes (e por que não dizer surpreendentes), mas se caracterizam também por terem maior nível de dificuldade.

Depois de cada enunciado, apresentamos uma possível resolução.

1. Em um quadrado ABCD, os vértices A e C são $A = (1, 2)$ e $C = (5, 4)$. Determine as coordenadas dos vértices B e D.

Resolução:

Inicialmente, vamos representar o quadrado no plano complexo:

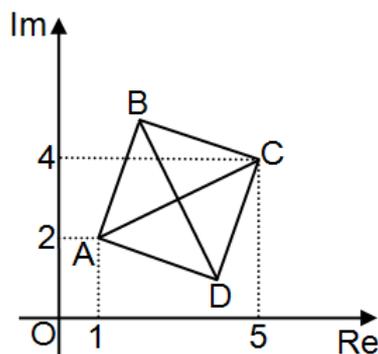


Figura 56

O ponto A é a representação geométrica do número complexo $1 + 2i$.

O ponto C é a representação geométrica do número complexo $5 + 4i$.

O vetor \overrightarrow{BC} é obtido pela rotação do vetor \overrightarrow{BA} de 90° no sentido anti-horário.

Portanto, temos:

$$\overrightarrow{BC} = i \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$C - B = i \cdot (A - B)$$

$$5 + 4i - B = i \cdot (1 + 2i - B)$$

$$5 + 4i - B = i - 2 - B \cdot i$$

$$B = \frac{7 + 3i}{1 - i} = \frac{7 + 3i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{7 + 7i + 3i - 3}{1 - i^2} = \frac{4 + 10i}{2} = 2 + 5i$$

Assim, $B = (2, 5)$.

Procedendo de maneira análoga com os vetores \overrightarrow{DC} e \overrightarrow{DA} , obtemos as coordenadas do vértice D.

O vértice D ainda por ser obtido observando-se, por exemplo, que os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DC} são iguais.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$B - A = C - D$$

$$2 + 5i - (1 + 2i) = 5 + 4i - D$$

$$2 + 5i - 1 - 2i = 5 + 4i - D$$

$$D = 4 + i$$

Assim, $D = (4, 1)$.

2. Dois vértices consecutivos de um quadrado ABCD são os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (5, -3)$. Quais são as coordenadas dos outros dois vértices?

Resolução:

Neste caso, temos duas possibilidades, os quadrados ABCD e ABC'D'.

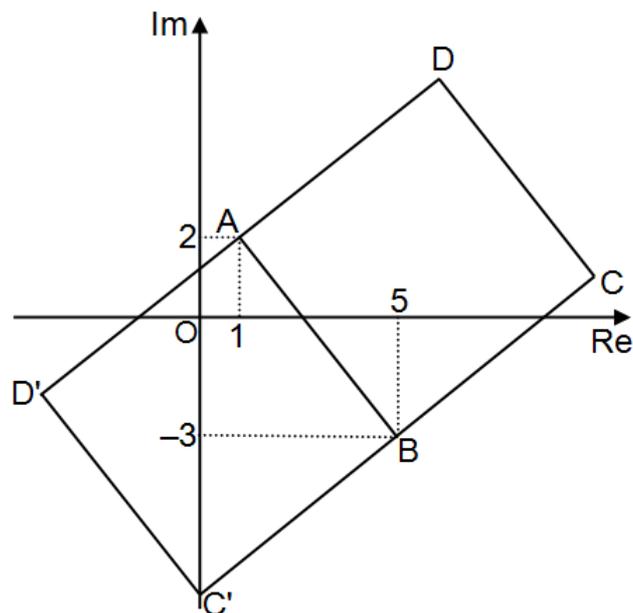


Figura 57

Inicialmente, vamos determinar os vértices C e D:

$$\overrightarrow{AD} = i \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$D - A = i \cdot (B - A)$$

$$D - (1 + 2i) = i \cdot [5 - 3i - (1 + 2i)]$$

$$D - 1 - 2i = i \cdot [4 - 5i]$$

$$D = 4i + 5 + 1 + 2i$$

$$D = 6 + 6i$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$D - A = C - B$$

$$6 + 6i - (1 + 2i) = C - (5 - 3i)$$

$$C = 10 + i$$

Assim, $C = (10, 1)$ e $D = (6, 6)$.

