UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

FILIPE PINEL BERBERT BERMUDES

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NAS PRÁTICAS DO 4º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

VITÓRIA
2014

FILIPE PINEL BERBERT BERMUDES

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NAS PRÁTICAS DO 4º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Mestrado Profissional apresentado à Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção da titulação de Mestre em Matemática Profissional.
Orientador: Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim.

VITÓRIA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"O Laboratório de Ensino de Matemática nas Práticas do 4º Ciclo do Ensino Fundamental"

Filipe Pinel Berbert Bermudes

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 04/04/2014 por:

Fábio Júlio da Silva Valentim
Orientador - UFES

Julia Schaetzle Wrobel

Julia Shaetzle Wrobel
Examinador Interno - UFES

Evilson S. Vieira

Evilson da Silva Vieira
Examinador Externo - UFS

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus por tudo. Desde o dom da vida às vitórias diariamente alcançadas por sua força refletida em nós.

À minha esposa Denise e filhos Ilan e Eric que deram apoio e motivação para a luta e compreenderam as ausências durante os estudos.

Ao Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, meu orientador, de modo muito especial, pela dedicação e paciência ao me conduzir na elaboração deste trabalho.

Ao Coordenador Regional do PROFMAT Dr. Florêncio Guimarães, pelas excelentes aulas, pela atenção e pela receptividade no tratamento dispensado.

Aos professores do PROFMAT/UFES que nos acompanharam na jornada acadêmica nos renovando o ânimo a cada encontro.

Ao amigo Edson Santos (*in memoriam*) que se foi nos deixando um belíssimo exemplo de dedicação e força de vontade.

Aos demais amigos que sempre demonstraram companheirismo na convivência ao nosso lado.

E, por fim, a todos que direta ou indiretamente deram sua contribuição.

“Para aprender a sabedoria e o ensino; para entender as palavras de inteligência; para obter o ensino do bom proceder, a justiça, o juízo e a equidade; para dar aos simples prudência e aos jovens, conhecimento e bom siso. Ouça o sábio e cresça em prudência; e o instruído adquira habilidade para entender provérbios e parábolas, as palavras e enigmas dos sábios. O temor do SENHOR é o princípio do saber....”

(Provérbios de Salomão)

RESUMO

Nem sempre a Matemática é vista de forma favorável pelos alunos do Ensino Fundamental. Na realidade, o que temos observado na prática, é que toda turma que conhecemos apresenta um grupo significativo de alunos com preconceitos e resistência a respeito do que acreditam ser a Matemática. Isso tem motivado algumas reflexões, alguns estudos e algumas experiências de vários autores e professores acerca do Ensino. Dentre elas, destacam-se as práxis de laboratório para o ensino da Matemática. Em particular, pretendo abordar as práticas de Laboratório de Matemática para o 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, o chamado 4º ciclo, principalmente pela disponibilidade do material humano (alunos/turmas de 8º e 9º ano) a quem tenho tido por anos a oportunidade de lecionar. Como paralelo ao trabalho que venho propor está o livro didático que temos adotado nos últimos anos, Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini. Ele será minha referência ao propor as práticas complementares em laboratório nos quatro grandes eixos de estudo da Matemática do Ensino Fundamental: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Frente a tal desafio, foram utilizados, como referencial teórico, Mendes, Almeida, Lachinni, Polya, os Parâmetros Curriculares Nacionais entre outros, complementando-se com literatura digital publicada na internet em forma de artigos, monografias, etc.

Palavras chaves: Laboratório de Ensino de Matemática, Educação Matemática, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, diante de tantas mudanças na estrutura da escola e da sociedade, há necessidade de uma reflexão sobre a ação dos educadores em todas as modalidades de ensino, sobretudo no Ensino Fundamental e Médio, na perspectiva de melhorar o processo de ensino/aprendizagem de Matemática. O grande desafio colocado para os educadores é o de se criar possibilidades e proporcionar progressos significativos aos alunos nesses níveis de ensino. Isso, considerando a melhor adequação entre a prática pedagógica e a diversidade cultural dos aprendizes, sem perder de vista as diretrizes curriculares e o uso das novas tecnologias.

Há anos, a concepção que se tinha de uma didática capaz de atender a todas as especificidades, nas diferentes áreas de conhecimento, precisa ser repensada. Isso para não perpetuar um modelo que apenas repassa conhecimentos, mas que seja capaz de levar a um grau de generalização todo o processo e de incorporar um novo paradigma educativo comprometido com as mudanças, de modo que, de fato, responda ao processo de apropriação significativa (levando em consideração aquilo que o aluno já conhece) do conhecimento matemático.

No mundo avançado em que vivemos, a necessidade de se utilizar de novas metodologias educacionais cresce a cada dia, já que a informação e o conhecimento possuem muitas formas de transmissão. Portanto, este trabalho traz uma reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem de Matemática, nesse novo contexto, mais especificamente, refletindo a transformação da sociedade que não mais aceita gastar tempo e energia a não ser que esteja plenamente convencida de sua necessidade. São os novos tempos do menor esforço, do imediatismo e do consumismo pedagógico que começa cada dia mais cedo.

As novas tecnologias, especialmente as computacionais, incorporadas pela sociedade nas últimas décadas contribuíram decisivamente para a reflexão sobre as práticas no ensino. Evidentemente, o uso de tecnologias na educação não é algo novo, tendo em vista que o conceito de tecnologia pode ser associado tanto a um lápis quanto a um supercomputador. No final da década de 80, quando teve início a discussão sobre o uso da tecnologia computacional na Educação, imaginava-se que haveria muitos professores ociosos, mas foi comprovado que essa preocupação não se fundamentou, pois a participação do docente é essencial para a aprendizagem. Sem a mediação dele o uso da tecnologia contribui muito pouco para se articular os conhecimentos com os significados que a eles se associam. O grande desafio decorre, então, de possibilitar os progressos significativos dos alunos do Ensino Fundamental e Médio, por meio da adequação de uma didática, cujas práticas pedagógicas atendam à diversidade dos aprendizes.

Como se sabe atualmente a tecnologia facilita a vida do homem moderno, devido à disponibilidade de acesso a muitas informações e conhecimentos. Na Educação, o retardamento do uso dos avanços tecnológicos na escola foi devido a várias razões, inclusive de ordem econômica. Nesse cenário, quanto à Educação Matemática, muitos questionamentos sustentaram a não inclusão de novas tecnologias e metodologias na escola, como: “Se o aluno utilizar a calculadora, de que forma ele aprenderá a fazer contas? Se o estudante do 9º ano utiliza o computador e o gráfico da parábola já surge, como ele conseguirá, de fato, aprender a traçá-lo? Se todo conteúdo for apresentado via materiais manipuláveis, como o aluno vai aprender a abstrair?” essas e muitas outras dúvidas, ligadas a uma tradição pedagógica, dificultaram de modo mais específico a inserção de uma pedagogia construcionista no mundo da Educação Matemática.

Hoje, há um entendimento de que o uso de novos recursos pedagógicos não só favorece a aprendizagem, como também estreita a relação entre teoria e prática além de auxiliar os pais a se tornarem mais participativos, no processo de Educação. Isto ocorre à medida que o professor se propõe a observar o que os alunos trazem de informação e cultura para mais adiante fazer uso dessa observação para aguçar o interesse dos alunos e envolver os pais. Tais observações podem se deparar com jogos eletrônicos, orçamento doméstico, geografia (e geometria) do bairro, dentre outras situações aproveitáveis.

Além disso, os recursos digitais e manipuláveis nas escolas podem ser uma ferramenta favorável ao aprimoramento do indivíduo, pois são esses tipos de recursos que, certamente, estarão presentes em todas as áreas de suas vidas, do lazer à profissão que escolherem. Assim, as escolas têm papel fundamental na preparação de seus alunos, uma vez que têm a chance de prepará-los não só para usar os recursos disponíveis, mas também, para orientá-los sobre como usá-los de forma consciente, ética e responsável. Padrões que vão além do que a sociedade exige, mas, contribuem positivamente para uma nova consciência coletiva de cidadania e respeito ao próximo.

Pretendemos com esse trabalho tirar a Matemática da posição estática que por tantas vezes tem sido apresentada como única opção. Com este trabalho, pretendemos dar praticidade às discussões acerca de uma real aproximação entre a Matemática e o cotidiano do aluno. A intenção desse trabalho é contrastar a proposta de trabalho do livro didático Matemática Bianchini, adotado no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de algumas escolas brasileiras, com a proposta de trabalho pelo Laboratório de Ensino da Matemática à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN´s.

Além disso, apresentamos um pouco da nossa vivência de sala de aula que permite-nos levantar a hipótese de que a Matemática também se revela como produto de uma prática social consciente, ou seja, através do conhecimento dessa ciência é possível estudar e compreender alguns problemas sociais, como as causas de acidentes de trânsito, por exemplo, e racionalmente propor soluções para tais questões. A Matemática está nas relações que se estabelecem com os objetos, coisas e seres da realidade, levando à construção e reconstrução do conhecimento de forma permanente.

Pretendemos ainda, analisar e refletir sobre alguns diferentes pontos de vista apresentados por alguns autores sobre a definição do que vem a ser o LEM (Laboratório de Ensino da Matemática) e tomarmos uma posição sobre qual definição usar.

Acreditamos que esta pesquisa pode contribuir somando valores que motivarão uma melhor organização da sala de aula de Matemática na escola, provocando reflexões sobre as abordagens e práticas de se socializar com os alunos os conhecimentos, já que a proposta de trabalho com o LEM traz aplicações que despertam o interesse pela Matemática, tendo como principal objetivo a aprendizagem significativa por sua utilização prática. Daí a importância de se olhar a Matemática como a linguagem do pensamento e, por conseguinte, parte integrante do nosso espaço social.

Procuraremos com a pesquisa entender quais são as habilidades e competências necessárias para se tornar parte integrante e agente de transformação da atual sociedade e de que forma o trabalho com o LEM pode contribuir para essa formação integral. Para tanto, vamos: refletir sobre os impactos de uma pedagogia articulada ao cotidiano e identificar, com base nas experiências que temos como educadores de ensino da Matemática, como se aliam as abordagens de ensino às ferramentas oferecidas pelo LEM.

A intenção de se construir um conceito mais abrangente para o LEM tem certamente como pano de fundo o objetivo de reacender o desejo dos alunos pela descoberta da Matemática e mostrar a viabilidade da implementação de um Laboratório de Ensino de Matemática sejam quais forem as condições econômicas da escola, de seus professores e de seus alunos, bem como suas condições de infraestrutura e de espaço físico. Além disso, ao apresentar o que dizem os PCN´s e o que traz o livro didático, objetivamos mostrar a necessidade de um trabalho como o LEM em paralelo ao trabalho realizado com o material didático. Por fim, para evidenciar a viabilidade das ideias propostas apresentamos algumas possibilidades e exemplos de práticas de trabalho com o LEM em paralelo ao trabalho de sala de aula e por meio delas, mostramos o bom alinhamento do que se pretende com a proposta do LEM e as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

2. AS INFLUÊNCIAS DAS ABORDAGENS PEDAGÓGICAS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Antes de abordar os aspectos internos à implementação de um modelo de aula planejada como LEM, é fundamental dedicar parte da atenção para aquele que tem o poder de fazer a dinâmica de o LEM funcionar ou emperrar: o professor. Nem sempre é fácil ou natural para um professor mudar sua visão sobre como se deve ensinar algo e isso se deve em alguma escala ao tipo formação a que esse professor foi submetido, não somente na faculdade, mas antes, no Ensino Básico, na escola que o apresentou à Matemática. A escola que formou a maioria dos professores atuais, provavelmente, nunca dedicou parte de sua estrutura ou parte de seu orçamento especificamente para a Matemática. Pois como Sustenta Mário Lima (1999, p.2).

> “Apesar de alguma inovação nos métodos de ensino, tem-se ficado muito aquém do que seria desejável – por vários motivos; um deles é a gestão de espaços educativos e recursos materiais nas escolas. [...] Nas aulas de Matemática, ainda prevalece o espaço da sala de aula ‘normal’, isto é, apenas mesas, cadeiras e o quadro de giz, na forma tradicional, e (nem sempre) um retroprojetor”.

Há diferentes concepções de formação de professores, cada uma busca estabelecer uma coerência entre o papel do fazer docente e o momento histórico-social da humanidade. Se as abordagens pedagógicas (tradicional, construtivista, tecnicista, etc.) passaram por transformações de acordo com o contexto sociopolítico, o professor também sofreu influências que refletiram no seu fazer educativo. Hoje a sociedade da informação, pautada na complexidade e no multiculturalismo, reivindica um novo modelo de Educação o que implica uma formação docente não estática, para estar conectada com as demandas da sociedade, ou seja, um processo de formação mais verticalizado, contínuo e permanente. Como afirma SILVA, 2008, p. 32.

> Nesse contexto, o profissional, formado por uma escola contextualizada e repensada numa dimensão globalizante, não deve ser mais aquele indivíduo apenas detentor de um saber e especialista em áreas específicas. Precisa necessariamente desenvolver qualificações e competências que possam contribuir, intervir e mudar a sociedade para melhor, atendendo as suas demandas e expectativas.

Via de regra, quando se fala em uma escola contextualizada com as demandas sociais, é feita a associação direta com uma sala de aula tecnológica, dispondo de diversos recursos digitais à disposição do professor. Entretanto, estudiosos da Educação como Valente (1993, p. 6) pregam que simplesmente usar tecnologias, por mais avançadas que sejam para transmitir conhecimento não trarão mudanças significativas sobre uma aprendizagem mais significativa.

> A verdadeira função do apoio educacional não deve ser a de ensinar, mas sim a de criar condições de aprendizagem. Isso significa que o professor precisa deixar de ser o transmissor de conhecimento, o computador pode fazer isso e o faz muito mais eficientemente do que o professor que, por sua vez, passa a ser criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno.

Diante desse contexto de novas possibilidades, novas exigências e velhas mentalidades em relação ao aprender, conclui-se que as mudanças esperadas não dizem respeito somente à adoção de métodos diversificados, mas sim a atitude diante do conhecimento e da aprendizagem, bem como a uma nova concepção de ensinar. Isso significa que o professor terá papéis diferentes a desempenhar, o que torna necessário novos modos de formação que possam prepará-lo para o uso pedagógico de novas e velhas tecnologias, assim como para refletir sobre a sua prática, acerca do desenvolvimento, da aprendizagem e de seu papel de agente transformador de si mesmo e de seus alunos. Conforme Prado (1993, p. 99),

> [...] o aprendizado de um novo referencial educacional envolve mudança de mentalidade [...]. Mudança de valores, concepções, ideias e, consequentemente, de atitudes que não é um ato mecânico. É um processo reflexivo, depurativo, de construção, que implica transformação, e transformar significa conhecer.

