Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem 2x2

Berto Rodrigo Marinho da Luz

Goiânia

2014

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Berto Rodrigo Marinho da Luz				
E-mail:	bertorml@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Professor do Ensino Básico e Superior				
Agência de fomento:	Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País: Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00.889.834/0001-08	
Título:	Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem 2x2				
Palavras-chave:	Raiz quadrada de matrizes; Diagonalização de matrizes				
Título em outra língua:	Square root of matrices of order 2x2				
Palavras-chave em outra língua:	Square root matrix, Diagonalization of matrices				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	07/03/2014				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado profissional em matemática				
Orientador (a):	Mário José de Souza				
E-mail:	mario_jose_souza@ufg.br				
Co-orientador(a):*	--				
E-mail:	--				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Berto Rodrigo Marinho da Luz
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 12 / 12 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Berto Rodrigo Marinho da Luz

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem 2x2

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.

Goiânia

2014

Ficha catalográfica elaborada
automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Luz, Berto Rodrigo Marinho da
Raiz quadrada de matrizes de ordem 2x2 [manuscrito] / Berto Rodrigo Marinho da Luz. - 2014.
44 f.

Orientador: Prof. Mario Jose de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2014.
Bibliografia.

1. Raiz quadrada . 2. Matrizes. I. Souza, Mario Jose de, orient. II. Título.

Berto Rodrigo Marinho da Luz

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem 2x2.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
Departamento de Matemática-UnB

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Berto Rodrigo Marinho da Luz graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, pos-graduou-se em Docência Universitária pela Faculdade Montes Belos.

Dedico este trabalho a minha esposa Deyse Cristiane, a minha filha Vitory Anny e a minha mãe Maria Luzinete.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível:

A Deus, por ter me dado condições de lutar e alcançar os objetivos pretendidos.

A minha mulher, Deyse Crisitiane, por acrescentar razão e beleza aos meus dias.

A minha filha, Vitory Anny, pelo sorriso carinhoso de cada dia.

A minha mãe, pela garra, amizade e o carinho.

E a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro para a realização deste mestrado e a todos que de alguma maneira incentivaram a desenvolver o PROFMAT.

Por fim agradeço ao meus mestres, em especial ao meu professor orientador, Dr. Mario José de Souza, pelo auxílio, disponibilidade de tempo e material, sempre com muita simpatia.

O meu muito obriagado a todos.

Resumo

A matemática é uma disciplina essencial nos dias atuais, com as mais variadas aplicações. Porém, certas definições matemáticas dependem de pré-requisistos. Pensando nisso, este trabalho trata sobre um método de calcular raiz quadrada de matrizes de ordem 2.

As definições apresentadas estão organizados de forma gradativa. Para isso usaremos algumas definições conhecidas como multiplicação de matrizes, determinantes e diagonalização de matrizes.

Palavras-chave Raiz quadrada de matrizes; Diagonalização de matrizes

Abstract

Mathematics is an essential subject today, with the most varied applications. However, certain mathematical definitions depends on the prerequisites. Thinking about it, this work deals on a method of calculating square root matrices of order 2.

As presented definitions are organized in a gradual way. For this we will use some definitions known as multiplication of matrices, determinants and matrix diagonalization.

Keywords Square root matrix, Diagonalization of matrices.

Sumário

1 Introdução

Segundo o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), nos ultimos anos, o Brasil melhorou a qualidade de ensino de matemática, entretanto, continua entre as ultimas colocações em avaliações internacionais. Segundo a especialista Priscila Cruz(diretora executiva do movimento Todos pela Educação): “Por exemplo, formação de professores. É uma das políticas mais fundamentais. A gente precisa ter professores preparados pra realmente garantir que todos os seus alunos aprendam”.

Sobre a perspectiva deste preparo dos docentes em sala de aula, desenvolvemos este trabalho esconlhendo alguns conteúdos de matrizes, mas indo além dos conteúdos do currículo básico, de modo que profissionais da educação, e até mesmo os estudantes mais engajados, tenham a oportunidade de maior crescimento na área da matemática.

