

**O USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM  
TEMAS DO ENSINO MÉDIO**

**MAURICIO DE OLIVEIRA HORTA BARBOSA**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY**

**RIBEIRO - UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ**

**Abril - 2013**

# O USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM TEMAS DO ENSINO MÉDIO

**MAURICIO DE OLIVEIRA HORTA BARBOSA**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Professora Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

Abril - 2013

# O USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM TEMAS DO ENSINO MÉDIO

**MAURICIO DE OLIVEIRA HORTA BARBOSA**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 11 de Abril de 2013.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro, D.Sc.- UENF

---

Prof. Geraldo de Oliveira Filho , D.Sc.- UENF

---

Prof<sup>a</sup>. Solimá Gomes Pimentel , D.Sc.- UFF

---

Prof<sup>a</sup>. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc.- UENF  
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho à minha mãe sem a qual não estaria aqui para fazê-lo. Aos futuros alunos que comigo estudarão. Espero que se beneficiem do aprendizado que tive nesta jornada.*

# **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus pela vida que me permitiu estar aqui. Aos nossos Professores que seguiram conosco nesta caminhada nos ensinando e apoiando com paciência e compreensão. À Professora Liliana, minha orientadora, sem a qual ainda estaria dando os primeiros passos neste trabalho. Ao Professor Rigoberto pela ajuda extra nas dificuldades com o Latex. Aos companheiros de nossa turma pela ótima convivência e aprendizado. E aos meus amigos e familiares pela compreensão e apoio.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”

Jacques Bernoulli

## RESUMO

A Matemática apresenta-se dividida em diversos campos de estudo que são apresentados muitas vezes de forma estanque. Para o estudante que se inicia no estudo da Matemática muitas vezes torna-se difícil enxergar as conexões entre os diferentes assuntos estudados. Neste trabalho procura-se utilizar as transformações geométricas na proposição de atividades que permitam estabelecer conexões entre diferentes assuntos que são estudados no ensino básico, trazendo assim, uma oportunidade para uma visão integradora de conceitos algébricos e geométricos com diferentes temas estudados. Pretende-se assim, contribuir para que a visão da Matemática como uma coleção de assuntos desconexos seja já diminuída desde os anos iniciais de seu estudo.

**Palavras-chave:** Transformações Geométricas; Isometrias; Reflexão; Translação; Rotação; Homotetia.

## ABSTRACT

Mathematics is composed of different fields of study which are often presented as being isolated topics. For the beginner student it's often hard to see connections among the different subjects studied. This paper seeks to use Geometric Transformations to propose activities that allow the establishment of connections among different subjects studied in basic school, making an opportunity for a more integrated view of the algebraic and geometric concepts with different topics studied. This way we hope to contribute to weaken the view of Mathematics as a collection of unconnected subjects since the first years of its study .

**Keywords:** Geometric Transformations; Isometries; Reflection ; Translations; Rotations, Dilations.

# Lista de Figuras

1.1	Reflexão. . . . .	6
1.2	Reflexão em relação a um ponto . . . . .	7
1.3	Reflexão em relação a uma reta. . . . .	8
1.4	Translação do ponto $P$ segundo o segmento $AB$ . . . . .	9
1.5	Translação do ponto $P$ segundo o segmento $AB$ . . . . .	10
1.6	Rotação de $45^\circ$ do ponto $P$ com centro de rotação $C$ . . . . .	11
1.7	Rotação de um ponto $P$ de um ângulo $\theta$ em torno da origem . . . . .	11
1.8	Rotação de um ponto $P$ de um ângulo $\theta$ com centro de rotação $C$ . . . . .	12
1.9	Transformação $f((x, y)) = (x, y_0)$ . . . . .	14
1.10	Transformação $f((x, y)) = (x, 5)$ . . . . .	15
1.11	O $\triangle A'B'C'$ é a imagem do $\triangle ABC$ pela homotetia $f((x, y)) = (3x, 3y)$ . . . . .	16
1.12	Reflexão em relação a uma reta. . . . .	16
1.13	Inversão . . . . .	18
1.14	Inversão do ponto $A$ em relação ao círculo $C$ unitário, expressão algébrica . . . . .	19
2.1	Representação geométrica do complexo $z = a + bi$ . . . . .	23
2.2	Adição do complexo $z_1 = 1 + 2i$ com $z_2 = 3 + i$ . . . . .	24
2.3	Rotação de $90^\circ$ como produto por $z = i$ . . . . .	25
2.4	Reflexão em relação à origem representada como produto por $z = -i$ . . . . .	26
2.5	Multiplicação de um complexo $z$ por um real $k > 1$ . . . . .	26

2.6	Reflexão em relação à origem representada como produto por $z = -i$ . . . . .	27
2.7	Inversão $f$ . . . . .	30
3.1	Softwares de Geometria . . . . .	31
4.1	Aplicação feita com software régua e compasso para a atividade de multiplicação de matrizes . . . . .	45
4.2	Representações de um número complexo. . . . .	45
4.3	Aplicação mostrando a multiplicação de um complexo por outro de módulo unitário. . . . .	46
4.4	Transformação $f((x, y)) = (x, 4)$ com diferentes domínios e contra-domínio. . . . .	52
4.5	Rotação e a homotetia de um triângulo $\triangle ABD$ com as respectivas matrizes. . . . .	53
4.6	Transformação de homotetia em um triângulo $\triangle ABD$ mostrando sua área e a matriz correspondente . . . . .	54
A.1	Tela esperada na execução dos itens 3 a 8 da atividade 1 . . . . .	58
A.2	Tela esperada na execução dos itens 3 a 8 da atividade 2 . . . . .	59
A.3	Reflexão. . . . .	61
A.4	Tela esperada na execução da atividade 4 . . . . .	62
A.5	Tela esperada na execução da atividade 5 . . . . .	63
A.6	Tela esperada na execução da atividade 9 . . . . .	67

# Lista de Tabelas

3.1	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	34
3.2	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	35
3.3	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	36
4.1	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	42
4.2	Representações algébrica e trigonométrica de alguns números complexos. .	47
4.3	Multiplicação $z.u$ em que $u$ é um complexo de módulo 1 . . . . .	48
4.4	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	49
4.5	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	50
4.6	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	50
A.1	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	58
A.2	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	59
A.3	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	60
A.4	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	61
A.5	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	62
A.6	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	63
A.7	Representações algébrica e trigonométrica de alguns números complexos. .	65
A.8	Multiplicação $z.u$ em que $u$ é um complexo de módulo 1 . . . . .	65
A.9	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	66
A.10	Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	67

A.11 Imagens de alguns pontos do domínio da função . . . . .	68
--	----

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 As Transformações Geométricas</b>	<b>5</b>
1.1 Isometrias	6
1.1.1 Reflexões	6
1.1.2 Translações	9
1.1.3 Rotações	10
1.1.4 Outras Isometrias	13
1.2 Outras Transformações Geométricas	13
1.2.1 A Transformação Constante	14
1.2.2 A Homotetia	15
1.2.3 A Projeção Ortogonal no Plano de um Ponto Sobre uma Reta	16
1.2.4 A Inversão	17
1.3 A Representação de Transformações Geométricas por Matrizes	19
1.3.1 Transformações envolvendo Produto de Matrizes	20
<b>2 Transformações Geométricas e os Números Complexos</b>	<b>22</b>
2.1 Representação Geométrica de um Número Complexo	22
2.2 A Adição de Números Complexos e a Translação	23
2.3 A Multiplicação de Números Complexos e a Rotação	24
2.4 A Multiplicação de um Número Complexo por um Número Real e a Homotetia	26

2.5	O Conjugado de um Número Complexo . . . . .	27
2.6	As Transformações Geométricas no plano Complexo . . . . .	28
2.6.1	A Translação . . . . .	28
2.6.2	A Homotetia com Razão $k > 0$ . . . . .	28
2.6.3	A Rotação de $\theta$ Radianos . . . . .	29
2.6.4	A Conjugação . . . . .	29
2.6.5	Uma Composição de Duas Funções Complexas . . . . .	29
2.6.6	A Inversão em Relação ao Círculo Unitário . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Atividades Realizadas em Sala de Aula</b>	<b>31</b>
3.1	Atividades Usando Reflexões . . . . .	32
3.1.1	Estudo de Funções (Domínio e Imagem) . . . . .	32
3.1.2	Estudo da Função Inversa . . . . .	34
3.2	Resultados das Atividades Realizadas . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Propostas de Atividades para Serem Usadas em Sala de Aula</b>	<b>40</b>
4.1	Atividades Usando Translações . . . . .	41
4.1.1	Estudo de Funções (Domínio e Imagem) . . . . .	41
4.2	Atividades Usando Rotações . . . . .	43
4.2.1	A Multiplicação de Matrizes . . . . .	43
4.2.2	A Multiplicação de Números Complexos . . . . .	44
4.3	Atividade Usando a Translação e Reflexão . . . . .	48
4.3.1	Trabalhando a Composição de Funções . . . . .	48
4.4	Atividades Usando Outras Transformações . . . . .	49
4.4.1	Funções Injetoras, Sobrejetoras e Inversas . . . . .	49
4.4.2	Multiplicação de Matrizes utilizando Rotação e Homotetia . . . . .	51
4.4.3	Semelhança de Triângulos e Comparação de Áreas - Homotetia . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Respostas Esperadas das Atividades</b>	<b>57</b>

# Introdução

A Geometria surgiu independentemente em várias culturas antigas. Não é possível precisar exatamente seu início, embora saiba-se que questões práticas como, a demarcação de terras no antigo Egito, a observação da natureza ou o próprio prazer de fazer Matemática tenham motivado seu desenvolvimento ao longo da história, até se perceber a necessidade de uma formalização dos conceitos por sua importância em diversos campos da Matemática.

Como acontece com a Geometria não há uma data precisa sobre a origem das transformações geométricas. O desenvolvimento desta acontece ao longo da história. Há registro de desenhos em pinturas rupestres, em cerâmicas e desenhos de civilizações bem antigas, que parecem indicar o uso de padrões e simetria. As idéias de transformações geométricas podem-se perceber contidas em trabalhos como os de Euclides e ao longo da época do Renascimento, em suas expressões artísticas, em técnicas como as de projeção central, elementos de perspectiva e no desenvolvimento da Geometria Descritiva.

Mais tarde com o desenvolvimento da Geometria Analítica por Descartes, as propriedades geométricas passaram a ser estudadas segundo equações algébricas e isso veio a imprimir uma nova forma de estudar Geometria que permitiu o desenvolvimento e a utilização das transformações geométricas.

Porém, é com os trabalhos de Félix Klein que surge o conceito de Grupo como elemento unificador das diferentes Geometrias que surgiram a partir do século XIX. O programa Erlanger, como ficaram conhecidas as conferências dadas por Klein na Universidade de Erlanger, quando se tornou professor lá, induz os matemáticos a um grande interesse pelas transformações geométricas, em particular pelas isometrias, por serem próprias da Geometria Euclidiana. A partir daí, o interesse pelo assunto atingiu também psicólogos e didatas, interessados nas investigações sobre a compreensão dos conceitos pelos estudantes.

E continua até os dias atuais, sofrendo variações quanto aos objetivos ou metodologias.

No Brasil, em diferentes momentos da História da Educação, no que se refere à Matemática, apareceram propostas e orientações para a introdução das transformações geométricas, no sentido de tornar o estudo da geometria mais motivador, criativo e bem fundamentado. Mas, em currículos oficiais, segundo [Mabuchi \(2000\)](#) a introdução deste tema, vem ocorrer na década de 70, sob a influência de uma moderna orientação para o ensino de Matemática. Nos Guias Curriculares para o Ensino do 1º Grau de São Paulo, na parte de Matemática, apresentava-se as transformações no plano, como funções aplicadas de pontos do plano no plano. O documento desaconselhava um tratamento axiomático e afirmava que as modernas orientações para o ensino da Matemática conferiam maior dinamismo ao processo de aprendizagem. Ainda assim, o tratamento excessivamente teórico ignorava a fase cognitiva em que se encontravam os alunos. Somente na década de 80, pesquisas com foco na aprendizagem começaram a ser divulgadas influenciando as propostas curriculares nas décadas seguintes. Em 1994 e 1996, no estado de São Paulo surgem mais propostas com orientações de atividades a serem desenvolvidas com alunos, agora já mais focadas na participação do aluno e na construção do conhecimento. As orientações para os professores apresentavam atividades em que as transformações geométricas apareciam como elemento fundamental. Em 1997 e 1998, com a publicação dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), as transformações geométricas são apresentadas, segundo este novo enfoque. Pode-se ler, repetidas vezes no documento, orientações no sentido do uso das transformações geométricas, porém, num aspecto mais prático, como ferramenta para o estudo da Geometria, focando na construção do raciocínio e na capacidade de visualização do aluno. No trecho a seguir, extraído de [PCNs \(1998\)](#), referindo-se ao segundo ciclo de estudos do ensino fundamental, aparecem os seguintes objetivos e conteúdos:

- Objetivo: identificar características de figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.
- Conteúdos: identificação de simetrias em figuras tridimensionais. Sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas na natureza, nas artes, nas edificações.

Numa outra passagem, extraída da parte que trata do 3º e 4º ciclos, pode-se observar o

papel fundamental atribuído às transformações geométricas para a construção do conhecimento geométrico do aluno:

Deve destacar-se também neste trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam semelhantes.

Apesar de menos exploradas nos PCN do ensino médio, nessa etapa do estudo, a introdução das transformações geométricas como funções aplicadas a pontos do plano ou do espaço, parece ser uma consequência natural, dado seu caráter unificador e sua importância no desenvolvimento da Matemática. Stormowski (2008) indica, que as transformações geométricas aparecem nos Parâmetros Curriculares do ensino médio apenas como uma forma de complementar o estudo geométrico e particularmente o estudo dos números complexos. Em Stormowski (2008) e Cerqueira (2005) observa-se que este fato seria devido à diferença de abordagem que há nos documentos que tratam do ensino fundamental para aqueles que tratam do ensino médio. Neste último, a forma de abordagem dos conteúdos é mais específica, não abordando conceitos mais gerais e abertos como ocorre nos PCNs do ensino fundamental.

Na linha do que foi exposto anteriormente, este trabalho, tem como objetivo propor atividades para alunos de diferentes séries do ensino médio de forma a lhes permitir relacionar as transformações geométricas do plano cartesiano e complexo, com os conceitos e operações de função, matriz e números complexos. Para facilitar seu entendimento, faremos uso de programas de apelo visual.

Para este estudo, o trabalho será dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, serão apresentados os conceitos e exemplos das principais transformações geométricas do plano cartesiano, assim como sua representação matricial e sua relação com o produto de matrizes.

No Capítulo 2, será feita uma relação entre os números complexos e suas operações, com as transformações do plano estudadas no Capítulo 1. A seguir, definiremos as transformações como funções complexas, em que o domínio é um subconjunto de  $\mathcal{C}$  e o contradomínio o conjunto dos números complexos  $\mathcal{C}$ .

No Capítulo 3, serão apresentadas três atividades aplicadas em uma turma de primeiro

ano do ensino médio do Instituto Federal Fluminense Campus Itaperuna, bem como as observações resultantes desta aplicação. Para este objetivo, faremos uso do programa de geometria dinâmica “Geogebra”, que possui uma janela algébrica. Isto permite a observação da representação algébrica dos objetos geométricos com os quais se está lidando, facilitando bastante a visualização e a relação da Geometria com a Álgebra. Além disso, o software “Geogebra”, já trás em sua implementação, ferramentas de transformações geométricas: as isometrias, (translação, rotação, reflexão) e a homotetia. Por isso sua utilização em atividades fica bem simplificada e atrativa para os professores e alunos que o queiram utilizar.

No Capítulo 4, serão propostas atividades que criem uma relação entre as transformações geométricas descritas no Capítulo 1 e Capítulo 2, com os conceitos de função, matriz, operações de matrizes e operações de números complexos, geralmente abordados de forma bastante mecânica. Para este objetivo, faremos uso dos programas “Geogebra” e “Régua e Compasso”, fundamentais por possibilitar a visualização e o entendimento. Disponibilizaremos, também, num CD anexo, aplicativos por mim desenvolvidos, para uso nas atividades.