Faz-se, portanto necessário, um professor determinado a ser não o construtor do conhecimento, mas, sim o arquiteto. Ou seja, cabe a este novo professor, desenhar os contornos do conhecimento almejado, mas, é cada vez mais desejável, por sua eficácia, que o aprendiz seja o operário de sua própria obra. Tal professor, deve ainda primar, para que no ambiente por ele desenhado, a experiência individual, possa se converter em experiência coletiva.

3 MATEMÁTICA EM LABORATÓRIO

3.1 Concepção de Laboratório de Ensino da Matemática

É até possível entender e aceitar que algumas ferramentas, sejam elas quais forem, possam ser compartilhadas por diferentes profissões e profissionais. Um mesmo microscópio eletrônico pode ser usado por um biólogo, por um físico ou por um engenheiro de materiais para observações bem diferentes, entretanto, o mais comum é que o ferramental, necessário para o bom desenvolvimento de uma e de outras profissões sejam bastante exclusivos. Por esse motivo, parece razoável que diferentes professores de diferentes áreas necessitem de ferramentas específicas que permitam alcançar seus objetivos de forma mais sólida e eficaz, ainda que compartilhem algumas ferramentas comuns, tais como quadro e pincel. Dessa forma, podemos definir/conceber o Laboratório de Ensino de Matemática como o local – ainda que momentâneo – que dispõe das ferramentas necessárias ao pleno desenvolvimento do ensino/aprendizagem da Matemática que se pretende tanto pelo professor quanto pelo aluno. Esta definição concorda quase totalmente com a definição/concepção de autores como Lorenzato (2006, p.7)

> ... um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso, o professor precisa de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensamento matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

O ponto de divergência se dá apenas quanto à exclusividade ou não do local definido como LEM. De forma clara, Lorenzato defende a exclusividade do ambiente para o ensino/aprendizado/estudo da Matemática; Lorenzato (2006, p. 7).

> Para muitos professores, todas as salas de aula e todas as suas aulas devem ser um laboratório onde se dão as aprendizagens da Matemática. Essa é uma utopia que enfraquece a concepção possível e realizável do LEM, porque ela pode induzir professores a não tentarem construir o LEM num certo local da escola em que trabalham...

Entretanto, não vamos nos deter na questão da exclusividade do local, uma vez que o planejamento da aula de laboratório deve prever todos os recursos didáticos necessários para seu pleno desenvolvimento, e em havendo a disponibilidade de tais recursos, está instalado o laboratório de Matemática, ainda que esse espaço não seja exclusivo, como concordam Franzoni e Panossian (1999, p.114) "[LEM]... é um ambiente que propicia aos alunos a possibilidade de construção de conceitos matemáticos, além da análise e nova interpretação do mundo em que vivem". Além disso, a não dependência de um local exclusivo amplia a possibilidade de trabalho no LEM a praticamente qualquer contexto escolar, uma vez que se retira o foco do local e se coloca sobre a preparação das aulas.

3.2 Como promover a aprendizagem significativa no LEM

Os recursos didáticos disponíveis no LEM devem por si só despertar a atenção e um princípio de interesse ou no mínimo a curiosidade dos alunos, mas, os recursos sozinhos não serão capazes de sustentar nenhuma dessas reações positivas, por isso, tão importante quanto os recursos didáticos de um LEM é o professor que irá conduzir as aulas experimentais. O laboratório deve ser um espaço para que o aluno construa seu próprio conhecimento, neste sentido, o professor precisa perder o controle absoluto sobre que conteúdos o aluno irá aprender e principalmente sobre a forma como o aluno irá aprender, sua função não será mais dar as respostas, e sim fazer perguntas. Tais perguntas devem ser pensadas, planejadas e intencionais. Durante seu planejamento, o professor deve ter três ideias claras em mente: Em que nível meu aluno está, ou seja, quais são seus conhecimentos prévios? Em que nível meu aluno precisa chegar? Que perguntas podem fazê-lo alcançar o segundo nível? Isto é, o professor deve elaborar perguntas/desafios como quem constrói uma escada. Um questionamento que poderá surgir, é porque o professor não pode simplesmente mostrar ao aluno como se chega ao segundo nível, poupando assim, muito tempo, trabalho e garantindo uma conceituação sem lacunas? A resposta a essa pergunta pode ser alcançada a partir de outra pergunta: Que tipo de aprendizagem queremos dar ao nosso aluno? De acordo com Pozo (1998 p.33) há dois tipos de aprendizagem: a memorística e a significativa. Conforme o próprio Pozo (1998 p. 30) comenta, promover aprendizagem memorística

> "... consiste em fazer cópias na memória do conhecimento ou da informação que foi recebida. Essa visão "realista" da aprendizagem – existe um saber objetivo lá fora e aprender é apropriar-se do mesmo – faz de nosso conhecimento uma réplica do mundo percebido, devido ao qual as atividades de aprendizagem e ensino devem estar centradas em expor ao aluno o conhecimento mais adequado ou "verdadeiro", para que ele o reproduza com fidelidade."

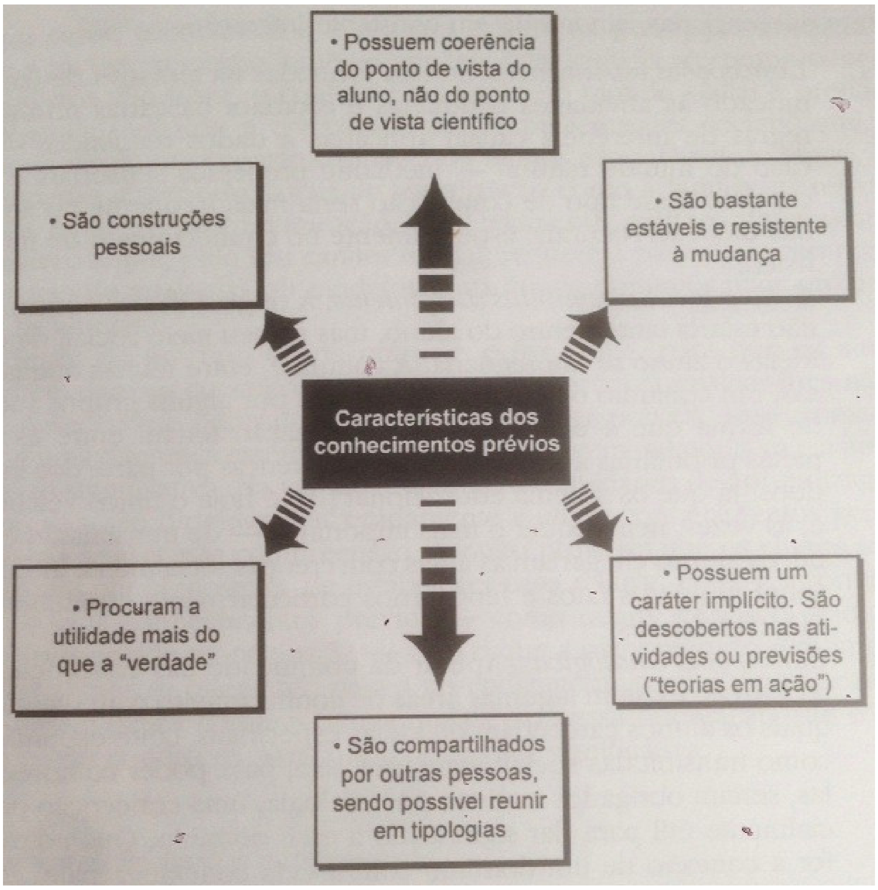
Esta forma de aprendizagem sem dúvida foi eficaz durante décadas, talvez séculos como forma de perpetuar uma cultura, mas não contribui para a autonomia do aprendiz nem tampouco para a transformação da sociedade em que ele vive. Se a sociedade se transforma não é devido à aprendizagem memorística de sua população e sim da aprendizagem significativa, – graças à escola ou apesar dela – que se baseia em compreender o significado do material. Novamente citamos Pozo (1998 p.32)

> "Vejamos como funciona a aprendizagem significativa que costuma ter como produto a aquisição de conceitos". Para isso voltemos ao texto anterior. Qual é o significado do texto? O que ele trata realmente? A chave para recordar um maior número de ideias do texto é tentar formar uma ideia geral sobre o seu conteúdo. Isso tampouco é fácil, já que o texto é bastante abstrato. Somente poderemos entendê-lo – aumentando sem dúvida a nossa lembrança do mesmo se amanhã alguém nos perguntar o que estamos lendo – se formos capazes de ativar alguma ideia geral a qual possa fazer referência. Tal ideia deve ser extraída da nossa bagagem conceitual de conhecimentos prévios. Essa é a ideia central da aprendizagem significativa: trata-se de um processo no qual o que aprendemos é o produto da informação nova interpretada á luz daquilo que já sabemos. [...] Somente assim, compreendemos e adquirimos novos significados ou conceitos.

É deste tipo de aprendizagem que falamos quando propomos o Laboratório de Ensino de Matemática, em aulas bem planejadas e bem conduzidas por um professor que faz as perguntas em vez de dar as respostas.

Finalmente, para que a aprendizagem significativa seja construída, é preciso refletir mais detidamente sobre os conhecimentos prévios dos alunos, pois como defendem inúmeros autores, tais como Resnick e Ford (1981) quando uma pessoa tenta compreender alguma coisa nova, é necessário que conhecimentos prévios sejam ativados para que se possa organizar e dar sentido ao novo. Isto sem dúvida incomoda, pois, mexe com o que já estava organizado, definido, estabelecido. O professor deve estar preparado, pois a resistência é uma das primeiras reações ao desconforto gerado pelas perguntas que ainda não têm respostas satisfatórias. Pozo (1998 p. 41) apresenta em um quadro resumo os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos.

Fig. 1 – Diagrama das características dos conhecimentos prévios



Fonte: Os Conteúdos da Reforma[1]

1 – Imagem digitalizada a partir do livro: Os Conteúdos na Reforma; Pozo (1998 p.41)

Considerar tais características por certo auxilia o professor na elaboração de suas perguntas e certamente o tornará mais compreensivo às possíveis reações adversas dos alunos.

3.3 O LEM como ferramenta na resolução de problemas

Uma das obras mais importantes no que diz respeito à didática da resolução de problemas é o livro “A Arte de Resolver Problemas” do matemático húngaro George Pólya. Nele Pólya traz antes da introdução propriamente dita do livro, um pequeno manual, em duas páginas, intitulado: “Como Resolver Um Problema”. Nas páginas seguintes, este manual é brilhantemente defendido e explicado de forma clara e prática. Clareza e praticidade, por sinal, são características que sem dúvida nenhuma não podem faltar na proposta do LEM. Por esse motivo, analisaremos os quatro pontos sugeridos pelo autor do ponto de vista de sua aplicabilidade à proposta do LEM.

“Primeiro. É preciso compreender o problema.” Pólya (1944, p. XII)

Não se pode atacar um problema que não esteja plenamente compreendido. Por isso, de pouco servirão os recursos do LEM para estudantes que não compreenderam o problema. Os problemas propostos devem ser claros, por outro lado, se ainda assim o aluno apresenta dificuldades de compreensão, professor pode fazer algumas perguntas que conduzem ao pensamento e a perfeita interpretação do problema. São perguntas como as sugeridas por Pólya: “Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?” Professor e aluno precisam ter paciência para esse momento. O aluno que não está acostumado com essa metodologia pode insistir com o professor pela indicação de um caminho rápido, e o professor por sua vez deve estar preparado para enfrentar essa insistência dando ao aluno pistas que apenas o auxiliem a manter o foco ou mudar o foco quando necessário.

“Segundo. Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma solução imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.” Pólya (1944, p. XII)

Após compreender o problema a atividade de LEM pede um plano de ação. Mas, antes de iniciá-lo, é necessário considerar algumas questões de suma importância, sob pena de não otimizar o esforço. É comum que nesse tipo de atividade os alunos obtenham dados desnecessários ou excedentes. Um bom plano de ação leva a uma execução mais limpa e rápida. Sobretudo, um bom plano de ação deve estar firmado em sólidos argumentos.

“Terceiro. Execute seu plano.” Pólya (1944, p. XIII)

Uma vez estabelecido um plano de ação, é hora de executá-lo. O professor deve orientar seus alunos a executarem o plano de ação passo a passo, tendo sempre a clareza de que aquele passo está correto. Para isso Pólya sugere o autoquestionamento “É possível demonstrar que ele está correto?”.

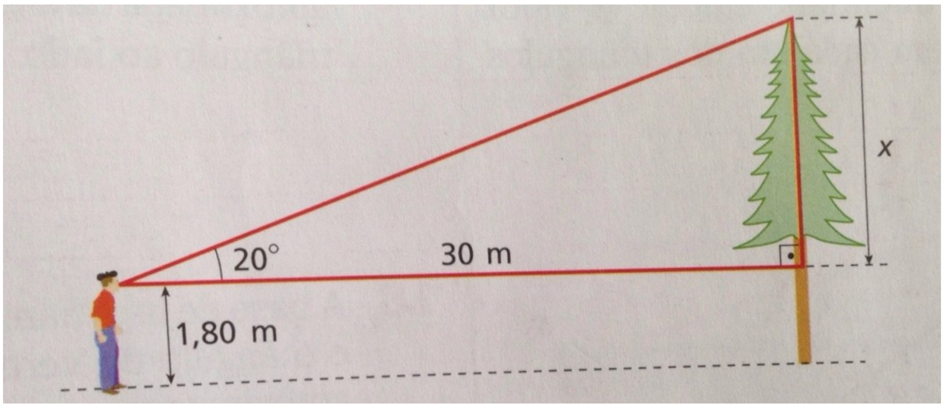
“Quarto. Examine a solução obtida.” Pólya (1944, p. XIII)

Chegar ao resultado não deve ser sinônimo do fim do trabalho, pois todo o esforço despendido de nada servirá se alguma pequena falha no processo estiver oculta no resultado. Por isso se faz tão necessário um retrospecto da resolução. Novamente, as perguntas formuladas por Pólya servirão de norteadoras para assegurar validade do resultado. “É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?”

Embora esse pequeno manual de procedimentos para a resolução de problemas tenha sido elaborado especialmente para uma execução teórica, cada etapa pode ser muito bem aproveitada nas ações dos problemas do LEM, cabe aqui reforçar o que fora citado por Franzoni e Panossian (1999, p.114) “[LEM]... é um ambiente que propicia aos alunos a possibilidade de construção de conceitos matemáticos, além da análise e nova interpretação do mundo em que vivem”. Além disso, uma atividade de LEM bem elaborada, quase sempre dependerá parcial ou totalmente de propriedades ou de um resultado teórico.

