



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Aplicações das Transformações Conformes em Problemas Eletromagnéticos

Ricardo Ferreira da Cunha

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Ricardo Ferreira da Cunha		
E-mail:	prof_ricardofc@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Não Há		
Agência de fomento:	Não Há	Sigla:	
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	
Título:	Aplicações das Transformações Conformes em Problemas Eletromagnéticos		
Palavras-chave:	Funções analíticas complexas, Transformações conformes, Problemas de eletromagnetismo.		
Título em outra língua:	Applications of Conformal Transformations in Electromagnetic Problems.		
Palavras-chave em outra língua:	Complex analytical functions, Conformal transformations, Electromagnetic problems.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	(11 / 07 / 2014)		
Programa de Pós-Graduação:	Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota		
E-mail:	jesusdamota@gmail.com		
Coorientador(a):*	Prof. Dr Wesley Pacheco Calixto		
E-mail:	wpcalixto@ieee.org		

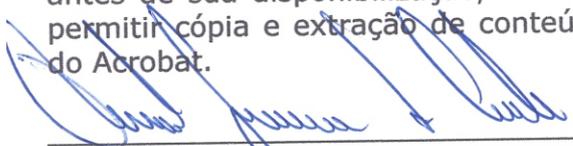
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 03 / 10 / 2014

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ricardo Ferreira da Cunha

Aplicações das Transformações Conformes em Problemas Eletromagnéticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Coorientador: Prof. Dr. Wesley Pacheco Calixto

Goiânia

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

Cunha, Ricardo Ferreira da.
C972a Aplicações das Transformações Conformes em
Problemas Eletromagnéticos [manuscrito] / Ricardo Ferreira
Cunha. - 2014.
58 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota;
Co-orientador: Wesley Pacheco Calixto.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Funções analíticas de variáveis complexas 2. Variáveis
complexas – Funções analíticas 3. Eletromagnetismo 4.
Funções complexas I. Título.

CDU: 517.54

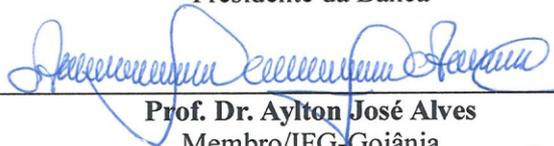
Ricardo Ferreira da Cunha

**Aplicações das Transformações Conformes em
Problemas Eletromagnéticos**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 11 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



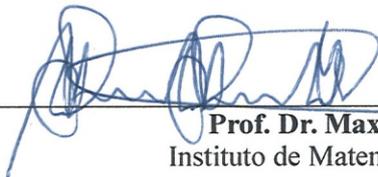
Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Aylton José Alves
Membro/IFG-Goiânia



Prof. Dr. Wesley Pacheco Calixto
Membro/IFG-Goiânia



Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ricardo Ferreira da Cunha, graduou-se em Matemática pela Universidade Católica de Goiás - (PUC - GOIÁS) Goiânia em 1998. Especializou-se em Matemática do Ensino Básico e Superior em 2003 na Universidade Estadual de Goiás - UEG. Atualmente é professor dos Colégios: Instituto Presbiteriano de Educação - IPE, Prevest, Faculdade ALFA e Rede Municipal de Ensino - SME

Dedico este Trabalho primeiramente a Deus que me deu vida e vida com abundância e a oportunidade de estudar adquirindo conhecimento. À minha família esposa e filhas por terem estado ao meu lado em todos os momentos, incentivando e aceitando a ausência causada pelas aulas e horas de estudos. Aos meus pais, Walter Ferreira da Cunha e Maria Madalena Faria da Cunha que plantaram em mim um bom caráter e me ensinaram a ser um homem bom e honesto. Às minhas irmãs que sempre apoiaram e ajudaram na minha caminhada profissional. Ao meu Pastor, amigo e companheiro deste momento importante da minha vida.

Agradecimentos

Hoje estou buscando em minha mente palavras de agradecimento a Deus por muitas bênçãos concedidas a minha pessoa. O meu primeiro agradecimento com certeza eu faço a Deus, pois sem Ele não poderia existir o que agora é real. Um bom trabalho é o resultado do esforço de todos que cooperaram para a sua realização. Mas um excelente trabalho é o resultado da superação de todos envolvidos na sua elaboração. Sendo assim, começo os meus agradecimentos ao meu Orientador Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota pela sua atenção e dedicação ao trabalho e a minha pessoa, sempre atendendo aos meus pedidos e solicitações. Agradeço ao meu Coorientador: Prof. Dr. Wesley Pacheco Calixto, profissional espetacular e muito eficiente, surpreendente e obstinado em tudo o que faz, com muita educação e paciência ajudou-me na escrita deste trabalho, um verdadeiro professor no seu ofício de ensinar, orientar e acompanhar, obrigado por tudo o que você fez e que Deus te abençoe. Agradeço ao Prof. Ms. Rodrigo Alves de Lima, contribuiu muito na realização desse trabalho com sua eficiência e competência nos conteúdos necessários a complementação desse trabalho. Agradeço ao Prof. Ms. José Luís Barbosa Ferraz, ajudou muito na parte operacional desta dissertação, na instalação do editor WinEdt, programa Visio, entre outros.

Há três anos eu não tinha perspectiva de fazer um Mestrado na Universidade Federal de Goiás - UFG, até que no mês de novembro de 2010 a minha irmã Débora, professora de Estatística do Curso de Ciências Sociais da UFG, informou-me do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Acessei o site da UFG na Pós-Graduação e tendo acesso ao edital de seleção, fiz a minha inscrição, mas não obtive êxito. Em 2011, final do ano, fiz novamente a segunda seleção do programa de Mestrado, passando em terceiro lugar. Agradeço as minhas irmãs Débora e Héliida pelo o apoio e incentivo dedicado a minha pessoa.

Agradeço a minha esposa Evanilde por me amar. Mulher sábia, foi minha companheira e amiga em vários momentos, fundamental nessa conquista. Sem ela eu não poderia estar todo esse tempo envolvido em aulas e estudos, conciliado com muito trabalho todos os dias da semana nos períodos matutino e noturno. Obrigado minha gata.

Agradeço as minhas filhas Ana Carolina e Rebeca por ter em muitos momentos privado da minha companhia de pai. Todo este esforço é para vocês minhas filhas. Papai

deixa esse legado para vocês, um exemplo, um caminho, um alvo a ser conquistado.

Agradeço aos meus amigos, Evandro, Marcelo e Normando, companheiros de todos os momentos alegres e difíceis. Sentirei saudades dos nossos sábados no campus da UFG, dos nossos colegas de Mestrado, dos nossos almoços que tornaram-se momentos de confraternização e de amizade. Amigo é algo que Deus deu ao homem, e que deve ser preservado.

Agradeço a Prefeitura de Goiânia que concedeu-me uma Licença para Aprimoramento por dois anos, fato este de fundamental importância para a conclusão deste trabalho. O meu muito obrigado.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante esses vinte e quatro meses, favor esse que foi fundamental para a realização do sonho de muitos professores da rede pública, inclusive o meu. Obrigado.

Resumo

Neste trabalho descrevemos algumas propriedades dos números complexos e das funções analíticas complexas. Como aplicação, usamos as transformações conformes para calcular de forma analítica a solução de problemas eletromagnéticos definidos em domínios não convencionais. As transformações conformes são de excepcional importância na resolução de problemas de valores de contorno na teoria eletromagnética. As transformações conformes têm a propriedade de modificar a geometria, preservando as grandezas físicas.

Palavras-chave

Funções analíticas complexas, Transformações conformes, Problemas de eletromagnetismo.

Abstract

In this work we describe some properties of the complex numbers and analytical functions. As an application, we use the conformal transformations to calculate analytical solutions for electromagnetic problems defined in nonconventional domain. The conformal transformations are of exceptional importance in solving boundary value problems in electromagnetic theory. The conformal transformations have the property of modifying the geometry, but preserving the physical quantities.

Keywords Complex analytical functions, Conformal transformations, Electromagnetic problems.

Lista de Figuras

1	Diagrama de Venn (A região laranja é o conjunto dos números irracionais)	18
2	Plano- z complexo	19
3	Forma Polar	21
4	Raízes Sextas da Unidade	23
5	Aplicação de pontos do plano- z em pontos no plano- w . (a) Domínio. (b) Imagem.	25
6	Dois modos como $\Delta z \rightarrow 0$	26
7	Ângulos orientados no sentido positivo entre as curvas.	29
8	Ilustração de conformalidade.	30
9	Preservação dos Ângulos	31
10	Plano- z da Transformação por translação	32
11	Plano- w da Transformação por translação	33
12	Transformação por rotação	34
13	Transformação por dilatação e contração.	35
14	Transformação por inversão	35
15	Transformação linear	36
16	Materiais e condições de contorno para estudo de caso 1.	40
17	Capacitor cilíndrico concêntrico.	40
18	Capacitor cilíndrico excêntrico.	41
19	Transformação de Schwarz-Christoffel.	43
20	Expoentes da transformação de Schwarz-Christoffel	44
21	Dinâmica da transformação de Schwarz-Christoffel.	45
22	Semiplano superior do plano- z no retângulo no plano- w	46
23	Linhas mapeadas no plano- w	48
24	Mapeamento produzido pela função de Jacobi.	48
25	Capacitor de placas semicilíndricas.	49
26	Capacitor de placas semicilíndricas no plano- z	49
27	Capacitor de placas semicilíndricas no plano- w	50
28	Capacitor de placas semicilíndricas no plano- t	51
29	Linhas equipotenciais (capacitor de placas paralelas) plano- t	52
30	Linhas equipotenciais representadas no plano- w	52
31	Linhas equipotenciais representadas no plano- z	52
32	Linhas equipotenciais e de campo representadas no plano- t	53

33	Linhas equipotenciais e linhas de campo representadas no plano- z	53
----	---	----

Sumário

1	Introdução	16
2	Números Complexos e Funções Analíticas	17
2.1	Introdução aos Números Complexos	17
2.1.1	Histórico	17
2.1.2	Corpo dos Números Complexos	17
2.1.3	Representação Geométrica, Conjugado e Valor Absoluto	19
2.1.4	Representação Polar	20
2.1.5	Raízes n -ésimas	22
2.1.6	Fórmula de Euler	22
2.2	Funções Complexas Analíticas	25
2.2.1	Função Analítica	27
2.3	Transformações Conformes	29
2.4	Exemplos de Transformações Conformes	31
2.4.1	Transformação por Translação	32
2.4.2	Transformação por Rotação	32
2.4.3	Transformação por Dilatação ou Contração	33
2.4.4	Transformação por Inversão	34
2.4.5	Transformação Linear	36
2.4.6	Transformação de Möebius	37
3	Aplicações das Transformações Conformes	39
3.1	O Problema do Capacitor Excêntrico	39
3.2	A Transformação de Schwarz-Christoffel	42
3.2.1	Mapeamento do semiplano superior no interior de um retângulo	45
3.3	O Problema do Capacitor de Placas Semicilíndricas	47
4	Considerações finais	55
5	Mensagem Final	56

1 Introdução

Neste trabalho estudamos alguns tópicos dos números complexos, como representação polar, raiz n -ésima e alguns tópicos das funções de variáveis complexas, como funções analíticas e transformações conformes. Descrevemos as principais propriedades dos números complexos, e alguns teoremas importantes das funções analíticas e das transformações conformes. Este estudo está resumido no Capítulo 2.

Os números complexos fazem parte do conteúdo do ensino médio cuja importância principal é o cálculo das raízes de uma equação polinomial. No entanto, uma pergunta natural dos alunos do ensino médio é se os números complexos tem alguma aplicação prática. Esta pergunta pode ser respondida pela leitura deste trabalho, onde fizemos duas aplicações práticas envolvendo números de funções complexas.

No Capítulo 3 aplicamos as transformações conformes para resolver dois exemplos de eletromagnetismo. Na primeira aplicação calculamos a capacitância de um capacitor de placas cilíndricas excêntricas, onde definimos uma transformação conforme para o cálculo da solução.

Na segunda aplicação calculamos as linhas equipotenciais e as linhas de campo para um capacitor de placas semicilíndricas. Esse cálculo é feito primeiramente usando uma transformação bilinear que transforma a região cilíndrica em uma região no semiplano superior, e depois aplicando a transformação de Schwarz-Cristoffel que transforma a região do semiplano superior em uma região retangular. Com essa geometria retangular calcula-se facilmente os parâmetros físicos do problema.