De modo análogo, determinamos que $C' = (0, -7)$ e $D' = (-4, -2)$.

3. Quais são as coordenadas do terceiro vértice de um triângulo equilátero em que dois vértices são os pontos $(-2, -2)$ e $(4, 2)$.

Resolução:

Mais uma vez, temos duas possibilidades, os triângulos ABC e ABC'.

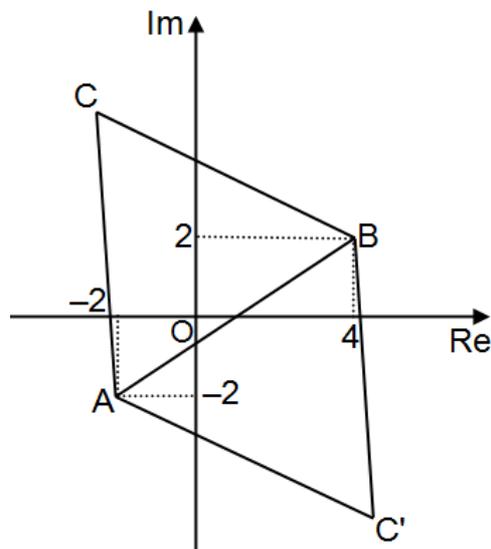


Figura 58

Vamos inicialmente determinar o vértice C:

Como se trata de um triângulo equilátero, o vetor \overrightarrow{AC} é obtido pela rotação do vetor \overrightarrow{AB} de 60° no sentido anti-horário.

Portanto, temos:

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 60^\circ)$$

$$C - A = (B - A) \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C = -2 - 2i + [4 + 2i - (-2 - 2i)] \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C = -2 - 2i + (6 + 4i) \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C = 1 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot i$$

$$\text{Assim, } C = (1 - 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}).$$

Analogamente:

$$\overline{AC'} = \overline{AB} \cdot [\cos(-60^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(-60^\circ)]$$

$$C' - A = (B - A) \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C' = -2 - 2i + [4 + 2i - (-2 - 2i)] \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C' = -2 - 2i + (6 + 4i) \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$C' = 1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \cdot i$$

$$\text{Assim, } C' = (1 + 2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}).$$

4. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n vértices de um polígono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário. Prove que:

$$(A_1A_2) \cdot (A_1A_3) \cdot (A_1A_4) \cdot \dots \cdot (A_1A_n) = n$$

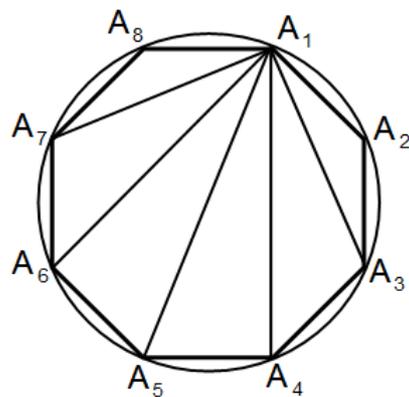


Figura 59 (caso particular do problema para $n = 8$)

Resolução:

Suponhamos, sem perda de generalidade, uma circunferência de raio unitário com centro na origem do plano complexo e os vértices A_1, A_2, \dots, A_n do polígono regular inscrito as raízes n -ésimas da unidade, ou seja:

$$A_1 = 1, A_2 = w, A_3 = w^2, \dots, A_n = w^{n-1}$$

Do teorema da decomposição, sabemos que:

$$z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1})$$

Ou ainda:

$$(z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

Dividindo $z^n - 1$ por $z - 1$:

$$(z - w) \cdot (z - w^2) \cdot \dots \cdot (z - w^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} \quad (1)$$

Por outro lado:

$$(A_1A_2) \cdot (A_1A_3) \cdot (A_1A_4) \cdot \dots \cdot (A_1A_n) = |1 - w| \cdot |1 - w^2| \cdot |1 - w^3| \cdot \dots \cdot |1 - w^{n-1}|$$

$$(A_1A_2) \cdot (A_1A_3) \cdot (A_1A_4) \cdot \dots \cdot (A_1A_n) = |(1 - w) \cdot (1 - w^2) \cdot (1 - w^3) \cdot \dots \cdot (1 - w^{n-1})|$$