Vejamos um exemplo: Ao apresentar o novo conteúdo – Trigonometria – aos alunos de uma turma de 9º ano, pode-se aguçar a curiosidade dos estudantes falando das possibilidades dessa valiosa ferramenta, entre elas, a de medir indiretamente distâncias inacessíveis como: a altura de uma montanha, a largura de um rio e até o raio do planeta Terra. Para comprovar a eficiência dessa ferramenta, propõe-se aos alunos o desafio de medir (calcular) a altura da cobertura da quadra da escola. Antes de prosseguir, os alunos precisam entender quão necessária se faz a compreensão teórica da trigonometria, bem como de suas propriedades. Fazendo uso do livro didático Matemática Bianchini, deve-se frequentemente, reportar à questão: Como podemos utilizar esse conhecimento para calcularmos a altura da quadra? Sem perder o foco, do desafio proposto, apresenta-se aos educandos uma versão teórica do desafio conforme Bianchini (2011, p.215).

> Situação 1: Uma pessoa avista o ponto mais alto de uma árvore segundo um ângulo de 20°, conforme a figura abaixo. Vamos calcular a altura dessa árvore.



Superadas todas essas etapas, é a hora de aplicar a metodologia apresentada por Pólya na resolução deste problema.

"Primeiro. É preciso compreender o problema." Neste caso, trata-se de um problema de fácil compreensão, entretanto, é possível que alguns alunos ainda não tenham compreendido porque não medir a altura diretamente? Portando vale relembrar os casos em que essa medição direta é difícil, ou até impossível.

"Segundo. Encontre a conexão entre os dados e a incógnita." Por se tratar de uma atividade de LEM, os dados deverão ser coletados em campo. Fazendo uso de uma trena e de um teodolito artesanal, como o da figura 2 a seguir, os alunos deverão obter a medida de afastamento horizontal do ponto escolhido para a observação e o pé da altura baixada de um ponto da cobertura da quadra, ortogonalmente sobre a mesma, bem como a medida da altura do teodolito além do ângulo indicado pela observação com o teodolito artesanal.

Fig. 2: Teodolito Artesanal - Instrumento óptico utilizado na medição de ângulos[2]

Representa-se a situação real por um modelo matemático no qual se representa os três pontos principais da realidade como um triângulo retângulo, do qual se conhece o ângulo agudo da base e o cateto adjacente a este ângulo. A conexão entre esses dados e a incógnita se dará pela relação conhecida como “tangente”, recurso teórico que o aluno deverá lançar mão de modo a obter um resultado prático.

“Terceiro. Execute seu plano.” Nesta etapa o estudante está de volta ao caderno, olhando para o modelo matemático, a relação entre os dados e a incógnita, a tábua trigonométrica e desenvolvendo a equação que descreve a realidade.

“Quarto. Examine a solução obtida.” O exame da solução obtida pode ser mais do que uma mera “prova real”. Pode ser encarado como uma oportunidade para verificar algumas propriedades.

Neste caso, com o argumento da verificação, é possível apontar, de forma natural para a propriedade que afirma que $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}(90^0-\alpha)}$.

2 – Disponível em:< http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635>

Para exemplificar, vamos citar novamente a situação 1, exposta na página anterior. Com o auxilio do teodolito caseiro, o aluno obtém o ângulo de 20^o, e por medição direta, com o uso de uma trena, obtém a distância horizontal de 30 metros.

Aplicando a relação trigonométrica do Triângulo Retângulo: $\text{tangente}\,\alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$, ou ainda, $\text{tg}20^0 = \frac{h}{30}$. Consultando uma tabela, conforme consta no anexo 1, o aluno deverá obter o valor de 0,364 como uma aproximação para $\text{tg}20^0$, sendo assim, portanto, obtêm-se um valor de 10,92 metros como uma aproximação da altura da árvore. O que citamos como argumento da verificação, trata-se de refazer o cálculo utilizando o ângulo complementar do ângulo de 20^o na situação 1, ou seja, utilizando o ângulo de 70^o, podemos escrever: $\text{tg}70^0 = \frac{30}{h}$, que é a expressão inversa da expressão anterior, mas, que utilizando novamente a tabela, verificamos que conduz ao mesmo resultado, ou seja, $2{,}747 = \frac{30}{h}$, logo, $h = \frac{30}{2{,}747} = 10{,}92$ metros. Embora não se trate de uma prova para a relação $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}(90^0 - \alpha)}$, é esperado que algum aluno conjecture que a tangente de um ângulo é o inverso da tangente do seu complementar, como ocorreu com os ângulos de 20^o e 70^o. Tais conjecturas são próprias e muito desejáveis que ocorram nas aulas de LEM.

4 COMPARATIVO ENTRE OS PCN´S, A PROPOSTA DO LEM E O LIVRO DIDÁTICO

Os Parâmetros Curriculares nacionais – PCN´s compõem um conjunto de referências que servem de balizadores para a Educação básica em todo o território nacional. Como escreveu o então Ministro da Educação, Paulo Renato, prefaciando a publicação da obra supra, se dirigindo aos professores: (1997, p. 5) “Nosso objetivo é auxiliá-lo na execução de seu trabalho, compartilhando seu esforço diário de fazer com que as crianças dominem os conhecimentos de que necessitam para crescerem como cidadãos plenamente reconhecidos e conscientes de seu papel em nossa sociedade.” Este documento é dividido em oito áreas de conhecimento, dentre as quais, a área de Matemática. Cada uma dessas oito áreas (inclusive a Matemática) é por sua vez é dividida em quatro ciclos, dentre os quais o quarto ciclo (8os e 9os anos) é o objeto principal deste trabalho. A área de Matemática é observada nesse compêndio de acordo com quatro grandes eixos: Números e

Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. De acordo com os PCN´s (1997, p. 81-82), os objetivos de Matemática para o aluno do quarto ciclo são:

- Desenvolvimento do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;

  * resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;

  * selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

- Desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;

  * resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;

  * observar regularidades e estabelecer leis Matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

- Desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;

  * produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;

  * ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer

relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

- Desenvolvimento da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;

  * obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas).

- Desenvolvimento do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional;

  * resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não convencionais e convencionais, como as regras de três.

- Desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

  * construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos;

  * construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

4.1 Números e Operações

Conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos segundo os PCN´s (1997, p. 87).

- Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais.

- Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.

- Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas.

- Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.

- Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.

- Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

- Resolução de situações-problema que envolvem juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadora.

- Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

- Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

- Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.
- Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.
- Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.

O trabalho com números e operações é de grande relevância durante todo o ensino fundamental, mesmo assim, com frequência é possível se constatar que alunos chegam ao quarto ciclo do ensino fundamental (8º e 9º anos) com o conhecimento insuficiente sobre este eixo do ensino da Matemática. É possível diagnosticar deficiências elementares, como por exemplo, quando se propõe a resolução do seguinte problema: "Se um caminhão caçamba tem capacidade de transportar de uma vez, cinco toneladas de areia, quantos caminhões serão necessários para transportar 162 toneladas de areia?" Em situações como estas, comumente se observa respostas como 32,4 caminhões ou ainda, 32 caminhões ao invés de 33. Além de algumas dificuldades com os números e seus conjuntos numéricos, é comum que alunos não consigam relacionar as situações problemas com as operações que as descrevem. Como nos casos em que se diz: "A tem 30 reais a mais do que B" situação que normalmente é traduzida erroneamente por "A + 30 = B". Por isso o trabalho com números e operações no 4º ciclo deve ter continuidade. De acordo com os PCN´s - Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1997, p.95), "... o trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações." Ao analisarmos as diretrizes sugeridas como ampliadoras do sentido numérico e facilitadoras da compreensão do significado das operações, encontramos fortes relações com o que chamamos de Laboratório de Matemática.

Se não, vejamos o que dizem os PCN´s acerca do trabalho com números Naturais (1997, p.96):

> ...os problemas relacionados à evolução histórica dos números podem ser usados como interessantes contextos para ampliar a visão dos alunos sobre os números naturais, não apenas relatando como se deu essa evolução, mas explorando as situações com as quais as civilizações antigas se defrontaram, como: as limitações dos sistemas não-posicionais, os problemas com a representação numérica antes do surgimento do zero, os procedimentos de cálculo utilizados pelas civilizações suméria, egípcia, grega, maia, chinesa etc. Mostrar que a história dos números está ligada à das necessidades e preocupações de povos que, ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, ao procurar datar a fundação de suas cidades e as suas vitórias, usando os meios disponíveis, construíram interessantes sistemas de numeração.

A expressão "... não apenas relatando como se deu essa evolução, mas explorando as situações com as quais as civilizações antigas se defrontaram..." retirada do trecho supra, sugere um trabalho que deve ir além da mera aula expositiva, por melhor que seja. É preciso uma pequena imersão no problema. Seja uma pesquisa, na qual o aluno deve procurar respostas que o conduzirão às reflexões esperadas, seja uma experiência de campo onde se devem comparar grandezas usando apenas o conjunto numérico até então definido, seja um jogo no qual as regras levem o aluno à compreensão do correto posicionamento dos números em uma reta numérica ou qualquer outra proposta que leve o aluno à compreensão das características do sistema decimal, da leitura dos números, do valor posicional dos algarismos na escrita numérica. Além disso, o professor deve dedicar uma atenção especial em seu planejamento para tratar de algumas dificuldades, que de acordo com os PCN´s, são comuns nesse ciclo, quais sejam: leitura/compreensão/operações envolvendo números "grandes", cálculo mental e uso de estimativas a inobservância dos padrões de regularidade. Mesmo ampliando a ou mudando o foco para os outros conjuntos, a estratégia para a execução dos objetivos específicos pode ser mantida. Ao se trabalhar números inteiros, a construção da reta numérica abre uma gama de possibilidades para o LEM: a confecção de uma trena de inteiros acompanhada de uma série de perguntas norteadoras pode ser um grande auxílio no que tange às dificuldades a serem superadas, tais como: dar significado às quantidades negativas, reconhecer a existência da simetria dos números em relação ao zero, reconhecer a necessidade do zero, interpretar sentenças do tipo x = – y como números simétricos (opostos) desfazendo a forte ideia de que x é positivo enquanto y é negativo, reconhecer diferença entre números inteiros como a distância entre eles dentre outras que cada professor deve procurar identificar em seus alunos. Ao se trabalhar os números Racionais, o professor precisa ter em mente de que esta é uma das deficiências mais tenazes com a qual ele irá se deparar. É fato que mesmo no Ensino Médio, grande parte dos alunos não venceu esta etapa, o que certamente contribuirá para alguns insucessos na continuidade de seus estudos. Por isso se faz tão necessária uma metodologia ampliada. Que contemple não só a transmissão de conhecimentos pela exposição de conteúdos, mas também, (ou principalmente) a construção significativa, direcionada e monitorada do entendimento. Mais uma vez, o LEM pode ser a alternativa à metodologia clássica. Assim como sugerem os PCN´s (1997, p. 104), é possível acrescentar um significado geométrico, além do aritmético, às operações com os números racionais. As figuras abaixo tratam de modelos que podem ser usados como recursos para dar significado ao produto de frações, ou seja, na primeira sequência de figuras demonstra-se o produto $\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{20}$ com $\left(\frac{3}{4}\right).2 = \left(\frac{6}{4}\right)$ (fig. 3-a e 3-b) e $\left(\frac{6}{4}\right):5 = \frac{6}{20}$ (fig. 3-c e 3-d).

Observe como a figura 2-a expressa a fração $\frac{3}{4}$, destacando em azul, três partes em quatro (onde a unidade está representada por $\frac{4}{4}$), já a figura 2-b representa o dobro da fração anterior, já que são seis partes de uma unidade ainda constituída por quatro partes. A figura 2-c mostra a fração anterior $\frac{6}{4}$, dividida por cinco, ou seja, multiplicada por $\frac{1}{5}$, destaca-se em verde $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{4}$. Por fim a figura 2-d, verifica as partes em verde da figura anterior ocupariam 6 espaços da unidade que agora é composta por 20 espaços, ou seja, $\frac{20}{20}$.

Fig. 3-a: retângulo dividido em 4 partes iguais

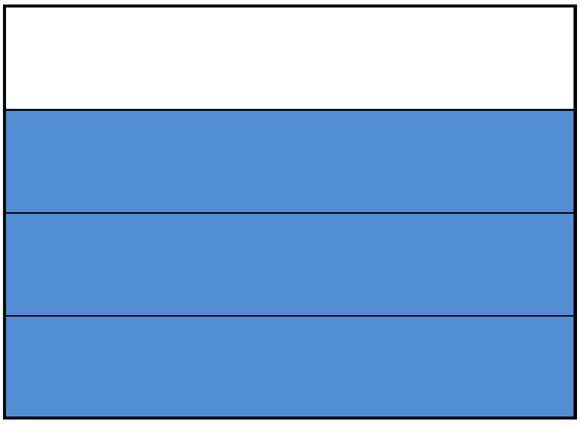


Fig.3-b: retângulo dividido em 6 partes iguais

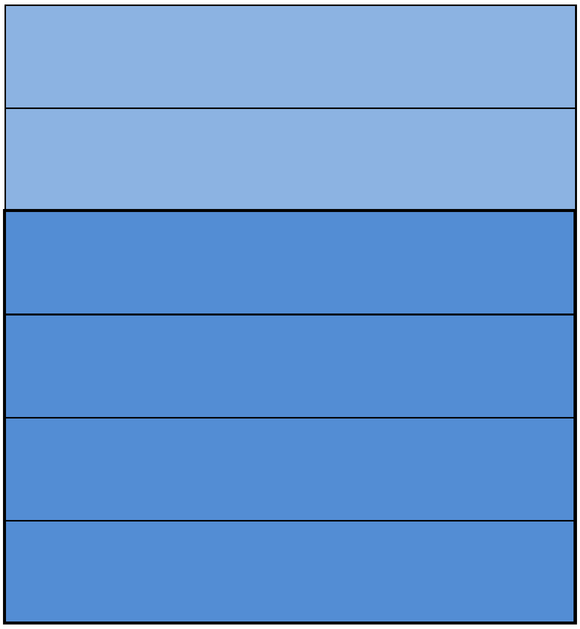


Fig. 3-c: retângulo dividido em 30 partes iguais

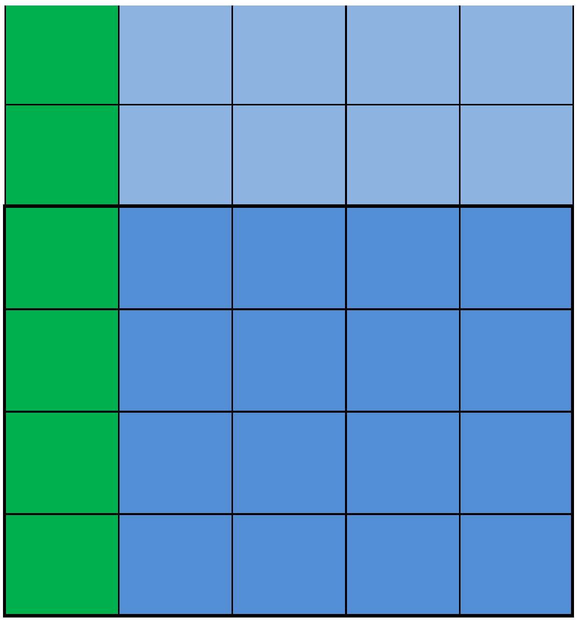
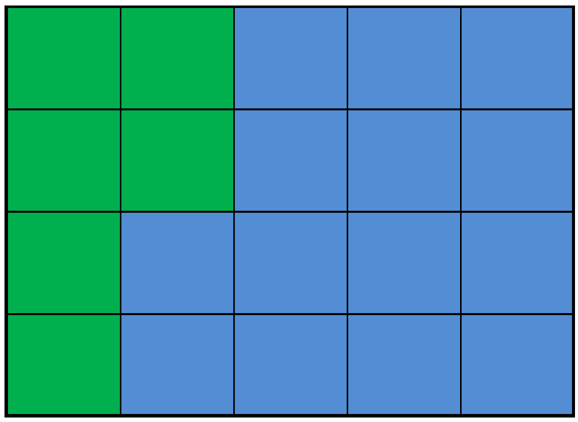


Fig. 3-d: retângulo dividido em 20 partes iguais



Na sequência seguinte (fig. 4-a, 4-b e 4-c), o produto $\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{20}$ pode ser interpretado como a intersecção de cores na sobreposição das figuras.