No Capítulo 4, apresentamos as considerações finais e propostas de trabalhos futuros, onde sugerimos algumas ideias que podem enriquecer o estudo sobre aplicações das transformações conformes.

Portanto, a ideia básica para resolver um problema aplicando as transformações conformes, é transformar a geometria onde o problema é proposto em uma geometria mais simples para o cálculo da solução do problema. Assim, as propriedades físicas são calculadas na geometria mais simples e os resultados mapeados de volta para a geometria original. Isto é possível, pois, as transformações conformes não alteram as propriedades físicas do problema em estudo [25, 13].

2 Números Complexos e Funções Analíticas

Neste capítulo descrevemos os conceitos básicos sobre números complexos e funções analíticas.

2.1 Introdução aos Números Complexos

2.1.1 Histórico

Os números complexos surgiram no século XVI, com o aparecimento do Renascimento Cultural provindo das mudanças socioeconômicas iniciadas na Baixa Idade Média e que culminou com a Revolução Comercial na Idade Moderna, ocasionou várias manifestações culturais, artísticas, filosóficas e científicas. Com isso, teve o início de grandes registros algébricos, tais como a teoria de conjuntos e o surgimento dos Números Complexos. O matemático italiano Gerônimo Cardano (1501 - 1576) tentou dividir um segmento de medida 10 em duas partes, cujo produto fosse igual a 40 [8]. Uma das partes ele chamou de x e a outra de $10 - x$, logo ele obteve a igualdade

$$x(10 - x) = 40 \quad \text{ou} \quad x^2 - 10x + 40 = 0. \quad (1)$$

As raízes desta equação são $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, onde aparece um radicando negativo. Este foi um dos fatos que deu origem aos trabalhos com raízes quadradas de números negativos.

No século XVIII o matemático suíço Leonhard Euler chamou $\sqrt{-1}$ de i , ou seja, $i^2 = -1$, denominando i de unidade imaginária. O conceito de número complexo foi formalizado por Gauss através da sua representação geométrica como pontos do plano em um trabalho escrito em 1797. Por fim, o corpo dos números complexos denotado por \mathbb{C} , foi definido por Hamilton em 1837.

2.1.2 Corpo dos Números Complexos

Definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto dos pares ordenados de números reais,

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}\}, \quad (2)$$

com as operações de adição e multiplicação definidas por.

Se $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ pertencem a \mathbb{C} ,

- Adição: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

- Multiplicação: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

As seguintes identificações são muito úteis para as operações com números complexos $(x, 0) = x$ e $(0, 1) = i$. Assim o par $(x, 0)$ é identificado com o número real x e o par $(0, 1)$ com a unidade imaginária i .

Com as operações e identificações definidas acima, qualquer número complexo $z = (x, y)$, pode ser escrito da seguinte forma

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + yi. \quad (3)$$

Se $z = x + yi$, os números reais x e y são chamados de parte real e parte imaginária de z respectivamente, escreve-se

$$x = \text{Re}(z) \quad e \quad y = \text{Im}(z). \quad (4)$$

Pela definição da multiplicação, temos que

$$i^2 = (-1, 0) = -1 \quad e \quad \text{portanto} \quad i = \sqrt{-1}. \quad (5)$$

O diagrama de Venn ilustrado na Fig. 1, apresenta as relações de pertinência entre os conjuntos numéricos.

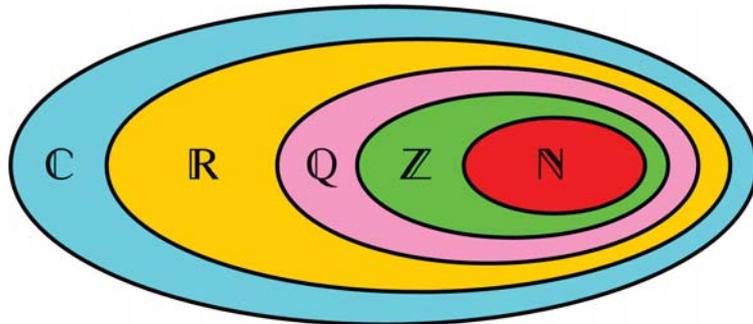


Figura 1: Diagrama de Venn (A região laranja é o conjunto dos números irracionais)

Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$, com coeficientes complexos sempre possui solução em \mathbb{C} , ou seja, tem pelo menos uma solução complexa. Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra [11].

Por exemplo, ao resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad (6)$$

a partir da fórmula de Bháskara, encontra-se

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} \\
 x &= \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \\
 x &= \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo o símbolo $i = \sqrt{-1}$, temos as duas soluções complexas,

$$x_1 = 3 + 2i \quad e \quad x_2 = 3 - 2i. \tag{8}$$

2.1.3 Representação Geométrica, Conjugado e Valor Absoluto

Os números complexos podem ser identificados com os pontos do plano cartesiano \mathbb{R}^2 que neste caso será chamado de plano complexo, onde o eixo das abscissas será chamado de eixo real e o eixo das ordenadas de eixo imaginário. A Fig. 2 ilustra o número complexo $z = (x, y) = x + yi$ para $x, y \in \mathbb{R}$, representado no plano complexo.

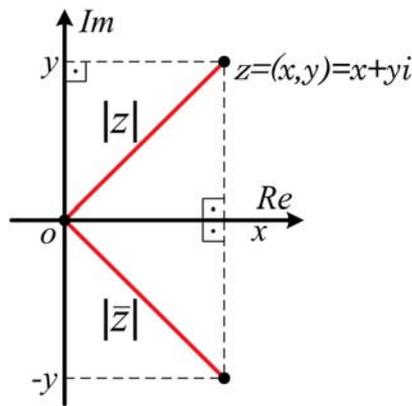


Figura 2: Plano- z complexo

Dado o número complexo $z = (x, y) = x + yi$ com parte real $Re(z) = x$ e parte imaginária $Im(z) = y$, como ilustrado na Fig. 2, o conjugado de z é definido por

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi, \tag{9}$$

e o valor absoluto (ou módulo) de z por

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

Para quaisquer números complexos $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ pode-se verificar facilmente, que valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
 \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2} \\
 \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \overline{z_2} \\
 \overline{z_1 / z_2} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
 z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) \\
 z - \bar{z} &= 2\operatorname{Im}(z) \\
 z\bar{z} &= x^2 + y^2 = |z|^2 \\
 |\bar{z}| &= |z| \\
 |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\
 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{com } z_2 \neq 0 \\
 |z| &\geq |\operatorname{Re}(z)| \geq \operatorname{Re}(z) \\
 |z| &\geq |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im}(z) \\
 |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\
 |z_1 - z_2| &\geq ||z_1| - |z_2||
 \end{aligned} \tag{11}$$

2.1.4 Representação Polar

Seja $z = x + yi$ o número complexo não nulo e P seu afixo, ou seja, ponto de coordenadas (x, y) no plano complexo de origem O , e seja θ o ângulo que a semi-reta \overrightarrow{OP} forma com o eixo real positivo no sentido anti-horário, neste caso, dizemos que θ é um argumento de z , denotado por $\theta = \operatorname{arg}(z)$.

Sendo $\rho = |z| \neq 0$ a hipotenusa do triângulo retângulo formado entre a semi-reta \overrightarrow{OP} e o eixo real da Fig. 3, calculado através da expressão $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, aplica-se a trigonometria obtendo as expressões

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{x}{\rho} \quad \text{ou} \quad x = \rho \cos \theta, \\
 \sin \theta &= \frac{y}{\rho} \quad \text{ou} \quad y = \rho \sin \theta,
 \end{aligned} \tag{12}$$

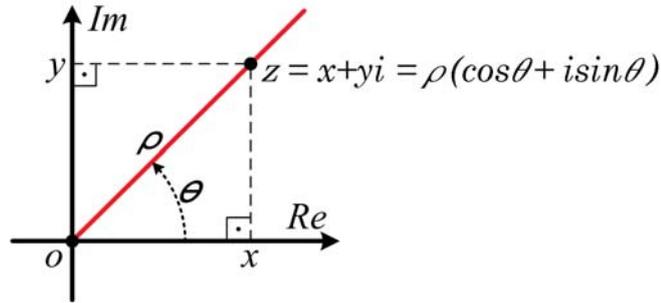


Figura 3: Forma Polar

e a tangente do argumento do número complexo z é dado por

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ se } x \neq 0, \quad (13)$$

onde o argumento θ é escrito da seguinte forma

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Olhando a Fig. 3, o número complexo z pode ser escrito na forma trigonométrica

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (15)$$

também denominada forma polar de z .

Pelas propriedades de multiplicação e divisão entre dois números complexos (ver [1]),

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \quad (16)$$

então

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (17)$$

e se $\rho_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (18)$$

Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, então pelas propriedades (17) e (18), tem-se que

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad (19)$$

para todo inteiro n .

A fórmula (19) é denominada fórmula de Abraham Moivre.

2.1.5 Raízes n -ésimas

As raízes n -ésimas de um número complexo $p \neq 0$, são as soluções da equação $z^n = p$.

Se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $p = \rho_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$, então

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0). \quad (20)$$

Esta igualdade é verdadeira quando

$$\rho = \sqrt[n]{p_0} \quad e \quad \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, \quad (21)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Portanto,

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\rho_0} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right), \quad (22)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

A partir da expressão (22), podemos representar as raízes n -ésimas de um número complexo p , como os n vértices do polígono regular inscrito na circunferência de raio igual a $\sqrt[n]{\rho_0}$.

Por exemplo, as raízes sextas da unidade, dadas por

$$w_k = \sqrt[6]{1} = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad (23)$$

são representadas no círculo unitário, conforme a Fig. 4.

2.1.6 Fórmula de Euler

A série de Taylor centrada em a de uma função real f , infinitamente diferenciável num intervalo aberto contendo a , é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (24)$$

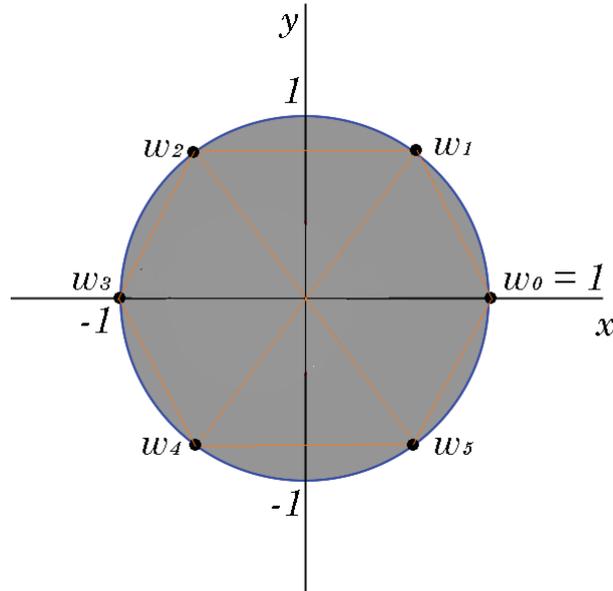


Figura 4: Raízes Sextas da Unidade

onde $f^{(n)}(a)$ é a derivada n-ésima de f em a .

Quando $a = 0$ a fórmula (24) é denominada de fórmula de Maclaurin.

Nem sempre a série de Taylor (24) converge para $f(x)$, conforme exemplo a seguir:
A função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (25)$$

é infinitamente diferenciável em \mathbb{R} , mas sua série de Taylor centrada em $x = 0$ é identicamente nula, pois $f^{(n)}(0) \equiv 0$, para todo inteiro n .

O seguinte teorema (ver demonstração em [12]) garante a convergência da série de Taylor para a função.

Teorema 1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável em um intervalo I , que contém o ponto a . Seja $(a - r, a + r)$ o maior intervalo aberto contido em I , e tal que, para cada c , $0 < c < a + r$, tem-se que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n!} M_n(c) c^n \right] = 0, \quad (26)$$

onde $M_n(c)$ é o máximo da função $f^{(n)}(x)$ no intervalo $[-c, c]$. Então, a série de Taylor de função $f(x)$, centrada em a , converge para $f(x)$ no intervalo $(a - r, a + r)$.