Substituindo z por 1 em (1), temos:

$$(1 - w) \cdot (1 - w^2) \cdot \dots \cdot (1 - w^{n-1}) = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} = n$$

Portanto:

$$(A_1A_2) \cdot (A_1A_3) \cdot (A_1A_4) \cdot \dots \cdot (A_1A_n) = |n|$$

$$(A_1A_2) \cdot (A_1A_3) \cdot (A_1A_4) \cdot \dots \cdot (A_1A_n) = n$$

5. Considere um ponto P pertencente a uma circunferência de raio unitário e A_1, A_2, \dots, A_n vértices de um polígono regular convexo inscrito nessa circunferência. Prove que $(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + (PA_3)^2 + \dots + (PA_n)^2$ é constante.

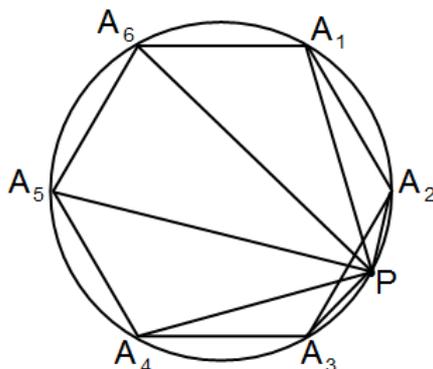


Figura 60 (caso particular do problema para $n = 6$)

Resolução:

Novamente vamos supor, sem perda de generalidade, uma circunferência de raio unitário com centro na origem do plano complexo e os vértices A_1, A_2, \dots, A_n do polígono regular inscrito as raízes n -ésimas da unidade.

Como P é um ponto pertencente a essa circunferência e sendo $P = z$, temos:

- $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$

- $PA_1 = |1 - z| \Rightarrow (PA_1)^2 = |1 - z|^2 = (1 - z) \cdot \overline{(1 - z)} = 1 - \bar{z} - z + z \cdot \bar{z} = 2 - (\bar{z} + z)$

- $PA_2 = |w - z| \Rightarrow (PA_2)^2 = |w - z|^2 = (w - z) \cdot \overline{(w - z)} =$
 $= w \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{z} = |w|^2 - w \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{z} = 2 - (w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w})$

- $PA_3 = |w^2 - z| \Rightarrow (PA_3)^2 = |w^2 - z|^2 = (w^2 - z) \cdot \overline{(w^2 - z)} =$
 $= w^2 \cdot \bar{w}^2 - w^2 \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w}^2 + z \cdot \bar{z} = |w^2|^2 - w^2 \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w}^2 + z \cdot \bar{z} = 2 - (w^2 \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^2)$

⋮

- $PA_n = |w^{n-1} - z| \Rightarrow (PA_n)^2 = |w^{n-1} - z|^2 = (w^{n-1} - z) \cdot \overline{(w^{n-1} - z)} =$
 $= w^{n-1} \cdot \bar{w}^{n-1} - w^{n-1} \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w}^{n-1} + z \cdot \bar{z} = |w^{n-1}|^2 - w^{n-1} \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w}^{n-1} + z \cdot \bar{z} =$
 $= 2 - (w^{n-1} \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^{n-1})$

Portanto:

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2 = 2 - (\bar{z} + z) + 2 - (w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}) + 2 - (w^2 \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^2) + \dots + 2 - (w^{n-1} \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^{n-1})$$

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2 = \underbrace{(2+2+2+\dots+2)}_{n \text{ vezes}} - [(\bar{z} + z) + (w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}) + (w^2 \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^2) + \dots + (w^{n-1} \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}^{n-1})]$$

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2 = 2n - [\bar{z} \cdot (1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}) + z \cdot (1 + \bar{w} + \bar{w}^2 + \dots + \bar{w}^{n-1})]$$

Como a soma das raízes da unidade é igual a 0, temos:

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2 = 2n - [\bar{z} \cdot 0 + z \cdot 0]$$

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2 = 2n \text{ (constante)}$$

6. Seja z um número complexo não nulo. Determine o lugar geométrico dos afijos de z para os quais $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Vamos apresentar duas soluções: uma algébrica e uma geométrica.