Fig. 4-a: retângulo dividido em 4 partes iguais

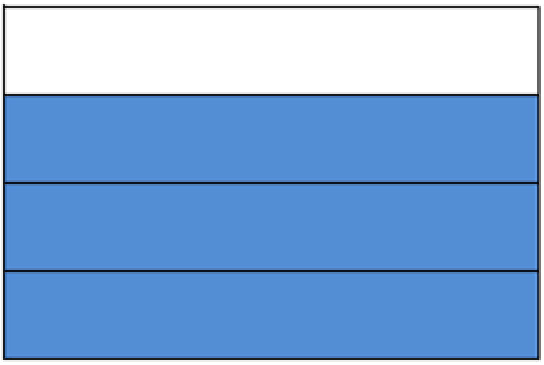


Fig. 4-b: retângulo dividido em 5 partes iguais

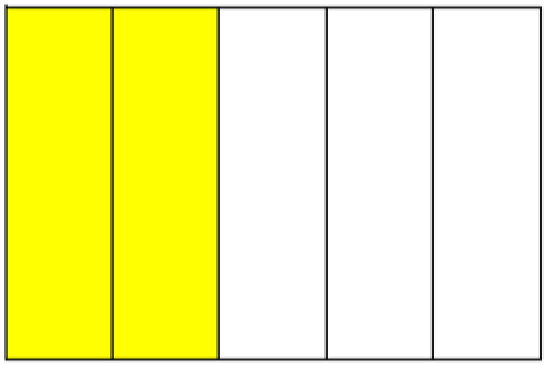
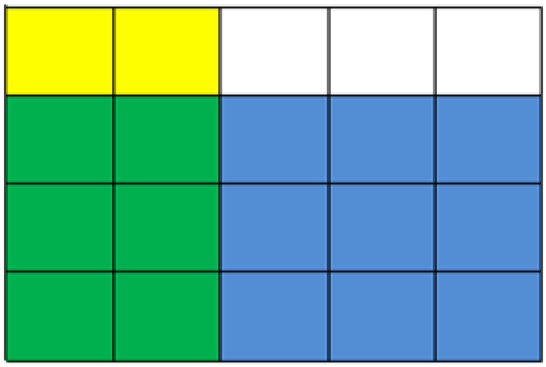


Fig. 4-c: retângulo dividido em 20 partes iguais

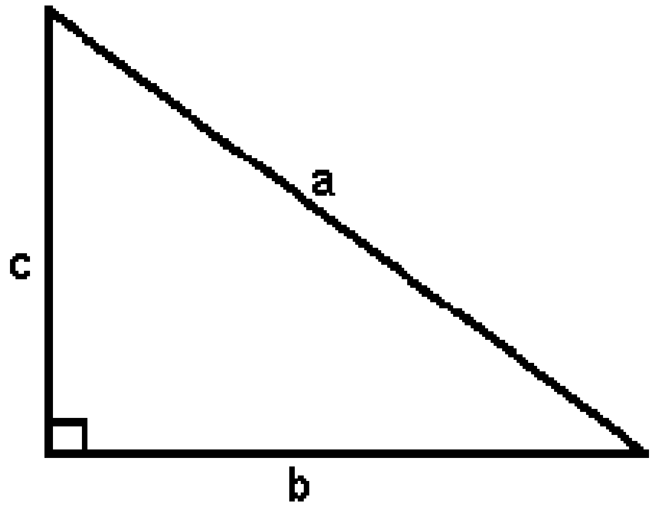


Esta é uma atividade que por si só contém um estratégia diferenciada em virtude do apelo visual, entretanto o que se pretende enquanto trabalho no LEM é que a atividade elaborada com esse pano de fundo tenha o aluno como autor ou como investigador, sendo, entretanto importantíssimo o trabalho de bastidores que o professor deve fazer, na preparação do roteiro da atividade.

Proposta de trabalho no LEM: Demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras e posterior utilização dos resultados do teorema para estudar algumas soluções que podem pertencer ou não ao Conjunto dos Números Racionais.

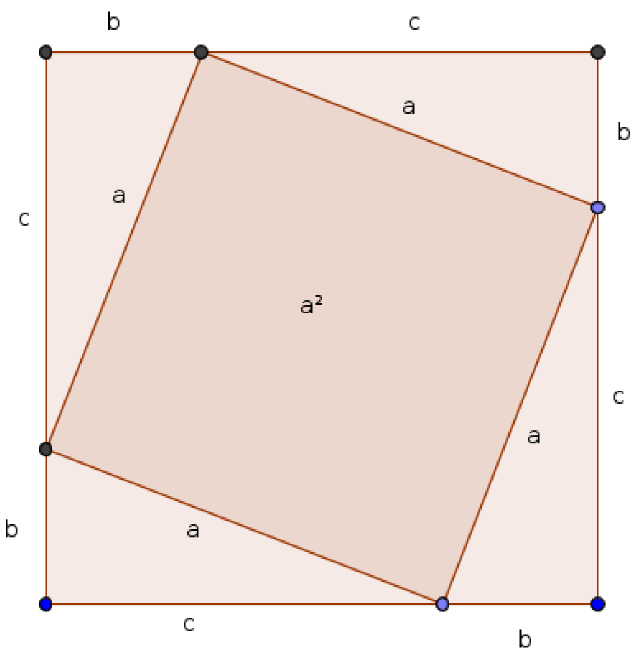
Roteiro: Inicialmente os alunos constroem um triângulo retângulo como o proposto abaixo:

Fig. 5: triângulo retângulo



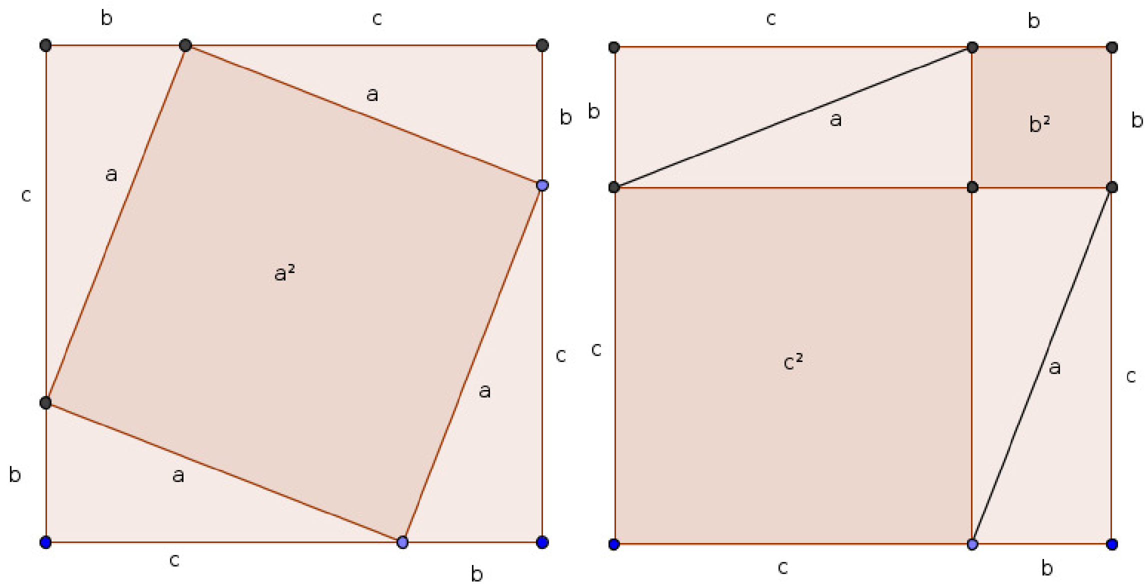
Em seguida eles devem construir um quadrado cujo lado mede a soma b + c, e neles devem ser marcados os pontos em que se divide os segmentos de comprimentos b e c.

Fig. 6: quadrado de lado b+c contendo um quadrado de lado a



Os alunos devem concluir que o quadrado maior acima tem como área $b^2 + c^2 + 2bc$, pois $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$. Recortando os triângulos retângulos de lados a, b e c da figura anterior, eles devem concluir que restará apenas o quadrado de lado a, o que equivale a subtrair 2bc da expressão anterior. Logo eles deverão concluir que $b^2 + c^2 + 2bc – 2bc = a^2$. A figura 7 a seguir, torna a conclusão ainda mais evidente, pois apresenta dois quadrados congruentes com quatro triângulos congruentes em cada um deles, porém, devido a arranjos convenientemente diferentes, um deles mostra que ao subtrairmos os quatro triângulos retângulos do quadrado original, restará apenas a^2, enquanto que subtraindo os quatro triângulos retângulos do outro quadrado, obteremos $b^2 + c^2$. De onde se conclui finalmente que $a^2 = b^2 + c^2$.

Fig. 7: demonstração do teorema de Pitágoras pelo arranjo geométricas



Para ajudar os alunos a chegarem a essa conclusão uma sequência de perguntas é proposta para que seja investigada por eles. Tais perguntas podem ser:

Os quadrados maiores são congruentes? Quais são suas dimensões? Quantos triângulos retângulos existem na primeira figura? E na segunda? Quais são as dimensões dos triângulos retângulos em ambas as figuras? Podemos afirmar que esses triângulos são congruentes? Retirando os triângulos retângulos de ambas figuras o que sobra em cada uma delas? O que podemos concluir sobre as áreas das figuras resultantes em cada caso? Expresse essa conclusão em função das dimensões “a”, “b” e “c”.

A imagem abaixo mostra um modelo de atividade aplicada aos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola na cidade de Vitória-ES. Atividade esta que é realizada parcialmente em sala de aula, com os alunos dispostos em duplas e utilizando régua e compasso e finalizada no laboratório de informática com os alunos utilizando o software Geogebra com o objetivo de verificar a validade do Teorema de Pitágoras. A metodologia de condução da atividade se dá por estudo dirigido, ou seja, o professor orienta o estudo fazendo perguntas e tirando dúvidas.

Vale ressaltar que esta atividade não tem papel de avaliação objetiva, justamente para favorecer a observação do discente no que se refere ao conteúdo atitudinal, ou seja, para que sua motivação não seja influenciada pela recompensa na forma de pontos.

Nome:		
Data: / / 2014	Disciplina: Matemática	Professor: Filipe Pinel B. Bermudes.
Série: 8º Ano EF	Turma:	Valor:

1. Usando régua e compasso construa um triângulo retângulo. Chame a hipotenusa de a e os catetos b e c. Anote as medidas obtidas.

2. Usando régua e compasso construa um quadrado cujos lados medem b + c. Sobre cada lado do quadrado, marque o ponto que divide cada lado do quadrado entre os seguimentos b e c.

3. Calcule a área do quadrado em função dos valores b e c. Anote a expressão resultante.

4. Ligue cada ponto marcado sobre os lados dos quadrados ao ponto do lado adjacente de forma que apareçam dentro do quadrado inicial quatro triângulos retângulos cujos catetos sejam b e c.

5. Qual é a medida da hipotenusa de cada triângulo formado?

6. Calcule a área de cada triângulo retângulo, recorte os quatro triângulos retângulos da figura inicial.

7. Quanto medem os lados da figura resultante após os recortes? Qual é a área dessa figura?

8. Obtenha uma expressão que calcula a área da mesma figura anterior, agora em função da expressão obtida no item 3 e das expressões obtidas no item 6.

9. Qual é a relação entre as expressões 7 e 8? Escreva essa conclusão na forma de uma equação.

10. Verifique a validade da expressão anterior para as medidas anotadas no item 1. Compare com os resultados obtidos pelos outros colegas.

11. Usando o software Geogebra, construa um triângulo retângulo qualquer e novamente verifique a validade da expressão obtida no item 9.

Após a demonstração geométrica desse que é sem dúvidas um dos mais notáveis teoremas da Matemática o trabalho pode continuar indicando aos estudantes algumas pesquisas em grupos sobre curiosidades e aplicações do Teorema de Pitágoras. Outro grupo pode se dedicar a verificar a validade do teorema usando régua, compasso e calculadora, enquanto outro utiliza o software Geogebra fazer a mesma verificação com a finalidade de levantar a questão sobre a irracionalidade ou não dos resultados obtidos para o valor da hipotenusa e/ou dos catetos. A esse respeito, os PCN´s (1997, p. 114). dizem que

> No terceiro e no quarto ciclos, o objetivo principal do trabalho com o cálculo (mental, escrito, exato, aproximado) consiste em fazer com que os alunos construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações nela envolvidas. A esse respeito, a calculadora pode ser um eficiente recurso por possibilitar a construção e análise de estratégias que auxiliam na consolidação dos significados das operações e no reconhecimento e aplicação de suas propriedades.

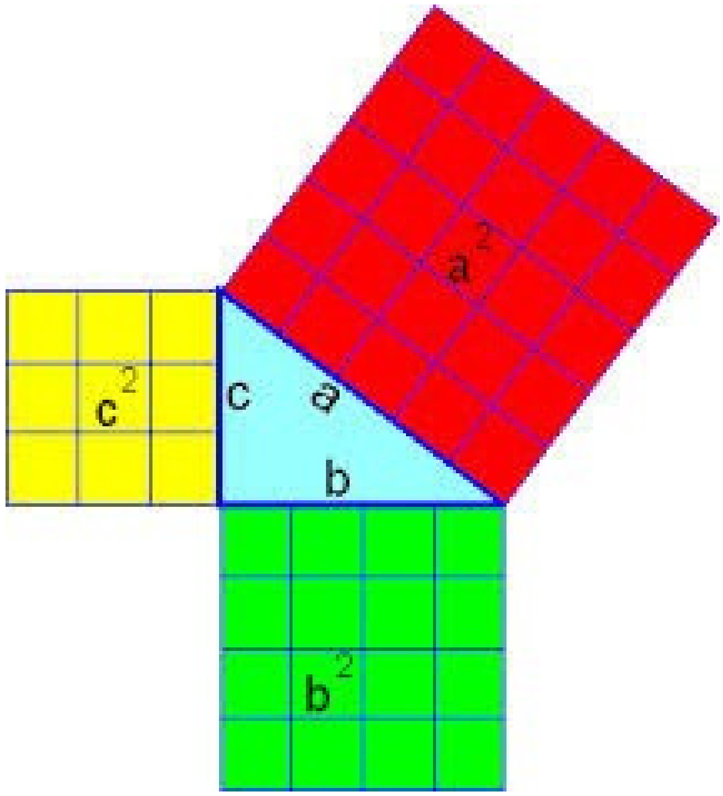
Pode-se ainda sugerir à turma uma pesquisa sobre uma ou mais demonstrações algébricas do Teorema de Pitágoras, conforme apresentado no Anexo 2.