As funções trigonométricas *seno* e *co seno* e a função exponencial podem ser representadas por

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, x \in \mathbb{R} \quad (27)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, x \in \mathbb{R} \quad (28)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Se $x = 1$, obtém-se de (29) a expressão para o número e , como soma de série infinita, dada por

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,71828 \dots \quad (30)$$

Substituindo em (29) x por xi com $i = \sqrt{-1}$, obtém-se

$$e^{xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (31)$$

que pode ser escrita formalmente por,

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right). \quad (32)$$

Em (32), a primeira parte do somatório é a expansão por série de Maclaurin do $\cos x$ e a segunda parte é a expansão do $\sin x$. De posse de (27), (28) e (32), define-se

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (33)$$

Esta equação é denominada de fórmula de Euler.

A exponencial e^z para um número complexo qualquer $z = x + iy$, é definida por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (34)$$

Observamos que se $x = 0$ e $y = \pi$, então $e^{i\pi} = -1$.

2.2 Funções Complexas Analíticas

No século XVII a noção de função confundia-se com a de fórmula algébrica com variáveis, envolvendo somas, diferenças, produtos, quocientes e raízes de ordens arbitrárias. A partir da descoberta das séries de potências para o logaritmo em 1668, independentemente por Nicholas Mercator (1620-1687) e William Brouncker (1620-1684), seguiu-se o período em que foram desenvolvidos muitos estudos sobre séries para funções, principalmente por James Gregory (1638-1675), Issac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) entre outros [6]. A teoria das funções analíticas se originou no século XIX, principalmente devido aos trabalhos de Cauchy, Riemann e Weierstrass [10].

Dada uma função real de variável real $f(x)$, a equação $y = f(x)$ estabelece uma relação entre o eixo- x e o eixo- y do plano \mathbb{R}^2 , e portanto o gráfico de f está contido em \mathbb{R}^2 . Por outro lado, dada uma função complexa de variável complexa $f(z)$, não existe o gráfico de $f(z)$, como existe para as funções reais. A equação $w = f(z)$ estabelece uma relação entre o domínio de f no plano complexo z e a imagem de f no plano complexo w . Para cada ponto $z = (x, y) = x + iy$ do domínio de $f(z)$ corresponde um ponto $w = (u, v) = u + iv$ no plano complexo w , ver a Fig. 5. As correspondências entre pontos dos dois planos é denominada de transformação de pontos do plano- z em pontos do plano- w . Neste caso usa-se a notação

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (35)$$

veja alguns exemplos na Subseção 2.4.

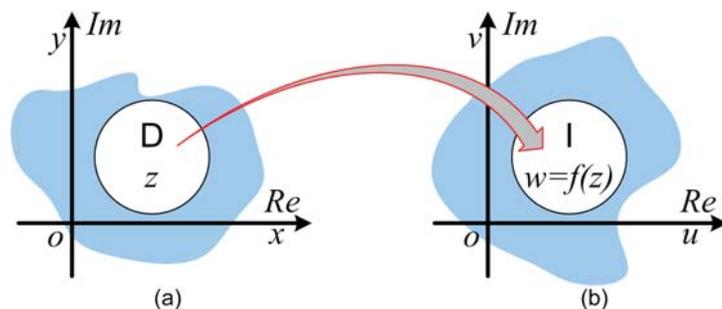


Figura 5: Aplicação de pontos do plano- z em pontos no plano- w . (a) Domínio. (b) Imagem.

Definição 1. Seja f uma função definida numa região aberta D do plano- z . A derivada f' de $f(z)$ em z_0 é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad (36)$$

desde que o limite indicado exista.

Neste caso, f é derivável ou diferenciável em z_0 . Se f for diferenciável em todos os pontos de D , então f é diferenciável em D . Convém lembrar que a existência do limite (36), implica que seu valor independe do modo como Δz tende a zero.

Em particular, podem-se fazer Δz tender a zero por valores reais ou por valores imaginários. Escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e como existem infinitas maneiras para $\Delta z \rightarrow 0$ no plano complexo, pode-se considerar duas possibilidades. A primeira ao longo de x mantendo y constante, a Fig. 6 ilustra esta possibilidade que é representada pela expressão (37). A segunda possibilidade ao longo de y mantendo x constante e também ilustrada na Fig. 6 e é representada pela expressão (38),

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (37)$$

e

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (38)$$

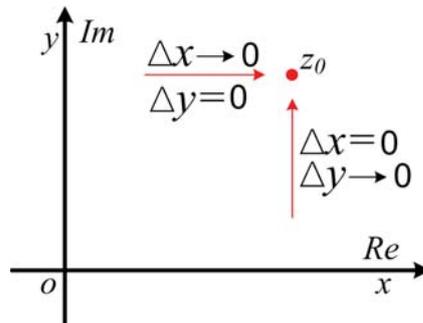


Figura 6: Dois modos como $\Delta z \rightarrow 0$

Portanto, se f é diferenciável em $z = x + iy$, as equações (37) e (38) implicam que

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y},$$

(39)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

as equações (39) são denominadas de equações de Cauchy-Riemann.

O exposto acima motiva o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [7].

Teorema 2. *Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ existe em um ponto $z = x + iy$, então as derivadas parciais de primeira ordem de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ existem no ponto (x, y) e satisfazem as relações de Cauchy-Riemann.*

Uma condição suficiente para a existência de $f'(z)$ é dada pelo seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista também em [7].

Teorema 3. *Dada a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, se as funções u e v são contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann num ponto (x_0, y_0) , então a derivada $f'(z)$ existe em $z_0 = x_0 + y_0i$. Além do mais, esta derivada é dada por qualquer das fórmulas (37) ou (38).*

2.2.1 Função Analítica

Definição 2. *Uma função f é analítica num ponto z_0 se f for diferenciável em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0 , isto é, dizemos que uma função $f(z)$ é analítica em z_0 , se existir um $\delta > 0$ tal que $f'(z)$ exista para todo z com $|z - z_0| < \delta$.*

Observa-se aqui que o Teorema 2 é uma condição necessária e o Teorema 3 é uma condição suficiente para que uma função f seja analítica num ponto z_0 .

Exemplos de funções analíticas.

1. Qualquer polinômio da forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (40)$$

é uma função analítica em todo o plano complexo \mathbb{C} .

Neste caso, diz-se que $f(z)$ é uma função inteira (analítica no plano inteiro).

2. A razão $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ onde P e Q são polinômios, é função analítica nos pontos onde $Q(z) \neq 0$.
3. $f(z) = \bar{z}$ não é uma função analítica em nenhum ponto, pois não satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em nenhum ponto, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} f(z) &= \bar{z} = x - iy, \\ u(x, y) &= x \quad e \quad v(x, y) = -y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{41}$$

Toda função analítica é infinitamente diferenciável, este fato contrasta fortemente com o que ocorre no caso de funções reais.

Por exemplo, consideremos a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) = x^2 \text{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Temos que φ é diferenciável em toda a reta com derivada

$$\varphi'(0) = 0 \quad e \quad \varphi'(x) = 2x \text{sen}(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{se } x \neq 0. \tag{42}$$

Mas φ' não é sequer contínua no ponto $x = 0$, pois o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

A seguir é apresentado de um modo muito resumido, a fórmula integral de Cauchy que é um resultado fundamental para as funções analíticas. Ela permite mostrar que se uma função é analítica num ponto, então ela é infinitamente diferenciável neste ponto. Mais detalhes, principalmente como as integrais complexas são calculadas, podem ser vistos em [20, 7, 16, 25].

Teorema 4. *Seja $f(z)$ uma função analítica num domínio aberto $D \subset \mathbb{C}$ e C um contorno fechado contínuo em D , então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \tag{43}$$

para qualquer ponto z no interior de C , onde a integral de linha ao logo de C é tomada no sentido positivo. Baseado na fórmula (43), denominada fórmula integral de Cauchy, pode-se mostrar [7] que f possui derivadas contínuas de todas as ordens no interior de C , dadas por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{44}$$

Portanto, se uma função $f(z)$ é analítica num domínio $D \subset \mathbb{C}$, então as derivadas de todas as ordens de f existem e também são analíticas em D .

2.3 Transformações Conformes

As transformações conformes têm várias aplicações em diferentes ramos da física, matemática e engenharias, como teoria dos campos magnéticos, problemas de eletrostática, problemas de escoamento de fluídos e outros [21]. A ideia básica é transformar o domínio onde o problema é proposto num domínio mais simples, cuja solução do problema é mais fácil.

Sejam C_1 e C_2 duas curvas suaves no domínio de $f(z)$ que se cruzam em z_0 , cujas imagens no plano- w são representadas por S_1 e S_2 , respectivamente. Assim, se $w_0 = f(z_0)$, as curvas S_1 e S_2 se cruzam em w_0 , conforme Fig. 7.

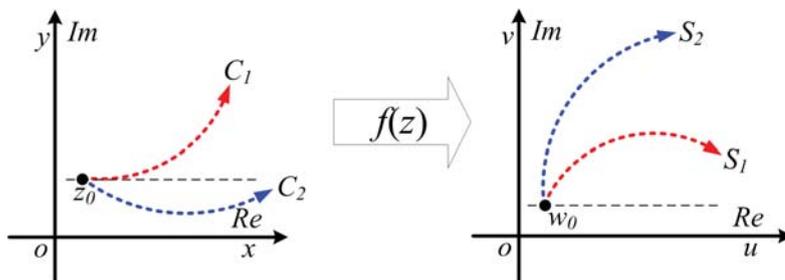


Figura 7: Ângulos orientados no sentido positivo entre as curvas.

Definição 3. A transformação $w = f(z)$ é conforme num domínio $D \subset \mathbb{C}$ se o ângulo entre C_1 e C_2 em z_0 , for igual ao ângulo entre S_1 e S_2 em w_0 , em valor absoluto e sentido, para todos os pontos z_0 em D .

Teorema 5. Se $f(z)$ é analítica e $f'(z) \neq 0$ num domínio D , então a transformação $w = f(z)$ é conforme em D [20].

Demonstração. A transformação que preserva os valores absolutos dos ângulos orientados, mas não necessariamente os sentidos, é denominada isogonal [11]. Observe o ponto $z_0 + \Delta z$ em C_0 no sentido positivo a partir de z_0 , o limite do argumento de Δz quando $\Delta z \rightarrow 0$ é o ângulo de inclinação α da reta tangente a curva C_0 no ponto, como

representada na Fig. 8 (a). Se $w_0 = f(z_0)$ e se $w_0 + \Delta w$ em S_0 no sentido positivo a partir de w_0 é a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o argumento Δw tende para o ângulo de inclinação β da reta tangente a curva S_0 no ponto w_0 , como representado na Fig. 8 (b).

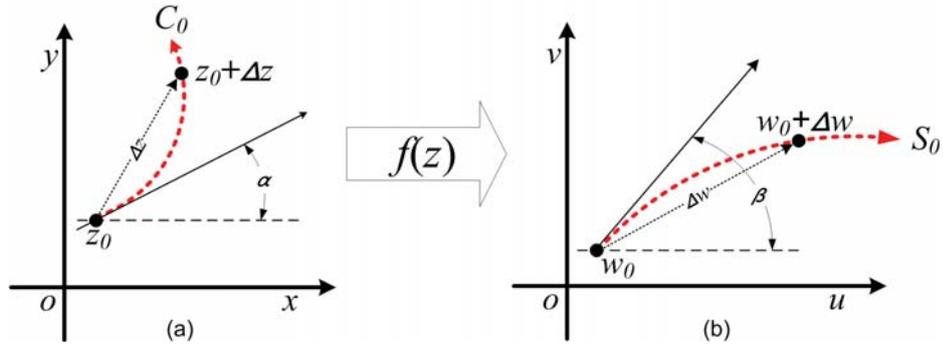


Figura 8: Ilustração de conformalidade.