Primeira solução: algébrica

Sendo $z = x + yi$, temos:

$$z + z^{-1} = x + yi + \frac{1}{x + yi}$$

$$z + z^{-1} = x + yi + \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$z + z^{-1} = \frac{x^3 + xy^2 + x^2yi + y^3i + x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 + x + xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2} \cdot i$$

Como $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2y + y^3 - y = 0 \Rightarrow y \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1$$

Assim, o lugar geométrico dos afijos de z é uma circunferência com centro na origem e raio unitário unida com o eixo real do plano complexo, com exceção da origem, pois z deve ser um número complexo não nulo de modo que seu inverso exista.

Segunda solução: geométrica

De modo geral, os módulos de z e de $\frac{1}{z}$ são distintos (um é o inverso do outro)

e os argumentos são simétricos em relação ao eixo real. Observe a figura 61:

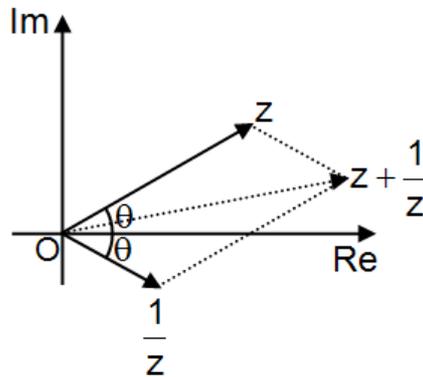


Figura 61

O vetor soma só estará contido no eixo real quando os módulos de z e de $\frac{1}{z}$

forem iguais ou quando z for real (neste caso $\frac{1}{z}$ também será). Assim:

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Rightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

ou

$$z \in \mathbb{R}$$

Os números complexos tais que $|z|=1$ descrevem uma circunferência com centro na origem e raio unitário.

Os números complexos tais que $z \in \mathbb{R}$ descrevem o eixo real (sem a origem).

7. (Teorema de Napoleão) Considere um triângulo ABC qualquer. Construimos os triângulos equiláteros ABD, ACE e BCF, externos ao triângulo ABC. Prove que o triângulo externo de Napoleão, cujos vértices são os baricentros dos triângulos ABD, ACE e BCF é equilátero.

Resolução:

Seja $G_1G_2G_3$ o triângulo externo de Napoleão, de acordo com a figura 62:

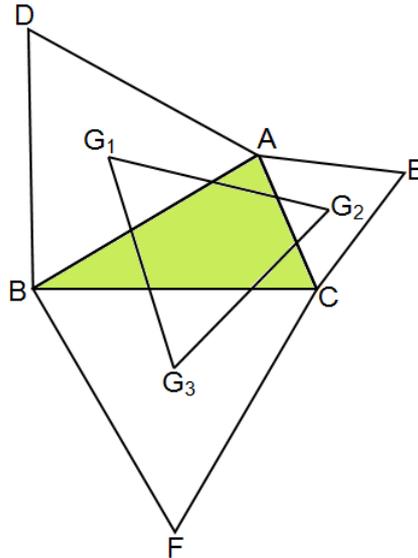


Figura 62

Seja ABC o triângulo dado. Os triângulos DBA, BFC e ACE são equiláteros e com a mesma orientação que o triângulo $1ww^2$, em que 1, w e w^2 são as raízes cúbicas da unidade. Assim:

$$\begin{cases} D + Bw + Aw^2 = 0 \\ B + Fw + Cw^2 = 0 \\ A + Cw + Ew^2 = 0 \end{cases}$$

Considere agora o triângulo $G_1G_3G_2$, também com a mesma orientação que o triângulo $1ww^2$. Vamos calcular $G_1 + G_3 w + G_2 w^2$:

$$\begin{aligned} G_1 + G_3 w + G_2 w^2 &= \left(\frac{A+B+D}{3}\right) + \left(\frac{B+C+F}{3}\right)w + \left(\frac{A+C+E}{3}\right)w^2 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (D+Bw+Aw^2) + \frac{1}{3} \cdot (B+Fw+Cw^2) + \frac{1}{3} \cdot (A+Cw+Ew^2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o triângulo $G_1G_3G_2$ também é equilátero.