Objetivos trabalhados e possíveis desdobramentos:

- A partir do teorema demonstrado geometricamente, deve-se indagar; A que conjunto numérico pertence o número representado por a? E quanto ao b e ao c? Esse questionamento deve ser proposto com a intencionalidade de que os alunos percebam que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais.
- Aproveitar essa oportunidade para apresentar a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ (conforme Anexo 3), utilizando como motivador o resultado para a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários.
- A partir da apresentação da prova, questionar de que modo é possível caracterizar geometricamente e aritmeticamente um número racional?
- Prosseguir propondo uma estratégia de localização aproximada de alguns deles (números irracionais) na reta numérica, com régua e compasso.

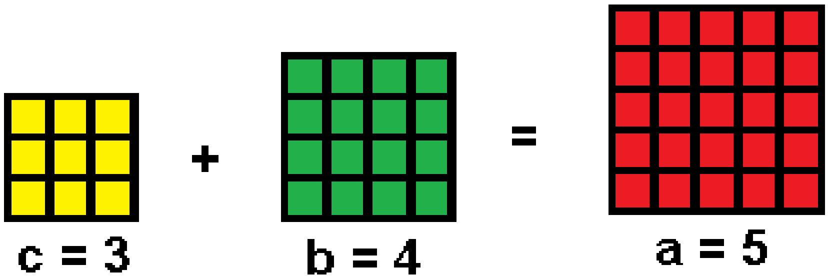
Proposta de trabalho do livro didático Matemática Bianchini: O autor inicia o tópico Teorema de Pitágoras, apresentando uma clássica figura que mostra um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades. Sobre cada um dos lados do triângulo retângulo está desenhado um quadrado, os quais apresentam respectivamente 9, 16 e 25 quadradinhos de área, conforme reproduzido na figura 8 a seguir.

Fig. 8: Reprodução de figura utilizada no livro Matemática Bianchini



Em seguida, o autor enuncia o Teorema de Pitágoras: (Bianchini, 2011, p.190) “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Dando continuidade, o autor utiliza uma imagem que reposiciona os quadrados mostrados na figura 7, e com ela exemplifica geometricamente e aritmeticamente a validade do teorema enunciado.

Fig. 9: Reprodução de figura utilizada no livro Matemática Bianchini



Após a demonstração, é apresentado um exemplo que propõe calcular o comprimento de uma escada que é apoiada a 3,6m de uma parede e alcança 4,8m de altura nessa posição. Seguem-se ao exemplo, alguns exercícios propostos, dos quais poucos podem ser considerados situações-problemas, e em nenhum deles é sugerida alguma aplicação do que fora estudado, utilizando qualquer recurso manipulável, ou seja, embora haja situações-problema, a forma de trabalho proposta não é o que poderíamos chamar de atividade de LEM. O suplemento com orientações para o professor, que compõe apenas o livro do professor, não traz nenhuma orientação especial sobre como abordar esse importante teorema. Vale ainda ressaltar a opção do autor por não trazer nenhum histórico sobre o Teorema de Pitágoras ou sobre o próprio Pitágoras.

4.2 Espaço e Forma

Conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos segundo os PCN´s (1997, p. 88).

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.

- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.

- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.

- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.

- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).

- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.

- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.

- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).

- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.

- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

A compreensão e o domínio do tema Espaço e Forma são de grande importância para a formação integral do indivíduo, seja pelo desenvolvimento de habilidades e competências tão necessárias em tantas atividades profissionais, seja para a formação de um cidadão capaz de ler e compreender o mundo à sua volta. Não obstante a relevância desse ramo da Matemática, frequentemente, seu ensino tem sido relegado a segundo plano ou tem sido reduzido ao ensino das grandezas e medidas de comprimento, área, capacidade e suas transformações para os múltiplos e submúltiplos. No entanto, a Geometria quando bem explorada pode trazer benefícios que vão muito além do estudo de medidas. De acordo com os PCN´s (1997, p. 104) o adequado estudo da Geometria

> "possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações."

O fato de questões geométricas despertarem o interesse de adolescentes revela uma vocação natural da Geometria para o uso do LEM. E a possibilidade de demonstrações geométricas, pode ser a porta de entrada do estudante no mundo da Matemática.

Um dos grandes avanços tecnológicos da atualidade foi o desenvolvimento de softwares e aplicativos de localização espacial conhecidos como GPS (Global Positioning System), e apesar das facilidades e vantagens que esse recurso oferece, muitas pessoas tem dificuldade em reconhecer as ruas, avenidas e quarteirões de regiões muito familiares de sua própria cidade, dificuldades estas que poderiam não existir ou serem minimizadas com o senso geométrico que poderia (ou deveria) também ser desenvolvido na escola.

Esta seria uma excelente oportunidade de inserção do recurso computacional como recurso didático para levar o aluno a apropriação e aplicação de conceitos da geometria. Em simples imagens como as mostradas nas figuras 8 e 9 tem-se um fértil campo de pesquisas e descobertas, se bem orientado para contemplar os conceitos planejados.

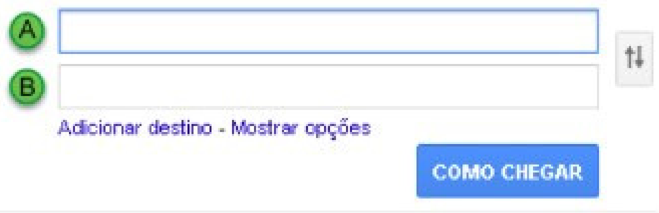
Proposta de trabalho no LEM: Os alunos devem ser desafiados a encontrarem suas localizações no mapa, percorrerem no mapa o caminho até as suas casas ou até outro ponto qualquer, identificarem a escala do mapa, reproduzirem algum objeto familiar na escala do mapa, identificarem ângulos, propriedades e formas geométricas diversas, calcular áreas de figuras notáveis como triângulos, quadriláteros e outros polígonos e até círculos e suas partes analisando o mapa do seu bairro, bem como desenvolver alguma estratégia para o cálculo da medida superficial de figuras não notáveis como a superfície de um lago ou a área de uma cidade.

Roteiro: Iniciamos apresentando o site https://www.google.com.br/maps (*Google Maps*) e suas principais funcionalidades. Em seguida, orientamos os alunos a observarem o trajeto desde suas casas até a escola, identificando diversos pontos no entorno para a localização no trajeto.

A imagem a seguir é um modelo de atividade realizada pelos alunos de 9º ano de uma escola na cidade de Vitória-ES. A metodologia de condução da atividade também se dá por estudo dirigido, ou seja, o professor orienta o estudo fazendo perguntas e tirando dúvidas quando necessário.

Nome:		
Data: / / 2014	*Disciplina: Matemática*	*Professor: Filipe Pinel B. Bermudes.*
Série: 9º Ano EF	*Turma:*	*Valor:*

1. Acesse o site http://www.google.com.br/maps. Digite no campo A nossa localização atual e no campo B seu endereço. Clique em "como chegar".



2. Clique nos números que aparecem na coluna à esquerda do mapa para percorrer o trajeto da escola até a sua casa. Anote alguns locais (lojas, igreja, etc.) que você reconhece nesse trajeto.

3. Imprima o mapa (escolha HP 4015). Chame o professor antes de clicar no botão imprimir.

4. Use uma régua e encontre a escala do mapa. Para isso você precisa medir o seguimento que aparece no canto inferior esquerdo do mapa impresso. Anote o resultado.

5. Usando a régua, meça a distância, em centímetros, entre os pontos A e B. Anote o resultado.

6. Usando a escala do item 4, determine a distância real, em metros e em quilômetros, entre os pontos A e B. Anote os resultados.

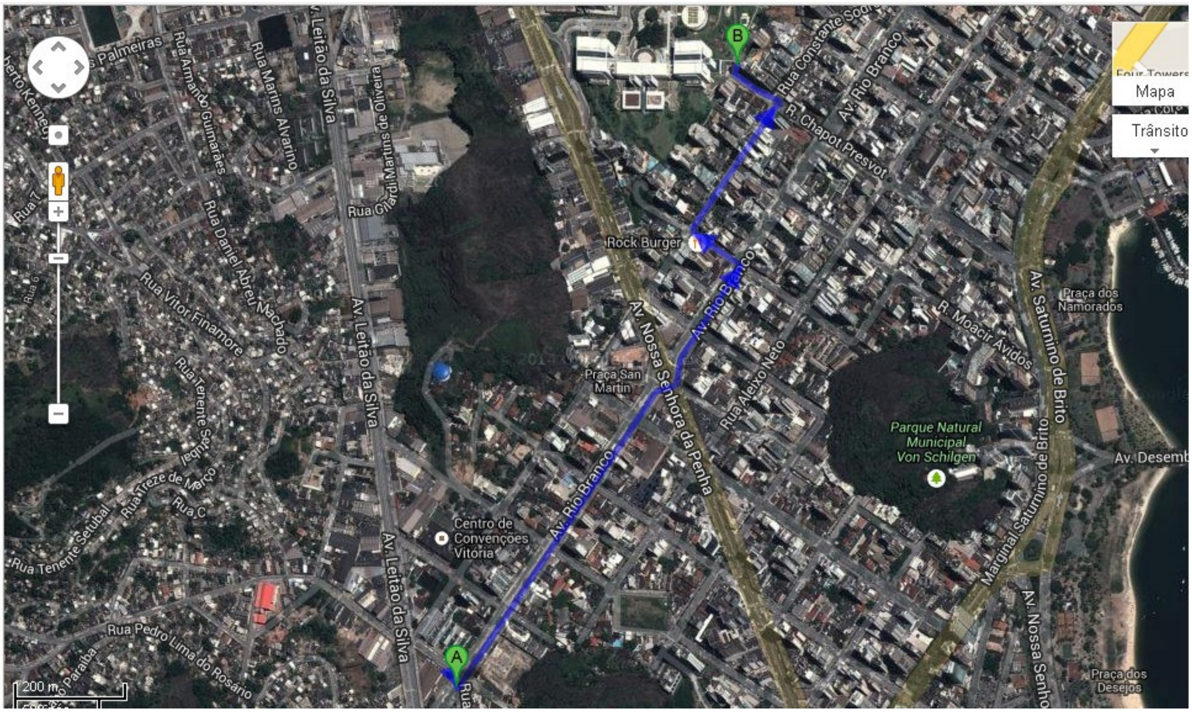
7. Identifique pelo menos três formas geométricas distintas (quarteirão, terreno, rotatória, etc.) e em seguida calcule suas áreas usando as dimensões encontradas no mapa impresso.

8. Use a escala do item 4 para obter as dimensões reais das formas escolhidas e em seguida calcule suas áreas.

9. A relação entre as medidas das áreas obtidas nos itens 7 e 8 é a mesma relação da escala considerada no item 4? Se não, qual é a relação entre essas áreas?

A figura 10 mostrada abaixo é a imagem que foi impressa por um dos alunos de uma das turmas do 9º ano. A imagem impressa ocupa quase toda a área de uma folha de papel A4, possibilitando assim, a identificação de ruas e avenidas, bem como a medição das dimensões das figuras planas escolhidas.

Fig. 10: Imagem obtida por um dos alunos destacando o trajeto entre a escola e sua casa[3]



Fonte: maps.google.com.br[6]

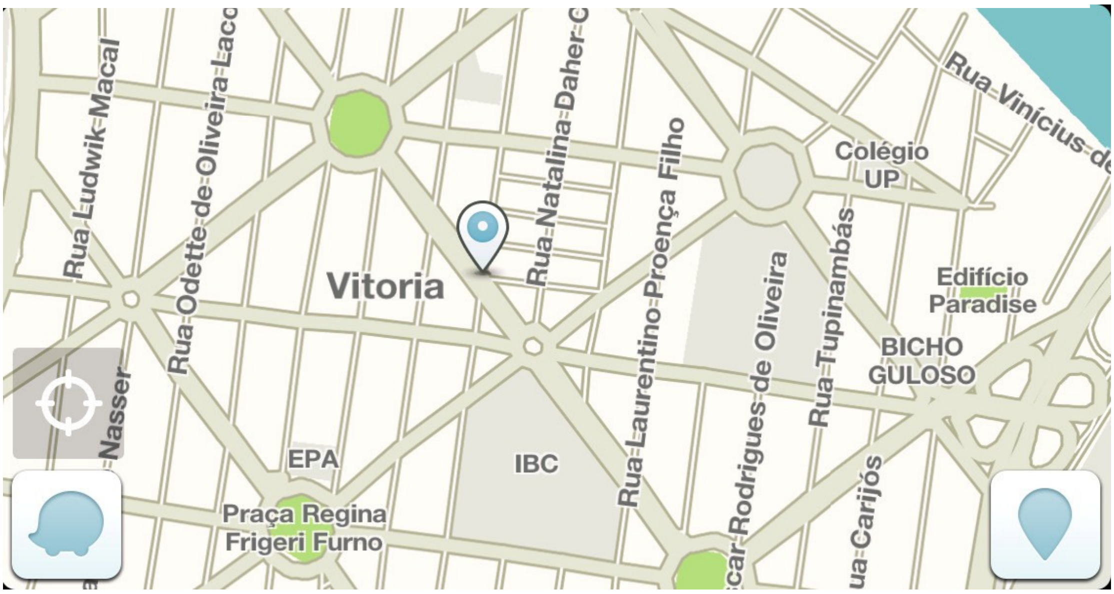
3– Disponível em https://maps.google.com.br/maps/ms?ie=UTF8&oe=UTF8&msa=0&msid=214282604041261358373.0004a77fdd7b879c04e5e&dg=feature

Na sequência, a figura 11, foi gerada pelo aplicativo de celular, Waze, e foi sugerida por alguns alunos. Esses alunos relataram que já tiveram a oportunidade de usar o aplicativo especialmente durante viagens com a família. Esta contribuição trazida por alunos serviu como introdução ao tema para a realização dos trabalhos que se sucederam. Pois como concorda Pozo (1998, p. 38)

> "... sempre que uma pessoa tenta compreender algo – seja um professor que se pergunta por que um aluno tem dificuldades especiais para entender um conceito, ou um aluno que tenta compreender a transformação de um líquido em gás –, precisa ativar uma ideia ou conhecimento prévio que lhe sirva para organizar essa situação e dar-lhe sentido. A experiência prévia do professor no ensino desse mesmo conteúdo ou os

conhecimentos prévios do aluno com respeito à evaporação serão determinantes da explicação que um e outro deem finalmente ao fenômeno em questão. Se quisermos ajudar o aluno a compreender as mudanças de estado, devemos saber quais são os seus conhecimentos prévios.”