A maior parte dos conceitos apresentados neste texto tem por finalidade justificar a seguinte pergunta: "Qual será a raiz quadrada da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em que a, b, c e d são valores reais?". É de fácil percepção que este tipo de tema, raramente seria mencionado em livros do ensino básico ou superior, no entanto, pode ser introduzido de uma maneira acessível aos interessados.

Diante disso, serão apresentados alguns conceitos chaves, dentre eles estão: multiplicação de matrizes, determinantes e diagonalização de matrizes. Veremos a aplicação destes conceitos para melhor contribuir no desenvolvimento e entedimento deste trabalho. Mostraremos, também, as condições necessárias e suficientes para efetuar os cálculos, além de um tutorial mostrando cada detalhe para obter êxito do cálculo da raiz quadrada de uma matriz de ordem 2.

2 Matrizes - Um Breve Resumo

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos básicos sobre matrizes necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para os interessados e mais detalhes sobre o assunto indicamos [1], [4] e [6].

Definição 1. *Denominamos uma matriz* $m \times n (m \in \mathbb{N}^*$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$ *) a toda tabela composta por (m . n) elementos dispostos em m linhas e n colunas.*

Dizemos que a matriz é do tipo $m \times n$ ou de ordem $m \times n$.

Exemplo 1. *A matriz abaixo é do tipo* 2×3 *(dois por três).*

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Elementos de uma Matriz

Os elementos de uma matriz genérica A são localizados de acordo com a linha e coluna que compõem esta referida matriz . Desta forma foi adotada a letra minúscula a para designar o elemento e i e j para localizar a linha e coluna respectivamente, sendo i e j números naturais diferentes de zero. Logo, dada a matriz A, temos $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij})_{m \times n}$, onde:

- A : Matriz A;
- a_{ij} : elemento situado na linha i e coluna j $\in \mathbb{N}^*$.
- $m \times n$: ordem da matriz.

2.2 Matriz Generalizada

Os números que aparecem na matriz são chamados de elementos ou termos da matriz. Sendo assim, a matriz A, do tipo $m \times n$, será escrita, genericamente, do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Lê-se : Matriz A dos elementos a_{ij} de ordem m x n.

Observações

- Podemos também escrever A = $(\mathrm{a}_{ij})_{mxn,}$ como A = $[a_{ij}]_{mxn,}$ou A = $\|a_{ij}\|_{mxn}$.
- Sendo A = (a_{ij}), onde a_{ij} é um elemento genérico de A, devemos ter 1$\leq$ i $\leq$ m e 1$\leq$ j $\leq$ n.

2.3 Classificação de Matrizes

Dependendo de certas características, algumas matrizes recebem nomes especiais. A seguir algumas dessas matrizes:

a) Matriz Linha: São todas as matrizes da do tipo $1 \times n$, ou seja, matrizes com uma linha e n colunas.

b) Matriz Coluna: São todas as matrizes do tipo $m \times 1$, ou seja, matrizes com m linhas e uma coluna.

c) Matriz Nula ($\mathrm{O}_{m\times n},$): São todas as matrizes A, m$\times n, ondequalquer a_{ij}$ é sempre igual a zero.

d) Matriz Retangular: São todas as matrizes A, $m \times n$, onde m $\neq$ n.

e) Matriz Quadrada: São todas as matrizes A, $m \times n$, onde m = n. Neste caso dizemos que a matriz é de ordem n.

Observações

- Quando tivermos matrizes-linha ou matrizes-coluna, também podemos chamá-las de vetores. É muito comum uma matriz-linha como [2 0 5] ser escrita como vetor (2, 0, 5).
- Numa matriz quadrada de ordem n, os elementos a_{ij} com $i = j$ formam a diagonal principal da matriz.Já os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária.

2.3.1 Matrizes Especiais

Matriz Diagonal: A matriz $A = (a_{ij})_{n\times n,}$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo i $\neq$j , ou seja é aquela que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal.

