Universidade Federal de Goiás

Regional Catalão

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RAZÃO ÁUREA COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

RENATO RODRIGUES SILVA

Catalão

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Renato Rodrigues Silva				
E-mail:	Profrenato10@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES		
País:	Brasil	UF:BR		CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:	Razão Àurea como Motivação ao Estudo de Conteúdos Matemáticos				
Palavras-chave:	Número de Ouro, Razão Àurea e Sequência de Fibonacci				
Título em outra língua:	Golden Ratio as Motivation to Study Math Content				
Palavras-chave em outra língua:	Number of Gold, Golden Ratio and the Fibonacci Sequence				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	19/11/2014				
Programa de Pós-Graduação:	**PROFMAT**				
Orientador (a):	Porfírio Azevedo dos Santos Júnior				
E-mail:	Porfirio0806@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27 / 11 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Renato Rodrigues Silva

RAZÃO ÁUREA COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática/ Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Catalão

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BSCAC/UFG

Silva, Renato Rodrigues.
S586r Razão áurea como motivação ao estudo de conteúdos matemáticos [manuscrito] / Renato Rodrigues Silva. - 2014.
114 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Profº. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras e tabelas.
Anexos.

1. Número de ouro. 2. Razão áurea. 3. Sequência de Fibonacci. I. Título.

CDU: 511.13

Renato Rodrigues Silva

RAZÃO ÁUREA COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 19 de Novembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Glen Cézar Lemos
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Est. de Goiás – IFG

André Luiz Galdino

Prof. Dr. André Luiz Galdino
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Renato Rodrigues Silva graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás – UEG - Campus Formosa, no ano de 2003.

Dedico este estudo a minha mãe (*in memorian*), ao meu pai, a minha esposa, aos meus filhos, aos meus amigos e a torcida do Cruzeiro Esporte Clube.

Agradecimentos

À Deus, pela vida e saúde, Sabedoria e por ter me guiado sempre na minha vida.

À minha mãe (*in memorian*), por ter me oportunizado uma educação de qualidade e pela guerreira que sempre foi ao lado de meu pai no ofício da família. Obrigado mãezinha, consegui subir mais um degrau na minha vida profissional, porém tenho certeza que a matemática, apesar de ser tão fascinante, é limitada quando se diz respeito ao amor eterno que sinto por você.

Ao meu pai, por toda serenidade, honestidade e apoio.

À minha querida esposa que me fortalece a cada dia, a qual eu amo muito e me deu muito apoio nas horas difíceis deste trabalho.

Aos meus filhos que são na verdade o tesouro da minha vida, sou um homem eternamente realizado por ser chamado de pai.

Aos meus amigos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos docentes da Regional Catalão - UFG pela dedicação neste ofício que é tão difícil, mas da mesma forma gratificante. Obrigado docentes.

Ao meu orientador Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior pela paciência e participação muito efetiva na construção deste trabalho.

À coordenadora Élida Alves da Silva por estar sempre ao nosso lado nos informando e ajudando em todos os momentos.

À Universidade Federal de Goiás - UFG - Regional Catalão por oportunizar o mestrado.

À Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos, a qual me ajudou muito visto que moro a 300 km da Universidade.

“Se por acaso fui omisso em algum momento, peço perdão, pois não existe alguém que não cometa erros, estou toda vida tentando minimizá-los.”

(Renato Rodrigues da Silva)

RESUMO

SILVA, Renato Rodrigues. Razão Áurea: Como motivação ao estudo de conteúdos matemáticos. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissionalizante de Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás. Catalão 2014.