No Capítulo 5, faremos as conclusões do trabalho, bem como as considerações finais.

Finalmente, é dado um Apêndice com as respostas das atividades propostas.

# Capítulo 1

## As Transformações Geométricas

As transformações geométricas, em geral, são funções definidas sobre um espaço nele próprio. Em particular, consideraremos uma transformação geométrica a uma correspondência do conjunto de todos os pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio.

Neste capítulo, trabalharemos apenas com as transformações geométricas em que esse espaço é o conjunto de pontos do plano, designado por  $\mathbb{R}^2$ , dada a identificação de cada ponto com as suas coordenadas.

Denotaremos uma transformação geométrica por uma função,

$$f : D \rightarrow D'$$

onde  $D$  e  $D'$  são subconjuntos do plano  $\mathbb{R}^2$ .

Por exemplo, se  $D$  é o conjunto dos pontos da bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, isto é,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$ , e tomamos  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$f(x, y) = (-x, y),$$

notamos que a imagem  $Im = f(D)$  é a bissetriz do segundo e quarto quadrantes.

A seguir, definiremos e exemplificaremos algumas das principais transformações geométricas.

## 1.1 Isometrias

Uma isometria é uma transformação geométrica bijetiva que preserva distância entre pontos e, como consequência, preserva também amplitudes de ângulos. Assim, a figura inicial e seu transformado são congruentes. Consequentemente se constituem em um grupo de transformações geométricas que servem bastante na geometria euclidiana, pois nos permitem observar que duas figuras são congruentes, se estas podem ser transformadas uma na outra por uma isometria, ou seja, por uma transformação geométrica que preserva as distâncias.

Dada uma transformação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e os pontos  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$ , se  $f$  for uma isometria, então a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ ,  $d(P, Q)$ , será igual à distância entre os pontos  $f(P)$  e  $f(Q)$ ,  $d(f(P), f(Q))$ .

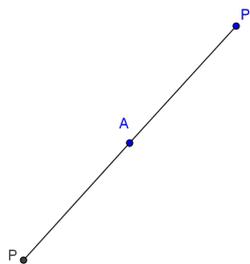
Consideramos aqui a distância entre pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que une estes dois pontos, ou seja

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

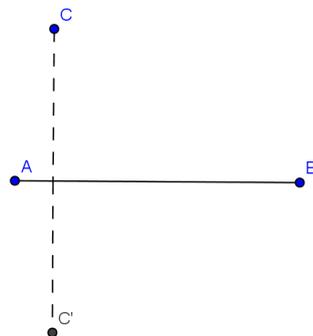
Há três tipos básicos de isometrias: as reflexões, as translações e as rotações.

### 1.1.1 Reflexões

As reflexões podem se dar em relação a um ponto ou a uma reta, como se vê nas Figuras 1.1(a) e 1.1(b).



(a) Reflexão do ponto  $P$  em relação ao ponto  $A$



(b) Reflexão do ponto  $C$  em relação ao segmento  $AB$

Figura 1.1: Reflexão.

Algebricamente, temos as seguintes definições:

- **A reflexão do ponto  $P$  com relação a um ponto  $A$ .** É um ponto  $P'$  tal que  $P$ ,  $A$  e  $P'$  são colineares e

$$d(P', A) = d(P, A). \quad (1.1)$$

Assim, dadas os pontos  $P = (x, y)$ ,  $A = (x_0, y_0)$  e  $P' = (x', y')$ , podemos obter a expressão para esta reflexão, a partir de (1.1).

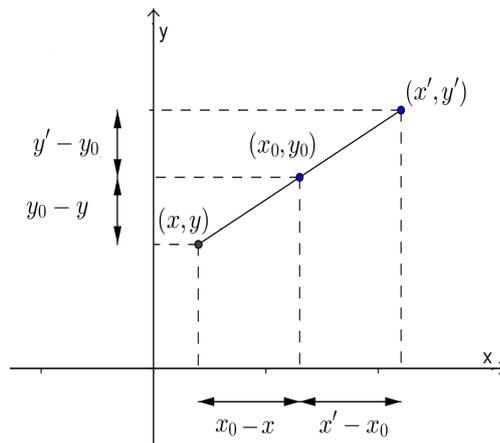


Figura 1.2: Reflexão em relação a um ponto

Mais ainda, da Figura 1.2, podemos escrever:

$$(x', y') = (x_0, y_0) + (x_0 - x, y_0 - y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$$

e portanto, a transformação pode ser escrita como:

$$f((x, y)) = (x', y') = (2x_0 - x, 2y_0 - y) \quad (1.2)$$

**Exemplo 1.1** A reflexão do ponto  $(x, y)$  em relação à origem  $(0, 0)$  será dada por:

$$f((x, y)) = (2 \cdot 0 - x, 2 \cdot 0 - y) = (-x, -y).$$

- **A reflexão do ponto  $P$  com relação a uma reta  $l$ ,** é um ponto  $P'$  tal que o segmento  $PP'$  é perpendicular a  $l$  e

$$d(P', l) = d(P, l).$$

Podemos obter a expressão algébrica para esta transformação, tomando as coordenadas de  $P = (x_0, y_0)$ ,  $P' = (x', y')$  e considerando  $\alpha$  o ângulo que  $l$  faz com o eixo  $x$  medido no sentido anti-horário.

Assim, a equação cartesiana da reta  $l$  é :  $y = (\tan \alpha)x + c$ , onde  $(0, c) = \left(0, \frac{c}{\cos \alpha}\right)$  é o ponto em que  $l$  corta o eixo  $y$ . Logo,

$$(-\sin \alpha) x + (\cos \alpha) y = c \quad (1.3)$$

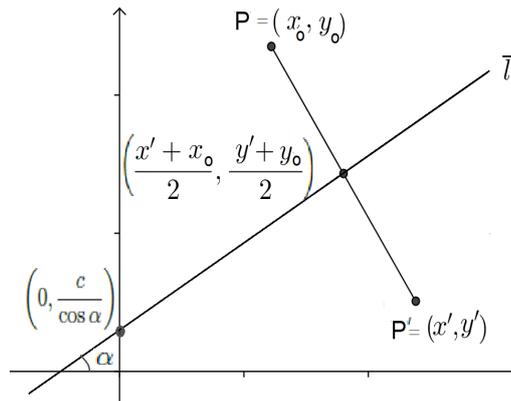


Figura 1.3: Reflexão em relação a uma reta.

Por outro lado, a reta que une  $(x_0, y_0)$  a  $(x', y')$ , que é perpendicular a  $l$ , é dada por  $y = \tan(90^\circ + \alpha) x + K = (-\cot \alpha) x + K$ , onde  $K = (\cot \alpha) x_0 + y_0$ . Logo,

$$(\cos \alpha) x + (\sin \alpha) y = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha. \quad (1.4)$$

Do fato da reta  $l$  ser a mediatriz do segmento que une o ponto  $P$  ao ponto refletido  $P'$ , como se vê na Figura 1.3, então, o ponto médio desse segmento,

$$(m, n) = \left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right) \quad (1.5)$$

será a solução das equações (1.3) e (1.4). Assim,

$$\begin{cases} (-\sin \alpha) m + (\cos \alpha) n = c \\ (\cos \alpha) m + (\sin \alpha) n = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.6)$$

Portanto, resolvendo o sistema anterior temos:

$$\begin{aligned} (m, n) &= (x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \cos \alpha \sin \alpha - c \sin \alpha, y_0 \sin^2 \alpha + x_0 \cos \alpha \sin \alpha + c \cos \alpha) \\ &= \left(x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \frac{\sin 2\alpha}{2} - c \sin \alpha, x_0 \frac{\sin 2\alpha}{2} + y_0 \sin^2 \alpha + c \cos \alpha\right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Comparando as igualdades (1.5) e (1.7), obtemos para  $(x', y')$  a seguinte representação algébrica da reflexão:

$$\begin{aligned}
 (x', y') &= f((x_0, y_0)) = (2m - x_0, 2n - y_0) \\
 &= (2x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \operatorname{sen} 2\alpha - 2c \operatorname{sen} \alpha - x_0, x_0 \operatorname{sen} 2\alpha + 2y_0 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2c \cos \alpha - y_0) \\
 &= (x_0(2 \cos^2 \alpha - 1) + y_0 \operatorname{sen} 2\alpha - 2c \operatorname{sen} \alpha, x_0 \operatorname{sen} 2\alpha + y_0 (2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1) + 2c \cos \alpha) \\
 &= (x_0 \cos 2\alpha + y_0 \operatorname{sen} 2\alpha - 2c \operatorname{sen} \alpha, x_0 \operatorname{sen} 2\alpha - y_0 \cos 2\alpha + 2c \cos \alpha) \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2** A reflexão do ponto  $(x, y)$  em relação ao eixo  $x$  em que  $\alpha = 0$  e  $c = 0$ , será dada por:

$$\begin{aligned}
 f((x, y)) &= (x \cdot \cos 2 \cdot 0 + y \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0, x \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot 0 - y \cdot \cos 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0) \\
 &= (x, -y). \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

### 1.1.2 Translações

Uma translação é uma transformação geométrica que leva cada ponto do plano a um novo ponto segundo uma trajetória representada por um segmento de reta de tamanho fixo e que faz também um ângulo fixo em relação à horizontal. Ou seja, dado um segmento  $AB$ , a imagem de um ponto  $P$  será o ponto transladado  $Q = f(P)$  tal que o segmento  $PQ$  terá o mesmo comprimento de  $AB$  e mesmo ângulo em relação à horizontal, conforme a Figura 1.4

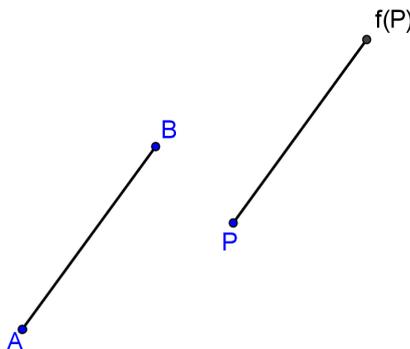


Figura 1.4: Translação do ponto  $P$  segundo o segmento  $AB$

Algebricamente, se consideramos o ponto  $A$  de coordenadas  $(x_1, y_1)$  e o ponto  $B$  de coordenadas  $(x_2, y_2)$ , observamos, conforme a Figura 1.5, que, de acordo com a definição,

para que o ponto  $Q = (x', y')$  seja a translação do ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  segundo o segmento  $AB$ , os triângulos  $ABC$  e  $PQM$  devem ser congruentes e portanto:

$$m(AC) = (x_2 - x_1) = m(PM) = (x' - x)$$

e

$$m(CB) = (y_2 - y_1) = m(MQ) = (y' - y),$$

o que nos leva à expressão:

$$(x', y') = f((x, y)) = (x + x_2 - x_1, y + y_2 - y_1) \quad (1.10)$$

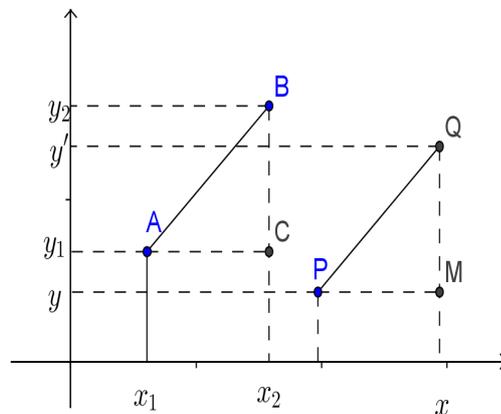


Figura 1.5: Translação do ponto  $P$  segundo o segmento  $AB$

**Exemplo 1.3** Se o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1, 3)$  e o ponto  $B$  tem coordenadas  $(2, 8)$ , a translação (1.10) segundo o segmento  $AB$  será dada por:

$$f((x, y)) = (2 - 1 + x, 8 - 3 + y) = (1 + x, 5 + y) \quad (1.11)$$

### 1.1.3 Rotações

Nas rotações, cada ponto  $P$  do plano é levado a um novo ponto  $P'$  sobre um arco de circunferência centrado em um centro de rotação  $C$ , em um sentido fixo e com um ângulo  $\theta$  também fixo.

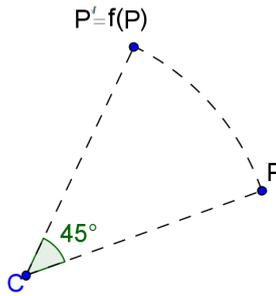


Figura 1.6: Rotação de  $45^\circ$  do ponto  $P$  com centro de rotação  $C$

Na Figura 1.6, por exemplo, o ponto  $P' = f(P)$  é a imagem do ponto  $P$  pela rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário com centro de rotação  $C$ .

Para determinarmos algebricamente a rotação de um ângulo fixo  $\theta$  com centro de rotação no ponto  $C$  de coordenadas  $(x_1, y_1)$  no sentido anti-horário, vamos primeiro considerar o caso mais simples em que a rotação se dá em torno da origem  $O$ .

- **Rotação em torno da Origem.** Conforme a Figura 1.7, tem-se um ponto  $P$  em que o segmento  $OP$  faz um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ .

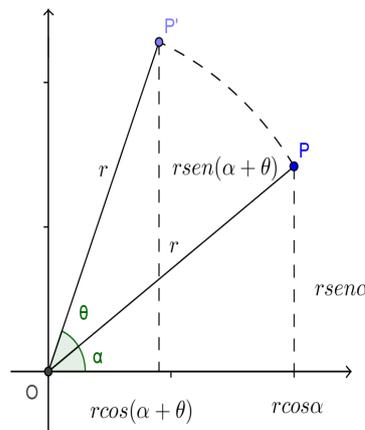


Figura 1.7: Rotação de um ponto  $P$  de um ângulo  $\theta$  em torno da origem

Dessa forma, as coordenadas de  $P$  podem ser escritas como  $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  em que  $r$  representa a medida do segmento  $OP$ . Sendo  $P' = (x', y')$  a imagem de  $P$

pela rotação de um ângulo  $\theta$  em relação a  $O$ , suas coordenadas serão dadas por:

$$\begin{aligned}(x', y') &= f((x, y)) = (r \cos(\alpha + \theta), r \sin(\alpha + \theta)) \\ &= (r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta), r(\sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha)) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta).\end{aligned}\tag{1.12}$$

- **Rotação em torno de um ponto C.** Para o caso em que o centro de rotação é o ponto  $C = (x_1, y_1)$ , vamos calcular a rotação, como anteriormente, considerando  $C$  como a origem e depois faremos uma translação.

Isto é, considerando as coordenadas de  $P = (x - x_1, y - y_1)$  como na Figura 1.8, então a expressão 1.12 toma a forma:

$$(x', y') = ((x - x_1) \cos \theta - (y - y_1) \sin \theta, (x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta).\tag{1.13}$$

Porém, as coordenadas de  $(x', y')$  conforme (1.13) consideram  $C$  como origem. Para fazer a translação, adicionamos as coordenadas de  $C$  em relação à origem  $O$  conforme mostra a Figura 1.8, obtendo assim a expressão algébrica que representa a rotação de um ângulo  $\theta$  com centro de rotação  $C = (x_1, y_1)$ :

$$\begin{aligned}(x', y') &= f((x, y)) \\ &= (x_1 + (x - x_1) \cos \theta - (y - y_1) \sin \theta, y_1 + (x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta).\end{aligned}\tag{1.14}$$

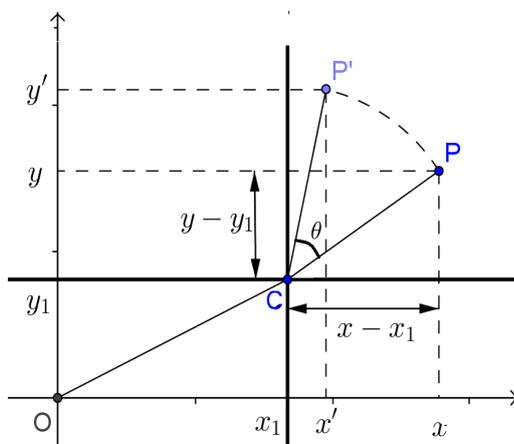


Figura 1.8: Rotação de um ponto  $P$  de um ângulo  $\theta$  com centro de rotação  $C$

**Exemplo 1.4** Se consideramos como centro de rotação o ponto  $C$  de coordenadas  $(1, 1)$ , a expressão para a rotação do ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  de um ângulo de  $90^\circ$  no sentido anti-horário será dada por:

$$\begin{aligned} f((x, y)) &= (1 + (x - 1) \cos 90^\circ - (y - 1) \sin 90^\circ, 1 + (x - 1) \sin 90^\circ + (y - 1) \cos 90^\circ) \\ &= (1 - y + 1, 1 + x - 1) \\ &= (2 - y, x). \end{aligned} \tag{1.15}$$

### 1.1.4 Outras Isometrias

Além dos três tipos básicos de isometrias, outros tipos de isometrias podem ser obtidos utilizando-se a composição.