Exemplo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Unidade ou Identidade: É toda matriz quadrada de orden n, indicada por $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$, de modo que os elementos da diagonal principal (i = j) são iguais a 1 (unidade) e todos os demais são nulos, ou seja ;

$$I_n = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

2.3.2 Operações com Matrizes

Adição de Matrizes: Sejam duas matrizes, A = $(a_{ij})_{m\times n}$ e B = $(b_{ij})_{m\times n.}$ A soma destas matrizes resulta em uma matriz C = $(c_{ij})_{m\times n,}$de modo que c_{ij} =a_{ij}+b_{ij}, para todo 1$\leq$ i $\leq$ m e 1$\leq$ j $\leq$ n. Assim, temos;

$$A + B = C$$

Exemplo 3.

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -7 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & -10 & 3 \\ -5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Adição de Matrizes: Sendo A, B, e C matrizes de mesmo tipo $(m \times n)$, teremos as seguintes propriedades da soma de matrizes.

a) **Comutividade:**

$$A + B = B + A$$

b) **Associatividade:**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

c) **Elemento Neutro:**

$$O + A = A + O = A$$

d) **Elemento Oposto:**

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Multiplicação de um número real por uma Matriz: Dado um número real k e uma matriz A do tipo $m \times n$, o produto de k por A é uma matriz B, do tipo $m \times n$, obtida pela multiplicação de cada elemento de A por k, ou seja,b_{ij} = $ka_{ij.}$

$$B = k \cdot A$$

Exemplo 4.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ o produto de A por B, resulta na matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ de modo que cada elemento

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Exemplo 5. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. *Vamos determinar a matriz* C *tal que* $C = A \cdot B$

Solução:

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observação: Uma condição necessária e suficiente para que exista a multiplicação das matrizes A e B é que o número de colunas da matriz A deve ser igual ao número de linhas da matriz B.

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

Associativa:$\mathrm{A} \cdot (B \cdot C) = (\mathrm{A} \cdot B) \cdot C$

Distributiva com relação à adição :$\mathrm{A}\cdot(B + C) = \mathrm{A} \cdot B + A \cdot C$

Elemento Neutro da Multiplicação :$\mathrm{A}\cdot\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$

Matriz Inversa: Dada uma matriz A quadrada, de ordem n, se existir uma matriz B, de mesma ordem, tal que $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. Então B é a matriz inversa de A e é indicada $\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}$.

3 Determinantes

Neste capítulo serão apresentadas definições de determinantes, necessárias para o desenvolvimento do trabalho e para mais detalhes sobre o assunto, as referências [1], [4] e [6] são indicadas.

3.1 Classe de uma permutação

De acordo com [4] e [6], uma permutação das letras a, b e c do nosso alfabeto é a própria ordem

$$(a \quad b \quad c) \quad (b \quad a \quad c) \quad (c \quad a \quad b)$$

$$(a \quad c \quad b) \quad (b \quad c \quad a) \quad (c \quad b \quad a)$$

Definição 2. *Seja $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de inteiros de 1 a n, ordenados de maneira ascendente. A reordenação $j_1 j_2 \ldots j_n$ dos elementos de S é chamada de permutação de S. Podemos considerar uma permutação de S como sendo uma função bijetora de S em si mesmo.*

Para obtermos permutações, podemos colocar qualquer um dos n elementos de S na primeira posição, qualquer um dos $n-1$ elementos remanescentes na segunda posição, qualquer um dos $n-2$ elementos remanescentes na terceira posição, e assim até a $n-$*ésima* posição, que pode ser preenchida pelo último elemento. Dessa maneira, há $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ permutações de S. Representamos o conjunto de todas as permutações de S por S_n.

Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal. Assim, na permutação dada acb, os elementos c e b formam uma inversão. Daí, uma permutação é de classe par ou de classe ímpar, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões. Portanto, acb é de classe impar, pois possui apenas uma inversão. Se uma permutação é de classe par atribuiremos a ela o sinal de $+$ e se ela for de classe ímpar o sinal de $-$.

Exemplo 6. *S_1 tem apenas uma permutação, logo é par pois não há inversões.*

Exemplo 7. *Na permutação de 4321 em S_4, 4 precede 3, 4 precede 1, 4 precede 2, 3 precede 1 e 3 precede 2 e 2 precede 1. Dessa maneira, o número de inversões nessa permutação é 6, que é par.*

3.2 Tabelas de permutações

3.2.1 Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é $P_2 = 2! = 2$. Logo, podemos formar a Tabela 1.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
12	12	0	par	$+$
12	21	1	ímpar	$-$

Tabela 1: Permutações dos números 1 e 2.