Este trabalho tem por objetivo, mostrar uma possível relação da Razão Áurea com a natureza, os animais, a arquitetura, a música e também como motivação ao estudo de conteúdos de Matemática, tais como: razão, proporção e média aritmética, tornando o ensino-aprendizagem mais prazeroso. A realização do mesmo procedeu a partir da pesquisa bibliográfica e de campo. A pesquisa bibliográfica descreve a história do Número de Ouro e a relação da Sequência de Fibonacci com a Razão Áurea. A Sequência de Fibonacci ficou conhecida pelo problema dos pares de coelhos (paia coniculorum) que é encontrado no livro Liber Abacci (Líber Ábacos). Destaca ainda a relação entre a razão áurea e a natureza, propondo-se que esta pode ser amplamente utilizada no cotidiano do discente, buscando promover uma melhor aprendizagem. A pesquisa de campo consistiu na aplicação das atividades propostas apresentadas ao longo do estudo em uma escola da zona rural do Distrito Federal, tendo como fim promover o reconhecimento de que é possível compreender a relação entre o ensino de matemática e a vivência cotidiana. Inicialmente foi aplicado o diagnóstico 1 (ANEXO A), contendo questões socioculturais e também o diagnóstico 2 (ANEXO B) contendo questões específicas de razão, proporção, média aritmética e razão áurea. Após a aplicação do diagnóstico foram ministradas doze aulas utilizando-se metodologias contextualizadas e interdisciplinares em que foram aplicadas atividades (ANEXO C, D, E, F) buscando responder aos objetivos deste estudo. Ao encerrar as intervenções realizou-se a aplicação do mesmo diagnóstico inicial com o intuito de averiguar se as intervenções propiciaram novos resultados. Na análise dos resultados da segunda aplicação do diagnóstico foi percebido um aumento significativo na compreensão dos discentes em relação ao conteúdo trabalhado. Os resultados evidenciam que quando há uma compreensão da relação entre aprendizagem matemática e a vida cotidiana, os discentes conseguem delimitar novos saberes e relacionar a aprendizagem escolar e sua vivência diária, o que facilita a aprendizagem.

Palavras-chave: Número de Ouro. Razão Áurea. Sequência de Fibonacci.

ABSTRACT

SILVA, Renato Rodrigues. Golden Ratio as a motivation to study mathematics content. Completion of course work (Professional Master's Degree in Mathematics - PROFMAT) - Federal University of Goiás Catalan 2014.

This work goal to show a possible relationship between the Golden Ratio with nature, animals, architecture, music and also as a motivation to study mathematics content, such as: ratio, proportion and arithmetic average, making the teaching learning more enjoyable. The realization of it proceeded from the literature and field research. The literature describes the history of the Golden Mean and the Fibonacci ratio with the Golden Ratio. The Fibonacci sequence was known for the problem of pairs of rabbits (coniculorum Paia) that is found in the book Liber Abacci (Liber Abaci). Also highlights the relationship between the golden ratio and the nature, proposing that it can be widely used in daily life of the student, promoting a differentiated learning. The field research was the application of the proposed activities presented throughout the study in a rural school of the Federal District, with the purpose to promote the recognition that it is possible to understand the relationship between math and everyday living. Initially the diagnosis 1 (ATTACHMENT A), containing socio-cultural issues and also the diagnosis 2 (ATTACHMENT B) containing specific questions of reason, proportion, arithmetic mean and golden ratio was applied. After applying the diagnosis twelve o'clock classes were taught using contextualized and interdisciplinary methodologies where activities (ATTACHMENT C, D, E, F) were applied seeking to respond to the objectives of this study. In closing the interventions took place applying the same initial diagnosis in order to determine whether interventions have provided new results. In analyzing the results of the second application of diagnosis was realized a significant increase in students' understanding about the content worked. The results show that when there is an understanding of the relationship between mathematics learning and everyday life, students can define new knowledge and relate school learning and their daily lives, which facilitates learning.