Temos que a derivada $f'(z_0)$ é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad (45)$$

onde $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Tem-se que a tangente à curva C_0 em z_0 gira um ângulo θ_0 sob a transformação $w = f(z)$. E sendo θ_0 um argumento do número $f'(z_0)$, então o cálculo do limite do argumento de $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ é

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{z=z_0} \right] = \arg \left[\arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{z=z_0} \right] = \arg f'(z)|_{z=z_0} = \theta_0. \quad (46)$$

Sendo $w_0 + \Delta w$ a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o valor do argumento de Δw é dado por

$$\arg \Delta w = \arg \Delta z + \arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right). \quad (47)$$

Quando $\Delta z \rightarrow 0$, o $\arg \Delta z \rightarrow \alpha$ e o $\arg \Delta w \rightarrow \beta$. Então

$$\beta = \alpha + \arg \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right), \quad (48)$$

assim em (46) temos,

$$\beta = \alpha + \arg |f'(z_0)|, \quad (49)$$

ou

$$\beta = \alpha + \theta_0. \quad (50)$$

O valor encontrado no cálculo do limite do argumento de $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ em (46) somente é válido para a transformação $w = f(z)$, desde que f seja analítica em z_0 e $f'(z) \neq 0$. Como o ângulo θ_0 é encontrado pela função transformadora f e pelo ponto z_0 , ele é o mesmo para todas as curvas passando por z_0 . Sendo as curvas C_1 e C_2 que se cruzam no ponto z_0 do plano complexo z , com α_1 e α_2 os ângulos de inclinação das curvas C_1 e C_2 , respectivamente, em z_0 . Através da transformação $w = f(z)$, obtém-se as curvas S_1 e S_2 imagens de C_1 e C_2 , respectivamente, no plano- w , interceptando em $w_0 = f(z_0)$. Os ângulos de inclinação das curvas S_1 e S_2 em w_0 são β_1 e β_2 , respectivamente, como ilustrado na Fig. 9.

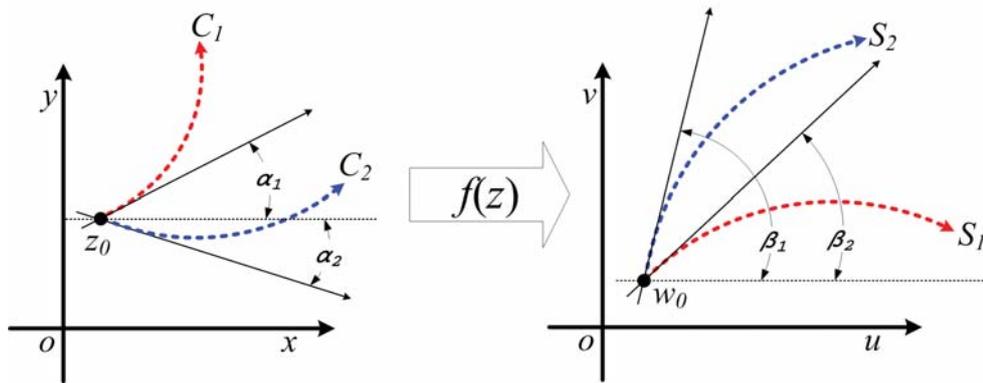


Figura 9: Preservação dos Ângulos

De (49) tem-se que $\beta_1 = \alpha_1 + \theta_0$ e $\beta_2 = \alpha_2 + \theta_0$. Desta forma tem-se

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (51)$$

Portanto, o ângulo entre C_1 e C_2 é igual a ao ângulo entre S_1 e S_2 , como ilustrado na Fig. 9, o que completa a demonstração. \square

2.4 Exemplos de Transformações Conformes

A grande importância das transformações conformes está no fato delas tornarem possível transformar problemas com domínios aparentemente complicado em problemas

com domínios mais simples.

2.4.1 Transformação por Translação

$$w = z + b \quad (52)$$

Sendo b uma constante complexa. Esta transformação mapeia imagens do plano- z , transladado em direção ao vetor b do plano- w . A Fig. 10 ilustra o plano- z e a Fig. 11 o plano- w .

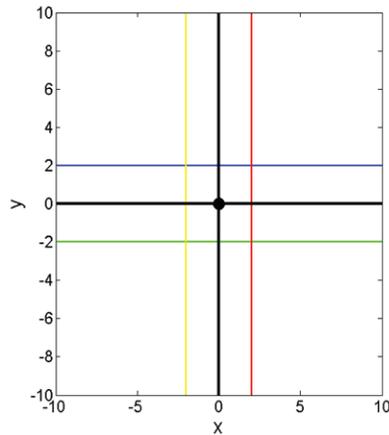


Figura 10: Plano- z da Transformação por translação

Na Fig. 11 (a) tem-se a transformação por translação com $b = 5 + 8i$ no primeiro quadrante. Na Fig. 11 (b), tem-se a imagem sendo transladada na direção do vetor $b = -5 + 8i$, segundo quadrante. Nas Fig. 11 (c) e Fig. 11 (d) também é observado a translação das imagens nas direções $b = -5 - 8i$ no terceiro quadrante e $b = 5 - 8i$ no quarto quadrantes, respectivamente. O ponto que aparece na Fig. 11 indica a direção do vetor \vec{Ob} .

2.4.2 Transformação por Rotação

$$w = e^{i\vartheta} z \quad (53)$$

Em (53) ϑ é uma constante real. Para esta transformação, imagens no plano- z são giradas de um ângulo ϑ . Se $\vartheta > 0$, a rotação se dará no sentido anti-horário, mas se $\vartheta < 0$, a rotação será no sentido horário. A Fig. 12 ilustra a transformação por rotação para $\vartheta > 0$ e para $\vartheta < 0$ com três ângulos distintos.

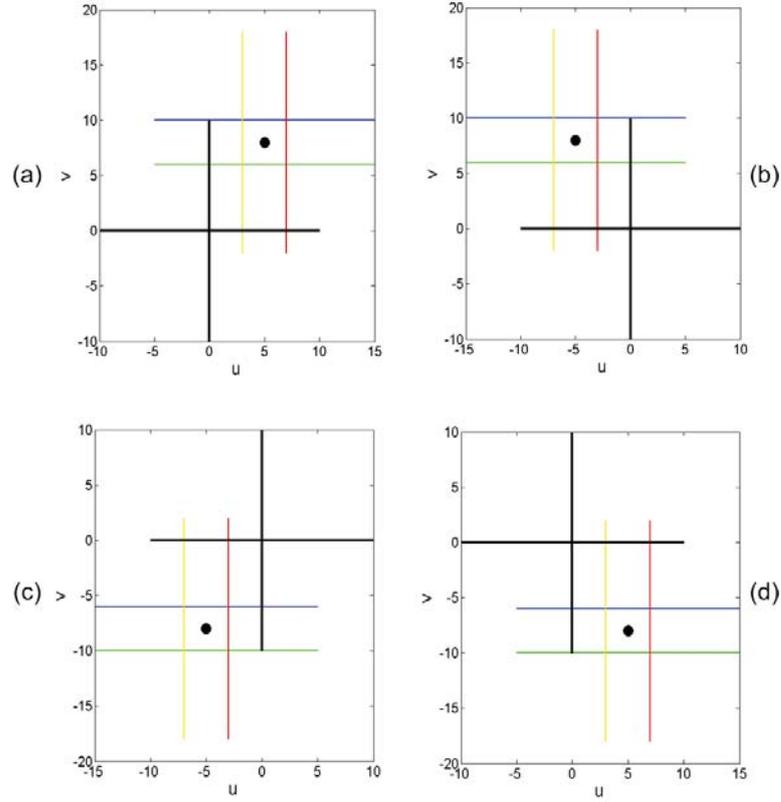


Figura 11: Plano- w da Transformação por translação

A Fig. 12 (a) ilustra o plano- z utilizado para a transformação por rotação e as Fig. 12 de (b) a (d) ilustram o plano- w com as transformações por rotação. Na Fig. 12 (b) tem-se $\vartheta = -\frac{\pi}{12}$, observa-se que houve rotação de 15° no sentido horário. Nas Fig. 12 (c) e Fig. 12 (d) tem-se rotações de 45° com $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ no sentido horário e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário, respectivamente. O ponto que aparece na Fig. 12 indica que não houve translação.

2.4.3 Transformação por Dilatação ou Contração

$$w = \varphi z \quad (54)$$

Sendo φ uma constante real em (54). Para $\varphi > 1$, as imagens serão dilatadas, mas quando $0 < \varphi < 1$, as imagens serão contraídas. Na Fig. 13 (a) é ilustrado o plano- z e as Fig. 13 de (b) a (d) ilustram o plano- w transformado tanto por dilatação quanto por contração para três valores distintos de φ .

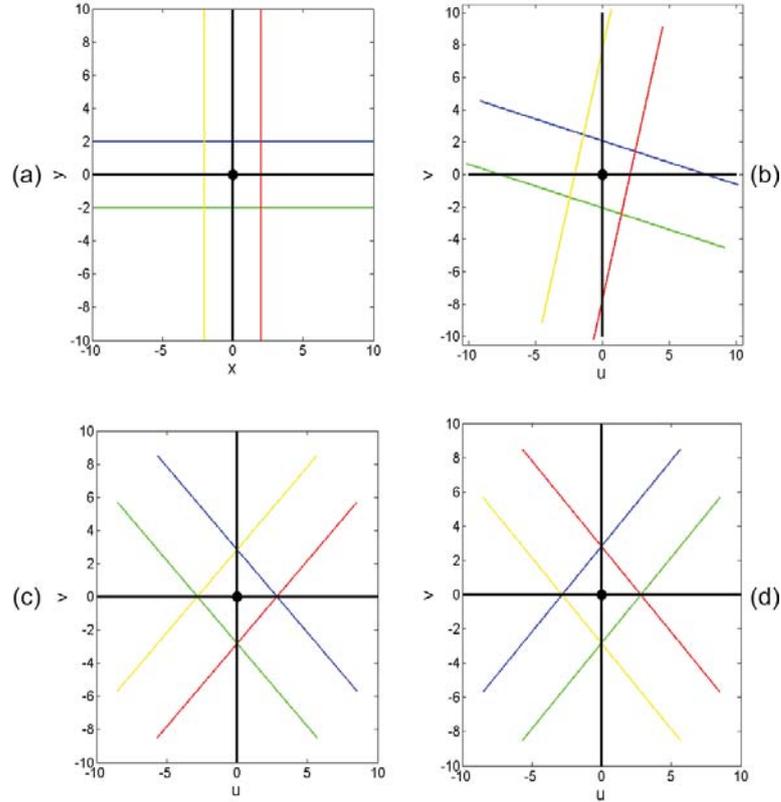


Figura 12: Transformação por rotação

Na Fig. 13 (b) foi utilizado $\varphi = 0,8$ onde pode ser observado que houve contração no tamanho da imagem do plano- z para o plano- w (Fig. 13 (a) e Fig. 13 (b)). Nas Fig. 13 (c) e Fig. 13 (d) foram utilizados os valores $\varphi = 1,2$ e $\varphi = -1,2$, respectivamente. Observa-se nas Fig. 13 (c) e Fig. 13 (d) que houve dilatação nas imagens e que o valor negativo aplicado na Fig. 13 (d) promoveu rotação de 180° entorno da origem do sistema (a linha azul está no plano- w superior na Fig. 13 (c) e no plano- w inferior na Fig. 13 (d)). O ponto que aparece na Fig. 13 indica que não houve translação.

2.4.4 Transformação por Inversão

$$w = \frac{1}{z} \quad (55)$$

A expressão (55) estabelece correspondência biunívoca entre os pontos do plano- z e os pontos do plano- w , exceto para os pontos $z = 0$ que não tem imagem, e $w = 0$ que não é imagem de nenhum ponto do plano- z . A transformação por inversão é ilustrada

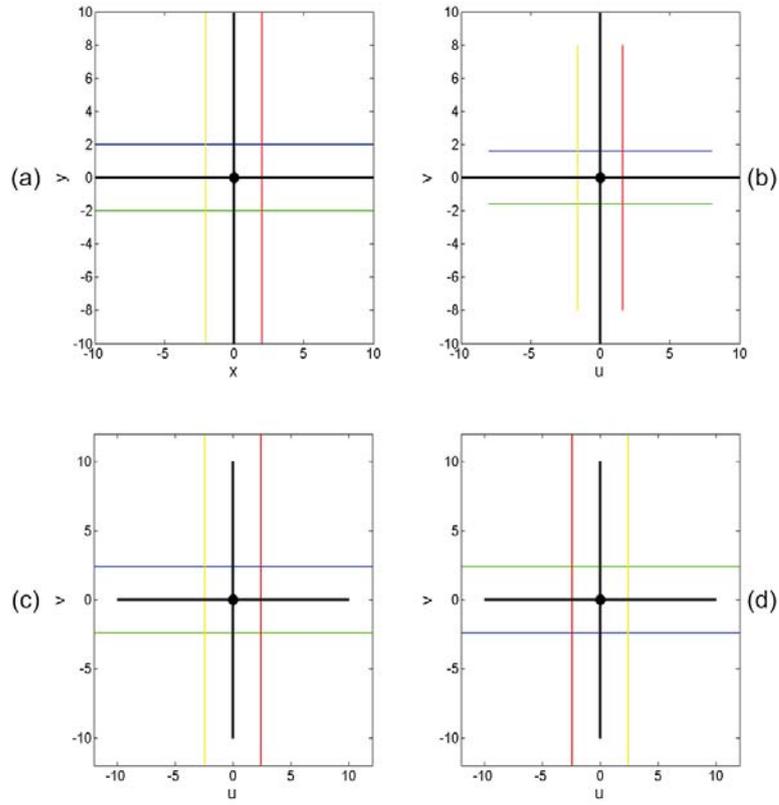


Figura 13: Transformação por dilatação e contração.

na Fig. 14.