8. (IME – RJ) Determine os parâmetros α , β , γ e δ da transformação complexa, $W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, que leva os pontos $Z = 0; -i; -1$ para $W = i; 1; 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Resolução:

Do enunciado, tem-se que $W(0) = i$, $w(-i) = 1$ e $w(-1) = 0$.

$$W(Z) = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

$$\begin{cases} W(0) = \frac{\alpha \cdot 0 + \beta}{\gamma \cdot 0 + \delta} = i \\ W(-i) = \frac{\alpha \cdot (-i) + \beta}{\gamma \cdot (-i) + \delta} = 1 \\ W(-1) = \frac{\alpha \cdot (-1) + \beta}{\gamma \cdot (-1) + \delta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \delta \cdot i \text{ (I)} \\ \frac{-\alpha \cdot i + \beta}{-\gamma \cdot i + \delta} = 1 \text{ (II)} \\ \frac{-\alpha + \beta}{-\gamma + \delta} = 0 \text{ (III)} \end{cases}$$

De (III), $-\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ (IV).

Assim, $\alpha = \delta \cdot i$ (V).

Substituindo (IV) e (V) em (II), temos:

$$\frac{-\alpha \cdot i + \beta}{-\gamma \cdot i + \delta} = 1 \Rightarrow -\delta \cdot i \cdot i + \delta \cdot i = -\gamma \cdot i + \delta \Rightarrow \delta + \delta \cdot i = -\gamma \cdot i + \delta \Rightarrow \gamma = -\delta \text{ (VI)}$$

Assim:

$$W(Z) = \frac{\delta \cdot i \cdot Z + \delta \cdot i}{-\delta Z + \delta} = \frac{i \cdot Z + i}{-Z + 1}$$

Considerando $\delta = 1$, temos:

$$\alpha = i, \beta = i, \gamma = -1, \delta = 1$$

Para esses valores, se $W(Z) = -2 - i$, então

$$-2 - i = \frac{i \cdot Z + i}{-Z + 1} \Rightarrow 2Z - 2 + iZ - i = i \cdot Z + i \Rightarrow Z = \frac{2 + 2i}{2} \Rightarrow Z = 1 + i$$

9. (IME – RJ) Seja o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Determine a imagem de A pela função complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$.

Obs: \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. $|z|$ é o valor absoluto de z.

Resolução:

Podemos pensar nesse problema geometricamente. A multiplicação de $4 + 3i$ por z corresponde a uma rotação de amplitude $\arg(4 + 3i)$ e de uma homotetia de razão $|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Além disso, a adição de $5 - i$ corresponde a uma translação de amplitude $5 - i$, ou seja, de 5 unidades para a direita e uma unidade para baixo no plano complexo.

Portanto, como $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, temos uma circunferência centrada na origem e com raio unitário.

Após efetuarmos as transformações descritas, teremos uma circunferência de raio 5 (devido à homotetia), com centro no ponto $(5, -1)$ (devido à translação). Observe que por se tratar de uma circunferência, a rotação não irá alterar o conjunto.

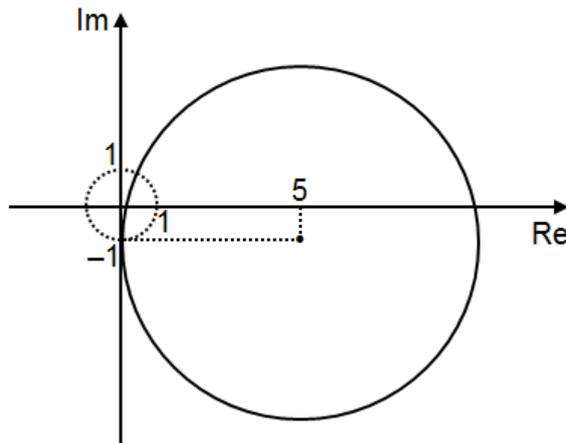


Figura 63

10. Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90° , à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90° , e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui." Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático? [10]

Resolução:

Iremos apresentar aqui uma solução para esse problema utilizando números complexos.