Fig.11: Imagem de aplicativo GPS para celulares do bairro Jardim da Penha – Vitória



Fonte: Aplicativo Waze para iphone[4]

Objetivos trabalhados:

- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (os lados, a área da superfície e o perímetro).
- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado (introdução ao conceito de vetor)
- A interpretação das vistas superiores de figuras tridimensionais como figuras planas.

Outras possibilidades de trabalho são sugeridas nos PCN´s (1997, p. 123) e também são tipicamente atividades de LEM.

4 – Aplicativo gratuito para iphone disponível em AppStore

> "Atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos seus ângulos internos."

Por fim, as demonstrações geométricas podem alcançar e despertar conceitos fundamentais e estruturantes para a construção do entendimento. Sem abandonar as construções e demonstrações geométricas por régua e compasso, muito pelo contrário, fazendo uso constante delas visto que são plenamente adequadas ao que se propõe com o LEM, e introduzindo elementos tecnológicos e atuais, é possível aproximar ou deixar patente quão próxima a Matemática está da vida do estudante, do profissional e de qualquer cidadão que se propõe a compreender o mundo.

Proposta de trabalho do livro didático Matemática Bianchini: O autor aborda nos volumes 8 e 9 de sua obra em diversos momentos, os temas de medidas de comprimento, área, capacidade e suas transformações para os múltiplos e submúltiplos, bem como proporcionalidade em geometria, semelhança aplicada a triângulos, triângulos retângulos, diversas reações métricas, razões trigonométricas no triângulo retângulo, relações métricas na circunferência, polígonos e suas propriedades. É possível estimar que aproximadamente cinquenta por cento de cada um dos volumes se dedica ao eixo Espaço e Forma. Para esse eixo, é possível identificar várias iniciativas que se encaixam com as PCN´s e com a proposta do LEM. Em especial o volume 8 estimula o trabalho de diversas construções com régua e compasso: construção da mediatriz de um segmento de reta, construção de uma reta paralela a uma reta dada que passa por um ponto exterior, construção de uma reta perpendicular a uma reta dada que passe por um ponto exterior, construção de triângulo equilátero e isósceles. O volume 9, ao final do capítulo que trata das razões trigonométricas nos triângulos retângulos, sugere uma atividade que é essencialmente laboratório. A proposta é a construção de um teodolito, instrumento usado para medir ângulos (p.226 e 227). Com materiais simples, como papelão, barbante, canudo, transferidor e cola os alunos confeccionam uma versão simplificada, porém, funcional do instrumento citado. Após a construção, o desafio é medir a altura de algum ponto de difícil acesso, para justificar seu uso. Com todos os dados coletados, os alunos concluem a descoberta fazendo um modelo matemático da situação, consultando uma tabela de razões trigonométricas e efetuando os cálculos necessários. Por trabalhar essa atividade ou alguma variação da mesma há seis anos, podemos constatar que se trata de uma das atividades de maior interesse e envolvimento das turmas de 9º ano. Sua execução normalmente se dá em três aulas (três períodos de 50 minutos), mas, o que poderia ser encarado como uma perda de três aulas, invariavelmente reflete-se em ganho nas aulas seguintes, por dar legitimidade, do ponto de vista do aluno, para os exercícios de sistematização e situações-problemas propostos daí em diante.

Em seu suplemento para o professor, o volume 9, apresenta um trabalho de construção de um pantógrafo (p.79 e 80), aparelho usado para ampliar ou reduzir figuras em uma razão qualquer. Esta atividade apresenta uma execução prática um pouco mais trabalhosa, em virtude dos materiais utilizados e sua montagem. São utilizadas, para cada instrumento, quatro ripas de madeira com no mínimo três furações cada, dois lápis que devem ser perfeitamente afixados a essas furações, três parafusos com três porcas e uma morsa de bancada. Mesmo com tantos materiais menos acessíveis e com essa preparação e montagem mais trabalhosa, os resultados obtidos na prática dificilmente são os esperados na teoria, isto porque pequenos erros na furação e/ou no posicionamento dos lápis e/ou a folga entre as peças geram resultados que, embora aproximados, divergem do esperado. Além disso, a execução dessa atividade, quando totalmente a cargo dos alunos, leva de três a cinco aulas. Uma alternativa que normalmente adotamos, é apresentar o instrumento, já montado, e seu funcionamento e operação seguida de justificativa teórica.

4.3 Grandezas e Medidas

Conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos segundo os PCN´s (1997, p. 89)

- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.

- Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações.

- Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).

- Cálculo da área da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros).

- Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.

- Análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências.

- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh).

- Compreensão dos termos algarismo duvidoso, algarismo significativo e erro de medição, na utilização de instrumentos de medida.

- Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo.

Estudar Grandezas e Medidas é costurar vários retalhos matemáticos e não matemáticos. É sem dúvida estabelecer forte relação entre as Ciências Naturais (com densidade, velocidade, força, calor, temperatura, pressão, etc.) e a Matemática, entre a Geografia (com as escalas, coordenadas geográficas, mapas, leitura e interpretação de gráficos, etc.) e a Matemática, enfim, entre o mundo governado pelos números (parafraseando Platão) e a Matemática. Como se pode encontrar nos PCN´s (1997, p. 129) estudar grandezas e medidas também pode ser uma porta aberta para se explorar a pluralidade cultural.

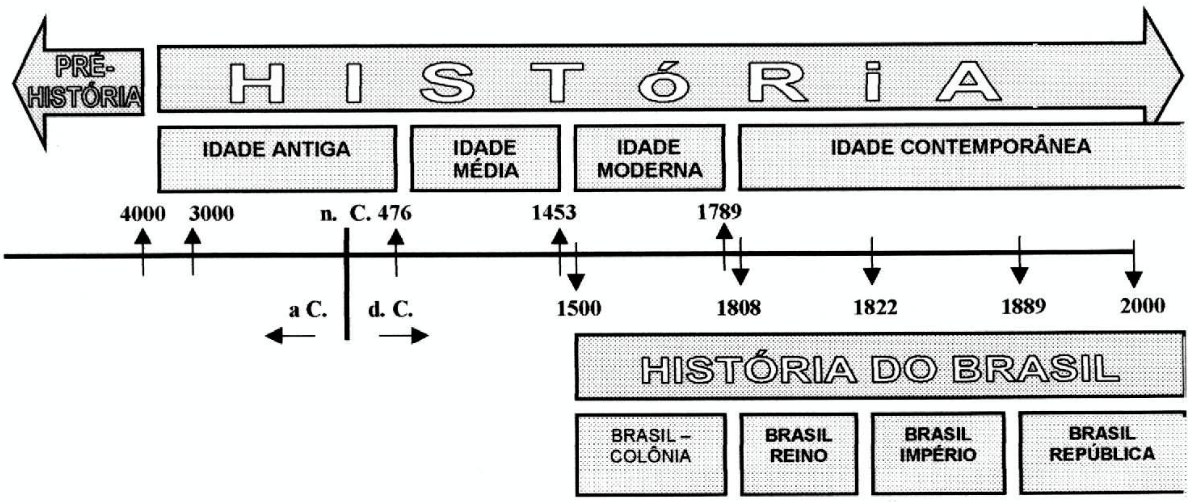
> "Neste estudo, os alunos poderão constatar, por exemplo, que para os egípcios e babilônios a Aritmética constituía algumas regras de cálculo que permitiam resolver problemas práticos, como as medições das diferentes grandezas geométricas e astronômicas. (agricultura, construções, observações do espaço), enquanto os gregos teorizaram a Geometria separadamente da Aritmética e consideravam que as medidas podiam estabelecer articulações entre esses dois campos".

Ao abordar essa temática, ainda que trabalhando com alunos do 4º ciclo, é estratégico provocar no aluno a necessidade de consolidar o conceito de medir. Tendo em vista que os alunos provavelmente já terão alguns conceitos prontos sobre o significado de medir, cabe aqui uma excelente atividade de LEM no que se refere a estimar e usar unidades não convencionais para medir. Estimar as dimensões da sala, estimar o número de folhas em uma pilha de papel, estimar o volume de uma pedra, etc. É de suma importância que os alunos, em duplas ou em pequenos grupos, façam o devido registro de suas estratégias (procedimentos) e resultados obtidos. Espera-se que os alunos (intencionalmente sem os instrumentos adequados) utilizem o próprio corpo para realizar algumas medidas: mãos, pés, braços, passos ou a própria altura. Posteriormente, o professor terá uma excelente matéria prima para discutir com a turma os diversos estágios que a humanidade superou até estabelecer padrões de medidas, bem como discutir a diferença entre os padrões de medidas adotados por alguns países que se diferem dos nossos. Uma pesquisa nesse tema poderá versar sobre questões sociais econômicas, políticas, culturais, históricas, etc., cabendo ao professor novamente costurar os retalhos deixando clara a presença e a necessidade da Matemática para todos os povos e em todos os tempos. Alcançados os objetivos iniciais, das medições diretas, é possível avançar um pouco mais sobre as medições indiretas, como distância entre planetas e estrelas, velocidade de um veículo trafegando por uma rodovia medida por um radar, temperatura de um corpo, medida pela dilatação de outro, etc. Nesse estágio é possível e talvez aconselhável que haja uma parceria com um professor da área das ciências naturais. Dessa forma tornar-se-ia patente a integração entre as disciplinas e seus usos e aplicações.

Outra dificuldade comumente apresentada nesta área é a medição do tempo. Alguns alunos não entendem de fato a real distância entre um milhão de anos e mil anos. Também seria o momento apropriado para desfazer a confusão que se faz com o nosso sistema misto de medição do tempo, que é sexagesimal para minutos e segundos e volta a ser decimal para os décimos, centésimos e milésimos de segundo. Ao falar sobre o tempo, é interessante explorar os medidores naturais do tempo: como o dia (período de rotação da Terra). Pode-se trabalhar um projeto de pesquisa e construção de um relógio solar no pátio da escola, por exemplo, além disso, alguns alunos devem se interessar por pesquisar os relógios mecânicos e seus mecanismos de funcionamento. Sobre como deixar as grandes medidas de tempo mais palpáveis, um bom caminho seria a elaboração de uma reta como analogia da linha do tempo, em que retrocedendo nessa linha (que deve ser desenhada respeitando uma escala centímetro/ano) o aluno possa ver seu próprio nascimento, o nascimento dos pais, dos avós, a fundação da cidade, o descobrimento do Brasil, dentre tantos outros fatos históricos importantes que podem/devem ser trabalhados paralelamente.

Propostas de trabalho no LEM: Desenhar linhas (retas) com o objetivo de representar o tempo é uma estratégia muito usadas por professores de História e de Matemática, por pela simplicidade e principalmente pela característica de continuidade, entretanto, via de regra não há uma preocupação real com o uso correto da proporção entre comprimento e tempo, e se termina por representar cinco mil anos (ou mais) em uma linha (reta) feita na lousa, ou impressa em um livro, na qual dificilmente é respeitada a relação correta entre comprimento e tempo. A figura abaixo ilustra uma dessas situações.

Fig.12: Esquema de Linha do Tempo comum em livros de História.



Fonte: AZEVEDO, Gislane. Projeto Telaris História – 7º ano – 6. ed. – São Paulo: Ática. 2012. (P.12).

No esquema mostrado acima, é possível observar vários problemas com relação à proporcionalidade mencionada, apenas a título de exemplo, perceba que o período de 4000 anos antes de Cristo é representado por um segmento de reta (muito) menor que o período de 2000 anos depois de Cristo. Desse modo, mesmo que o professor tenha o cuidado de fazer a ressalva de que aquela linha não está na escala correta[5], a imagem é muito mais concreta como informação e esse aluno irá continuar vendo pouca diferença entre mil anos e um milhão de anos. Por isso, talvez, seu senso crítico não seja despertado e aceite tão passivamente a informação de que os dinossauros foram extintos há sessenta e cinco milhões de anos.

O bom entendimento de linha do tempo pede uma atividade de LEM que utilize algum recurso didático diferenciado, como uma bobina de papel em vez do quadro, o corredor da escola em vez da sala de aula, enfim, algo que respeite e estabeleça uma proporção mais concreta entre o tempo conhecido pelo aluno e o tempo histórico.

Roteiro: Em parceria com a professora de História, Raquel Jacob, os alunos do 8º ano de uma escola na cidade de Vitória-ES realizaram uma pesquisa no laboratório de informática e anotaram um grande conjunto de datas e fatos importantes para a história tais como: O surgimento da escrita (3400 a.C), o início da construção das pirâmides do Egito (2700 a.C), o nascimento de Cristo, o início da construção do Coliseu romano (75 d.C), início da Idade Média (476 d.C), chegada dos portugueses ao Brasil (1500 d.C), início da segunda guerra mundial (1939 d. C). Além desses dados históricos, os alunos acrescentaram na folha de pesquisa, o ano do próprio nascimento, e o ano de sua morte, considerando uma expectativa de vida de 75 anos. A produção dos alunos, neste trabalho de LEM, foi contada como avaliação parcial, na qual, além do conteúdo específico, foram avaliados procedimentos e atitudes. A imagem abaixo descreve o modelo utilizado como instrumento orientador da atividade.

5 – A escala que chamamos de correta neste caso é a que relaciona de forma diretamente proporcional o comprimento da Linha do Tempo com o intervalo de tempo que ela representa.

Nome:					
Data: / / 2014		*Disciplina: Matem. e Hist.*		*Professores: Filipe Bermudes e Raquel*	
Série: 8º Ano EF	*Turma:*		*Valor: 2,0 pontos*		

PARTE A: HISTÓRIA

1. Utilizando a internet, pesquise e cite, um fato histórico que tenha ocorrido a mais de 5000 anos (mais de 3000 a.C). Cite também a fonte da pesquisa.

2. Pesquise e cite um fato histórico que tenha ocorrido entre o ano 3000 a.C e o ano 1000 a.C. Cite também a fonte da pesquisa.

3. Pesquise e cite um fato histórico que tenha ocorrido no primeiro século da era cristã. Cite também a fonte da pesquisa.

4. Leia o texto da página 112 do livro texto e responda: Em que ano se deu o início da Idade Média?

5. Pesquise e cite um fato histórico que tenha ocorrido entre o século XIV e o século XVI da era cristã. Cite também a fonte da pesquisa.

6. Pesquise e cite um fato histórico que tenha ocorrido no século XX. Cite também a fonte da pesquisa.

PARTE B: LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

7. Desenrole a bobina de papel que seu grupo recebeu no chão do corredor do 3º piso, fixando as extremidades com fita adesiva.