3.2.2 Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é $P_3 = 3! = 6$. Logo, podemos formar a Tabela 2.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
123	123	0	par	$+$
123	132	1	ímpar	$-$
123	312	2	par	$+$
123	213	1	ímpar	$-$
123	231	2	par	$+$
123	321	3	ímpar	$-$

Tabela 2: Permutações dos números 1, 2 e 3.

3.2.3 Determinante de uma matriz

Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices dos elementos da diagonal principal da matriz, fixados os primeiros, e fazendo-se preceder os produtos do sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar. De maneira formal, temos

Definição 3. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o determinante de A por*

$$\sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

em que o somatório envolve todas as permutações $j_1 j_2 \dots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. O sinal é $+$ ou $-$ conforme a permutação $j_1 j_2 \dots j_n$ é par ou ímpar. A soma é denotada por $det\,(A)$.

Exemplo 8. *Se A é a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, teremos somente a permutação principal. Assim, $det\,(A) = a_{11}$.*

Exemplo 9. *Se A é a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos duas permutações em $S_2 : j_1$ e j_2, sendo que a primeira é par e a segunda é ímpar, conforme a Tabela 1. Assim, vamos proceder da seguinte forma:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1 e 2 conforme Tabela 1.

$$a_1 \;\; a_2 \qquad\qquad a_1 \;\; a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 12 e 21, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$a_{11} \;\; a_{22} \qquad\qquad a_{12} \;\; a_{21}$$

3º) Fazer preceder cada um dos dois produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 1.

$$+a_{11} \;\; a_{22} \qquad\qquad -\, a_{12} \;\; a_{21}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$det\,(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 10. *Se A é a matriz de ordem 3,* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, *temos seis permutações em* $S_3 : j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$, *com seus respectivos sinais, conforme a Tabela 2. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 conforme Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 & \qquad a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 & \qquad a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \\ a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 & \qquad a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 & \qquad a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \end{array}$$

2º) Colocar, nas seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 123, 132, 312, 213, 231 e 321, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \;\; a_{22} \;\; a_{33} & \qquad a_{11} \;\; a_{23} \;\; a_{32} & \qquad a_{13} \;\; a_{21} \;\; a_{32} \\ a_{12} \;\; a_{21} \;\; a_{33} & \qquad a_{12} \;\; a_{23} \;\; a_{31} & \qquad a_{13} \;\; a_{22} \;\; a_{31} \end{array}$$

3º) Fazer preceder cada um dos seis produtos assim formados dos sinais + ou −, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} +a_{11} \;\; a_{22} \;\; a_{33} & \qquad -a_{11} \;\; a_{23} \;\; a_{32} & \qquad +a_{13} \;\; a_{21} \;\; a_{32} \\ -a_{12} \;\; a_{21} \;\; a_{33} & \qquad +a_{12} \;\; a_{23} \;\; a_{31} & \qquad -a_{13} \;\; a_{22} \;\; a_{31} \end{array}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$det\,(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que pode ser escrita como

$$det\,(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

4 Diagonalização de Matrizes

Uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e que também se torna importante no estudo de autovalores é relação de semelhança de matrizes.

Definição 4. *Sejam A e B matrizes $n \times n$. Dizemos que B é semelhante a A, se existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$*

Definição 5. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O polinômio característico de A será $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.*

Teorema 1. *Sejam A e B matrizes semelhantes. Então A e B têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.*

Demonstração: Sendo A e B matrizes semelhantes, existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) \\ &= \det\left(\lambda PIP^{-1} - PAP^{-1}\right) \\ &= \det(P(\lambda I - A)(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(\lambda I - A)\det(P^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - A) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores.

Definição 6. *Uma matriz $A_{n \times n}$ é dita diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.*

Em outras palavras, uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se existem matrizes $P_{n\times n}$ (invertível) e $D_{n\times n}$ (diagonal) tal que $A = PDP^{-1}$.