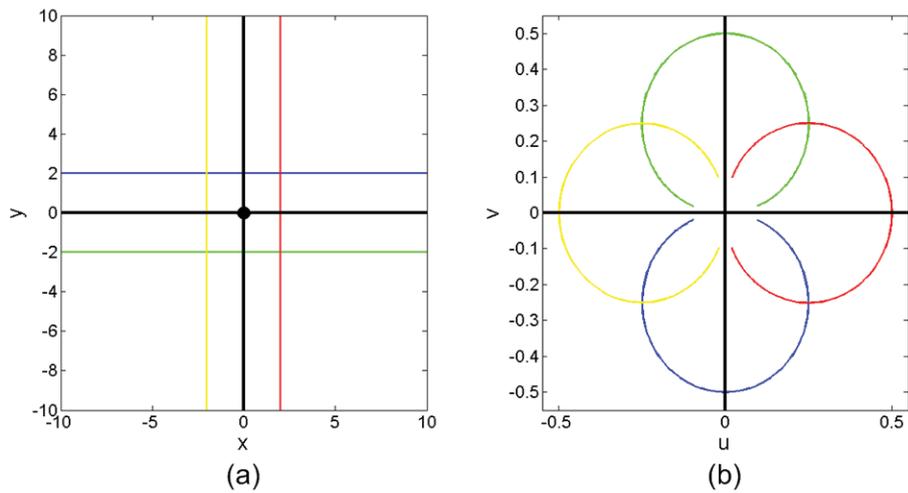


Figura 14: Transformação por inversão

Na Fig. 14 (a) tem-se o plano- z e na Fig. 14 (b) tem-se o plano- w transformado. Observa-se que as linhas verdes e azuis cortam os eixos das ordenadas num ângulo de 90° nos dois planos. Observa-se ainda que as linhas vermelhas e amarelas cortam as linhas verdes e azuis nos dois planos. Outra observação está relacionada com a contração e com a rotação de 180° em torno do eixo das abscissas da imagem no plano- w . No plano- z , cada segmento mede exatamente 10 unidades de comprimento, enquanto que no plano- w , a imagem de cada segmento mede aproximadamente 0,5 unidades de diâmetro do círculo. A linha verde que aparece no semiplano- z inferior, aparece no semiplano- w superior. O ponto que aparece na Fig. 14 (a) não aparece na Fig. 14 (b), pois, como $z = 0$ não tem imagem, $w = 0$ não pode ser imagem de nenhum ponto.

2.4.5 Transformação Linear

$$w = az + b \quad (56)$$

Sendo a e b em (56) constantes complexas. Esta transformação é a combinação das transformações de translação, rotação e dilatação. A Fig. 15 (a) ilustra o plano- z e a Fig. 15 (b) ilustra o plano- w transformado.

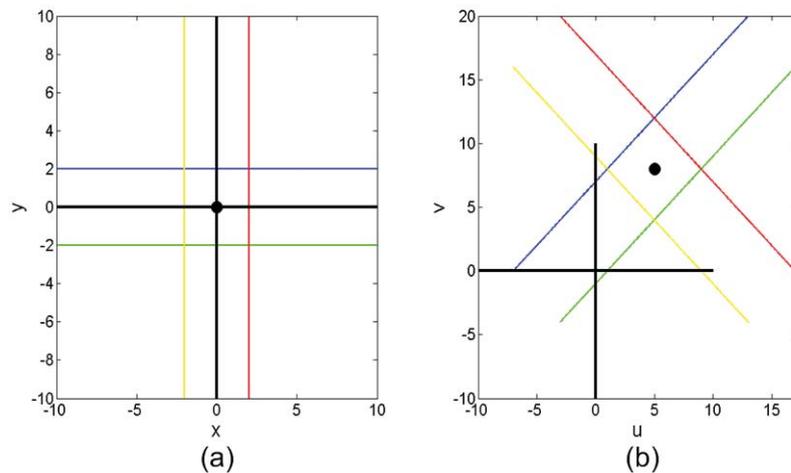


Figura 15: Transformação linear

A Fig. 15 (b) foi produzida a partir de (56) com $a = 1 + i$ e $b = 5 + 8i$.

2.4.6 Transformação de Möebius

Definição 4. Uma transformação de Möebius é uma função de \mathbb{C} em \mathbb{C} , definida por

$$T(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (57)$$

onde a, b, c, d são números complexos tais que $ad - bc \neq 0$.

A transformação de Möebius, também chamada de transformação fracionária, é considerada como uma composição das transformações de translação, rotação, dilatação e inversão [20]. Ela tem a propriedade de levar qualquer reta numa reta ou num círculo, e qualquer círculo numa reta ou num círculo, ou seja, ela transforma retas e círculos em retas ou círculos.

A transformação de Möebius leva cada ponto do plano- z , exceto o ponto $z = \frac{-d}{c}$ com $c \neq 0$, em um único ponto do plano- w . Isolando z na expressão (57), temos a inversa da transformação de Möebius que é também uma transformação de Möebius, dada por

$$T^{-1}(w) = z = \frac{-dw + b}{cw - a}. \quad (58)$$

Os pontos $z = \frac{-d}{c}$ e $w = \frac{a}{c}$ são pontos críticos da transformação de Möebius e de sua inversa, respectivamente, no sentido de que $T(\frac{-d}{c}) = \infty$ e $T^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$.

Pode-se mostrar que existe uma única transformação de Möebius (ver [20]), que leva três pontos distintos z_1, z_2 e z_3 do plano- z a três pontos distintos w_1, w_2 e w_3 do plano- w , tal que para cada ponto z vale a seguinte relação, denominada de razão cruzada,

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (59)$$

onde $w = T(z)$.

Por exemplo, se é desejado, achar a transformação de Möebius que mapeia os pontos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = \infty$ nos pontos $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ e $w_3 = 1$ respectivamente, então, substituindo estes pontos na expressão (59) obtemos

$$\frac{(w + 1)(0 - 1)}{(w - 1)(0 + 1)} = \frac{(z - 0)(1 - \infty)}{(z - \infty)(1 - 0)}, \quad (60)$$

então

$$\frac{-w-1}{w-1} = \frac{z(1-\infty)}{z-\infty}, \quad (61)$$

como $z - \infty = -\infty$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\frac{-w-1}{w-1} = \frac{z(1-\infty)}{-\infty}, \quad (62)$$

logo

$$\frac{-w-1}{w-1} = z, \quad (63)$$

portanto

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (64)$$

3 Aplicações das Transformações Conformes

Neste capítulo vamos usar as transformações conformes para resolver dois problemas de eletrostática.

3.1 O Problema do Capacitor Excêntrico

Para o desenvolvimento desta seção seguimos as seguintes referências [4, 5, 3, 17, 2]. Sistemas de sintonia antigos, para rádios, usavam um capacitor de placas paralelas e concêntricas cuja capacitância variava com a variação das áreas comuns entre as placas, o que era realizado mecanicamente pela entrada ou saída de algumas placas móveis entre placas fixas. Outro papel das capacitâncias variáveis (capacitor excêntrico), seria em sistemas elétricos de potência para ajuste automático do fator de potência em indústrias ou em barramentos de subestações e também para sintonizar filtros harmônicos, entre outras utilidades.

Definição 5. *Capacitância é a propriedade que os capacitores têm de armazenar energia elétrica sob a forma de um campo eletrostático. É medida pelo quociente entre a quantidade de carga armazenada e a diferença de potencial que existe entre as placas.*

$$C = \frac{Q}{V} \quad (65)$$

O capacitor é um componente de muita importância para o funcionamento dos circuitos eletrônicos, e por isso tais equipamentos é encontrado em grande quantidade. Com formatos e tamanhos que dependem de seu valor e função, os capacitores podem ser muito pequenos, na escala de milímetros, ou muito grandes, na escala de metros. Capacitores são componentes que têm por função armazenar energia elétrica.

A Fig. 16 mostra um capacitor cilíndrico concêntrico de comprimento d_c , formado por dois cilindros coaxiais de raios R_1 e R_2 e a Fig. 17 mostra a seção transversal deste capacitor. Suponha que $d_c \gg R_1$, de forma a poder-se desprezar as distorções do campo elétrico que ocorre nas extremidades dos cilindros. Aqui consideramos que a placa externa tem potencial V positivo, enquanto a placa interna encontra-se com potencial nulo.

Admitindo que as placas do capacitor sejam homogêneas, a capacitância é dada por

$$C_c = 2\pi\epsilon \frac{d_c}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}. \quad (66)$$

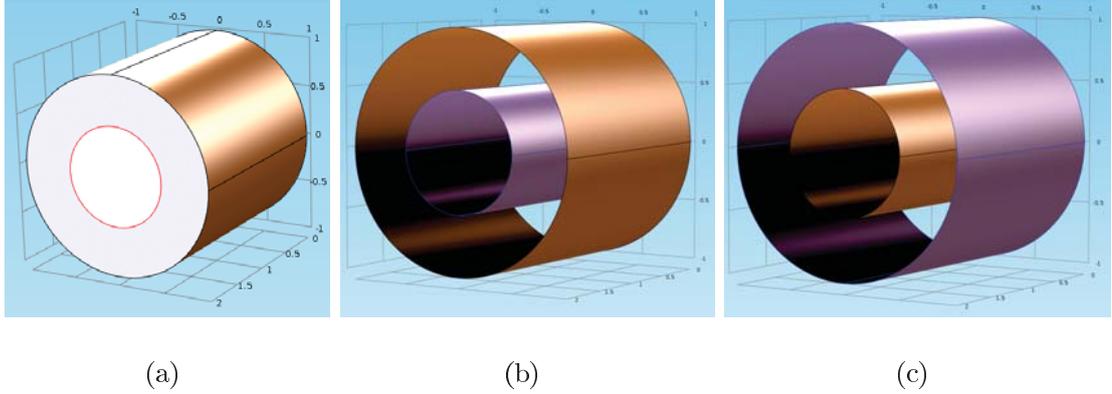


Figura 16: Materiais e condições de contorno para estudo de caso 1.

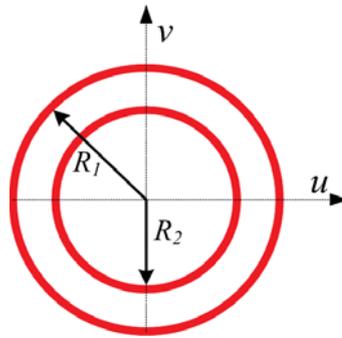


Figura 17: Capacitor cilíndrico concêntrico.

onde ε [Fm^{-1}] é a permissividade do dielétrico [4, 5]. Utilizando (66), calcula-se diretamente o valor da capacitância para o capacitor cilíndrico concêntrico de raios R_1 e R_2 .

A Fig. 18 ilustra um caso de um capacitor cilíndrico, semelhante ao da Fig. 17, com raios $R_1 = r_1$, e $R_2 = r_2$, porém com excentricidade não nula, isto é, $d \neq 0$.