Por exemplo, a **Reflexão com Deslizamento** obtida através da composição, da reflexão (1.8) em relação a uma reta, seguida da translação (1.10) segundo um segmento  $AB$  tem a seguinte expressão

$$f((x, y)) = (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha - 2c \sin \alpha + x_2 - x_1, x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha + 2c \cos \alpha + y_2 - y_1)$$

Se o ângulo que o segmento  $AB$  faz com o eixo  $x$  for o mesmo que a reta em relação à qual se faz a reflexão faz com este eixo, e se chamamos  $\lambda$  o comprimento do segmento  $AB$ , a expressão anterior pode ser escrita como:

$$f((x, y)) = (x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha - 2c \sin \alpha, x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha + 2c \cos \alpha) + \lambda(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

## 1.2 Outras Transformações Geométricas

Outras transformações geométricas do plano bastante interessantes podem ser utilizadas em atividades diversas, permitindo outras investigações geométricas e levando o aluno a uma melhor compreensão da relação entre o objeto geométrico e o algébrico. A seguir apresentamos algumas dessas transformações. Sua descrição é baseada em [Crissaf et al. \(2012\)](#).

## 1.2.1 A Transformação Constante

A transformação constante, leva um ponto  $P = (x, y)$  do plano em um ponto fixo  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Dessa forma podemos descrevê-la algebricamente como

$$f((x, y)) = (x_0, y_0). \quad (1.16)$$

Uma variação interessante da transformação (1.16) é uma que leve cada ponto  $P = (x, y)$  do plano no ponto  $P' = (x, y_0)$ . Neste caso a imagem

$$f((x, y)) = (x, y_0) \quad (1.17)$$

será uma reta horizontal, ao invés de um ponto. Veremos mais adiante, que, na verdade este é um caso particular de uma outra transformação geométrica: a projeção ortogonal sobre uma reta. Neste caso a reta  $y = y_0$

**Exemplo 1.5** A imagem de  $f((x, y)) = (x, y_0)$ , dada na equação (1.17) para diferentes objetos, como por exemplo diferentes retas (Figura 1.9(a)), são levadas todas na mesma reta horizontal, como mostra a Figura 1.9(b).

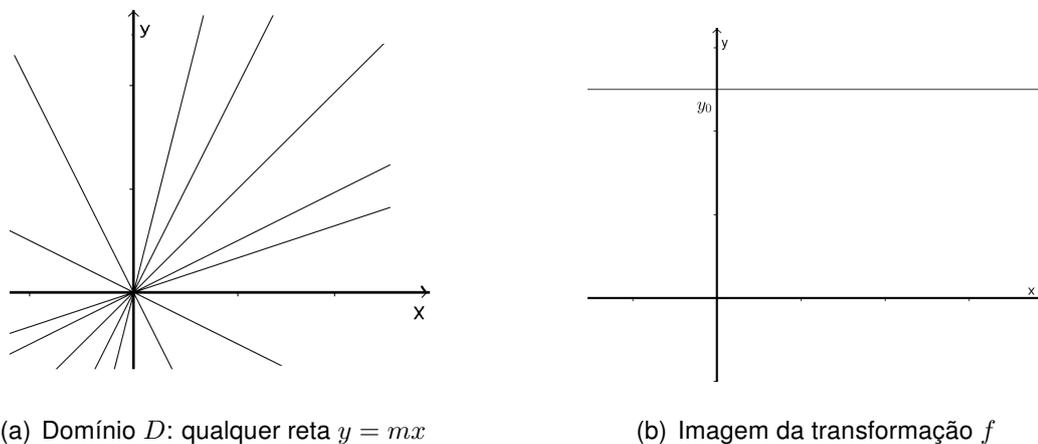
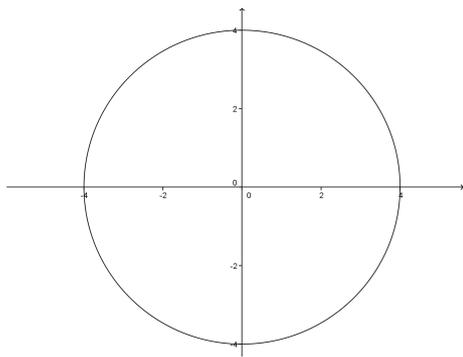


Figura 1.9: Transformação  $f((x, y)) = (x, y_0)$ .

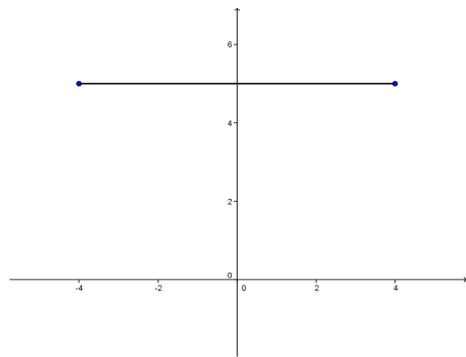
**Exemplo 1.6** Seja  $f((x, y)) = (x, 5)$ , cujo domínio é o conjunto de pontos da circunferência de centro na origem e raio 4 (Figura 1.10(a)), isto é,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 16\}.$$

É interessante observar que a imagem de  $f$  (Figura 1.10(b)), será o segmento de reta que liga os pontos  $(-4, 5)$  a  $(4, 5)$ .



(a) Domínio  $D$



(b) Imagem da transformação  $f$

Figura 1.10: Transformação  $f((x, y)) = (x, 5)$

## 1.2.2 A Homotetia

A transformação que leva um ponto  $P = (x, y)$  do plano num ponto  $P' = (kx, ky)$  sendo  $k$  um número real, é chamada homotetia de razão  $k$  e centro na origem. Representaremos algebricamente como

$$f((x, y)) = (kx, ky). \quad (1.18)$$

**Exemplo 1.7** Se tomamos como domínio o conjunto de pontos pertencentes aos lados do triângulo de vértice  $(1, 1)$ ,  $(3, 1)$  e  $(2, 2)$ , como na Figura 1.11 ao considerarmos a imagem dos pontos deste domínio pela homotetia

$$f((x, y)) = (3x, 3y),$$

obtemos um conjunto de pontos que formam um triângulo de vértices  $f(1, 1) = (3, 3)$ ,  $f(3, 1) = (9, 3)$  e  $f(2, 2) = (6, 6)$  que será semelhante ao triângulo do domínio. Pode-se pensar, por exemplo, em atividades que trabalhem com os conceitos de semelhança de triângulos, e que utilizem conceitos de geometria analítica para analisar as distâncias entre os vértices e verificar a razão entre os comprimentos dos lados.

**Observação 1.1** É interessante notar que esta transformação pode ser utilizada em atividades que envolvam figuras semelhantes.

- Se  $|k| < 1$ , as figuras obtidas por essa transformação serão encurtadas em relação à original.
- Se  $|k| > 1$  elas serão aumentadas.
- Se  $k = -1$ , a homotetia equivale a uma reflexão em relação à origem.

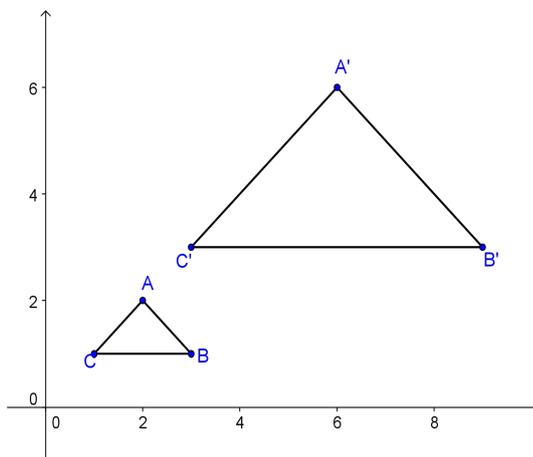


Figura 1.11: O  $\triangle A'B'C'$  é a imagem do  $\triangle ABC$  pela homotetia  $f((x, y)) = (3x, 3y)$

### 1.2.3 A Projeção Ortogonal no Plano de um Ponto Sobre uma Reta

A projeção ortogonal de um ponto  $P$  do plano sobre uma reta  $l$  do plano, é um ponto  $P'$  que é a interseção da reta  $l$  com a reta perpendicular a  $l$  que passa pelo ponto  $P$ .

De fato, seja  $l$  a reta que faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$  e intersecta o eixo  $y$  no ponto  $\left(0, \frac{c}{\cos \alpha}\right)$ . A expressão algébrica que representa a projeção ortogonal no plano, de um ponto  $(x, y)$  sobre  $l$ , é obtida de maneira análoga ao que foi feito no caso da reflexão em relação a uma reta, diferindo apenas no fato de que naquela, consideramos a interseção da reta  $l$  com o segmento  $PP'$  como o ponto médio deste segmento (1.7). Aqui, como se vê na Figura 1.12, o próprio ponto  $P'$  já é a interseção do segmento  $PP'$  com a reta  $l$  e portanto, solução do mesmo sistema 1.6. Assim, a expressão para  $P' = (x', y')$  é,

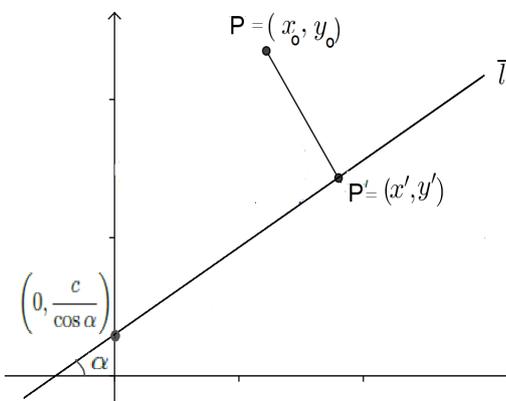


Figura 1.12: Reflexão em relação a uma reta.

$$(x', y') = f((x, y)) = (x \cos^2 \alpha + y \cos \alpha \sin \alpha - c \sin \alpha, y \sin^2 \alpha + x \cos \alpha \sin \alpha + c \cos \alpha)$$

**Exemplo 1.8** Se  $\alpha = 0$  e  $c = 0$ , então a reta  $l$  é o eixo  $x$ . Logo, a projeção ortogonal de um ponto  $(x, y)$  qualquer sobre o eixo  $x$  será dada por

$$f((x, y)) = (x, 0).$$

**Exemplo 1.9** Se  $\alpha = 90^\circ$  e  $c = 0$ , então a reta  $l$  é o eixo  $y$ . Logo, a projeção ortogonal de um ponto  $(x, y)$  qualquer sobre o eixo  $y$  será dada por

$$f((x, y)) = (0, y).$$

**Exemplo 1.10** Observamos ainda neste exemplo, que se  $\alpha = 0^\circ$  e  $c = y_0$ , a projeção ortogonal resulta na transformação 1.17, mencionada anteriormente.

## 1.2.4 A Inversão

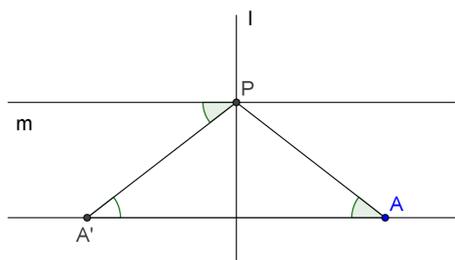
A inversão é uma generalização do conceito de reflexão em relação a uma reta. Nesse caso, ao invés de se levar os pontos de um lado de uma reta para o outro, os pontos são levados do interior de um círculo para o exterior ou vice-versa.

A generalização é feita reformulando-se a reflexão em relação a uma reta de forma que tenhamos uma situação análoga, substituindo-se a reta por um círculo  $C$ . Para fazer isso, seguiremos o descrito em [Brannan et al. \(1999\)](#).

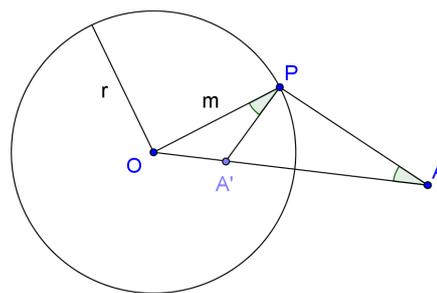
Podemos imaginar a reta  $l$  como sendo um círculo infinitamente grande. Consideremos o ponto  $A'$  a reflexão do ponto  $A$  em relação a  $l$  e  $m$  uma reta que passa por  $P$  e paralela ao segmento  $AA'$  conforme a Figura 1.13(a).

O ângulo  $\widehat{PAA'}$  é levado pela reflexão em relação a  $l$  no ângulo  $\widehat{PA'A}$ , de forma que esses dois ângulos têm que ser iguais. Mas como as retas  $m$  e  $AA'$  são paralelas, o ângulo  $\widehat{PA'A}$  é igual ao ângulo entre  $PA'$  e  $m$ . Consequentemente, o ângulo entre  $PA'$  e  $m$  é igual ao ângulo  $\widehat{PAA'}$ , o que é a pista necessária para a generalização pretendida.

Se substituirmos  $l$  por um círculo  $C$  de raio finito, e  $m$  por uma reta radial que intersecta  $C$  num ponto  $P$ , então, por analogia com a reflexão, podemos definir a imagem de  $A$  como



(a) Reflexão do ponto  $A$  em relação à reta  $l$ .



(b) Inversão do ponto  $A$  em relação ao círculo  $C$ .

Figura 1.13: Inversão

o ponto  $A'$  sobre o segmento  $OA$  para o qual  $\widehat{OPA'}$  é igual a  $\widehat{PAO}$ , conforme a Figura 1.13(b).

Para essa definição funcionar, devemos verificar que, para ponto  $A$  dado, a posição do ponto  $A'$  é independente de  $P$ . Para isso, observamos que os triângulos  $\triangle POA'$  e  $\triangle AOP$  são semelhantes, pois  $\widehat{OPA'} = \widehat{OAP}$  e  $\widehat{OA'P} = \widehat{OPA}$ . Segue que:

$$\frac{OA'}{OP} = \frac{OP}{OA},$$

de forma que:

$$OA.OA' = OP^2$$

e como  $OP$  é igual ao raio  $r$  de  $C$ , temos:

$$OA.OA' = r^2 \tag{1.19}$$

Já que só existe um ponto  $A'$  sobre o segmento  $OA$  que satisfaz a equação anterior e já que ela não depende de  $P$ , segue que a posição de  $A'$  não depende da escolha de  $P$ .

A inversão do ponto  $A$  com relação a um círculo  $C$  com centro  $O$  e raio  $r$  sendo  $A$  um ponto diferente de  $O$ , será o ponto  $A'$  sobre a reta  $OA$  que se localiza no mesmo lado de  $A$  em relação a  $O$  que satisfaz a equação:

$$OA.OA' = r^2 \tag{1.20}$$

Completando o argumento, verificamos então que fazendo o centro  $O$  na Figura 1.13(b) tender para o infinito ao longo da semi-reta  $AO$ , o ângulo  $\widehat{OPA'}$  tende a ficar igual ao ângulo  $\widehat{PA'A}$ , o raio tende portanto a ficar paralelo ao segmento  $AO$  e a circunferência tende a se tornar uma reta, que seria a reta  $l$  da Figura 1.13(a). No CD anexo, a animação

inver\_refle.ggb ilustra este fato. Para isso deve-se abrir a aplicação como o software “Geogebra” e clicando com o botão direito sobre o seletor “h” selecionar animação.