Assim, sendo

$$P = [v_1 \ v_2 \cdots v_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

em que v_1, v_2, $\cdots$, v_n é uma base de um espaço vetorial.

Como

$$A = PDP^{-1}$$

multiplicando P em ambos os lados, teremos

$$AP = PDP^{-1}P$$

como

$$P^{-1}P = I$$

e I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, então

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ A \cdot [v_1 \ v_2 \cdots v_n] &= [v_1 \ v_2 \cdots v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ [Av_1 \ \ Av_2 \ \cdots \ Av_n] &= [\lambda_1 v_1 \ \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n] \end{aligned}$$

igualando,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Definição 7. *Dada uma matriz $A_{n\times n}$, um escalar λ é chamado autovalor e um vetor não nulo $v \in R^n$ é chamado autovetor de A se $Av = \lambda v$.*

Logo, o que mostramos anteriormente foi que se uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável, ou seja, se existem matrizes P e D tal que $A = PDP^{-1}$ então as colunas de P são autovetores linearmente independentes (LI), pois P é invertível, associados aos autovalores λ_n, que são os elementos da diagonal de D.

Portanto, para determinar se uma matriz A é diagonalizável, precisamos determimar primeiramente seus autovalores e isso pode ser feito da seguinte maneira:

A equação

$$Av = \lambda v$$

é quivalente a

$$Av = \lambda I v$$

ou ainda,

$$Av - \lambda I v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Assim, λ será um autovalor de A, se e somente se, o sistema homogênio $(A-\lambda I)X = 0$ possuir soluções não triviais. Mas isso acontecerá, se e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$, que é um polinômio de grau n em λ.

Desse modo os autovalores de A são exatamente as raízes do polinômio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

Exemplo 11. *Determinemos os autovalores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 8 & -28 \\ 7 & 29 \end{bmatrix}$.

Solução: Para essa matriz o polinômio característico é

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 28 \\ 7 & 29-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)(29-\lambda) - 28.7 = \lambda^2 - 37\lambda + 36.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda)$, teremos $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 37\lambda + 36 = 0$ então os autovalores de A são: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 36$.

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$. Assim, para $\lambda_1 = 1$ temos

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 7 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7x + 28y \\ 7x + 28y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

igualando

$$\begin{aligned} 7x + 28y &= 0 \\ 7x + 28y &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral é

$$v_1 \in \{(-4\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}\,.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$. Analogamente, fazendo o mesmo para $\lambda_2 = 36$, encontramos $v_2 \in \{(\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$, que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 36$.

Agora que já sabemos encontrar os autovelores e os autovetores de uma matriz, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2. *Se uma matriz A_{nxn} tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.*

E vale lembrar que a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é formada pelos autovalores λ_n de A em sua diagonal principal e a matriz

$$P = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]$$

é formada pelos autovetores associados aos autovalores λ_n.

Exemplo 12. *Mostre que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Solução: Verifiquemos se a matriz A tem três autovalores distintos, o que garante, pelo Teorema 2, que A e diagonalizável.

Seu polinômio característico e dado por

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

Assim,

$$det\,(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

resolvendo a equação, teremos

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 e \lambda_3 = 3$$

que são os autovalores distintos da matriz A. Logo pelo Teorema 2 a matriz A é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, precisamos encontrar os autovetores associados aos autovalores encontrados.

Para $\lambda_1 = -1$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a solução geral $v \in \{(\alpha, 3\alpha, -4\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $v_1 = (1, 3, -4)$. Analogamente, para $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ encontramos respectivamente os autovetores $u \in \{(\alpha, \alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ e $w \in \left\{\left(\alpha, -\alpha, \frac{-4\alpha}{3}\right)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\right\}$ e assim um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ será $u_1 = (1, 1, -2)$ e um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ será $w_1 = (3, -3, -4)$.

Então teremos, que a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz A é diagonalizável.

O Teorema 2, garante que se uma matriz A_{nxn} tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável. E se esses autovalores não forem distintos? A resposta está no seguinte teorema.