8. Utilize a trena para medir o comprimento do papel da bobina. Faça marcas, à lápis de 1m em 1m.

9. Considerando que a expectativa de vida de vida de uma pessoa que nasceu em 2001 é de 75 anos, qual será o "provável" ano da morte dessa pessoa?

10. Quantos anos separam o fato histórico da questão 1 do "provável" ano da morte estimado na questão 9?

- Sua bobina de papel fixada no chão do corredor deverá representar uma linha do tempo entre a os anos citados na questão 1 e na questão 9. Para isso, siga seguintes orientações e faça o que se pede.

11. Calcule a razão entre o tempo (em anos) da questão 10 e o comprimento (em centímetros) da bobina na questão 8. Se necessário arredonde o resultado para o primeiro número inteiro menor que o resultado obtido.

12. Marque no início do papel a data da questão 1.

13. Utilizando a razão obtida na questão 11, marque no papel cada uma das demais datas citadas nas questões anteriores.

14. Que comprimento do papel representa a expectativa de vida de uma pessoa que nasceu em 2001?

15. Se admitirmos que a Terra tem 4,5 bilhões de anos e considerando a razão obtida na questão 11, qual deveria ser o comprimento do papel para representar a linha do tempo da Terra?

- Enrole novamente a bobina de papel e entregue ao professor juntamente com esta folha devidamente respondida.

Fig. 13: Bobinas de papel milimetrado

Fonte: educacaopublica.rj.gov.br[6]

Outra proposta de trabalho no LEM: No que se refere à medição de volumes, especialmente das formas não convencionais, as atividades de LEM se apresentam como uma excelente alternativa, tendo em vista que de outra forma o professor teria que fazer aproximações para formas convencionais, ou utilizar ferramentas Matemáticas muito avançadas para o nível acadêmico da turma. Uma atividade de LEM por sua vez proporciona o cálculo honesto do volume de uma pedra impermeável irregular simplesmente utilizando um aquário na forma de um prisma ou na forma de um cilindro (de preferência nas duas formas). O procedimento para a realização dessa medição indireta do volume de um sólido de forma não convencional é apresentado no roteiro a seguir. Este procedimento se baseia no Princípio de Arquimedes, que de forma simplificada, afirma que o volume de um objeto impermeável totalmente submerso, é equivalente ao volume do líquido deslocado por ele.

6 – Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/oficinas/geo.html>

Roteiro: Pedir aos alunos que escolham alguns objetos irregulares e impermeáveis. Apresentar aos mesmos os recipientes com água e questionar sobre como calcular o volume de água no recipiente antes de se colocar o objeto. Explicar o Princípio de Arquimedes, em particular o que diz respeito ao volume deslocado. Colocar um dos objetos irregulares no recipiente com água e observar o deslocamento do líquido.

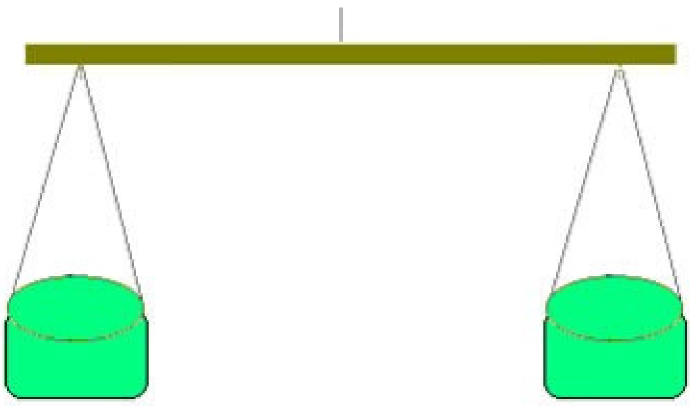
Voltar a questionar sobre como calcular o volume de água no recipiente após se colocar o objeto e perguntar como podemos deduzir o volume do objeto. É possível ainda trabalhar a transformação de unidades bem como o cálculo da densidade do objeto.

Fig. 14 – a Prisma retangular de vidro

Fig. 14 – b Cilindro reto de acrílico

Fonte: www.kriza.com.br[7]

Fig. 15 – Balança artesanal



Fonte: portaldoprofessor.mec.br[8]

7-Disponível em: <http://www.kriza.com.br/detalheprod.asp=24nome=VasosVidro> Acesso em 22/04/14.

8–Disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.htmlaula> Acesso em 22/04/14.

Outra abordagem extremamente didática que pode ser realizada no LEM é a medição de pesos (massas). Outra vez, iniciando por estimativas e fazendo sempre o registro do que se obtêm, os alunos podem buscar estratégias de comparação de pesos e se possível, construírem ou utilizarem uma balança de pratos ou de roldanas. Através do registro feito pelos alunos, o professor pode retomar a ideia de equação e suas propriedades.

Objetivos trabalhados:

- Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
- Cálculo do volume de alguns prismas retos.
- Conceito de equações e suas propriedades.

Proposta de trabalho do livro didático Matemática Bianchini: A abordagem do autor a cerca do eixo Grandezas e Medidas tanto no volume 8 quanto no volume 9 se restringe ao cálculo de perímetros e áreas de figuras planas notáveis: triângulos, quadriláteros e circunferência em particular e polígonos regulares de forma mais geral. Chama a atenção o fato de nenhum dos dois volumes tratarem sob nenhum aspecto as formas no espaço. Além disso, grandezas como massa, velocidade, tempo, temperatura, potência elétrica, são citadas apenas ocasionalmente em alguns poucos exercícios e situações-problemas, que não chegam a sugerir um trabalho de LEM, apenas demandam a aplicação de conceitos com os dados retirados do próprio problema. Outra falta também pode ser observada no que se refere ao cálculo da área de figuras não notáveis, uma vez que não encontramos em nenhum dos dois volumes qualquer menção ao cálculo da área da superfície de um lago ou qualquer superfície irregular.

4.4 Tratamento da Informação

Conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos segundo os PCN´s (1997, p. 88)

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.
- Compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
- Distribuição das frequências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável.
- Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.
- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Em 2011 o jornal eletrônico Science Express divulgou um artigo científico de pesquisadores da Universidade do Sul da Califórnia (*University of Southern California*) que em linhas gerais, trata da quantidade de informação que foi, é e será produzida no mundo. Chama a atenção um dado comparativo do estudo que diz que a quantidade de informação gerada nos últimos cinquenta anos é igual aos cinco mil anteriores. Recentemente, o instituto de pesquisa IBOPE divulgou que o número de pessoas com acesso a internet no Brasil já chegava a 105 milhões. Esses estudos e seus surpreendentes números servem para embasar o que salta aos olhos de qualquer pessoa que pesquisa sobre o assunto: a quantidade de informação disponível no mundo e quantidade de pessoas com acesso a essa informação cresce exponencialmente. Mas toda essa informação e a facilidade de acesso a ela não eliminam, nem sequer diminuem, a necessidade que se tem de coletar, organizar, filtrar e interpretar tais informações e principalmente, não eliminam a necessidade da tomada de decisões. Um cidadão, preocupado com o seu futuro pode ter acesso a todos os números e todas as regras e condições sobre como e onde investir o seu dinheiro, mas, cabe a ele decidir o que fazer. E é nesse ponto que a Matemática pode contribuir. Para que essa decisão seja racional e consciente. Há aqui uma excelente oportunidade de contextualização visto que situações-problema que se apresentam sob a perspectiva da linguagem estatística são quase sempre temas transversais que aparecem nos currículos de outras áreas como ciências sociais, naturais e das linguagens. Sendo assim, o professor tem campo fértil para atuar na proposição de pesquisas com temas abertos ao interesse dos alunos e seja qual for o tema escolhido, invariavelmente o professor estará diante de uma situação que definimos como LEM visto que a resposta que eles procuram não estará no professor nem no livro didático, mas, em jornais, revistas, internet ou até neles mesmos. Por isso é natural que haja um movimento diferente na sala de aula, ou que a sala de aula de mude de endereço para essa atividade, seja para um laboratório de informática, biblioteca, pátio ou até para além dos muros da escola.

Proposta de trabalho no LEM: Essa proposta de trabalho visa fazer com que um grupo de alunos pesquise em jornais, revistas ou até na internet, artigos de seu interesse e que contenham um bom número de informações numéricas. Por exemplo, se estudante se interessa pala situação da água em nosso planeta, através de uma pesquisa na internet ele poderá localizar o site http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Agua/, que traz diversas informações numéricas sobre esse assunto, tais como:

> Cerca de 71% da superfície da Terra é coberta por água em estado líquido. Do total desse volume, 97,4% aproximadamente, está nos oceanos, em estado líquido. A água dos oceanos é salgada: contém muito cloreto de sódio, além de outros sais minerais. Mas a água em estado líquido também aparece nos rios, nos lagos e nas represas, infiltrada nos espaços do solo e das rochas, nas nuvens e nos seres vivos. Nesses casos ela apresenta uma concentração de sais geralmente inferior a água do mar. É chamada de água doce e corresponde a apenas cerca de 2,6% do total de água do planeta. Cerca de 1,8% da água doce do planeta é encontrado

> em estado sólido, formando grandes massas de gelo nas regiões próximas dos pólos e no topo de montanhas muito elevadas. As águas subterrâneas correspondem á 0,96% da água doce, o restante está disponível em rios e lagos.

Além da proposta que dá liberdade de escolha aos alunos, também desenvolvemos com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola na cidade de Vitória-ES, um projeto multidisciplinar sugerido e disponibilizado pelo Portal do Professor, uma página do Ministério da Educação e Cultura, no endereço virtual http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2567. O projeto inicialmente foi apresentado em uma das reuniões semanais de formação ao corpo docente e pedagógico do colégio e foi adotado pelo grupo como Projeto Trimestral, de forma que cada professor, em sua área, promoveu ações relacionadas ao tema principal que foi "O Problema do Trânsito Brasileiro", formulado a partir do conteúdo do *site* supracitado. O conteúdo do site é intitulado "Experimento: A Estatística dos Acidentes".

Roteiro: No que se refere à disciplina de Matemática, inicialmente o projeto foi apresentado enfocando o objetivo de compreender pela leitura e análise dos dados matemáticos os principais problemas do trânsito brasileiro, suas causas, consequências e formas de prevenção. O viés estatístico do projeto é usado como motivador e introdutório ao tema probabilidade. Assim como no trabalho apresentado no item 4.2, esse projeto ganha forma com a interação dos alunos. A partir das respostas que eles dão quando são questionados sobre as experiências que eles têm com acidentes de trânsito: As perguntas iniciais são: "Alguém já viu ou esteve envolvido em algum acidente? Quais foram as causas? Quais foram as consequências? De que forma poderiam ser evitados?" Após esse momento que sempre provoca muita participação, solicitamos aos alunos que acessem o endereço eletrônico http://www.dnit.gov.br/rodovias/operacoes-rodoviarias/estatisticas-de-acidentes, em seguida, os alunos são orientados a seguirem o seguinte passo-a-passo (adaptado do portal do professor):

> 1. Na área inferior da página, acessem o Quadro 0103 - NÚMERO DE ACIDENTES POR DIA DA SEMANA, referente ao ano de 2011.
>
> 2. Escolham o estado que moram.

3. Organizem em ordem decrescente o número de acidentes por mês, considerando os totais apresentados. Quais meses houve maior número de acidentes? Qual seria o motivo?

4. Considerando os 12 meses, qual a probabilidade de ocorrer um acidente de trânsito no dia dos namorados? E no carnaval? E no natal?

5. Com base nos meses de aniversário de cada elemento da dupla, calculem o dia da semana em que ocorreram mais acidentes em cada mês. Qual seria o motivo?

6. Considerando os totais, organizem em ordem decrescente o número de acidentes por dia da semana. Quais os três dias da semana em que houve maior número de acidentes? Qual seria o motivo?

7. Verifiquem, em outro estado, se o dado encontrado no item 4 é semelhante. Os motivos apresentados anteriormente valem apenas para este estado? Por quê?

8. Verifiquem em outros dois estados se o dado encontrado no item 5 é semelhante. Os motivos apresentados anteriormente valem apenas para este estado? Por quê?

9. Verifiquem em outros três se o dado encontrado no item 6 é semelhante. Os motivos apresentados anteriormente valem apenas para este estado? Por quê?

10. A partir do total de acidentes no ano de 2011, calculem e apresentem para a turma:

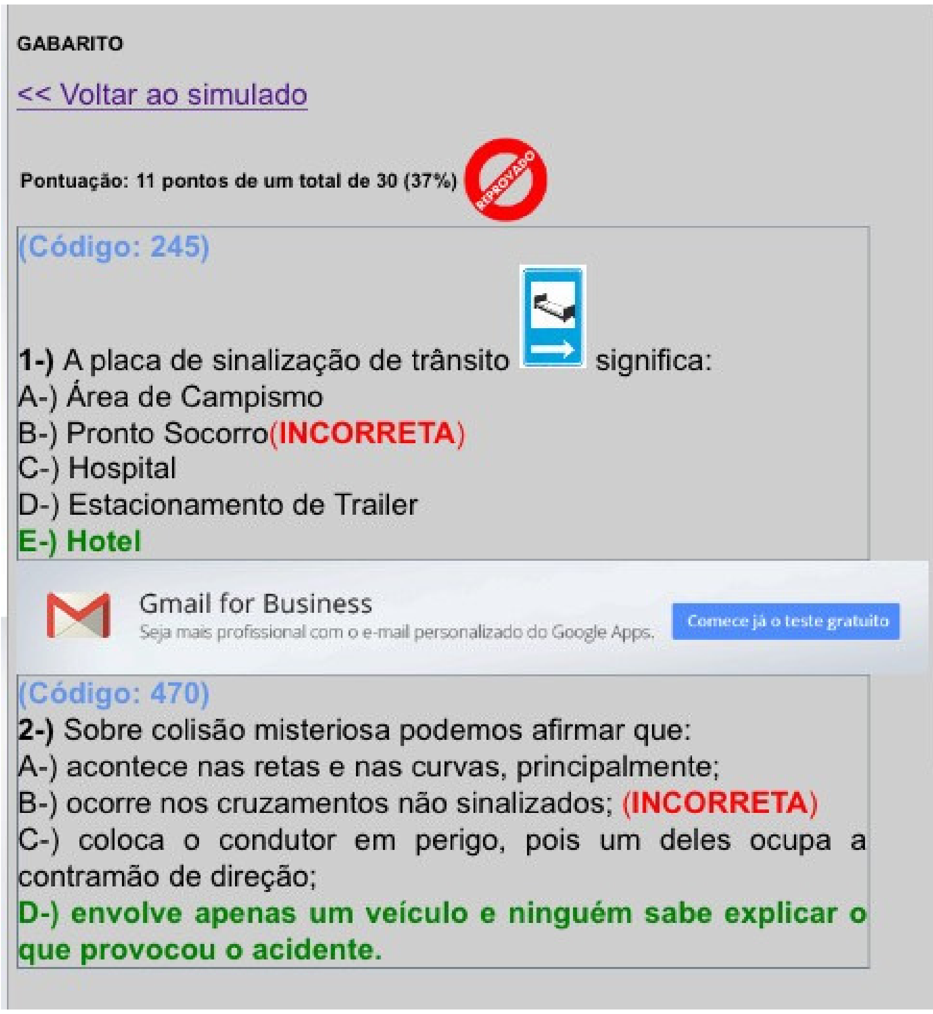
I) A probabilidade de ocorrer um acidente de trânsito em uma sexta-feira. E numa terça? E num sábado?