Algebricamente, se  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $A = (x, y)$  e  $A' = (kx, ky)$ , da equação (1.20), temos que:

$$(x^2 + y^2) \cdot (k^2x^2 + k^2y^2) = 1.$$

Logo,

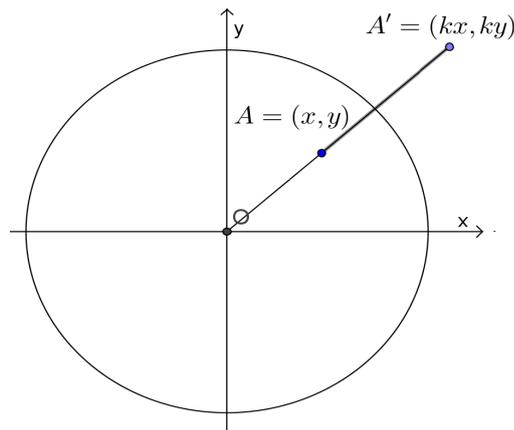


Figura 1.14: Inversão do ponto  $A$  em relação ao círculo  $C$  unitário, expressão algébrica

$$k^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Portanto

$$k = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Dessa forma o ponto  $A'$  resultado da inversão será dado por:

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

e a transformação pode ser escrita como:

$$f((x, y)) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad \text{sendo } (x, y) \neq (0, 0)$$

### 1.3 A Representação de Transformações Geométricas por Matrizes

As transformações geométricas se apresentam como recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e suas operações. Conteúdo que, em geral, é estudado de forma

bastante mecânica, privilegiando os métodos algébricos.

A seguir, representamos os pares ordenados do plano por matrizes coluna e as transformações geométricas do plano, estudadas nas seções anteriores, por matrizes.

**Exemplo 1.11** A reflexão dada em (1.2) em relação ao ponto  $P = (x_0, y_0)$  pode ser representada de forma semelhante pela equação matricial:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 1.12** A translação dada em (1.10) por um segmento  $AB$ , que se constitui na transformação mais simples de se trabalhar, com a notação matricial pode ser descrita como:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

**Exemplo 1.13** A rotação dada em (1.14) de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário com centro de rotação  $C = (x_1, y_1)$  pode ser representada da seguinte forma:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

**Exemplo 1.14** E a homotetia dada em (1.18) de razão  $k$  com centro na origem aparece na forma da equação

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

### 1.3.1 Transformações envolvendo Produto de Matrizes

Em Lima et al. (2006), ao tratar sobre a multiplicação de matrizes, é dito que as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares. E o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares. O autor recomenda que o estudo da multiplicação seja motivado por exemplos mais simples, envolvendo a interpretação de matrizes como tabelas. Porém, se o estudo de transformações geométricas já tiver sido utilizado em outras etapas, não há porque não utilizar atividades envolvendo composição de transformações para motivar o estudo de multiplicação de matrizes.

Por exemplo, pode-se fazer a composição de uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário com centro de rotação na origem (1.22) com uma homotetia de razão 2 (1.23). A primeira é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E a segunda pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dessa forma a rotação seguida da homotetia será dada pelo produto das duas matrizes anteriores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Observação 1.2** *No Capítulo 4 é apresentada uma proposta de atividade que trabalha com a composição de rotações, utilizando para isso o programa régua e compasso. Espera-se que a visualização dos efeitos das transformações geométricas atue de forma motivadora e instigadora no estudo das matrizes.*

## Capítulo 2

# Transformações Geométricas e os Números Complexos

### 2.1 Representação Geométrica de um Número Complexo

Historicamente, os números complexos surgiram a partir do trabalho de Matemáticos como Cardano e Bombelli, na tentativa de solução de problemas que resultavam em equações com soluções não reais. Alguns desses problemas, apresentavam soluções reais. Porém para se chegar a essas soluções, eram utilizados caminhos que envolviam a utilização de números não reais. Apesar de não aceitarem verdadeiramente esses números, os matemáticos seguiam utilizando-os. Em 1777, Leonard Euler, denotou o “número”  $\sqrt{-1}$  por “ $i$ ” e determinou várias propriedades desses novos números, sendo dele a sua representação polar. Em 1797, com trabalhos de Caspar Wessel e 1806, com trabalhos de Jean Robert Argand veio a representação geométrica que surgia da proposta de interpretar a multiplicação por  $-1$  como uma reflexão em relação à origem. Da investigação das possibilidades de se representar a meia proporcional entre  $+1$  e  $-1$ , Argand desenvolve a idéia geométrica para a representação dos números complexos. Em 1831 Gauss batizou esses números de “números complexos” e contribuiu para sua aceitação utilizando-os para provar novos e profundos resultados em Teoria dos Números.

Geometricamente, portanto, os números complexos podem ser identificados com pontos do plano  $\mathbb{R}^2$  em que a parte real constitui a abscissa do ponto e a parte imaginária constitui a ordenada. Assim, se representamos um número complexo  $z = a + bi$  por um

ponto  $P(a, b)$ , sua parte real será dada por  $r \cos \theta$  e sua parte imaginária por  $r \operatorname{sen} \theta$ , sendo  $r$  o comprimento do segmento  $OP$  que vai da origem ao ponto  $P$ , o qual representa nesse caso o módulo do número complexo  $z$ , conforme a Figura 2.1. Chama-se o ângulo  $\theta$  de

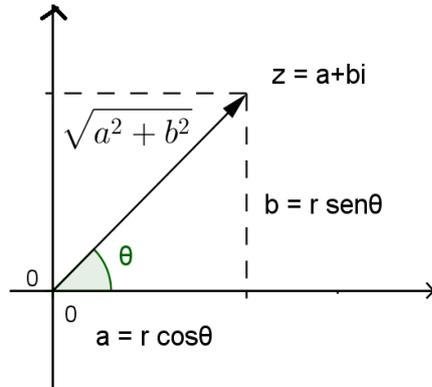


Figura 2.1: Representação geométrica do complexo  $z = a + bi$

argumento de  $z$  e assim, dados o módulo  $r$  e o argumento  $\theta$ , tem-se definido o número complexo  $z$  em sua forma trigonométrica ou polar, da seguinte forma:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

sendo  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{r}$  e  $\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{r}$ .

## 2.2 A Adição de Números Complexos e a Translação

A adição de um número complexo  $z_1 = a + bi$  com um outro complexo  $z_2 = c + di$  é definida como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Se pensamos no número complexo  $z_1$  como o ponto  $P(a, b)$  e  $z_2$  como sendo o segmento  $AB$ , em que o ponto  $A$  é a origem  $(0, 0)$  e o ponto  $B$  tem coordenadas  $(c, d)$ , pode-se fazer uma analogia com a transformação geométrica de translação (1.10) descrita no Capítulo 1. Na notação usada naquele capítulo, pode-se escrever que

$$z_1 + z_2 = f((a, b)) = (a + c - 0, b + d - 0),$$

sendo  $f$  a translação geométrica segundo o segmento  $AB$ . Verifica-se assim, que a operação de adição de números complexos pode ser identificada como uma translação no plano.

**Exemplo 2.1** Na Figura 2.2 pode-se observar que a adição dos complexos  $z_1 = 1 + 2i$  e  $z_2 = 3 + i$ , corresponde à translação do ponto  $(1, 2)$  segundo o segmento  $AB$  em que  $A = (0, 0)$  e  $B = (3, 1)$ .

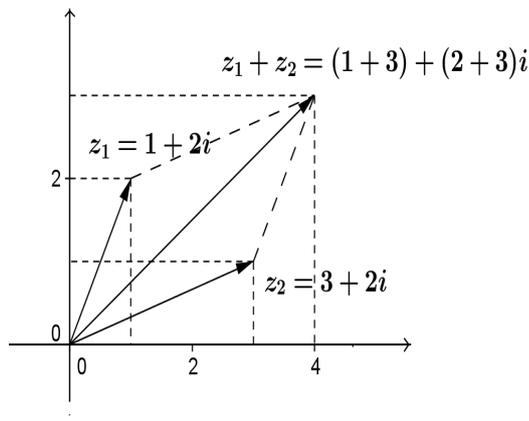


Figura 2.2: Adição do complexo  $z_1 = 1 + 2i$  com  $z_2 = 3 + i$

## 2.3 A Multiplicação de Números Complexos e a Rotação

A multiplicação de um número complexo  $z_1 = a + bi$  em sua forma algébrica por um número complexo  $z_2 = c + di$  é definida como:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Se tomamos os números  $z_1$  e  $z_2$  na forma trigonométrica:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_2) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

a multiplicação fica:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2)]$$

Utilizando as fórmulas de cosseno da soma e seno da soma obtém-se:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Analisando esta última forma, verifica-se que ao se multiplicar dois números complexos, seus módulos são multiplicados e seus ângulos são somados.

Dessa forma, se consideramos um número complexo de módulo 1, e um ângulo  $\theta$  qualquer, ao fazermos sua multiplicação por um outro número complexo, estaremos realizando na verdade a rotação deste último de um ângulo  $\theta$ , já que seu módulo permanecerá o mesmo.

**Exemplo 2.2** Seja o número complexo  $z_1 = i$ , cuja forma trigonométrica é

$$z_1 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ.$$

A sua multiplicação por um número complexo qualquer representará a rotação desse número de  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Tomando, por exemplo,

$$z_2 = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ),$$

temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$$

A figura 2.3 ilustra esse fato.

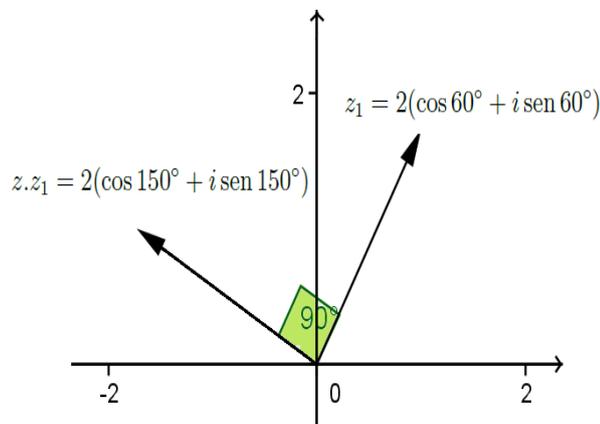


Figura 2.3: Rotação de  $90^\circ$  como produto por  $z = i$

**Exemplo 2.3** Seja  $z_1 = -i$ , cuja forma trigonométrica é  $z_1 = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ$ . A multiplicação de  $z_1$  por um número complexo qualquer, representará a rotação desse número de um ângulo de  $180^\circ$  no sentido anti-horário, o que equivale à transformação de reflexão em relação à origem, como se vê na Figura 2.4. Assim, tomando o mesmo  $z_2$  anterior,

$$z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ).$$

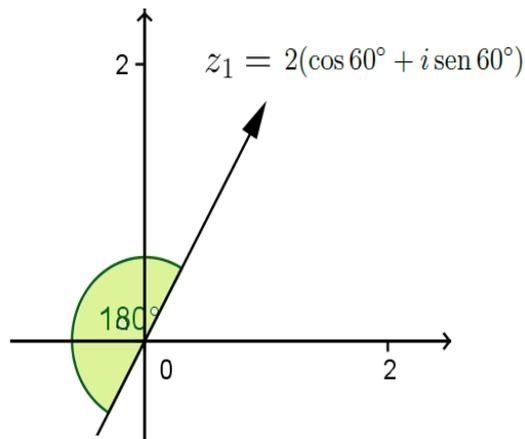


Figura 2.4: Reflexão em relação à origem representada como produto por  $z = -i$

## 2.4 A Multiplicação de um Número Complexo por um Número Real e a Homotetia

A multiplicação de um número complexo  $z = a + bi$  por um número real  $k$  é definida como  $k.z = ka + kbi$ . Observa-se que esta expressão, olhando os números complexos como pontos do plano, é exatamente a expressão da transformação geométrica homotetia de razão  $k$ .

Assim, da mesma forma que o descrito no capítulo 2, temos:

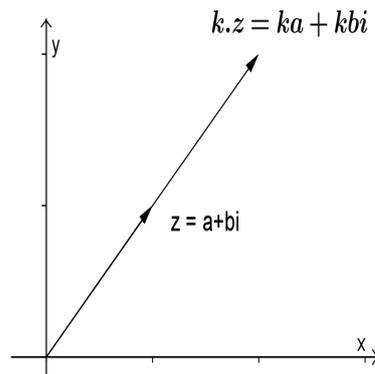


Figura 2.5: Multiplicação de um complexo  $z$  por um real  $k > 1$

- Se  $k > 1$ , o módulo do número complexo é aumentado (Figura 2.5).

- Se  $0 < k < 1$ , o módulo do número complexo é diminuído.
- Se  $k < 0$ , ocorrerá uma reflexão em relação à origem.

## 2.5 O Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  é dado pelo número complexo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Se pensamos em sua representação como um par ordenado do plano complexo, fica evidente a relação com a transformação de reflexão descrita no capítulo 1. Nesse caso a reflexão em relação ao eixo  $x$ . Ou seja, o conjugado de  $z$ , representa geometricamente sua reflexão em relação ao eixo  $x$ , conforme pode ser observado na Figura 2.6.

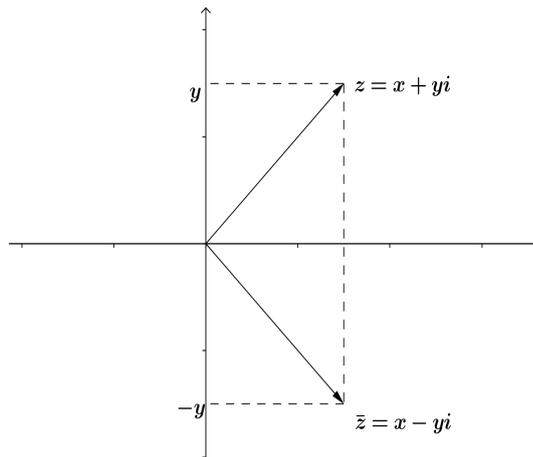


Figura 2.6: Reflexão em relação à origem representada como produto por  $z = -i$

É interessante ressaltar que esta operação possui propriedades algébricas que podem ser utilizadas em atividades que façam uso das transformações geométricas. Um exemplo de uma dessas propriedades é o fato de que ao se aplicar a conjugação duas vezes, obtém-se a identidade, ou seja:  $\overline{\bar{z}} = z$ . Geometricamente, se for feita a reflexão em relação ao eixo  $x$  de um ponto duas vezes, retorna-se ao ponto original. Em atividades que relacionam os números complexos e as transformações geométricas, este tipo de propriedade pode ser utilizado como fator de investigação, levando o aluno a observar, fazer considerações e concluir, o que pode enriquecer bastante o processo de aprendizagem.

## 2.6 As Transformações Geométricas no plano Complexo

Nas sessões anteriores, procuramos descrever, como as operações com números complexos podem estar relacionadas com as transformações geométricas, ressaltando como a visão geométrica pode ajudar na motivação e compreensão do desenvolvimento deste conteúdo.

Nesta seção, observaremos que as transformações estudadas anteriormente, cujo domínio era um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e o contradomínio era o  $\mathbb{R}^2$  podem ser descritas como funções complexas, em que o domínio é um subconjunto de  $\mathcal{C}$  e o contradomínio o conjunto dos números complexos  $\mathcal{C}$ . Podemos representar essas funções como:

$$f : S \rightarrow \mathcal{C},$$

sendo  $S$  um subconjunto de  $\mathcal{C}$ .

Como visto anteriormente, a cada número complexo, faz-se corresponder um ponto do plano. Dessa forma, o estudo que se segue é bem intuitivo, uma vez que já se tenha compreendido as transformações geométricas como vistas anteriormente. O que se apresenta em seguida são exemplos de algumas transformações geométricas descritas como funções complexas baseado no desenvolvimento apresentado em [Hefez e Villela \(2012\)](#).

### 2.6.1 A Translação

Se tomamos um número complexo  $\beta \in \mathcal{C}$ , a definição da translação como uma função complexa fica definida como:  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  em que:

$$f(z) = z + \beta$$

ou seja, é exatamente a descrição apresentada ao se discutir a adição de números complexos. O domínio dessa função é  $\mathcal{C}$ , já que todos os números complexos podem ser adicionados a esse complexo  $\beta$  e assim como a translação, essa função é uma bijeção.