Teorema 3. *Uma matriz A_{nxn} é diagonalizável, se e somente se, a matriz A tem n autovetores linearmente independentes (LI).*

Demonstração: Sejam $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ vetores linearmente independentes (LI).

Então,

$$\begin{aligned}
A\left(v_1\right) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
A\left(v_2\right) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
A\left(v_3\right) &= \lambda_3 v_3 = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + 0v_n \\
&\vdots \\
A\left(v_n\right) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + \lambda_n v_n \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 13. *Verifique que a matriz* $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Solução: Vamos determinar os autovalores de A. Seu polinômio característico e dado por

$$p\left(\lambda\right) = det\left(A - \lambda I_3\right) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Assim,

$$det\left(A - \lambda I_3\right) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (com multiplicidade 2) e $\lambda_3 = 1$. Agora, vamos encontrar os autovetores, para isso basta resolver $(A - \lambda I)X = 0$.

Para $\lambda_1 = -1$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a solução geral $v \in \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(0,1,0) + \beta\,(1,0,1)\}\,;$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com α e β não nulos simultaneamente.

Logo $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$ são vetores linearmente independentes (LI) associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

Analogamente, para $\lambda_3 = 1$, encontraremos a solução geral

$$w \in \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha\,(1,1,2)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$$

Assim, $w_1 = (1,1,2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 1$.

Portanto a matriz A é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$.

5 Raiz Quadrada de Matrizes 2x2

Neste trabalho consideramos apenas raizes quadradas de matrizes com entradas reais não negativas. O símbolo $\sqrt{A}$ denotará a raiz quadrada de uma matriz A de ordem 2. Para mais detalhes sobre o assunto, a referênia [2] é indicada.

Definição 8. *Denomina-se raiz quadrada real de uma matriz A qualquer matriz B com entradas reais tal que $B^2 = A$.*

Sabemos que nem todo número real admite uma raiz quadrada em $\mathbb{R}$. De modo semelhante, podemos dizer o mesmo sobre uma matriz, isto é, nem toda matriz admite uma raiz quadra de entradas em $\mathbb{R}$.

Proposição 1. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 2, tal que $B = A^2$. Então $det(B) = (det(A))^2$.*

Demonstração: Seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como $B = A^2$, então:

$$B = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $det(A) = ad - bc$ e que $det(B) = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$.

Usando a fatoração do trinômio quadrado perfeito em $det(B)$:

$$det(B) = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$
$$det(B) = (ad - bc)^2$$
$$det(B) = (det(A))^2$$

Esta proposição é importante, pois agora sabemos que para uma matriz A possuir raiz quadrada, o seu determinante deve ser um número real não-negativo.

Exemplo 14. *A matriz a seguir não possui raiz quadrada, pois seu determinante é -1.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A seguir calcularemos a raiz quadrada de matrizes diagonais.

Proposição 2. *Seja A uma matriz diagonal de ordem 2:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Se todos os elementos da diagonal principal são números reais não-negativos, então as raizes quadradaz de A são:

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Mostraremos para a primeira matriz. Basta mostrar que:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Calculando $\sqrt{A}.\sqrt{A}$:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a}\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b}\sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

A demonstração para as demais matrizes são análogas a anterior.

Exemplo 15. *Vamos determinar a raiz quadrada da matriz*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Como o determinante da matriz é 100, sabemos que a matriz possui raiz quadrada. Usando a Proposição 2, temos que as matrizes que são a raiz quadrada da matriz dada são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Proposição 3. *Seja A uma matriz nula de ordem 2, então há infinitas matrizes que são raizes quadradas da matriz A.*

Demonstração:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R}.$$

Como $\sqrt{A}.\sqrt{A} = A$, então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & \text{(i)} \\ d^2 + bc = 0 & \text{(ii)} \\ b(a+d) = 0 & \text{(iii)} \\ c(a+d) = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

Analisando as equações (i) e (ii), podemos afirmar que $a = d = \sqrt{-bc}$. Substituindo esta informação nas equações (iii) e (iv), obtem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b.(2\sqrt{-bc}) = 0 & \text{(v)} \\ c.(2\sqrt{-bc}) = 0 & \text{(vi)} \end{cases}$$