Para este problema, a solução para a capacitância não tem uma fórmula explícita. Existe certa dificuldade para calcular a capacitância do dispositivo com esta geometria. No entanto, pode-se encontrar uma geometria onde a capacitância possa ser facilmente calculada. Utilizando manipulação algébrica, pode-se achar uma transformação conforme que leva dois círculos excêntricos em dois círculos concêntricos [16]. Esta transformação é dada por,

$$w(z) = t \frac{R_1}{r_1} e^{i\theta} \frac{d(z - z_a) - s(z_b - z_a)}{d(z - z_a) - t(z_b - z_a)} \quad (67)$$

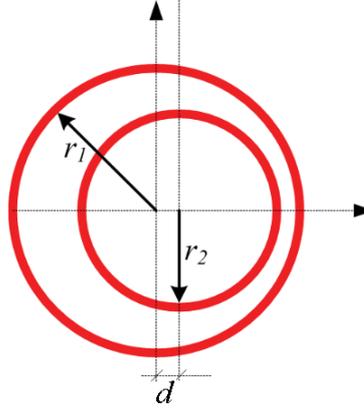


Figura 18: Capacitor cilíndrico excêntrico.

$$st = r_1^2$$

$$(d - s)(d - t) = r_2^2 \quad (68)$$

$$\frac{r_2}{r_1} \left| \frac{t}{(d - t)} \right| = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{-d^2 - r_1^2 + r_2^2 + \sqrt{-4d^4r_1^2 + (d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}}{2d} = t$$

$$\frac{-d^2 - r_1^2 + r_2^2 - \sqrt{-4d^4r_1^2 + (d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}}{2d} = s \quad (69)$$

onde z_a são os pontos sobre a placa externa de raio r_1 e z_b são os pontos sobre a placa interna de raio r_2 dos círculos excêntricos. $d = |z_{ac} - z_{bc}|$, onde z_{ac} e z_{bc} são os centros das circunferências excêntricas descritas por z_a e z_b .

R_1 e R_2 são os raios das circunferências externa e interna, respectivamente, do plano concêntrico. A transformação em (67) leva o comprimento do raio r_1 no comprimento do raio R_2 . A constante real de contração ou dilatação s relaciona os raios das circunferências concêntricas e excêntricas da seguinte forma:

$$s = \frac{r_2^2(R_1 r_2 + r_1 R_2)}{dr_1 R_2} \quad (70)$$

A translação ocorrida nas circunferências excêntricas para as circunferências concêntricas acontece sobre o eixo das abscissas. Desta forma, a constante de translação t , neste caso, é $t \in \mathbb{R}$. Sendo θ a constante de rotação, como a transformação é realizada na circunferência, θ pode assumir qualquer valor, neste caso, $\theta = 0$.

Portanto, assumindo como dados $R_1 = r_1 = 10$, $R_2 = r_2 = 5$ e $d = 3$ para a Fig. 18, e usando a transformação conforme (67), tem-se a nova geometria circular no plano- w complexo. A demonstração da transformação que leva círculos excêntricos em círculos concêntricos é realizada no trabalho [16]. Nesta nova geometria os círculos são concêntricos e a relação entre os plano- z e plano- w estão dispostos na Tab. 1.

Tabela 1: Aplicando a transformação $w(z)$ obtemos a relação entre os pontos dos planos- z (excêntrico) e plano- w (concêntrico) para o capacitor cilíndrico excêntrico.

Plano- z	Plano- w
$r_1 = 10.0000$	$R'_1 = 17.4788$
$r_2 = 5.0000$	$R'_2 = 10.0000$
$d = 3$	$d' = 0$

3.2 A Transformação de Schwarz-Christoffel

Em alguns problemas de transformação de domínio, há a necessidade da utilização de uma transformação que contenha a presença de pontos críticos, pois em tais casos, a transformação deixa de ser conforme [22, 18]. Isto é útil pois, permite transformar curvas regulares, por exemplo, o eixo real ou uma circunferência, em curvas com arestas, como polígonos. Esta transformação é chamada de transformação de Schwarz-Christoffel e é uma transformação conforme. A transformação de Schwarz-Christoffel, leva o eixo real do plano- z , na fronteira de um polígono do plano- w e a metade superior do plano- z no interior deste polígono [5].

Em outras palavras, considere o polígono com N lados no plano- w com vértices em w_1, w_2, \dots, w_N e com correspondentes ângulos interiores $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$, respectivamente. Os pontos x_1, x_2, \dots, x_N sobre o eixo real do plano- z , utilizando a transformação de Schwarz-Christoffel, são levados, respectivamente, nos vértices w_1, w_2, \dots, w_N , como ilustrado na Fig. 19 [19, 17].

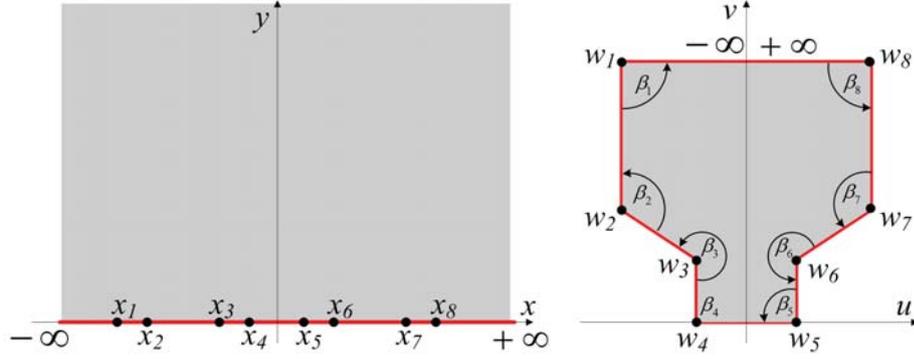


Figura 19: Transformação de Schwarz-Christoffel.

A transformação de Schwarz-Christoffel $w = w(z)$ é definida através de sua derivada por,

$$\frac{dw}{dz} = A + \varpi \prod_{n=1}^N \frac{1}{(z - x_n)^{\alpha_n}}. \quad (71)$$

Em (71) as constantes complexas A e ϖ determinam a forma, orientação e posição do polígono, N é o número de lados do polígono e $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, são as pré-imagens dos vértices w_1, w_2, \dots, w_N , respectivamente. Os vértices do polígono são os pontos $w_j = w(x_j)$ com $(j = 1, 2, 3, \dots, N-1)$ e $w_N = w(\infty)$ que pode ser considerado como casos limites de polígonos fechados. Os expoentes α_n em (71), são números reais, e seus valores estão relacionados aos ângulos internos do polígono. Os ângulos são medidos no sentido anti-horário, como ilustrado na Fig. 20 [5].

Desta forma, pode-se definir α_n como,

$$\alpha_n = \frac{\pi - \beta_n}{\pi}, \quad (72)$$

portanto,

$$\sum_{n=1}^n \beta_n = (N - 2)\pi. \quad (73)$$

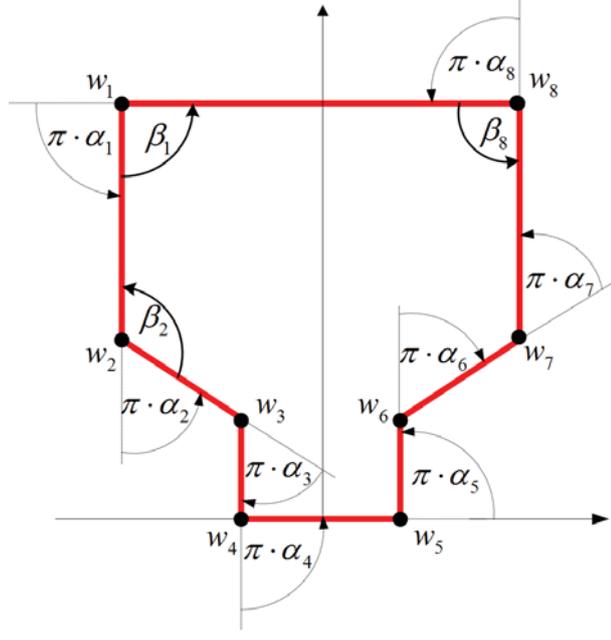


Figura 20: Expoentes da transformação de Schwarz-Christoffel

Sabendo-se que a soma dos suplementos dos ângulos internos, de qualquer polígono fechado é igual a 2π , de (72) e (73) tem-se que,

$$\sum_{n=1}^N (\pi - \beta_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \pi = 2\pi. \quad (74)$$

A transformação de Schwarz-Christoffel é contínua em todo o semiplano $y \geq 0$ e é conforme neste semiplano, exceto nos pontos x_n , que são pontos críticos, ou seja, pontos cuja $w'(z) = 0$ [18, 7]. Para entender (71), deve-se considerar o ponto z movendo-se ao longo do eixo real, da esquerda para a direita em direção ao ponto x_1 . Neste caso, admite-se que w se move ao longo de um dos lados do polígono em direção a w_1 , de acordo com a ilustração da Fig. 21.

Analisando os denominadores de (71), quando z passa da esquerda de x_1 ou ($x < x_1$) para a direita de x_1 ou ($x_1 < x < x_2$), o argumento do número $z - x_1$, muda de π para zero. Nesta condição os argumentos de $z - x_2, z - x_3, \dots, z - x_N$, permanecem inalterados. No ponto x_1 , portanto, o argumento de w , de acordo com (71) e a Fig. 21, altera seu valor de $\pi\alpha_1$ [14, 23].

Portanto, considerando $A = 0$ e $\varpi = 1$, para que não haja mudança na forma, nem na orientação e nem na posição da geometria mapeada, obtém-se as fórmulas a seguir

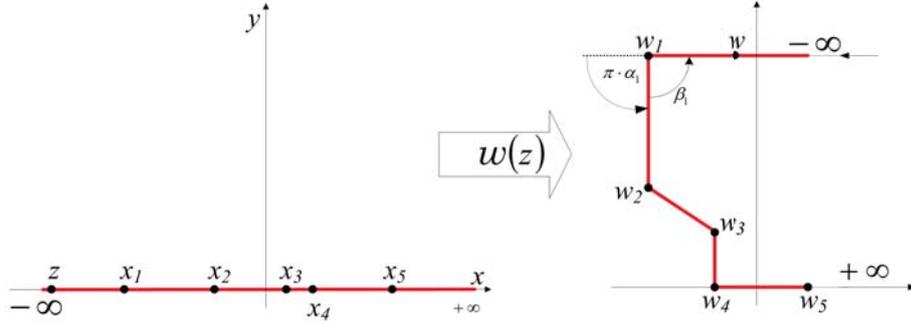


Figura 21: Dinâmica da transformação de Schwarz-Christoffel.

por integração de 71 [2, 4], que permite calcular os valores dos vértices do polígono ilustrado na Fig. 22.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \int_{-\infty}^{x_1} \prod_{n=1}^N (z - x_n)^{-\alpha_n} dz \\
 w_2 &= w_1 + \int_{x_1}^{x_2} \prod_{n=1}^N (z - x_n)^{-\alpha_n} dz \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{75}$$

$$w_N = w_{N-1} + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \prod_{n=1}^N (z - x_n)^{-\alpha_n} dz \tag{76}$$

3.2.1 Mapeamento do semiplano superior no interior de um retângulo

Para o mapeamento dos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 sobre o eixo das abscissas nos vértices do retângulo, e do semiplano superior no interior do mesmo retângulo, a expressão (76) assume a seguinte forma,

$$w(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{(z - x_1)^{\frac{1}{2}}(z - x_2)^{\frac{1}{2}}(z - x_3)^{\frac{1}{2}}(z - x_4)^{\frac{1}{2}}}. \tag{77}$$

Escolhem-se os pontos $x_1 = -a, x_2 = -1, x_3 = 1$ e $x_4 = a$, com $a > 1$ como as pré-imagens dos vértices do polígono. Assim a integral (77) pode ser reescrita da seguinte forma

$$w(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - 1)}}. \tag{78}$$

Utilizando de manipulação algébrica e considerando $z_0 = 0$, a expressão (78) assume a seguinte forma, denominada de integral de elíptica de 1ª ordem:

$$w(z, k) = k \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (79)$$

onde $k = \frac{1}{a}$, $0 < k < 1$, é o módulo da integral elíptica. Definem-se os números, $K(k) = K = w_3$ e $K(k') = K' = |w_4 - w_3|$. K e K' são os quartos de período real e imaginário, respectivamente, calculados da seguinte forma [15]:

$$K = K(k) = k \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (80)$$

$$K' = K(k') = k \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \quad (81)$$

Assim o semiplano superior do plano- z , $y \geq 0$ é transformado no retângulo de vértices $w_1 = -K + K'i$, $w_2 = -K$, $w_3 = K$ e $w_4 = K + K'i$, cujas pré-imagens correspondem aos pontos $x_1 = -a$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = a$, respectivamente, ver Fig. 22.