Keywords: Number of gold. Golden Ratio. Fibonacci sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de Matemática são considerados culturalmente como algo difícil e, muitas vezes, sem aplicação prática no que tange a determinados conteúdos. Vias de regras, os resultados de estudos do Ministério da Educação, que tem como base a aplicação de instrumentos avaliativos de larga escala, denotam que isso confirma na aprendizagem do discente no país. Os resultados mais baixos estão relacionados à Matemática em todos os estados brasileiros. Os resultados da Prova Brasil, que determina o IDEB das unidades escolares, no ano de 2012 é uma amostra disso.

Analisando tal contexto e a relação histórica é perceptível que, desde o início dos tempos, o homem vem observando os elementos harmônicos existentes no meio em que vive. Tal observação desencadeou estudos a fim de compreender cada vez mais essa harmonia. Um dos aspectos constantes dessa beleza permanente seria a proporção áurea.

Visto que a proporção áurea chama atenção devido às inúmeras formas possíveis de ser encontrada no cotidiano das pessoas, além de ser uma área vasta de situações que favorecem o desenvolvimento da capacidade de construir conceitos que podem ser compreendidos para uso na realidade do discente, não se pode admitir que o ensino da proporção áurea seja norteado pela exposição de conteúdos que não valorizam sua realidade.

Neste sentido, delimitou-se como situação problema para este estudo: De que maneira o docente de matemática pode trabalhar a razão áurea associada à outros conteúdos da matemática de modo a promover a reflexão do discente quanto a sua utilização na vida cotidiana?

Diante disso, este trabalho tem por finalidade mostrar uma possível relação da proporção áurea com a natureza, os animais, a arquitetura, a música e a outros conteúdos da matemática, entre outras situações, tornando o ensino-aprendizagem mais prazeroso. Os objetivos específicos delineados para o trabalho são: identificar os primeiros registros da razão áurea no ensino de matemática, relacionar a razão áurea à natureza e ao cotidiano e descrever as aplicações da razão áurea a partir de uma prática pedagógica diferente, pois nas atividades propostas terão que realizar medidas de objetos, pessoas e desenvolver pesquisas no laboratório de informática.

O primeiro capítulo tem como principal objetivo mostrar a história do Número de Ouro. Destaca-se também, a comunidade Pitagórica por sua dedicação ao estudo da Matemática e da Filosofia, surgindo assim à ideia de proporção que torna os elementos observáveis mais harmônicos em suas formas. Partindo depois para a definição do Número de Ouro, a construção de um retângulo áureo, a construção do ângulo áureo e a espiral logarítmica no retângulo e triângulo áureos. Além disso, relatamos um pouco da história de Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, o responsável pela observação e criação da sequência de Fibonacci. A fascinante história que se inicia a partir do problema na terceira seção do Líber ábacos – Os pares de coelhos (paia coniculorum) nos leva a observar a reprodução de coelhos a partir de um casal durante um ano e assim à introdução dos números de Fibonacci, ou seja, a sequência de Fibonacci e ainda ressalta o Número de Ouro na árvore genealógica do zangão (macho da abelha). Após a descoberta desse interessante número, tornou-se cada vez mais comum observar suas aparições em diversos momentos de nossas vidas.

O segundo capítulo vem justamente para mostrar alguns lugares onde a Razão Áurea aparece, como por exemplo, na natureza, nos animais, no corpo humano e também à associação do Número de Ouro na arte, na música e na arquitetura.

O terceiro capítulo traz uma proposta didática pedagógica para o processo de ensino-aprendizagem da matemática e os objetivos a serem alcançados com essa proposta, destaca-se ainda a metodologia do estudo ora desenvolvido, descrevendo a aplicação das atividades propostas relacionadas à temática aqui retratada. Verifica-se, a aplicação, a compreensão da razão áurea no cotidiano do discente e busca observar a percepção acerca do ensino e aprendizagem da matemática nos conteúdos abordados.

O quarto capítulo vem mostrar uma pesquisa de campo realizada no Centro de Ensino Fundamental Buriti Vermelho no qual o pesquisador é docente regente, situado na área rural Paranoá, cidade satélite do Distrito federal. Nele destacam-se, as atividades realizadas, bem como os resultados e análises procedidos a partir dos mesmos.