### 2.6.2 A Homotetia com Razão $k > 0$

Tomando  $k$  um número real positivo, a homotetia com razão  $k$  fica definida como:  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  em que:

$$f(z) = kz.$$

Observa-se que o domínio dessa função é o conjunto  $\mathcal{C}$  e que ela também se constitui numa bijeção. As mesmas observações sobre  $k$  feitas anteriormente, podem ser feitas aqui. Assim:

- se  $k > 1$ , tem-se uma dilatação
- se  $k < 1$ , tem-se uma contração.
- se  $k < 0$ , tem-se uma translação em relação à origem.

### 2.6.3 A Rotação de $\theta$ Radianos

Aqui, a função complexa que representa a rotação de um ângulo  $\theta$  pode ser definida como:  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  em que:

$$f(z) = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).z$$

Se  $\theta$  tem um valor positivo a rotação é no sentido anti-horário, já se  $\theta$  tem um valor negativo, a rotação é no sentido horário. Novamente o domínio é  $\mathcal{C}$  e esta também representa uma bijeção.

### 2.6.4 A Conjugação

Define-se naturalmente essa função como:  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , em que:

$$f(z) = \bar{z}$$

Como visto anteriormente, esta função se constitui numa reflexão em relação ao eixo  $x$ . Seu domínio é  $\mathcal{C}$  e também se constitui numa bijeção como as outras apresentadas.

### 2.6.5 Uma Composição de Duas Funções Complexas

Se pensamos na função complexa  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , em que:

$$f(z) = \alpha.z$$

sendo  $\alpha$  um número complexo, observa-se que essa função pode ser vista como a composição de uma homotetia de razão  $k$  com uma rotação de um ângulo  $\theta$  em que  $k$  nada mais

é do que o módulo do complexo  $\alpha$  e  $\theta$  o seu argumento. Assim como as outras funções apresentadas, o domínio aqui é também  $\mathcal{C}$  e  $f$  também se constitui numa bijeção.

### 2.6.6 A Inversão em Relação ao Círculo Unitário

Essa função é definida a partir da condição 1.20 que um ponto  $P'$  deve obedecer para ser a inversão de um ponto  $P$  em relação a um círculo de centro  $O$  e raio  $r$  apresentada no Capítulo 2.

Seja  $z$  um número complexo e  $z'$  sua inversão em relação ao círculo unitário com centro na origem. De modo que

$$|z| \cdot |z'| = r^2 = 1 \quad (2.1)$$

Como  $z' = kz$ , então de (2.1) temos que  $k = \frac{1}{|z|^2}$ .

Consequentemente, a inversão será dada pela função complexa  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , em que

$$f(z) = z' = kz = \frac{1}{|z|^2}z = \frac{1}{\bar{z}}$$

A Figura 2.7 mostra a representação geométrica de  $z$  e  $f(z)$  Esta transformação trans-

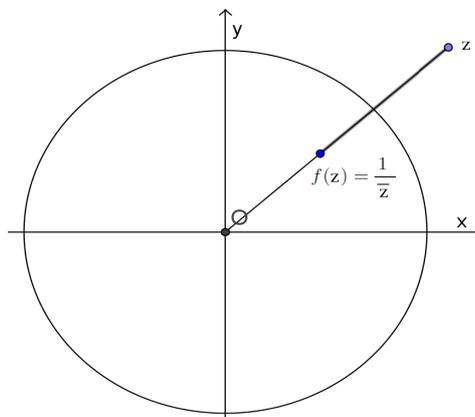


Figura 2.7: Inversão  $f$ .

forma um número complexo  $z$  não nulo situado no interior (ou exterior) do círculo unitário em um número complexo no exterior (no interior) do círculo, colinear com  $z$  e a origem, e vice-versa.

**Observação 2.1** Um número complexo cujo módulo seja 1, terá como imagem ele mesmo por esta função.

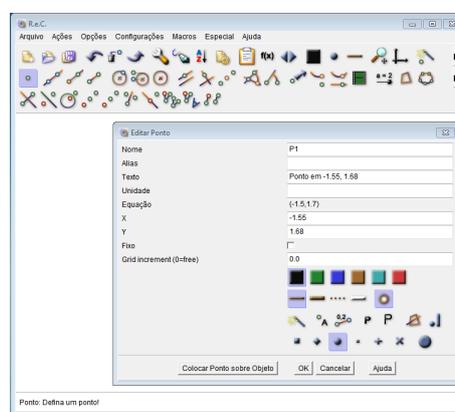
## Capítulo 3

# Atividades Realizadas em Sala de Aula

Nos dois capítulos seguintes nosso objetivo é relacionar as transformações geométricas com conceitos abordados no ensino médio, de modo a os consolidar. Para esta finalidade foram desenvolvidas atividades, com ajuda dos softwares Geogebra e Régua e Compasso, ambos softwares de geometria dinâmica gratuitos que se prestam bastante a atividades de investigação. Para facilitar a leitura as atividades foram agrupadas segundo as transformações geométricas que elas utilizam.



(a) Tela do Geogebra



(b) Tela do Régua e Compasso

Figura 3.1: Softwares de Geometria

Neste Capítulo, apresentaremos três atividades que relacionam os conceitos de domínio, imagem e inversa de uma função com as Reflexões, que foram aplicadas na minha turma de 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense Campus Itaperuna, seguidamente será feita uma análise dos resultados obtidos.

## 3.1 Atividades Usando Reflexões

Tradicionalmente, no ensino médio, é dada ênfase ao estudo de funções cujo domínio é o conjunto dos números reais. Embora, em [Cunha e Moraes \(2008\)](#), destaca-se que, em 1935, um grupo de jovens matemáticos fundou a Associação Bourbaki, com o objetivo de organizar toda a Matemática conhecida. Em 1939, publicaram o primeiro livro da coleção *Theorie des Ensemble*, que contém todas as definições e principais resultados. Neste livro encontra-se a moderna definição de função:

*"Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos, distintos ou não, uma relação entre uma variável  $x$  de  $E$  e uma variável  $y$  de  $F$ , chama-se relação funcional em  $y$  ou relação funcional de  $E$  em  $F$  se, qualquer que seja  $x$  pertencente a  $E$ , existe um elemento  $y$  pertencente a  $F$ , e somente um, que esteja na relação considerada com  $x$ ".*

Como se vê na definição apresentada acima, o domínio de uma função, pode ser um conjunto de diferentes tipos de elementos. Isso é mencionado, mas pouco é feito para consolidar esta ideia.

Trabalhando com transformações geométricas, o professor tem, não só a oportunidade de trabalhar e tentar desenvolver nos seus alunos vários conceitos e técnicas algébricas e geométricas, como também aprofundar o estudo de funções com exemplos em que o domínio é um conjunto de pontos do plano, ou até mesmo do espaço, evidenciando a possibilidade de utilização desse importante conteúdo de forma diferenciada.

### 3.1.1 Estudo de Funções (Domínio e Imagem)

Nesta atividade utilizaremos as reflexões para um “aprofundamento” do conceito de domínio e imagem de uma função. Para alcançar nosso objetivo sugerimos o uso do software Geogebra nos exercícios. O software dá uma agilidade que permite ao aluno adquirir maior familiaridade com o conteúdo, além de trazer uma maior motivação para sua dinâmica, na medida em que se pode visualizar e modificar facilmente os objetos trabalhados.

#### **ATIVIDADE 1**

Esta atividade deve ser aplicada em turmas de primeiro ano do ensino médio.

Considere o conjunto de pontos pertencentes à reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

1. Se representamos os pontos desse conjunto por suas coordenadas,  $(x, y)$ , qual a expressão que relaciona essas coordenadas?
2. Complete então, a representação a seguir, que representa o conjunto de pontos considerado.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{\hspace{4cm}}\}$$

3. Abra o software Geogebra. Na parte inferior da tela há uma linha em que podem ser escritas equações que representam os objetos que aparecem na janela geométrica. Digite, nesta linha, a equação correspondente ao conjunto de pontos considerado e verifique a visualização da bissetriz na janela geométrica. Observe também que há uma janela algébrica na parte esquerda da tela em que aparece a equação algébrica que representa o objeto apresentado na janela geométrica.
4. Crie agora, retas sobre os eixos  $x$  e  $y$ . Para isso, você pode digitar as equações  $x = 0$  e  $y = 0$  que representam os eixos na linha de entrada, ou utilizar a ferramenta de criação de retas por dois pontos.
5. Utilizando agora a ferramenta de reflexão faça a reflexão do conjunto de pontos da bissetriz em relação ao eixo  $x$ . Para fazer a reflexão, selecione a ferramenta de reflexão em relação a uma reta e, em seguida, clique primeiro sobre o objeto a ser refletido e depois sobre o objeto em relação ao qual se fará a reflexão, nesse caso o eixo  $x$ .
6. Crie agora, com a ferramenta de criação de pontos, um ponto sobre a reta inicial.
7. Novamente utilizando a ferramenta de reflexão como descrito anteriormente, faça a reflexão do ponto criado em relação ao eixo  $x$ .
8. Selecionando agora a ferramenta de movimentação de objetos, clique sobre o ponto inicial criado e movimente-o. Observe o que ocorre com o ponto refletido.
9. Observe, que na janela algébrica, são apresentadas as coordenadas dos pontos que aparecem na janela geométrica. Utilize essas informações e a movimentação do

ponto inicial, para completar a Tabela 3.1 com a imagem de alguns pontos pertencentes à reta inicial.

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,-1)	
(-3,-3)	
(0,0)	
(5,5)	
(10,10)	

Tabela 3.1: Imagens de alguns pontos do domínio da função

10. Observe na janela algébrica do software a equação que representa a reta refletida. Utilizando essa equação, represente o conjunto de pontos que pertencem à reta refletida, como feito anteriormente com a reta inicial

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{\hspace{4cm}}\}.$$

11. Conclua que a função que transforma o conjunto dos pontos da reta inicial nos pontos da reta refletida tem como conjunto domínio: \_\_\_\_\_ e conjunto imagem: \_\_\_\_\_.

## **ATIVIDADE 2**

Repita os mesmos passos da atividade 1, trocando agora a reflexão em relação ao eixo  $x$  para a reflexão em relação ao eixo  $y$  e depois responda: as funções representadas nas atividades 1 e 2 são as mesmas? Justifique.

### **3.1.2 Estudo da Função Inversa**

## **ATIVIDADE 3**

Esta atividade se direciona a alunos do primeiro ano do ensino médio.

1. Abra o software Geogebra.
2. Na linha de entrada na parte inferior da tela, digite a equação da bissetriz dos quadrantes ímpares  $y = x$

3. Digite agora a equação da função logaritmo na base 2 (é necessário mudar a base, já que o programa utiliza a base dos logaritmos neperianos:  $y = \log(x)/\log(2)$ )
4. Utilizando o botão da ferramenta de reflexão, faça a reflexão da curva logarítmica em relação à bissetriz do item 1. Clique primeiro na curva logarítmica e depois na bissetriz.
5. A curva refletida é familiar?
6. Com a ferramenta ponto, crie um ponto sobre a curva logarítmica.
7. Com a ferramenta de reflexão faça a reflexão desse ponto em relação à bissetriz.
8. Digitando o valor na linha de entrada ou movimentando os pontos sobre a curva logarítmica, preencha a tabela 3.2 com os pontos refletidos.

Ponto do curva logarítmica	Ponto da curva refletida
(0.25,-2)	
(0.5,-1)	
(1,0)	
(2,1)	
(4,2)	

Tabela 3.2: Imagens de alguns pontos do domínio da função

9. Observando a tabela, complete as sentenças:
  - A imagem de  $x = 0.25$  pela função  $y = \log_2 x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_  
e a imagem de  $x = -2$  pela função  $y = 2^x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_
  - A imagem de  $x = 0.5$  pela função  $y = \log_2 x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_  
e a imagem de  $x = -1$  pela função  $y = 2^x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_
  - A imagem de  $x = 1$  pela função  $y = \log_2 x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_  
e a imagem de  $x = 0$  pela função  $y = 2^x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_

- A imagem de  $x = 2$  pela função  $y = \log_2 x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_  
e a imagem de  $x = 1$  pela função  $y = 2^x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_
- A imagem de  $x = 4$  pela função  $y = \log_2 x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_  
e a imagem de  $x = 2$  pela função  $y = 2^x$  é  $y =$  \_\_\_\_\_

10. O que podemos dizer sobre as funções  $y = \log_2 x$  e  $y = 2^x$ ?

11. Repita os itens 2 a 8 agora para a função  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ . A seguir, preencha a Tabela 3.3

Ponto da curva exponencial	Ponto da curva refletida
(-2,4)	
(-1,2)	
(0,1)	
(1,0.5)	
(2,0.25)	

Tabela 3.3: Imagens de alguns pontos do domínio da função

12. Qual é a função refletida?
13. O que você observa sobre os gráficos refletidos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares?
14. Se uma função transforma o elemento  $x_0$  no elemento  $y_0$  a sua inversa, transforma o elemento  $y_0$  no elemento  $x_0$ . Você observou isso nas funções desta atividade?
15. Qual seria a função inversa de  $\log_5 x$ ? E a inversa de  $7^x$ ?

## 3.2 Resultados das Atividades Realizadas

No sentido de dar um maior fundamento para as sugestões feitas no trabalho, foi que aplicamos, as atividades 1, 2 e 3 apresentadas. A aplicação foi feita em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio Técnico do Instituto Federal Fluminense com vinte e

cinco alunos. Utilizou-se o laboratório de informática da escola, com o software Geogebra instalado nas máquinas. A turma tinha pouco conhecimento do software, com excessão de alguns alunos que já o conheciam. Uma ambientação inicial foi feita, familiarizando a turma com as ferramentas do software e suas janelas de apresentação dos objetos estudados.

As atividades aplicadas foram a atividade 1, atividade 2 e a atividade 3 que se relacionam com conteúdos já apresentados à turma. Em particular a atividade 3 foi elaborada utilizando gráficos das funções logarítmica e exponencial pelo fato da turma estar estudando estes assuntos no momento. Como esperado, o uso do software de geometria dinâmica despertou um maior interesse e maior participação do que em aulas regulares com a simples apresentação do conteúdo. Foi possível observar uma atitude de investigação nos alunos. Por exemplo: ao mostrar o uso da ferramenta de reflexão em relação a uma reta, alguns alunos, já construíram figuras com pontos e fizeram sua reflexão em relação a uma reta mostrando para os colegas o que tinham feito. Isso mostra como o uso de um software como esse pode provocar uma participação mais ativa por parte dos alunos.

No primeiro item da atividade 1, que pedia para determinar a expressão que representa a reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, houve certa dificuldade. Os alunos tiveram que ser lembrados de como determinar a equação de uma reta. A partir daí, nos itens seguintes, não houve maiores dificuldades. O preenchimento da tabela do item 9 também não apresentou grandes dificuldades. No item 10 houve certa insegurança quanto à resposta a ser dada, mas a maioria da turma conseguiu fazer a observação da equação na janela algébrica e dar a resposta por conta própria. O item 11 foi o que apresentou a maior dificuldade por parte dos alunos. Como esperado, devido ao fato da pouca apresentação de exemplos de funções com domínio que não seja um conjunto numérico, a maioria dos alunos não conseguiu dar a resposta para este item sem uma intervenção. Alguns concluíram que o domínio e a imagem eram somente os pontos da tabela. Outros concluíram que o domínio era o conjunto dos números reais. Somente após uma discussão relembrando os conceitos de domínio e imagem e enfatizando qual era a função tratada na atividade, eles conseguiram concluir a resposta deste item.

A atividade 2, por seguir os mesmos itens da atividade 1, transcorreu de forma mais rápida e com menos intervenções. Mas na pergunta final, em que se questiona se a função da atividade 1 é a mesma da atividade 2, os alunos não conseguiram identificar a diferença

das funções no que diz respeito à forma que os conjuntos estavam relacionados. Todos responderam que as funções eram iguais porque tinham o mesmo domínio e imagem. Após uma comparação entre as tabelas das duas atividades e uma discussão sobre o fato de que o conceito de função envolve também a forma com que os conjuntos estão relacionados eles modificaram sua resposta.