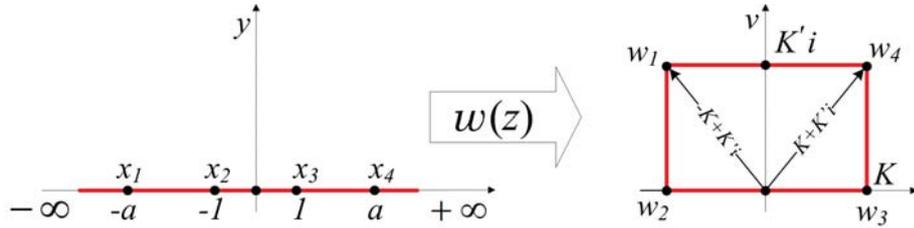


Figura 22: Semiplano superior do plano- z no retângulo no plano- w .

A correspondência entre as pré-imagens e os vértices são dispostas na Tab. 2.

A inversa da integral elíptica de primeira ordem é uma função denominada Função Elíptica de Jacobi denotada por $sn(w, k)$. Isto é,

$$z = sn(w, k) = w^{-1}(z, k). \quad (82)$$

Quando o ponto a é dado sobre o eixo x , os valores de k , k' , K e K' são facilmente calculados. Observa-se que todos os parâmetros da integral elíptica e da função de Jacobi dependem de a .

Um exemplo de mapeamento do semiplano superior $Im(z) \geq 0$ no interior do retângulo pode ser realizado utilizando (77). Dados $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$ e

Tabela 2: Correspondência entre os plano- z e plano- w .

Plano- z	Plano- w
$x_1 = -a = -\frac{1}{k}$	$w_1 = -K + K'i$
$x_2 = -1$	$w_2 = -K$
$x_3 = 1$	$w_3 = K$
$x_4 = a = \frac{1}{k}$	$w_4 = K + K'i$

$a = 13,888$, obtém-se para $k = 0,072$, $k' = 0,997$, $K = 1,5$ e $K' = 4$ a relação entre os pontos dos plano- z e plano- w , como disposto na Tab. 3.

Tabela 3: Dados na construção do polígono de quatro lados.

Plano- z	Plano- w
$x_1 = -a = -13,888$	$w_1 = -K + K'i = -1,5 + 4i$
$x_2 = -1$	$w_2 = -K = -1,5$
$x_3 = 1$	$w_3 = K = 1,5$
$x_4 = a = 13,888$	$w_4 = K + K'i = 1,5 + 4i$

A partir dos dados da Tab. 3 é possível mapear linhas verticais e horizontais no interior do retângulo da Fig. 23 no plano- z , em linhas no plano- w , como ilustrado na Fig. 24 usando a transformação inversa em (82).

3.3 O Problema do Capacitor de Placas Semicilíndricas

Seja o problema de determinar as linhas equipotenciais e as linhas de campo da capacitância do capacitor de placas condutoras semicilíndricas, dispostas como ilustrado na Fig. 25 com secção transversal como na Fig. 26. A solução do problema é facilmente conhecida da engenharia elétrica, quando o capacitor possui placas paralelas. Neste caso, as linhas equipotenciais são paralelas as placas e as linhas de campo são perpendiculares. Portanto, para resolver o problema do capacitor de placas semicilíndricas, a

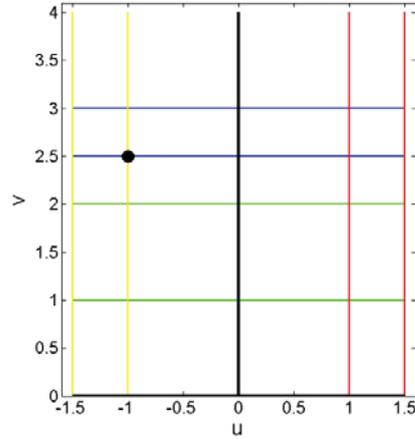


Figura 23: Linhas mapeadas no plano- w .

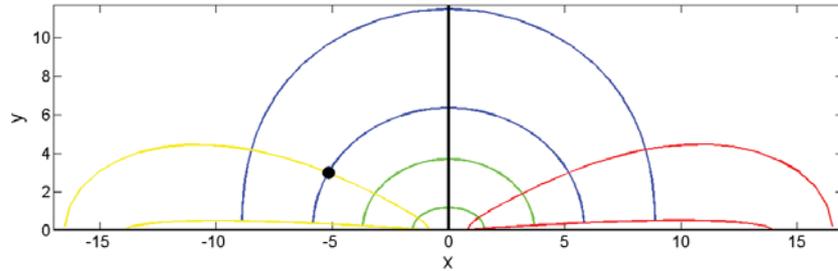


Figura 24: Mapeamento produzido pela função de Jacobi.

ideia é usar transformações conformes para transformar a região cilíndrica, numa região retangular, resolver o problema nesta região retangular, é usar as transformações inversas para achar a solução do problema proposto.

Considera-se a placa 1 (vermelha) com potencial eletrostático de 10 V e a placa 2 (azul) com potencial *zero* como na Fig. 26. O interior das placas é preenchido com dielétrico [9]. Este capacitor possui profundidade d_c [m] e está imerso no meio de permissividade infinita [7].

Admitindo que a seção transversal do capacitor constitua geometria inserida no plano- z , define-se a transformação bilinear $w(z)$, dada em [16] por,

$$w(z) = \beta \frac{z - R_0}{z + R_0} \quad (83)$$

onde R_0 [m] é o raio do capacitor, β é uma constante complexa definida por,

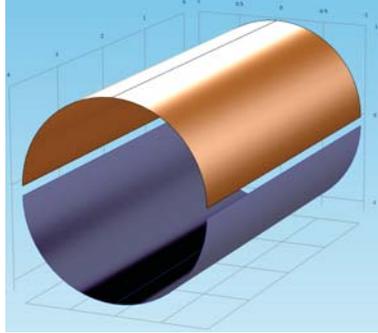


Figura 25: Capacitor de placas semicilíndricas.

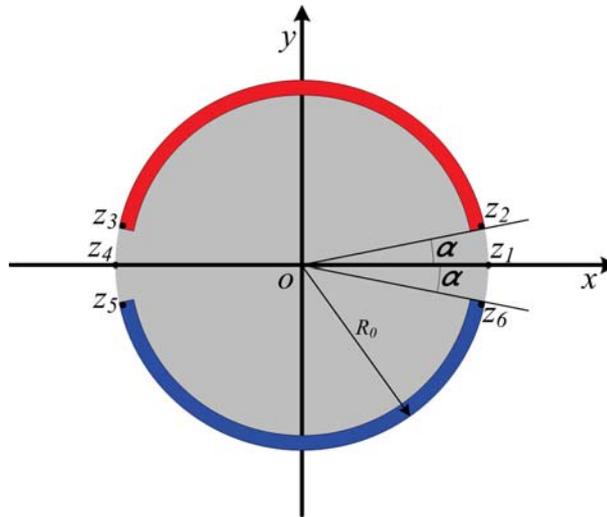


Figura 26: Capacitor de placas semicilíndricas no plano- z .

$$\beta = \frac{e^{i\alpha} + 1}{e^{i\alpha} - 1} \quad (84)$$

e α [rad] é um ângulo associado ao espaçamento angular entre as placas. A Fig. 26 ilustra os valores R_0 , α e alguns pontos relevantes para a transformação de domínio. A relação (83) mapeia os pontos no interior do círculo definido pelo capacitor, em pontos no semiplano superior do plano- w . Particularmente os pontos z_1 a z_6 sobre a circunferência de raio R_0 no plano- z , são mapeados nos pontos w_1 a w_6 , como ilustrado na Fig. 27, observando-se que o ponto z_4 é mapeado no ∞ , e w_4 não aparece no plano- w .

A Tab. 4 dispõe a correspondência entre os pontos dos plano- z e plano- w .

Agora utiliza-se a transformação de Schwarz-Christoffel, para transformar a geo-

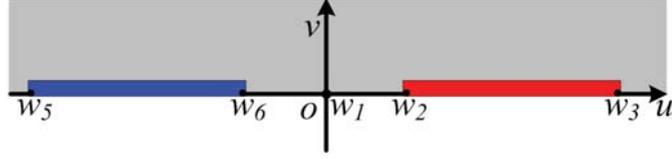


Figura 27: Capacitor de placas semicilíndricas no plano- w .

Tabela 4: Pontos nos plano- z e plano- w .

Plano- z	Plano- w
$z_1 = R_0$	$w_1 = 0$
$z_2 = R_0 e^{\alpha i}$	$w_2 = 1$
$z_3 = R_0 e^{-\alpha i}$	$w_3 = \beta^2$
$z_4 = -R_0$	$w_4 = \infty$
$z_5 = -R_0 e^{\alpha i}$	$w_5 = -\beta^2$
$z_6 = R_0 e^{-\alpha i}$	$w_6 = -1$

metria da Fig. 27, do plano- w , na geometria do capacitor de placas planas paralelas no plano complexo, denotado aqui por plano- t . A expressão da transformação que leva o semiplano superior do plano- w no interior de um retângulo no plano- t é definida pela integral elíptica em (79), onde $k = \frac{1}{a}$ é o módulo da integral elíptica. O valor de a deve ser maior que 1 e neste caso, $a = |w_5| = w_3$. O domínio obtido no plano- t representa o capacitor de placas paralelas, como ilustrado na Fig. 28. Os pontos t_1 a t_6 são as imagens dos pontos w_1 a w_6 , respectivamente. Os pontos localizados no semiplano superior do plano- w são mapeados nos pontos do retângulo delimitado pelas placas paralelas no plano- t .

Desta forma, calculam-se os parâmetros físicos usando-se a geometria elementar do retângulo. As linhas equipotenciais no plano- t , são linhas paralelas às placas e as linhas de campo são ortogonais. Então é possível desenhar estas linhas no plano- t e usando as transformações inversas mapeá-las nos plano- w e plano- z . A inversa da Transformação de Schwarz-Christoffel para o retângulo é dada por (82). A inversa da transformação bilinear (83) é obtida facilmente por,

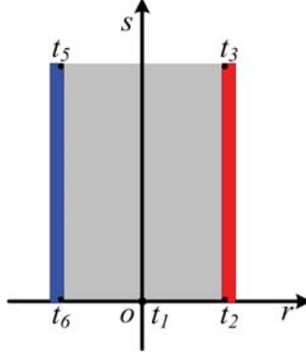


Figura 28: Capacitor de placas semicilíndricas no plano- t .

$$z(w) = R_0 \frac{\beta_a + w}{\beta_a - w}, \quad (85)$$

a qual permite transformar uma figura no plano- w em outra no plano- z .

Então, adotando $R_0 = 5$ [mm] e o parâmetro $\alpha = \frac{\pi}{12}$ em (84), obtém-se a correspondência dos pontos relevantes nos plano- z , plano- w e plano- t como disposto na Tab. 5.

Tabela 5: Imagem dos pontos nos planos em estudo.

Plano- z	Plano- w	Plano- t
$z_2 = 4,82 + 1,29i$	$w_1 = 1$	$t_2 = 1,57$
$z_3 = -4,82 + 1,29i$	$w_3 = 57,69$	$t_3 = 1,57 + 5,44i$
$z_5 = -4,82 - 1,29i$	$w_5 = -57,69$	$t_5 = -1,57 + 5,44i$
$z_6 = 4,82 - 1,29i$	$w_6 = -1$	$t_6 = -1,57$

O traçado das equipotenciais no plano- t é ilustrado na Fig. 29. Portanto, de posse de (82) obtém-se as equipotenciais no plano- w , como ilustrado na Fig. 30. Da mesma forma, utilizando (85), mapeiam-se as equipotenciais no plano- z , conforme ilustrado na Fig. 31.