Na realização da pesquisa de campo propôs-se à equipe gestora da Unidade Escolar, bem como aos discentes a realização de uma intervenção na turma do 9° ano do Ensino Fundamental, com o intuito de promover, uma reflexão da importância da realização de atividades diversificadas, para que os discentes realmente construam saberes acerca de conteúdos matemáticos e da sua aplicação na vivência cotidiana. Foram realizadas, aulas expositivas com a aplicação de atividades tanto dentro como fora da sala de aula, que ampliaram as possibilidades de aprendizagem dos discentes. E a partir da aplicação de dois diagnósticos, um inicial e outro ao final das aulas, percebeu-se que houve um aumento significativo no quantitativo de acertos no segundo diagnóstico, assim, melhorando a compreensão dos discentes acerca do tema.

Portanto, este trabalho apresentará o Número de Ouro desde sua origem, passando por suas definições e por fim suas possíveis aplicações práticas. O trabalho procura abordar da forma mais clara e acessível possível, para aqueles que cursam ou já concluíram matemática, como também para quem não tem um grande conhecimento na área de exatas.

CAPÍTULO I

O PRIMEIRO REGISTRO DA RAZÃO ÁUREA

> *“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”*
>
> *(Lobachevsky)*

O primeiro registro do que mais tarde ficaria conhecido como Número de Ouro foi realizado por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo e formalizado, Euclides de Alexandria[1].

Euclides definiu uma proporção derivada de uma divisão de uma simples linha em que ele chamou de razão extrema e média, atualmente denominada *razão áurea.*

> Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor. (LIVIO, 2007, p.14)

Figura 1 – Razão Extrema e Média

Observando a Figura 1, se a razão do comprimento AC para o comprimento de CB for igual à razão do comprimento de AB para AC, a linha foi cortada na razão extrema e média. Isto é,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

[1] Euclides era um docente, matemático platônico e escritor. Nasceu na Síria, estudou em Atenas e foi chamado para ensinar matemática em Alexandria onde ganhou prestígio.

Para obtermos o Número de Ouro, vamos considerar:

AC = x

CB = y

AB = x + y

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$$

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} = \phi \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

$$\phi + 1 = \phi^2 \quad \Rightarrow \quad \phi^2 - 1 - \phi = 0$$

Resolvendo esta equação do 2º grau, na variável ϕ, utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos as seguintes soluções:

$$\phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 \quad \text{e} \quad \phi'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}618$$

Podemos desconsiderar o valor ϕ'', visto que o comprimento de um segmento nunca será negativo. Portanto, o Número de Ouro, $\phi = 1{,}618$.

Essa constante fez muitas das maiores mentes da matemática como Euclides e Pitágoras passarem horas trabalhando em suas propriedades. Essa constante trata de um número com infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, não tem um período fixo que se repete, portanto não pode ser expresso por uma razão (como um número racional), e faz parte do conjunto dos números irracionais. Essa é das muitas descobertas que intrigam o homem desde a antiguidade.

No século XX, o matemático norte-americano Mark Barr deu a este Número de Ouro o nome de Fi, em homenagem ao escultor grego Fídeas que viveu entre 490 e 430 a.C.. E depois ganhou popularidade com o nome de Razão Áurea por volta de 1830.

1.1 Pitágoras

Seguindo os conselhos de seu docente Tales de Mileto, Pitágoras[2] viveu no Egito durante vinte e dois anos (segundo alguns relatos), onde aprendeu Matemática, Filosofia e temas religiosos com sacerdotes egípcios. Posteriormente migrou com alguns participantes do clero para a Babilônia onde travou contato com os conhecimentos matemáticos mesopotâmicos. Mesmo assim, a matemática egípcia e babilônica se mostraram insuficientes para a mente indagadora de Pitágoras. Para esses povos, a matemática fornecia ferramentas práticas na forma de "receitas" destinadas a cálculos específicos, ao contrário de Pitágoras que compreendia que os números existem por si mesmos como entidades abstratas.