Na atividade 3, não houve grandes dificuldades quanto à execução dos itens, já que os procedimentos e a transformação utilizada eram praticamente os mesmos das outras duas atividades. A maior parte da turma conseguiu identificar no item 5 a curva refletida como a curva exponencial. No item 8, em que se pedia para preencher uma tabela com certos pontos da curva, houve dificuldade de fazer isso apenas com a movimentação dos pontos, já que não se conseguia obter, dessa forma, as coordenadas pedidas na tabela. Primeiramente, foram orientados a fazer ligeiras modificações nos pontos da tabela, mas depois verificamos a possibilidade de modificar na própria linha de entrada as coordenadas do ponto, permitindo assim que se obtivessem exatamente os pontos pedidos. Dessa experiência observamos que deve ser feita uma observação neste item da atividade indicando essa forma de trabalhar com os pontos no software. A observação sobre a simetria dos gráficos das duas funções em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares foi feita sem dificuldade. Nos itens seguintes, os passos são repetidos para a função exponencial de base  $\frac{1}{2}$ . Ocorreu que alguns alunos construíram primeiro a função logaritmo de base  $\frac{1}{2}$  e depois fizeram a reflexão, o que causou a impossibilidade de trabalhar com a tabela correspondente. Após uma intervenção, refizeram corretamente a atividade. No item 13 esperava-se uma resposta referente aos pontos das funções simétricas em relação à bissetriz  $y = x$ , porém as respostas dadas foram relacionadas às curvas dos gráficos. Este item precisaria ser reformulado porque a intenção era a observação da inversão das imagens nos pontos das duas funções. Uma outra dificuldade apareceu no item 12, pois alguns alunos quiseram respondê-lo olhando na janela algébrica a equação da curva refletida, porém o software apresentou uma equação paramétrica da curva e isso criou certa confusão. Neste item deve-se, portanto, fazer uma observação para que se responda sem olhar a janela algébrica. Uma parte da turma conseguiu concluir pela generalização do fato de funções inversas serem simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, respondendo corretamente os últimos itens da atividade. Porém, uma boa parte dos alunos tiveram que ter ajuda para chegar a essas conclusões finais.

Resumindo o observado na aplicação dessas atividades, verificamos que a atitude de investigação leva a questionamentos e a uma participação ativa dos alunos nas discussões e na procura das soluções. Nas atividades aplicadas, somente a reflexão em relação a uma reta foi utilizada e ainda assim, a surpresa sobre os efeitos e resultados observados na condução da atividade mostraram como a introdução desse tema pode gerar um enriquecimento no processo de aprendizagem da Matemática.

## Capítulo 4

# Propostas de Atividades para Serem Usadas em Sala de Aula

Neste capítulo, apresentaremos propostas de atividades que relacionam as transformações geométricas com:

- **A Multiplicação de Matrizes:** Como visto no Capítulo 1, as transformações geométricas estão naturalmente relacionadas com o conteúdo de matrizes. Assim, utilizando um software de geometria dinâmica, como o Régua e Compasso, a multiplicação de matrizes pode ser visualizada como uma composição de transformações geométricas, permitindo assim, uma visualização deste conteúdo algébrico.
- **Números Complexos:** No Capítulo 2, foi visto que as operações com números complexos têm sua representação geométrica estreitamente relacionada com as transformações geométricas, tornando este um tema natural a ser trabalhado em atividades que relacionam os dois assuntos.
- **A Geometria Plana:** Muitos são os conteúdos dentro da geometria plana que podem ser trabalhados utilizando as transformações geométricas. O próprio assunto, transformações geométricas, em si, pode ser pensado como parte deste campo de estudo. Nas atividades, estudaremos os lados e as áreas de triângulos semelhantes, temas relacionados a transformação de homotetia. Será feito uso do software Régua e Compasso.

Aplicativos com os softwares Geogebra e Régua e Compasso foram desenvolvidos para ajudar na tarefa de visualizar estas relações.

A seguir, apresentaremos, as atividades agrupadas segundo as transformações geométricas que elas utilizam.

## 4.1 Atividades Usando Translações

### 4.1.1 Estudo de Funções (Domínio e Imagem)

Aqui propomos uma atividade semelhante à apresentada na seção de reflexões, mas utilizando a transformação de translação.

#### **ATIVIDADE 4**

Esta atividade é direcionada a alunos do primeiro ano do ensino médio.

Considere o conjunto de pontos pertencentes à curva exponencial de base 2.

1. Se representamos os pontos desse conjunto por suas coordenadas,  $(x, y)$ , qual a expressão que relaciona essas coordenadas?
2. Complete então, a representação a seguir, que representa o conjunto de pontos considerado.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{\hspace{2cm}}\}$$

3. Abra o software Geogebra. Digite, na linha de entrada, a equação correspondente ao conjunto de pontos considerado e verifique a visualização da curva na janela geométrica e sua equação na janela algébrica.
4. Crie agora, retas sobre os eixos  $x$  e  $y$ . Para isso, você pode digitar as equações  $x = 0$  e  $y = 0$  que representam os eixos na linha de entrada, ou utilizar a ferramenta de criação de retas por dois pontos.
5. Crie um vetor vertical de tamanho 3, apontando para cima, fora do eixo  $y$  utilizando a ferramenta de criação de vetores por dois pontos. Pode ser, por exemplo o vetor que une os pontos  $(5, 5)$  e  $(5, 8)$ . Observe que a ordem em que você seleciona os pontos para determinar o vetor determinam o sentido que ele terá.

6. Utilizando agora a ferramenta de translação, faça a translação do conjunto de pontos da curva exponencial segundo o vetor definido anteriormente. Para fazer esta translação, selecione o ícone da ferramenta de translação segundo um vetor e, em seguida, clique primeiro sobre o objeto a ser transladado, nesse caso a curva exponencial e depois sobre o vetor de translação.
7. Crie agora, com a ferramenta de criação de pontos, um ponto sobre a curva inicial.
8. Novamente utilizando a ferramenta de translação como descrito anteriormente, faça a translação do ponto criado segundo o vetor.
9. Selecionando agora a ferramenta de movimentação de objetos, clique sobre o ponto criado e movimente-o. Observe o que ocorre com o ponto transladado.
10. Observe, que na janela algébrica, são apresentadas as coordenadas dos pontos que aparecem na janela geométrica. Utilize essas informações e a movimentação do ponto inicial, para completar a tabela 4.1 com a imagem de alguns pontos pertencentes à curva inicial.

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,0.5)	
(0,1)	
(-2,0.25)	
(3,8)	
(0.5,1.4)	

Tabela 4.1: Imagens de alguns pontos do domínio da função

11. Observe, na janela algébrica do software a equação que representa a curva transladada. Utilizando essa equação, represente o conjunto de pontos que pertencem à curva transladada, como feito anteriormente com a curva inicial

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{\hspace{2cm}}\}.$$

12. Se considerarmos a função que transforma o conjunto dos pontos da curva inicial nos pontos da curva transladada, o domínio dessa função será: \_\_\_\_\_ e seu conjunto imagem será: \_\_\_\_\_.

## **ATIVIDADE 5**

Esta atividade também se direciona a alunos do primeiro ano do ensino médio.

Repita os passos da atividade 3 substituindo, no item 5, o vetor vertical por um horizontal apontando para a esquerda. Os pontos podem ser, por exemplo,  $(5, 5)$  e  $(2, 5)$

## **4.2 Atividades Usando Rotações**

### **4.2.1 A Multiplicação de Matrizes**

Nesta atividade será utilizado aplicativo desenvolvido com o software régua e compasso.

O objetivo da atividade é explorar a composição de transformações lineares como motivação para a multiplicação de matrizes.

Uma breve introdução deverá ser feita mostrando ao aluno como uma matriz pode representar uma transformação geométrica. A partir daí, manipulando o aplicativo, espera-se que o aluno adquira maior familiaridade com a multiplicação de matrizes e consiga atingir uma visão geométrica desta operação. Mais uma vez é uma oportunidade de dar significado ao conteúdo algébrico que se está estudando, permitindo uma maior compreensão do tema.

## **ATIVIDADE 6**

Esta atividade é direcionada a alunos do segundo ano do ensino médio.

1. Abra o aplicativo **rotacao.zir** utilizando o software régua e compasso.
2. Utilizando a ferramenta de movimentação, clique sobre o ponto  $P7$  e mova-o sobre o segmento em que se encontra, verificando o tipo de transformação que ele promove na figura. Observe também que a matriz representada sofre modificações.
3. Retorne para a configuração inicial, sem rotação, e anote as coordenadas dos vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do quadrado.
4. Lembrando que a matriz que representa a rotação de um ponto de um ângulo  $\theta$  em

relação à origem é dada por  $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ , determine a matriz de transformação que promove uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário com centro na origem. Utilize valores com três casas decimais. Chame essa matriz de  $M1$

- Multiplique  $M1$  pela matriz coluna que representa o ponto  $A$  do quadrado. Qual o ponto obtido?
- Verifique agora sua resposta movimentando o ponto  $P7$  no aplicativo até obter uma rotação de  $45^\circ$  observando as coordenadas do novo ponto  $A$  e a matriz indicada na aplicação.
- Retorne o ponto  $A$  para a posição inicial e repita os itens 3, 4 e 5, agora para o ângulo de  $63^\circ$ . Chame a nova matriz de  $M2$
- Multiplique agora  $M1$  por  $M2$  e chame o resultado de  $M3$ .
- Em seguida, multiplique  $M3$  pela matriz coluna que representa o vértice  $A$  inicial do quadrado. Anote o resultado, chamando-o de  $A'$ .
- Agora, na aplicação, a partir do ponto  $A$  inicial, movimente o ponto  $P7$  de forma a promover uma rotação de  $108^\circ$ . Compare a matriz e o novo ponto  $A$  obtidos com  $M3$  e o ponto  $A'$  anotados anteriormente.
- Multiplique agora a matriz  $M3$  pelas coordenadas dos outros vértices  $B$ ,  $C$  e  $D$  anotados inicialmente e compare com os vértices da figura da aplicação.
- Repita a atividade utilizando agora os ângulos de  $31^\circ$ ,  $91^\circ$  e  $122^\circ$  no lugar de  $45^\circ$ ,  $63^\circ$  e  $108^\circ$ .

#### 4.2.2 A Multiplicação de Números Complexos

O objetivo desta atividade é ressaltar a estreita ligação entre a multiplicação de números complexos e a transformação geométrica de rotação.

Com este propósito são utilizadas duas aplicações confeccionadas com o software Geogebra:

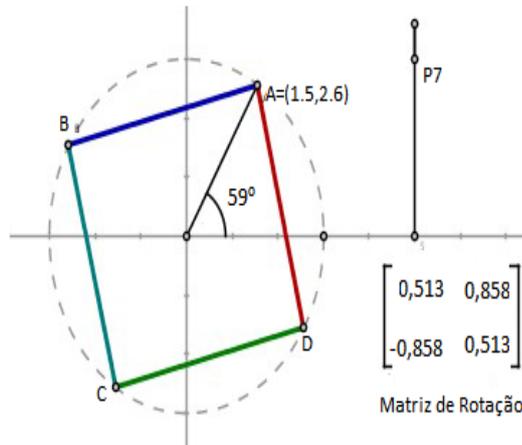


Figura 4.1: Aplicação feita com software régua e compasso para a atividade de multiplicação de matrizes

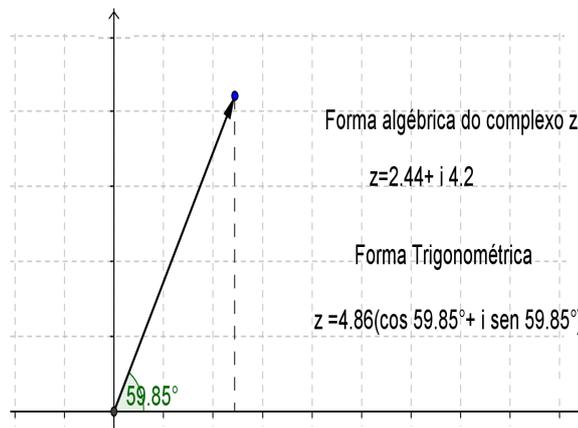


Figura 4.2: Representações de um número complexo.

O primeiro, visto na figura 4.2, apresenta o número complexo representado como um vetor, assim como suas formas algébrica e geométrica. Sua manipulação tem o objetivo de familiarizar o estudante com as representações algébrica e trigonométrica e fazer a ligação com a representação geométrica.

A segunda, apresentada na figura que 4.3, apresenta as representações geométricas como vetor, de um número complexo qualquer  $z$ , um número complexo  $u$  de módulo unitário e o produto  $z.u$ , assim como suas representações na forma trigonométrica. A partir de sua manipulação, espera-se que o aluno perceba melhor, como a multiplicação de um número complexo por outro representa uma rotação deste número complexo de um ângulo equivalente ao argumento do outro. Utiliza-se aqui um complexo unitário de forma a

restringir a transformação a apenas uma rotação sem dilatação ou contração.

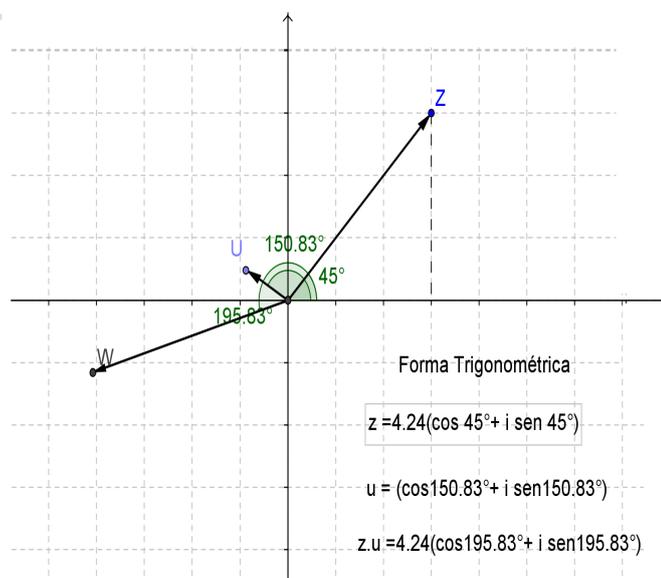


Figura 4.3: Aplicação mostrando a multiplicação de um complexo por outro de módulo unitário.

## **ATIVIDADE 7**

Esta atividade é direcionada a alunos do terceiro ano do ensino médio.

1. Abra a aplicação **representacao\_complexo.ggb** com o geogebra.
2. Selecione o botão da ferramenta de movimentação.
3. Com o botão esquerdo pressionado sobre o ponto que representa o número complexo, movimente-o e observe as modificações nas representações algébricas e geométrica.
4. Utilizando a manipulação da aplicação, complete a tabela 4.2 com as representações algébricas e geométricas de alguns números complexos.
5. Calcule agora a forma trigonométrica do número complexo  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ .
6. Utilize a aplicação para verificar se o cálculo está correto.
7. Calcule agora a forma algébrica do número complexo  $z = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$ .

Números complexos na forma algébrica	Números complexos na forma trigonométrica
$3 + 4i$	
$i$	
	$2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
$-2 + 3i$	
$-4$	
	$2,5(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$
$-3i$	

Tabela 4.2: Representações algébrica e trigonométrica de alguns números complexos.

- Utilize a aplicação para verificar se o cálculo está correto.

### **ATIVIDADE 8**

Esta atividade é direcionada a alunos do terceiro ano do ensino médio.