II) A probabilidade de ocorrer um acidente no mês de seu aniversário (apresente o cálculo para cada um dos dois colegas).

A culminância dessa atividade foi a exposição em um mural de produções pedagógicas, os gráficos produzidos a partir de uma pesquisa que os alunos realizaram com os próprios familiares no que se refere ao conhecimento do Código Brasileiro de Trânsito. Cada um dos alunos do 9º ano pediu a dois de seus familiares (habilitados) que respondessem, anonimamente, a 30 questões de um simulado *on line* disponível no site http://www.simuladododetran.net.br/. Ao final de cada simulado, os alunos foram orientados a salvarem os resultados obtidos e enviarem ao professor. Posteriormente, cada dupla recebeu todos os resultados (dados brutos) da pesquisa e apresentaram esses resultados na forma de gráficos seguidos por um texto dissertativo. Durante todo o trabalho, os alunos foram orientados sobre algumas questões inerentes à prática da pesquisa, como orientam os PCN´s (1997, p. 135)

> “Ao propor o trabalho com pesquisas é preciso mostrar ao aluno que nesse tipo de atividade é importante levar em conta alguns aspectos: definir clara e precisamente o problema, indicando a população a ser observada e as variáveis envolvidas; decidir se a coleta dos dados será por recenseamento ou por amostragem; fazer uma análise preliminar das informações contidas nos dados numéricos que possibilite uma organização adequada desses dados, a observação de aspectos relevantes e a realização de cálculos. Além disso, é preciso encontrar as representações mais convenientes para comunicar e interpretar os resultados, obter algumas conclusões e levantar hipóteses sobre outras”.

A imagem abaixo mostra um dos resultados da pesquisa enviado por um dos alunos.



Objetivos trabalhados:

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.
- Reconhecer se há ou não proporcionalidade entre as grandezas envolvidas na descrição do gráfico.

Proposta de trabalho do livro didático Matemática Bianchini: O autor adota estratégias diferenciadas de abordagens do eixo Tratamento da Informação nos volumes 8 e 9 de sua coleção. No volume 8, o tema é apenas sugerido como leitura complementar ao final de 4 capítulos, e cada um deles possibilita a realização de trabalho de LEM, pois sugerem a leitura e interpretação de diferentes tipos de gráficos em diferentes fontes: revistas, jornais, internet, etc., bem como a coleta e organização de dados dentro ou fora da sala de aula. O volume 9 por sua vez, trata o tema como um de seus dez capítulos. Este capitulo trata de forma sistemática a compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa, a distribuição das frequências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável, a obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), a construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão, mas, não sugere qualquer trabalho de LEM, como a elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

5 CONCLUSÕES

Ao estudar a Matemática no Ensino Fundamental, muitos alunos passam por diversas fases que gradativamente vão do deslumbramento ao enfastio. O que alguns poderiam reputar como natural, uma vez que o Ensino fundamental vai do concreto ao abstrato. Entretanto, este trabalho se propõe a mostrar que há uma alternativa a essa capitulação, uma vez que embora a abstração seja essencial e desejável, não é preciso abandonar a aplicação nem tampouco repetir os mesmos métodos usados há décadas. É possível arejar a sala de aula sem que haja prejuízo da essência da Matemática. Ao conjunto de ações que objetivam reacender o desejo dos alunos pela descoberta da Matemática denominamos Laboratório de Ensino de Matemática ou LEM.

Como um possível meio para se alcançar esse fim, o LEM é apresentado inicialmente como uma alternativa viável, uma vez que não o definimos como um espaço físico em si e sim como um planejamento criativo e significativo. Além disso, apresentamos o LEM como necessário tendo em vista que a sociedade inteira passa por transformações rápidas e profundas que demandam um cidadão com habilidades e competências diferenciadas daquelas que o modelo tradicional vem formando. Os impactos que proposta do LEM pretende causar no estudante são a transformação desse estudante em um cidadão que exercite o pensamento e a reflexão para participar ativamente da vida em sociedade, que se aproprie e faça uso de diferentes símbolos e códigos para a construção de modelos, e que integre espírito investigativo e senso crítico no contato com informações, enfim, a formação de um cidadão que tenha desenvolvido habilidades e competências que o auxiliem na compreensão do mundo e nas tomadas de decisões racionais.

Dentre tudo o que se pretendia apresentar neste trabalho, o que deve ser considerado de maior relevância prática são os tópicos: **3.3** - que pretende subsidiar a ação prática do professor e fornecer ao aluno um manual de condutas e procedimentos que muito pode auxiliá-lo na resolução de problemas e **4** – que procura constatar total concordância entre o que propomos com o LEM e os Parâmetros Curriculares Nacionais propostos pelo Ministério da Educação, além de verificar que a proposta do livro didático Matemática Bianchini precisa ser complementada com um trabalho paralelo, inclusive de produção de material e inclusão de conteúdos, por parte do professor para que alcance de forma satisfatória o que é proposto pelos PCN´s. A comprovação da grande sintonia entre as propostas dos PCN´s e o LEM é verificada pela proposição de situações práticas de LEM com uma breve descrição de um possível roteiro de execução e uma lista de objetivos possivelmente alcançados.

A maior dificuldade na elaboração dessa proposta será possivelmente também a maior dificuldade encontrada pelos professores que pretenderem adotar o LEM como paradigma no desenvolvimento dos conteúdos: o planejamento/criação de situações-problemas a serem executadas no LEM. Por isso enfatizamos o planejamento, por acreditar que esse tempo maior investido na preparação da aula irá certamente se refletir em um aprendizado com bases mais sólidas e duradouras, ou seja, sem a necessidade de tantas retomadas futuras.

Por fim, penso que a responsabilidade de criar não deve ser do autor do livro didático adotado pela escola, pois muito embora este possa trazer algumas ideias e sugestões de trabalhos de LEM, existem peculiaridades que só o professor pode conhecer. E aproveitar o contexto social e cultural da turma e da escola torna o trabalho de LEM muito mais verdadeiro e significativo. O que o professor deve procurar fazer é adotar o melhor livro didático que puder (quando houver autonomia para isso), levando em conta, todos os aspectos devem a serem observados nessa decisão, e planejar seu LEM em paralelo com o livro didático e com suas anotações e apontamentos pessoais e por último e talvez mais importante, uma constante autoavaliação do seu trabalho que deve ter como termômetro a interação e o aproveitamento do aluno, visto que é ele o objeto desse grande esforço.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M.E. **Educação, projetos, tecnologia e conhecimento.** São Paulo: Proem, 2001.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini** / Edwaldo Bianchini. – 7. ed. – São Paulo: Moderna, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1997.

FRANZONI, G.G.; PANOSSIAN, M. L. **O laboratório de Matemática como espaço de aprendizagem**. In.__; MOURA, M. O. de. **O estágio na formação compartilhada do professor: retratos de uma experiência**. São Paulo: Feusp, 1999.

LIMA, Mário. Sobre o Ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n 28, p. 2 de 1995.

LACHINI, Jonas. **Como está pensado o trabalho com Matemática**. In: TOMELIN, Honório & GOMES FILHO, João (org). **Educação: Gestão do Conhecimento e da Aprendizagem**. Belo Horizonte: UNA Editoria, p 183-211, 2001.

LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. – Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

MARQUES, M. O. **Aprendizagem na mediação social do aprendido e da docência.** 2. ed. Ijuí-RS: Unijuí, 2000.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

PIRES, C. M. C.; MANSUTTI, M. A. **Idéias Matemáticas: a construção a partir do cotidiano**. In: CENPEC, Centro de Pesquisa para a Educação e cultura. **Oficinas de Matemática e de leitura e escrita**. 3. ed. São Paulo: Summus, 2002. p. 103-130.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

POZO, Juan Ignácio e SARABIA, Bernabé e VALLS, Enric. **Os Conteúdos na Reforma: Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

PRADO, M. E. B. B.. **O uso do computador na formação do professor: um enfoque reflexivo da prática pedagógica**. Disponível em: <www.proinfo.gov.br/biblioteca/publicações/livro14.pdf >. Acesso em: 23 abr. 2013.

SILVA, Carlos Donizette da. **A prática do professor universitário no curso de formação do professor**, In: FERREIRA, Nali Rosa Silva & SILVA, Maria da conceição. Textos e contextos. Belo Horizonte: FUNDAC, 2008.

VALENTE, José Armando. **Diferentes usos do computador na Educação.** In: Valente, J.A. (org.) **Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação**. Campinas, SP. Gráfica da UNICAMP 1993.

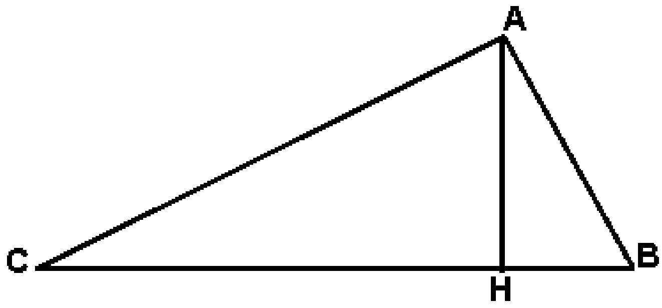
7 ANEXOS

7. 1 Tabela das Razões Trigonométricas (Ângulos em Graus)

A tabela a seguir foi elaborada utilizando os recursos do software Excel da Microsoft.

Âng	Sen	Cos	Tan	Âng	Sen	Cos	Tan	Âng	Sen	Cos	Tan
1	0,017	1,000	0,017	**31**	0,515	0,857	0,601	**61**	0,875	0,485	1,804
2	0,035	0,999	0,035	**32**	0,530	0,848	0,625	**62**	0,883	0,469	1,881
3	0,052	0,999	0,052	**33**	0,545	0,839	0,649	**63**	0,891	0,454	1,963
4	0,070	0,998	0,070	**34**	0,559	0,829	0,675	**64**	0,899	0,438	2,050
5	0,087	0,996	0,087	**35**	0,574	0,819	0,700	**65**	0,906	0,423	2,145
6	0,105	0,995	0,105	**36**	0,588	0,809	0,727	**66**	0,914	0,407	2,246
7	0,122	0,993	0,123	**37**	0,602	0,799	0,754	**67**	0,921	0,391	2,356
8	0,139	0,990	0,141	**38**	0,616	0,788	0,781	**68**	0,927	0,375	2,475
9	0,156	0,988	0,158	**39**	0,629	0,777	0,810	**69**	0,934	0,358	2,605
10	0,174	0,985	0,176	**40**	0,643	0,766	0,839	**70**	0,940	0,342	2,747
11	0,191	0,982	0,194	**41**	0,656	0,755	0,869	**71**	0,946	0,326	2,904
12	0,208	0,978	0,213	**42**	0,669	0,743	0,900	**72**	0,951	0,309	3,078
13	0,225	0,974	0,231	**43**	0,682	0,731	0,933	**73**	0,956	0,292	3,271
14	0,242	0,970	0,249	**44**	0,695	0,719	0,966	**74**	0,961	0,276	3,487
15	0,259	0,966	0,268	**45**	0,707	0,707	1,000	**75**	0,966	0,259	3,732
16	0,276	0,961	0,287	**46**	0,719	0,695	1,036	**76**	0,970	0,242	4,011
17	0,292	0,956	0,306	**47**	0,731	0,682	1,072	**77**	0,974	0,225	4,331
18	0,309	0,951	0,325	**48**	0,743	0,669	1,111	**78**	0,978	0,208	4,705
19	0,326	0,946	0,344	**49**	0,755	0,656	1,150	**79**	0,982	0,191	5,145
20	0,342	0,940	0,364	**50**	0,766	0,643	1,192	**80**	0,985	0,174	5,671
21	0,358	0,934	0,384	**51**	0,777	0,629	1,235	**81**	0,988	0,156	6,314
22	0,375	0,927	0,404	**52**	0,788	0,616	1,280	**82**	0,990	0,139	7,115
23	0,391	0,921	0,424	**53**	0,799	0,602	1,327	**83**	0,993	0,122	8,144
24	0,407	0,914	0,445	**54**	0,809	0,588	1,376	**84**	0,995	0,105	9,514
25	0,423	0,906	0,466	**55**	0,819	0,574	1,428	**85**	0,996	0,087	11,430
26	0,438	0,899	0,488	**56**	0,829	0,559	1,483	**86**	0,998	0,070	14,301
27	0,454	0,891	0,510	**57**	0,839	0,545	1,540	**87**	0,999	0,052	19,081
28	0,469	0,883	0,532	**58**	0,848	0,530	1,600	**88**	0,999	0,035	28,636
29	0,485	0,875	0,554	**59**	0,857	0,515	1,664	**89**	1,000	0,017	57,289
30	0,500	0,866	0,577	**60**	0,866	0,500	1,732	**90**	1,000	0,000	- - -

7.2 Demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras



Usando os triângulos retângulos AHC e ABC tem-se: $\frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB}$ pela congruência entre os ângulos CÂH e A$\hat{B}C$ bem como os ângulos $A\hat{H}C$ e CÂB que são retos.

Nos triângulos retângulos AHB e ABC valem: $\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC}$ tendo em vista a congruência entre os ângulos BÂH e $A\hat{C}B$ bem como os ângulos $A\hat{H}B$ e CÂB que são retos.

Então $(CA)^2 = CB.CH$ e $(BA)^2 = BC.BH$

Logo $(AB)^2 + (AC)^2 = BC.(BH + HC)$

$\therefore \quad (AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$ ■

7.3 Prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$

PROPOSIÇÃO: A raiz quadrada de 2 é irracional, ou seja, não existem números inteiros positivos *p* e *q* tais que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

PROVA POR CONTRADIÇÃO:

Suponha que existem números inteiros positivos p *e* q tais que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Escolha *p* e *q* de modo que eles não tenham divisor comum, ou seja,

de modo que não exista um número inteiro maior que 1 que divida tanto *p* quanto *q*.

O número p^2 é par (pois $p^2 = 2q^2$).

O número *p* é par (pois o produto de quaisquer dois números ímpares é ímpar).

Seja *s* o número *p*/2.

O número q^2 é par (pois $q^2 = p^2/2 = (2s)^2/2 = 2s^2$).

O número *q* é par.

Os números *p* e *q* são divisíveis por 2.

Isso contradiz a maneira como escolhemos *p* e *q*.

A contradição mostra que a raiz quadrada de 2 é irracional.