Observando atentamente as equações (v) e (vi), verifica-se a existência de 3 tipos de soluções:

1ª) $b = 0$ e $c = 0 \Rightarrow$ a=0 e d=0 , ou seja :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2ª) b qualquer e $c = 0 \Rightarrow$ a=0 e d=0 , ou seja:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ com b} \in \mathbb{R}^*.$$

3ª) $b = 0$ e c qualquer $\Rightarrow$ a=0 e d=0 , ou seja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \text{ com c} \in \mathbb{R}^*.$$

Teorema 4. *Se A, B e P são matrizes quadradas de ordem 2, em que $B = PAP^{-1}$, e uma aplicação f que está definida para todos os autovalores de A, então:*

$$f(B) = Pf(A)P^{-1}$$

Demosntração: Uma vez que as matrizes A e B são semelhantes, temos que elas possuem o mesmo polinômio característico. Assim, se $p(t)$ é uma interpolação polinomial para $f(t)$ para todos os autovalores da matriz A, então, também é uma interpolação polinomial de $f(t)$ para todos os autovalores de B. Com isso temos:

$$\begin{cases} f(A) = p(A) \\ f(B) = p(B) \\ p(B) = Pp(A)P^{-1} \end{cases} \Rightarrow f(B) = Pf(A)P^{-1}$$

Proposição 4. *Se uma matriz A de ordem 2 for diagonalizável e todos os seus autovalores forem não-negativos, então A admite raiz quadrada.*

Demonstração:

Como a matriz A é diagonalizável, sabemos que existe uma matriz inversível P onde:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a raiz quadrada da matriz A, pelo Teorema 4, é dada por:

$$\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

Para comprovarmos, basta multiplicarmos $(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1})$:

$$(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = P\sqrt{D}(P^{-1}P)\sqrt{D}P^{-1}$$
$$(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = P(\sqrt{D}I_2)\sqrt{D}P^{-1}$$
$$(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = P(\sqrt{D}\sqrt{D})P^{-1}$$
$$(P\sqrt{D}P^{-1})(P\sqrt{D}P^{-1}) = PDP^{-1}$$

Esta última matriz é igual a matriz A, pois:

$$P^{-1}AP = D$$

Multiplicando ambos os membros por P:

$$PP^{-1}AP = PD \Rightarrow I_2AP = PD \Rightarrow AP = PD$$

Multiplicando ambos os membros por P^{-1}:

$$APP^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow AI_2 = PDP^{-1} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Portanto:

$$\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

Exemplo 16. *Vamos determinar a raiz quadrada da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{bmatrix}$$

Solução:

1º Passo - Determinar os autovalores:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 28 \\ 7 & 29-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(8-\lambda).(29-\lambda) - 28.7 = 0$$

$$\lambda^2 - 37\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 36$$

2º Passo - Determinar os autovetores:

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 8-1 & 28 \\ 7 & 29-1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 7 & 28 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x + 28y = 0 \\ 7x + 28y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ As soluções são do tipo}(-4\alpha, \alpha)$$

Logo o nosso primeiro autovetor é $(-4, 1)$.

Para $\lambda = 36$:

$$\begin{bmatrix} 8-36 & 28 \\ 7 & 29-36 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -28 & 28 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -28x + 28y = 0 \\ 7x - 7y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ As soluções são do tipo}(\alpha, \alpha)$$

Logo o nosso segundo autovetor é $(1, 1)$.

3º Passo - Determinar as matrizes P e P^{-1}:

A matriz P é formada pelos autovetores, ou seja:

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

4º Passo - Determinar a matriz diagonal D:

Basta resolver o sistema formado por $AP = PD$.

$$\begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 36 \\ 1 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a & b \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 36 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

5º Passo - Determinar $\sqrt{D}$:

Pela Proposição 2:

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

6º Passo - Determinar $\sqrt{A}$:

Pela Proposição 4, $\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$. Determinemos as possíveis soluções.
Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{28}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{28}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Portanto, as possíveis soluções para $\sqrt{A}$, são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{28}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{23}{5} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{28}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

Observamos que a raiz quadrada de uma matriz possui exatamente quatro soluções com os parâmetros acima e caso seja nula, possui infinitas soluções. A seguir um caso particular.