- Abra a aplicação **multiplicacao.ggb** como o Geobebra.
- Com a ferramenta de movimentação, mantenha o botão esquerdo do mouse pressionado sobre o ponto que representa o complexo  $z$ , movimente-o e observe as modificações ocorridas nas expressões que representam  $z$ ,  $u$  e  $z.u$ .
- Com o botão esquerdo pressionado agora sobre o ponto que representa o complexo  $u$ , movimente-o e observe as modificações ocorridas nas expressões que representam  $z$ ,  $u$  e  $z.u$  na forma trigonométrica.
- Utilizando a manipulação dos complexos  $z$  e  $u$  conforme indicado anteriormente, preencha a tabela 4.3:
- Dado o complexo  $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ , encontre sua forma trigonométrica. (Para conferir utilize a aplicação da primeira atividade.
- Determine o complexo unitário  $u$  que deve ser multiplicado pelo número complexo  $z$  do item 5 para efetuar uma rotação de forma que ele fique sobre o eixo vertical.
- Determine a forma trigonométrica do produto  $z.u$  do item anterior.

Número complexo $z$	Complexo unitário $u$	Produto $z.u$
$2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$	$(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$	
	$(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$	$3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$
$(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$		$(\cos 350^\circ + i \operatorname{sen} 350^\circ)$
$2,5(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ)$	$(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$	
$2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$		$2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$

Tabela 4.3: Multiplicação  $z.u$  em que  $u$  é um complexo de módulo 1

8. Dado o mesmo número complexo  $z$  anterior, que complexo  $u$  poderia ser multiplicado por  $z$  de forma a ter uma rotação de  $45^\circ$  no sentido negativo?
9. Determine a forma trigonométrica de  $z.u$  nesse caso.

## 4.3 Atividade Usando a Translação e Reflexão

### 4.3.1 Trabalhando a Composição de Funções

O objetivo desta atividade é trabalhar os conceitos de composição de funções.

#### **ATIVIDADE 9**

Esta atividade é direcionada a alunos do primeiro ano do ensino médio.

Considere o conjunto de pontos pertencentes à semi-circunferência de centro na origem e raio 2 como domínio das transformações desta atividade.

1. Como podemos representar este conjunto utilizando a linguagem matemática?
2. Utilizando o software Geogebra, insira a equação que permite a visualização dos pontos deste conjunto.
3. Utilizando a ferramenta de translação, faça a translação horizontal dos pontos desse conjunto quatro unidades para a direita. Para isso, defina um vetor horizontal de tamanho duas unidades e utilize-o para fazer a translação.
4. Utilizando agora a ferramenta de reflexão, faça a reflexão do conjunto de pontos transladados em relação ao eixo  $x$ . Para isso será necessário definir uma reta sobre

o eixo x.

5. Utilizando a ferramenta ponto defina um ponto pertencente ao domínio, faça a translação e a reflexão desse ponto conforme os itens anteriores.
6. Utilizando a janela algébrica, movimente o ponto para encontrar as imagens pela translação e pela reflexão dos pontos da tabela 4.4.

Ponto do Domínio	Imagem pela translação	Imagem pela reflexão
$(-2,0)$		
$(-1,1,73)$		
$(0,2)$		
$(1,1,73)$		
$(2,0)$		

Tabela 4.4: Imagens de alguns pontos do domínio da função

7. Observe a tabela e procure obter a lei que transforma o ponto do domínio no ponto transladado.
8. Procure agora obter a lei que transforma o ponto transladado no ponto refletido.
9. Faça a composição das duas transformações e obtenha a lei que transforma o ponto do domínio no ponto refletido.
10. Represente utilizando a notação de função a função composta que transforma o ponto do domínio no ponto refletido.

## 4.4 Atividades Usando Outras Transformações

### 4.4.1 Funções Injetoras, Sobrejetoras e Inversas

#### **ATIVIDADE 10**

Esta atividade é direcionada a alunos do primeiro ano do ensino médio.

1. Abra o software Geogebra e carregue a aplicação **atividade10\_inj.ggb**.

2. Nela você observa dois segmentos. A função  $f((x, y)) = (x, 4)$  transforma os pontos do segmento inclinado nos pontos do segmento horizontal.
3. Com a ferramenta de movimentação, movimente o ponto C sobre o segmento inclinado e observe a movimentação correspondente de sua imagem pela transformação.
4. Observando as coordenadas dos pontos  $C$  e  $C'$ , complete a tabela 4.5, com as imagens de alguns pontos pertencentes ao domínio.

Ponto do Domínio	Imagem
(-2,-2)	
(-1,-1)	
(0,0)	
(1,1)	
(1.4,1.4)	

Tabela 4.5: Imagens de alguns pontos do domínio da função

5. Carregue agora, a aplicação **atividade10\_n\_inj.ggb**.
6. Observe agora, que o domínio é a circunferência de centro na origem e raio 2. A expressão que representa a função que leva os pontos da circunferência nos pontos do segmento é a mesma.
7. Com a ferramenta de movimentação, movimente o ponto  $C$  sobre a circunferência e observe a movimentação correspondente de sua imagem pela transformação.

Ponto do Domínio	Imagem
(1.4,1.4)	
(1.4,-1.4)	
(0,2)	
(0,-2)	
(-1.4,1.4)	
(-1.4,-1.4)	

Tabela 4.6: Imagens de alguns pontos do domínio da função

8. Observando as coordenadas dos pontos  $C$  e  $C'$ , complete a tabela 4.6 com as imagens de alguns pontos pertencentes ao domínio.
9. Compare os resultados obtidos nas duas tabelas. Que diferenças você observa nas duas funções?
10. Se quiséssemos estabelecer uma função inversa que transformasse o ponto  $C'$  no ponto  $C$  nos dois exemplos, em qual dos dois exemplos você teria dificuldade em determinar a imagem inversa  $C$  para o ponto  $C' = (1.4, 4)$ ?
11. Qual o nome dado a funções em que cada imagem está associada a um único elemento do domínio?
12. Abra agora a aplicação **atividade10\_n\_sobrej.ggb**. Observe que o segmento do contra-domínio é maior que no primeiro caso.
13. Movimente o ponto  $C$  e compare o resultado com a primeira aplicação.
14. É possível achar um ponto  $C$  do domínio que seja levado, por exemplo, no ponto  $C' = (-3, 4)$  do contra-domínio?
15. Se fôssemos estabelecer uma função inversa, conseguiríamos determinar a imagem deste último ponto considerado?
16. Qual o nome dado a funções em que todos os elementos do contra-domínio estão associados a um elemento do domínio? Essa função é desse tipo?
17. Qual o nome dado a funções que atendam às condições para se determinar sua inversa? Qual das aplicações utilizadas representa uma função desse tipo?

#### 4.4.2 Multiplicação de Matrizes utilizando Rotação e Homotetia

Nesta atividade, serão utilizadas as matrizes das transformações geométricas de rotação com centro na origem e homotetia de razão  $k$  também com centro na origem para motivar a multiplicação de matrizes. A aplicação foi feita com o software régua e compasso. A dificuldade está no arredondamento utilizado em números que muitas vezes são irracionais. O software trabalha com valores arredondados e isso leva a pequenos erros nas

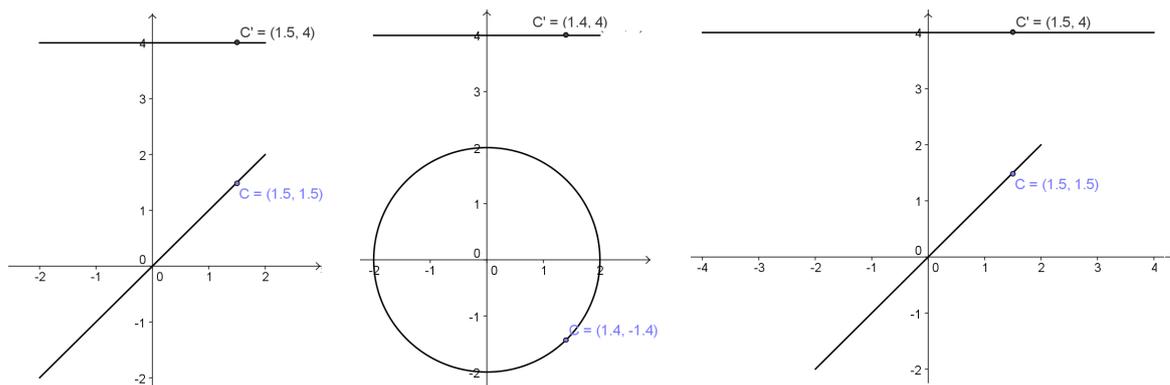


Figura 4.4: Transformação  $f((x, y)) = (x, 4)$  com diferentes domínios e contra-domínio.

respostas esperadas. Deve-se, portanto explicar aos alunos essa dificuldade e informar que os resultados esperados, em geral, conterão pequenas diferenças.

### **ATIVIDADE 11**

Esta atividade é direcionada a alunos do segundo ano do ensino médio.

1. Nesta atividade trabalharemos com as matrizes que promovem a rotação com centro

na origem:  $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  em que  $\theta$  é o ângulo de rotação em relação ao eixo  $x$  no

sentido anti-horário e com a matriz que promove a homotetia com centro na origem:

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ , sendo  $k$  a razão da homotetia.

2. Abra a aplicação **rotaesc.zir** com o software régua e compasso.
3. Anote as coordenadas iniciais dos vértices do triângulo  $\triangle ABD$
4. Movimentando o ponto  $R$  para a esquerda, ajuste-o de forma que o ângulo de rotação em relação ao eixo  $x$  seja de  $90^\circ$ .
5. Movimente agora o ponto  $E$ , de forma a conseguir uma homotetia de razão 0,51. Observe a razão de homotetia na matriz correspondente.
6. Anote agora as novas coordenadas dos vértices do triângulo  $\triangle ABD$  após sofrerem as duas transformações.
7. Faça a multiplicação da matriz de homotetia pela matriz de rotação.
8. Multiplique agora essa nova matriz pelos vetores coluna que representam os vértices iniciais do triângulo.

9. Compare os resultados com os vértices do triângulo transformado.
10. Determine agora a matriz que promoveria uma rotação de  $45^\circ$  com uma homotetia de razão 0,34.
11. Multiplicando essa matriz pelos pontos do triângulo inicial, determine os novos vértices do triângulo transformado.
12. Movimentando os pontos  $E$  e  $R$  na aplicação, verifique seu resultado.

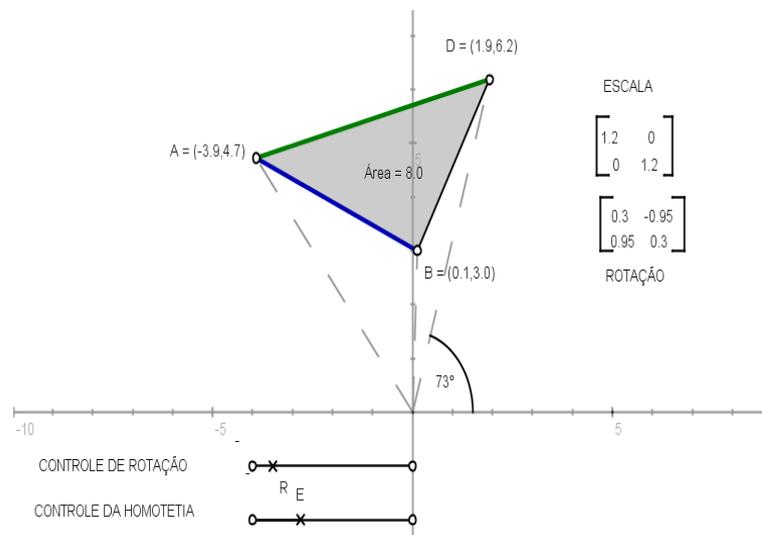


Figura 4.5: Rotação e a homotetia de um triângulo  $\triangle ABD$  com as respectivas matrizes.

#### 4.4.3 Semelhança de Triângulos e Comparação de Áreas - Homotetia

O objetivo aqui, é verificar as propriedades de triângulos semelhantes, quanto à proporcionalidade dos lados homólogos e observar que as áreas de triângulos semelhantes são proporcionais ao quadrado da razão de semelhança.

##### **ATIVIDADE 12**

Esta atividade pode ser direcionada a alunos do primeiro ano ou do terceiro ano do ensino médio.

1. Abra a aplicação **escala2.zir** com o software régua e compasso.
2. Anote a área do triângulo  $\triangle ABD$ , assim como as medidas de seus lados.

3. Usando a ferramenta de movimentação, clique sobre o ponto  $E$  e ajuste a figura de forma a promover uma homotetia de razão  $1,5$  na figura.
4. Anote a área do novo triângulo  $\triangle ABD$  e as novas medidas dos lados.
5. Divida as medidas dos lados novos pelas medidas dos lados antigos, assim como a área do triângulo novo pela área do triângulo inicial.
6. Repita os passos 3,4 e 5, mas agora com a razão de homotetia  $1,2$ .
7. Que conclusões você consegue tirar sobre a razão entre os lados e a razão entre as áreas?
8. Se fizermos, agora, uma homotetia com razão  $0,4$ , calcule, usando o que você concluiu, as medidas dos lados e da área do triângulo obtido.
9. Movimente o ponto  $E$  de forma a obter uma homotetia de razão  $0,4$  e verifique seus resultados do item anterior.

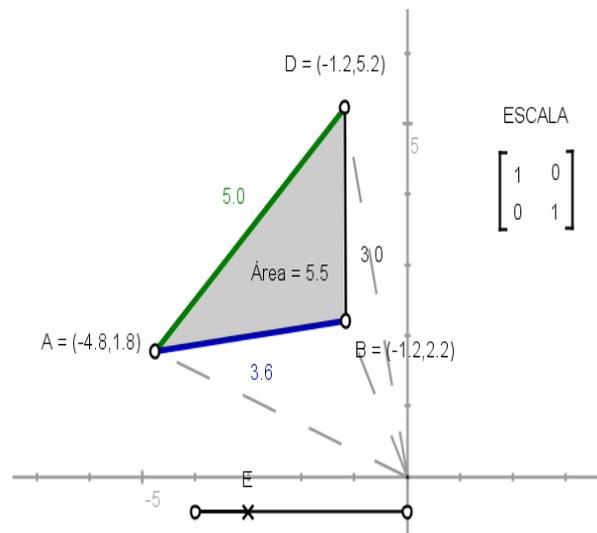


Figura 4.6: Transformação de homotetia em um triângulo  $\triangle ABD$  mostrando sua área e a matriz correspondente

## Capítulo 5

### Considerações Finais

Procuramos mostrar neste trabalho, um pouco deste vasto e interessante tema que são as Transformações Geométricas. Contando um pouco de sua história dentro da Matemática, ressaltando orientações de programas governamentais e de pesquisadores no sentido de incorporá-las nos currículos do ensino básico, apresentando um pouco da matemática das transformações mais comuns, descrevendo-as em sua relação com os Números Complexos, relatando observações sobre atividades aplicadas e finalmente sugerindo atividades que as tragam para os conteúdos estudados no Ensino Médio de forma a ampliar o raciocínio geométrico e a visualização de conceitos algébricos. Esperamos ter indicado um caminho possível para a utilização das Transformações Geométricas no trabalho com diferentes conteúdos da grade curricular do Ensino Médio. E que isso possa ampliar a visão da Matemática como um todo, já que permite uma conexão de diferentes assuntos por um tema comum: as Transformações Geométricas.

Concluimos ressaltando a importância de se buscar formas de motivar o estudo e a maior participação dos alunos no seu processo de aprendizagem. De mostrar a integração entre os diferentes assuntos estudados na Matemática e apresentá-los de forma a permitir uma visualização geométrica, quando possível. As Transformações Geométricas trazem estas características, se tornando uma excelente forma de estimular o estudo da Matemática.