Observe a figura 64, que ilustra a situação do problema:

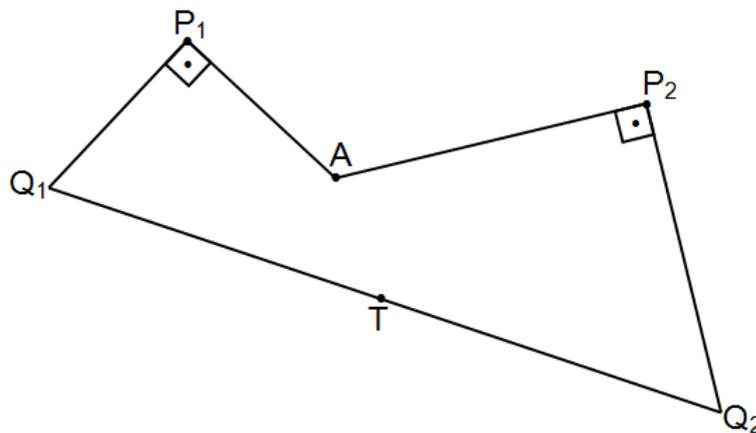


Figura 64

Os pontos A, P_1 e P_2 representam as posições da árvore e das duas pedras. O tesouro está enterrado no ponto médio de Q_1 e Q_2 .

Assim:

$$T = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

Já sabemos que:

$$\begin{cases} P_1 Q_1 = -i \cdot P_1 A \\ P_2 Q_2 = i \cdot P_2 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 - P_1 = -i \cdot (A - P_1) \\ Q_2 - P_2 = i \cdot (A - P_2) \end{cases} \Rightarrow Q_1 = P_1 - i \cdot (A - P_1) \text{ e } Q_2 = P_2 + i \cdot (A - P_2)$$

Assim:

$$T = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{P_1 - i \cdot (A - P_1) + P_2 + i \cdot (A - P_2)}{2} = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} \cdot i$$

Desta forma, observamos que a localização do tesouro não depende da posição da árvore.

De fato, o pirata era um matemático!!!

5. Conclusão

Após finalizar este trabalho, tenho convicção de que os números complexos podem ser ensinados aos alunos do Ensino Médio de uma forma mais interessante, associando-os sempre que possível com outras áreas da Matemática, como a geometria, por exemplo. Com isso, não apenas o estudo dos números complexos ganha mais significado para os alunos, como também em muitos casos os problemas geométricos são tratados e resolvidos mais facilmente. A transformação de Möebius também é uma excelente oportunidade de o professor apresentar as transformações geométricas elementares, relacionando-as com os números complexos e com matrizes. Evidentemente que alguns desenvolvimentos e resultados obtidos ao longo do trabalho não são compatíveis e indicados aos alunos do Ensino Médio, mas se caracterizam em ferramentas de estudo para que o professor adquira conhecimentos de modo que faça suas escolhas de acordo com o grau de interesse de cada turma e dos objetivos específicos de cada aluno. Outro fato que deve ser destacado é de que o assunto está longe de ser esgotado. Existem inúmeras possibilidades para o prosseguimento do estudo, que pode ser ampliado e aprofundado.

Referências

- [1] ÁVILA, G., *Variáveis Complexas e aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 2000.
- [2] BOULOS, P., CAMARGO, I. *Geometria Analítica, um tratamento vetorial*. Pearson, São Paulo, 2005.
- [3] CARMO M. P., MORGADO A. C, WAGNER E. *Trigonometria, Números Complexos*. SBM, Rio de Janeiro, 1992.
- [4] DOMINGOS, V. *Alguns aspectos da aplicação dos Números Complexos à Geometria*. Tese de doutorado defendida na Faculdade de Filosofia, Ciências e letras de Marília. 1968.
- [5] HAHN, L., *Complex Numbers and Geometry*. The Mathematical Association of America, 1994.
- [6] MOISE, E.E., DOWNS, F.L.: *Geometria Moderna*, Blücher, São Paulo, 1971.
- [7] MOTTA, E. *Aplicações dos Números Complexos à Geometria*. Revista Eureka, Nº 6. p. 30-38. SBM, 1999.
- [8] NETO, S.P., GÓES, C.C. *Matemática na Escola Renovada*, v.3. Editora Saraiva, 1973.
- [9] RODRIGUES, C. I. et al. *Transformação de Möbius*. Texto incluído no pacote disponível em m3.ime.unicamp.br/recursos/1037. UNICAMP.
- [10] SÁNCHEZ, J. A. P., CARNEIRO J. P. Q. *A ILHA DO TESOURO, DOIS PROBLEMAS E DUAS SOLUÇÕES*. Revista do Professor de Matemática, Nº 47. p. 1-4. SBM, 2001.