Para encontrar a capacitância faz-se analogia com o método de mapeamento gráfico dos quadrados curvilíneos [7]. Utilizando o capacitor obtido no plano- t , realiza-se a divisão no domínio de forma que as subdivisões da geometria fiquem o mais próximo possível de quadrados, como ilustrado na Fig. 32.

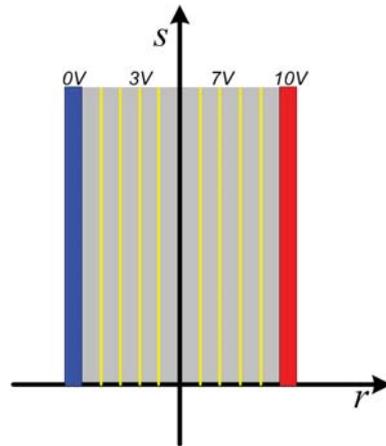


Figura 29: Linhas equipotenciais (capacitor de placas paralelas) plano- t .

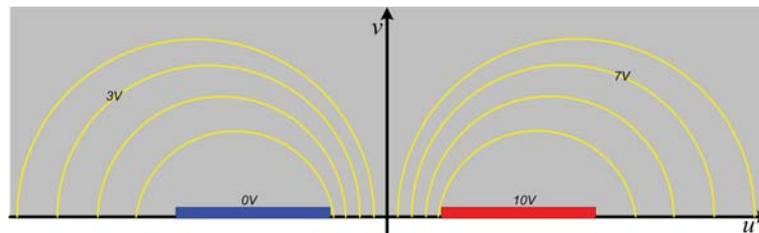


Figura 30: Linhas equipotenciais representadas no plano- w .

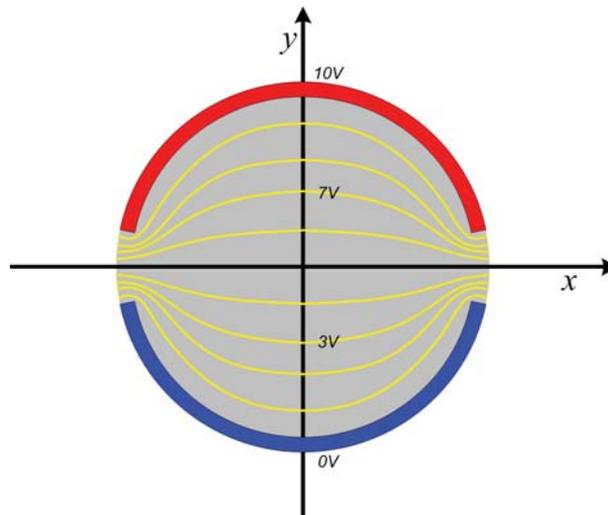


Figura 31: Linhas equipotenciais representadas no plano- z .

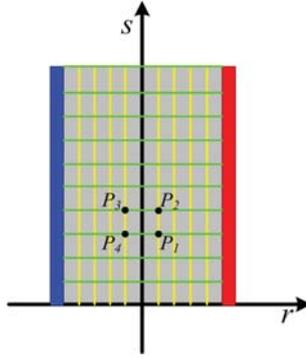


Figura 32: Linhas equipotenciais e de campo representadas no plano- t .

As linhas equipotenciais são paralelas às placas e as linhas de campo são perpendiculares às placas. Os pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 formam um quadrado, que representa uma célula de campo. O mapeamento dos quadrados ou células de campo do plano- t no plano- z produz os chamados quadrados curvilíneos, como pode ser observado na Fig. 33. Na Fig. 33, os pontos P'_1 a P'_4 correspondem respectivamente aos pontos P_1 a P_4 da Fig. 32.

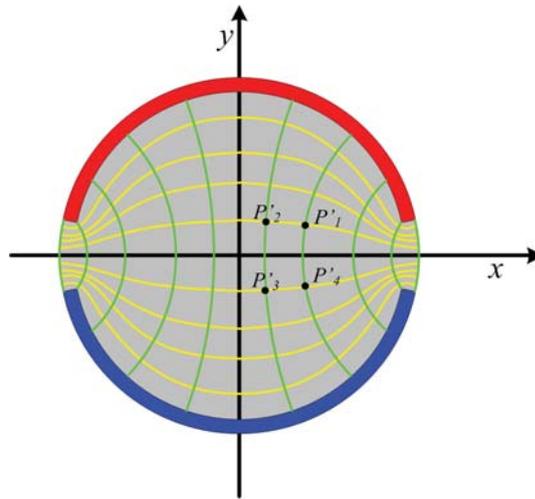


Figura 33: Linhas equipotenciais e linhas de campo representadas no plano- z .

O cálculo da capacitância do dispositivo obtido no plano- t , ilustrado na Fig. 28, é de solução analítica, e é dada por [3, 2, 4, 5]

$$C_p = \varepsilon \frac{bd_c}{l}, \quad (86)$$

onde $b = t_3 - t_2$ [m] e $l = t_2 - t_6$ [m] e ε [Fm⁻¹] é a permissividade do dielétrico e d_c [m] é a profundidade do capacitor.

4 Considerações finais

Neste trabalho apresentamos a solução de problemas eletromagnéticos, aplicando transformações conformes em funções analíticas que permitem resolver problemas de difíceis soluções, transformando uma geometria poligonal de difícil acesso aos parâmetros em outra geometria simplificada. Esta transformação de geometria permite encontrar a solução analítica dos problemas propostos.

O resultado obtido com as aplicações das transformações conformes, para o caso da Seção 3.1 foi satisfatório, pois foi possível calcular a capacitância do capacitor de placas cilíndricas excêntricas através da transformação de domínio, ou seja, analiticamente, mesmo utilizando duas formulações analíticas distintas, uma para capacitores de placas cilíndricas concêntricas (66) e outra para capacitores de placas paralelas (86).

O resultado obtido com as aplicações das transformações conformes, para o caso da Seção 3.3 também foi satisfatório. Este caso foi modelado analiticamente utilizando de transformação bilinear, seguida de transformação de Schwarz-Christoffel. O método proposto ainda apresentou viabilidade no mapeamento de linhas equipotenciais e de campo. Estes dois estudos de casos foram escolhidos ao acaso e são exemplos de solução analítica para muitos problemas que são resolvidos numericamente.

Os resultados encontrados nos dois casos estudados na Seção 3.1 e Seção 3.3 podemos chegar a conclusão que o método analítico (transformação de domínio ou transformações conforme) pode ser utilizado como ferramenta de estudo em problemas eletromagnéticos e outros que hoje são resolvidos utilizando métodos numéricos. Portanto, podemos dizer que o método analítico válida o método numérico. Haja vista, que os softwares implementados para soluções de problemas numéricos são onerosos.

Trabalhos futuros:

- Desenvolver software com interface para mapeamento conforme;
- Realizar outros estudos de casos, como na área de geoprospecção;
- Construir um capacitor de capacitância variável (capacitor excêntrico).

5 Mensagem Final

Há 22 anos sou professor de Matemática do Ensino Fundamental (9º ano) e Ensino Médio. Gosto muito de ser professor, poder mostrar o caminho do imaginário, das possibilidades, dos resultados que mostram a exatidão e a perfeição da matemática, mas também suscita a desconfiança e a dúvida na mente de muitos curiosos e fascinados a desafios. Os desafios de encontrar as respostas dos mistérios a serem descobertos e desvendados, proporcionam a extraordinária corrida ao pódio, ao primeiro lugar, a sensação de ser o primeiro a encontrar o que muitos estavam tentando descobrir. Isso prova que a matemática é uma grande descoberta para muitos, e deixa claro a sua existência.

Essa ideia de existência matemática foi defendida por Pitágoras, e muitos outros matemáticos depois dele. Charles Hermite (Coleção David Eugene Smith, Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos, Universidade de Colúmbia) era um crente declarado na existência desse mundo sombrio da matemática. Para ele os números e suas bonitas propriedades sempre tiveram existência própria, e vez por outra algum Colombo da matemática depara-se com algumas dessas propriedades já existentes e anuncia sua descoberta ao mundo [10].

O meu desejo é que este trabalho possa provocar uma contínua busca do conhecimento e da descoberta de conceitos que faz-me um profissional da educação melhor do que eu era antes, pois tenho a certeza que essa qualificação elevou o meu nível de educador, enfim, alcançar o grau de mestre em matemática foi uma grande conquista. Espero que esse trabalho possa trazer uma contribuição para os professores do ensino médio que buscam aplicar os conteúdos de matemática a situações práticas e funcionais do nosso cotidiano.

Referências

- [1] ÁVILA, G. S. S. *Variáveis Complexas e Aplicações*. Rio de Janeiro: L.T.C, 1990.
- [2] CALIXTO, W. P.; MOTA, J. C.; ALVARENGA, B. *Methodology for the reduction of parameters in the inverse transformation of Schwarz Christoffel applied to electromagnetic devices with axial geometry*. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, vol. 24, n. 6, John Wiley & Sons, Ltd., p. 568–582, 2011.
- [3] CALIXTO, W. P.; ALVARENGA, B.; MOTA, J. C.; BRITO, L. C.; WU, M.; ALVES, A. J.; MARTINS NETO, L.; ANTUNES, C. F. R. L. *Electromagnetic Problems Solving by Conformal Mapping: A Mathematical Operator for Optimization*. Mathematical Problems in Engineering. v. 2010, p. 520-539, 2010.
- [4] CALIXTO, W. P. *Aplicação do Mapeamento Conforme no Cálculo do Fator de Carter*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás (UFG/EMC), 2008.
- [5] CALIXTO, W. P.; MARRA, E. G.; BRITO, L. C.; ALVARENGA, B. *A new methodology to calculate Carter factor using genetic algorithms*. International Journal of Numerical Modelling. v. 24, p. 387-399, 2011.
- [6] CAJORI, F. *A History of mathematics*. The MacMillan, 2. ed., New York ; London. 1919.
- [7] CHURCHILL, RUEL V. *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*. Editora da USP, São Paulo, Brasil. 1975.
- [8] COC. *Livro do Ensino Médio do Coc*. Volume 7: Editora Coc - Empreendimentos Culturais Ltda. Ribeirão Preto, São Paulo, 2010.
- [9] COLLINS, ROYAL E. *Mathematical Methods for Physicists and Engineers*. Dover Publications, New York, USA. 1999.
- [10] EVES, H. *Introdução à história da matemática. tradução Hygino H. Domingues*. 5ª ed. Campinas. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- [11] FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JR, N. C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: S.B.M, 2006.

- [12] FIGUEIREDO, D . G. *Análise I*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1975.
- [13] GOLUZIN, G. M. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. MAS, Math. Soc. Transl. Monographs., Moscovo, Russian. 1969.
- [14] HAUSER, A. *Variable Compleja*. Fondo Educativo Interamericano, Santiago, Colômbia. 1973.
- [15] HENRICI, P. *Applied and Computacional Complex Analysis*. John Wiley & Sons, New York, USA. 1986.
- [16] KOBER, H. *Dictionary of Conformal Representations*. Dover Publications, New York, USA. 1957.
- [17] KRAUS, JOHN; CARVER; KEITH, R. *Eletromagnetismo*. Editora Guanabara, Rio de Janeiro. Brasil, 1986.
- [18] LEVINSON, N.; REDHEFFER, R. M. *Curso de Variable Compleja*. Búfalo, Barcelona, Espanha. 1975.
- [19] MORETTI, GINO. *Functions of a Complex Variable*. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, India. 1968.
- [20] SPIEGEL, M. R. *Variáveis Complexas com uma Introdução as Transformações Conformes e suas Aplicações*. McGraw Hill do Brasil, São Paulo, Brasil. 1972.
- [21] STRUIK, D. J. *A concise history of mathematics*. Dover, 4.ed., New York. 1987.
- [22] TREJO, C. A. *Funciones de Variable Compleja*. Harla, Búfalo. 1974.
- [23] VOLKOVYSKI, L. I.; LUNTS, G. L.; ARAMANOVICH, I. G. *Problemas Sobre la Teoria de Funciones de Variable Compleja*. Mir, Moscou, URSS. 1972.
- [24] WEN, G. C. *Conformal Mapping and Boundary Value Problems*. American Mathematical Society, Rhode Island, USA. 1992.
- [25] WALKER, MILES. *The Schwarz-Christoffel Transformation and Its Applications: A Simple Exposition*. Dover Publications, New York, USA. 1964.