Corolário 1. *Se uma matriz A não-nula, for diagonalizável com seus autovalores não-negativos e seu determinante for igual zero, então está apresentará somente duas soluções para $\sqrt{A}$.*

Exemplo 17. *Vamos determinar a raiz quadrada da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução:

É fácil perceber que o determinante da matriz A é zero. Vamos resolver usando o mesmos passos usados no exemplo anterior.

1º Passo - Determinar os autovalores:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda).(9-\lambda) - 6.6 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 13$$

2º Passo - Determinar os autovetores:

Para $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 4-0 & 6 \\ 6 & 9-0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 6x + 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ As soluções são do tipo } \left(\alpha, -\frac{2\alpha}{3}\right)$$

Para $\alpha = 3$, temos $(3, -2)$, que será o primeiro autovetor.

Para $\lambda = 13$:

$$\begin{bmatrix} 4-13 & 6 \\ 6 & 9-13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ As soluções são do tipo } \left(\alpha, \frac{3\alpha}{2}\right)$$

O nosso segundo autovetor é $(2, 3)$, para $\alpha = 2$.

3º Passo - Determinar as matrizes P e P^{-1}:

A matriz P é formada pelos autovetores, ou seja:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

4º Passo - Determinar a matriz diagonal D:

Basta resolver o sistema formado por $AP = PD$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 26 \\ 0 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 2b \\ -2a & 3b \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 13 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

5º Passo - Determinar $\sqrt{D}$:

Usaremos a Proposição 2 com uma adptação, pois zero é neutro:

$$\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix} \text{ou} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

6º Passo - Determinar $\sqrt{A}$:

Pela Proposição 4, $\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$. Determinemos as possíveis soluções.

Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{13} \\ 0 & 3\sqrt{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{13}}{13} & \frac{6\sqrt{13}}{13} \\ \frac{6\sqrt{13}}{13} & \frac{9\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

Para $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{13} \end{bmatrix}$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{13} \\ 0 & -3\sqrt{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{13}}{13} & -\frac{6\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{6\sqrt{13}}{13} & -\frac{9\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

Portanto, as possíveis soluções para $\sqrt{A}$, são:

$$\begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{13}}{13} & \frac{6\sqrt{13}}{13} \\ \frac{6\sqrt{13}}{13} & \frac{9\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{13}}{13} & -\frac{6\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{6\sqrt{13}}{13} & -\frac{9\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

6 Considerações finais

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho nos garantiram a obtenção de ganhos significativos relacionados a como extrair a raiz quadrada de uma matriz de ordem 2. Apresentamos a importância do desenvolvimento de métodos que possibilitem um professor de matemática a trabalhar com a raiz quadrada de matrizes, com o auxílio da Álgebra Linear, oportunizando melhor entendimento por parte dos alunos do ensino médio, uma vez que os mesmos encontram-se habituados com cálculos algébricos.

Acreditamos que se conseguirmos levar o aluno a construir melhor as definições matemáticas, podemos doar um tempo maior para o planejamento de situações em que a aprendizagem seja efetiva.

Esperamos que este material seja uma leitura útil no que diz respeito a estimulação da criticidade e até mesmo para uma generalização para raizes de índice n.

Referências

[1] Boldrini, j.l. e outros, *Álgebra Linear*, 3º edição, Editora Harbra Ltda,. São Paulo,1986.

[2] Gordon, Crystal Monterz, *The Square Root Function of a Matrix*, 2007 *MathematicsTheses*. Paper24.

[3] Iezzi, G.; Hazzan, S., *Fundamentos da Matemática Elementar, 4: Seqüências, Matrizes, Determinantes, Sistemas*, 7º edição, São Paulo: Atual, 2004.

[4] Kolman, Bernard; Hill, David R., *Álgebra Linear com Aplicações*, 9º edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[5] Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3*, 6º.edição, Rio de Janeiro: SBM 2006.

[6] Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo, *Álgebra Linear*, 2º edição, Pearson Makron Books, São Paulo, 1987.