## Referências Bibliográficas

- Brannan, D. A., Esplen, M. F., e Gray, J. J. (1999). *Geometry*. Cambridge University Press.
- Cerqueira, A. P. F. (2005). Isometrias: análise de documentos curriculares e uma proposta de situação de aprendizagem para o ensino médio. Tese de Mestrado, PUC - São Paulo.
- Cunha, I. G. e Moraes, P. (2008). O ensino de funções e transformações geométricas com o auxílio do software geogebra.
- Hefez, A. e Villela, M. L. T. (2012). *Polinômios e Equações Algébricas*. SBM.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. SBM, Rio de Janeiro, 6ª edição.
- Mabuchi, S. T. (2000). Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. Tese de Mestrado, Puc - São Paulo.
- PCNs (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática / Ministério de Educação. Secretaria de Educação Fundamental., 1 edição.
- Crissaf, L. S., Fresnel, K. R., Gomes, J. J. D. (2012). Geometria analítica. PROFMAT.
- Stormowski, V. (2008). Estudando matrizes a partir de transformações geométricas. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

# Apêndice A

## Respostas Esperadas das Atividades

### ATIVIDADE 1

1.  $y = x$
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$
3. Execução
4. Execução
5. Execução
6. Execução
7. Execução
8. Execução
9. A tabela [A.1](#) apresenta as respostas deste item da atividade.
10.  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$
11.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$  e  $Im = E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,-1)	(-1,1)
(-3,-3)	(-3,3)
(0,0)	(0,0)
(5,5)	(5,-5)
(10,10)	(10,-10)

Tabela A.1: Imagens de alguns pontos do domínio da função

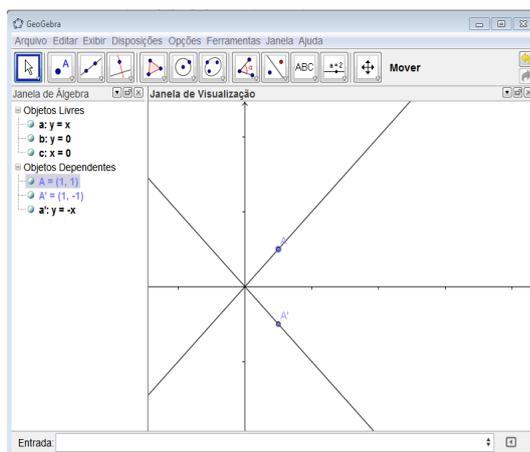


Figura A.1: Tela esperada na execução dos itens 3 a 8 da atividade 1

## **ATIVIDADE 2**

1.  $y = x$
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$
3. Execução
4. Execução
5. Execução
6. Execução
7. Execução
8. Execução
9. A tabela [A.2](#) apresenta as respostas deste item da atividade.

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,-1)	(1,-1)
(-3,-3)	(3,-3)
(0,0)	(0,0)
(5,5)	(-5,5)
(10,10)	(-10,10)

Tabela A.2: Imagens de alguns pontos do domínio da função

10.  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$

11.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$  e  $Im = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$

12. Não, porque apesar de terem o mesmo domínio e a mesma imagem, a correspondência entre os elementos de cada conjunto não é a mesma.

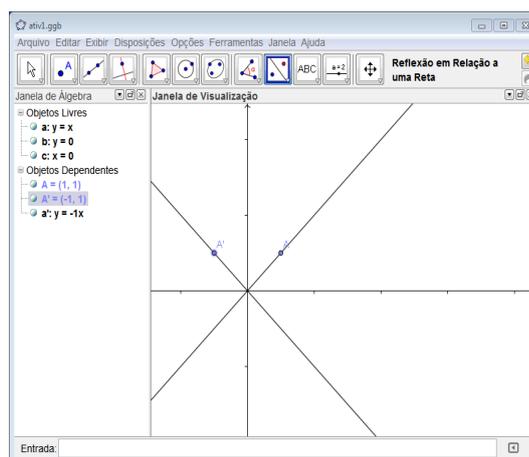


Figura A.2: Tela esperada na execução dos itens 3 a 8 da atividade 2

### ATIVIDADE 3

1. Execução
2. Execução
3. Execução
4. Execução

5. Sim. É a curva exponencial de base 2.
6. Execução
7. Execução
8. A tabela A.3 apresenta as respostas deste item da atividade.

Ponto do curva logarítmica	Ponto da curva refletida
(0.25,-2)	(-2,0.25)
(0.5,-1)	(-1,0.5)
(1,0)	(0,1)
(2,1)	(1,2)
(4,2)	(2,4)

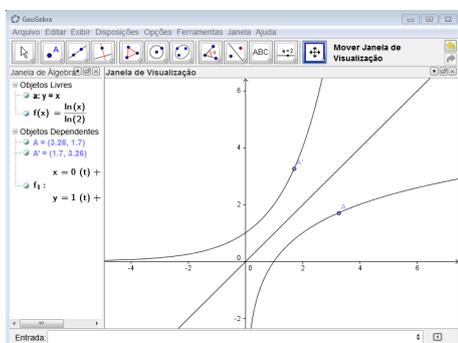
Tabela A.3: Imagens de alguns pontos do domínio da função

9. •  $y = -2$   
 $y = 0.25$
- $y = -1$   
 $y = 0.5$
- $y = 0$   
 $y = 1$
- $y = 1$   
 $y = 2$
- $y = 2$   
 $y = 4$
10. Elas são simétricas em relação à bissetriz  $y = x$
11. A tabela A.4 apresenta as respostas deste item da atividade.
12. A função refletida é  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
13. Os pontos têm coordenadas trocadas.
14. Sim.

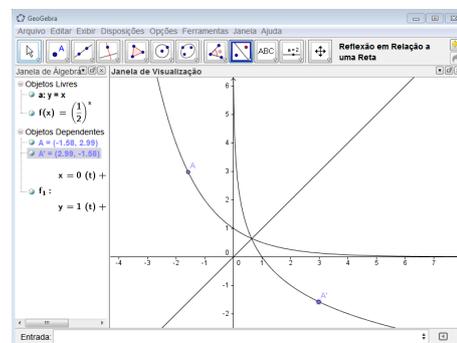
Ponto da curva exponencial	Ponto da curva refletida
(-2,4)	(4,-2)
(-1,2)	(2,-1)
(0,1)	(1,0)
(1,0.5)	(0.5,1)
(2,0.25)	(0.25,2)

Tabela A.4: Imagens de alguns pontos do domínio da função

15.  $5^x \quad \log_7 x$



(a) Tela esperada para a atividade 3 itens 3 a 8



(b) Tela esperada para a atividade 3 itens 9 a 15

Figura A.3: Reflexão.

#### ATIVIDADE 4

1.  $y = 2^x$
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^x\}$
3. Execução
4. Execução
5. Execução
6. Execução
7. Execução
8. Execução

9. Execução

10. A tabela A.5 apresenta as respostas deste item da atividade.

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,0.5)	(-1,3.5)
(0,1)	(0,4)
(-2,0.25)	(-3,3.25)
(3,8)	(3,11)
(0.5,1.4)	(0.5,4.4)

Tabela A.5: Imagens de alguns pontos do domínio da função

11.  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^x + 3\}$

12.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$      $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^x + 3\}$

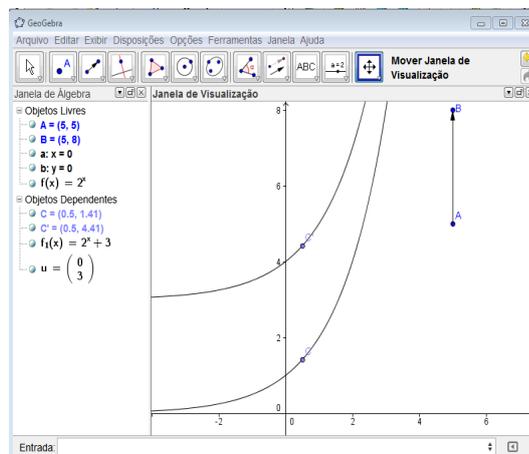


Figura A.4: Tela esperada na execução da atividade 4

## **ATIVIDADE 5**

1.  $y = 2^x$

2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^x\}$

3. Execução

4. Execução

5. Execução
6. Execução
7. Execução
8. Execução
9. Execução
10. A tabela A.6 apresenta as respostas deste item da atividade.

Ponto do Domínio	Imagem pela reflexão
(-1,0.5)	(2,0.5)
(0,1)	(3,1)
(-2,0.25)	(1,0.25)
(3,8)	(6,8)
(0.5,1.4)	(3.5,1.4)

Tabela A.6: Imagens de alguns pontos do domínio da função

11.  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^{x-3}\}$

12.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$      $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2^{x-3}\}$

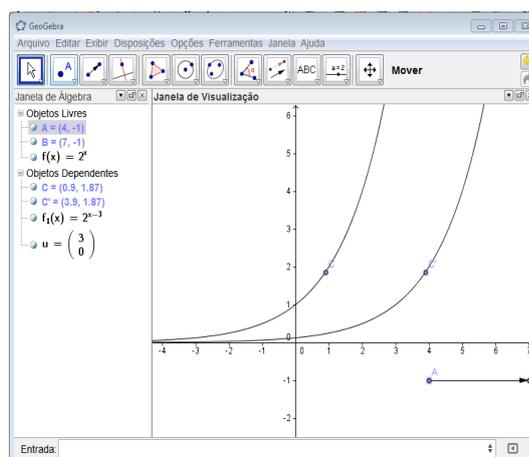


Figura A.5: Tela esperada na execução da atividade 5

## **ATIVIDADE 6**

1. Execução

2. Execução

3.  $A = (0, 3)$   $B = (0, 3)$   $(-3, 0)$   $C = (0, -3)$

$$4. M1 = \begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 \\ 0.71 & 0.71 \end{bmatrix}$$

5.  $A' = (2.13, 2.13)$

6. Execução

$$7. M2 = \begin{bmatrix} 0.46 & -0.89 \\ 0.89 & 0.46 \end{bmatrix} \quad A' = (1.4, 2.7)$$

$$8. M3 = \begin{bmatrix} -0.31 & -0.96 \\ 0.96 & -0.31 \end{bmatrix}$$

9.  $A' = (-0.9, 2.8)$

10.  $B' = (-2.8, -0.9)$   $C' = (0.9, -2.8)$   $D' = (2.8, 0.9)$

## **ATIVIDADE 7**

1. Execução

2. Execução

3. Execução

4. A tabela [A.7](#) apresenta as respostas deste item da atividade.

5.  $(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$

6. Execução

7.  $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

8. Execução

Números complexos na forma algébrica	Números complexos na forma trigonométrica
$3 + 4i$	$5(\cos 53.13^\circ, i \operatorname{sen} 53.13^\circ)$
$i$	$(\cos 90^\circ, i \operatorname{sen} 90^\circ)$
$1.42 + i1.42$	$2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
$-2 + 3i$	$3.61(\cos 123.69^\circ + i \operatorname{sen} 123.69^\circ)$
$-4$	$4(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$
$2.18 - i1.86$	$2,5(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$
$-3i$	$3(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$

Tabela A.7: Representações algébrica e trigonométrica de alguns números complexos.

### ATIVIDADE 8

1. Execução
2. Execução
3. Execução
4. A tabela A.8 apresenta as respostas deste item da atividade.

Número complexo $z$	Complexo unitário $u$	Produto $z.u$
$2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$	$(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$	$2(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)$
$3(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$	$(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$	$3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$
$(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$	$(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)$	$(\cos 350^\circ + i \operatorname{sen} 350^\circ)$
$2,5(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ)$	$(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$	$2(\cos 370^\circ + i \operatorname{sen} 370^\circ)$
$2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$	$(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$	$2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$

Tabela A.8: Multiplicação  $z.u$  em que  $u$  é um complexo de módulo 1

5.  $(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$
6. Uma resposta possível:  $(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$
7.  $z.u = (\cos 450^\circ + i \operatorname{sen} 450^\circ)$
8.  $u = (\cos -45^\circ + i \operatorname{sen} -45^\circ)$

9.  $z.u = (\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

### **ATIVIDADE 9**

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \sqrt{4 - x^2}\}$

2. Execução

3. Execução

4. Execução

5. Execução

6. A tabela A.9 apresenta as respostas deste item da atividade.

Ponto do Domínio	Imagem pela translação	Imagem pela reflexão
(-2,0)	(0,0)	(0,0)
(-1,1,73)	(1,1.73)	(1,-1.73)
(0,2)	(2,2)	(2,-2)
(1,1,73)	(3,1.73)	(3,-1.73)
(2,0)	(4,0)	(4,0)

Tabela A.9: Imagens de alguns pontos do domínio da função

7.  $(x', y') = (x + 2, y)$

8.  $(x', y') = (x, -y)$

9.  $(x', y') = (x + 2, -y)$

10.  $f((x, y)) = (x + 2, -y)$

### **ATIVIDADE 10**

1. Execução

2. Execução

3. Execução

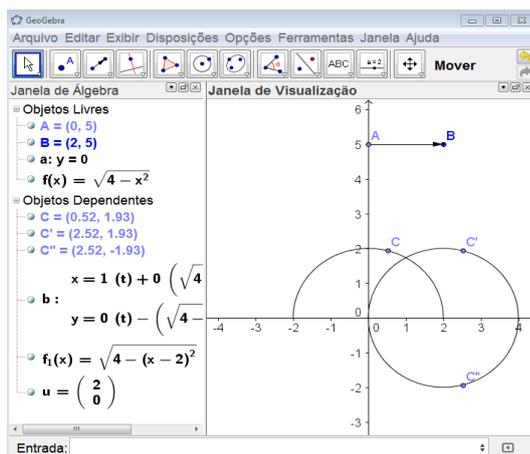


Figura A.6: Tela esperada na execução da atividade 9

Ponto do Domínio	Imagem
(-2,-2)	(-2,4)
(-1,-1)	(-1,4)
(0,0)	(0,4)
(1,1)	(1,4)
(1.4,1.4)	(1.4,4)

Tabela A.10: Imagens de alguns pontos do domínio da função

4. A tabela A.10 apresenta as respostas deste item da atividade.
5. Execução
6. Sim
7. Execução
8. A tabela A.11 apresenta as respostas deste item da atividade.
9. No primeiro caso cada elemento tem uma imagem diferente, no segundo, elementos diferentes têm a mesma imagem.
10. No segundo exemplo.
11. Função injetora.
12. Execução

Ponto do Domínio	Imagem
(1.4,1.4)	(1.4,4)
(1.4,-1.4)	(1,4,4)
(0,2)	(0,4)
(0,-2)	(0,4)
(-1.4,1.4)	(-1.4,4)
(-1.4,-1.4)	(-1.4,4)

Tabela A.11: Imagens de alguns pontos do domínio da função

13. Execução
14. Não.
15. Não.
16. Função sobrejetora. Essa última função não é desse tipo.
17. Função bijetora.
18. A primeira aplicação.

### **ATIVIDADE 11**

1. Informações
2. Execução
3.  $A = (2.8, 4.2)$   $B = (2.4, 0.6)$   $D = (5.4, 0)$
4. Execução
5. Execução
6.  $A = (-2.2, 1.4)$   $B = (-0.3, 1.2)$   $D = (0.0, 2.7)$
7. 
$$\begin{bmatrix} 0.0051 & -0.51 \\ 0.51 & 0.0051 \end{bmatrix}$$
8.  $A = (-2.1, 1.4)$   $B = (-0.3, 1.2)$   $D = (0.0, 2.7)$
9. Execução

$$10. \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 \\ 0.24 & 0.24 \end{bmatrix}$$

$$11. A = (-0.3, 1.7) \quad B = (0.4, 0.7) \quad D = (1.3, 1.3)$$

12. Execução

## **ATIVIDADE 12**

1. execução

$$2. \text{Área} = 5.5u.a. \quad AB = 3.6u.c. \quad BD = 3.0u.c. \quad AD = 5.0u.c.$$

3. Execução

$$4. \text{Área}' = 12.4u.a. \quad A'B' = 5.5u.c. \quad B'D' = 4.6u.c. \quad A'D' = 7.5u.c.$$

$$5. \frac{\text{Área}'}{\text{Área}} = 2.25 \quad \frac{A'B'}{AB} = 1.5 \quad \frac{B'D'}{BD} = 1.5 \quad \frac{A'D'}{AD} = 1.5$$

$$6. \text{Área}' = 8u.a. \quad A'B' = 4.4u.c. \quad B'D' = 3.7u.c. \quad A'D' = 6.0u.c.$$

$$\frac{\text{Área}'}{\text{Área}} = 1.44 \quad \frac{A'B'}{AB} = 1.2 \quad \frac{B'D'}{BD} = 1.2 \quad \frac{A'D'}{AD} = 1.2$$

7. A razão entre os lados é igual à razão de homotetia, já a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de homotetia.

$$8. \text{Área}' = 0.9u.a. \quad A'B' = 1.4u.c. \quad B'D' = 1.2u.c. \quad A'D' = 2.0u.c.$$

9. Execução