No seu retorno à Grécia, na Ilha de Crotona, hoje Itália, Pitágoras começou a lecionar Filosofia e Matemática. Rapidamente atraiu uma multidão de seguidores. Dentre esses seguidores se encontrava a jovem Theamo (filha de seu anfitrião Milo) com quem posteriormente se casou.

Nenhuma biografia sobre Pitágoras escrita na antiguidade foi preservada. Apesar de não ter escrito nada, Pitágoras exercia muita influência em relação aos seus seguidores. Os mais aplicados formaram uma sociedade secreta ou irmandade, conhecida como *Pitagóricos.* Nessa sociedade os membros estabeleciam regras rígidas que incluíam, por exemplo, a proibição de comerem grãos e uma rígida ênfase no treino da memória. Os ensinamentos não eram escritos, mas transmitidos oralmente e mantidos em segredo entre seus seguidores. O descumprimento dessa norma acarretava à excomunhão do seguidor de Pitágoras.

[2] Pitágoras nasceu na Ásia Menor, na Ilha de Samos, no mar Egeu por volta de 570 a.C. e 571 a.C. E de lá se mudou supostamente para escapar da tirania de Policartes. Ao longo de sua vida Pitágoras viajou ao Egito, Babilônia e outros países onde estudou astronomia, matemática, filosofia e temas religiosos com sacerdotes egípcios.

1.2 O Pentagrama e a Escola Pitagórica

A escola Pitagórica tinha um caráter mais religioso que filosófico, e os ensinamentos eram mantidos em segredo. Os membros faziam a tatuagem de um pentagrama regular (que é obtido traçando as diagonais de um pentágono regular) na mão. Segundo alguns historiadores, o motivo disso é que o pentagrama, além de conter a Razão Áurea, passa a ideia de infinito.

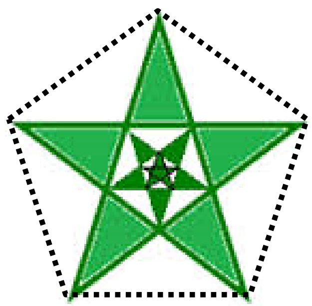


Figura 2 – Pentagrama 1

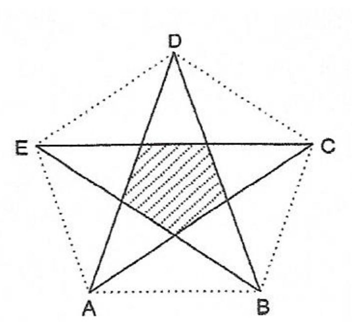


Figura 3 – Pentagrama 2

Fonte figura 1 e 2: http://coringaalacarte.files.wordpress.com/2011/07/1-2.jpg

A razão de os pitagóricos acreditarem que o pentagrama passa a ideia de infinito pode-se notar na Figura 2, pois é possível fazer outro pentagrama menor dentro do pentágono regular do pentagrama maior, e assim sucessivamente.

A relação entre a Razão Áurea e o pentágono pode ser observada na Figura 3, onde pode ser observado que a razão entre a diagonal e a medida do lado do pentágono é igual à Fi. A demonstração da proporção a seguir está no anexo H.

Ou seja:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{CA}{AE} = \phi$$

Por falta de registros atribuídos a Pitágoras, é quase impossível atribuir qualquer feito matemático ao próprio Pitágoras ou aos seus seguidores, mas não há dúvida de que eles foram responsáveis, por uma mistura de matemática, filosofia de vida e religião. Atribui-se a Pitágoras a invenção das palavras “filosofia” (“amor pela verdade") e "matemática" ("aquilo que é aprendido"). Pitágoras dizia que aprender era mais importante que todas as outras atividades, pois, em suas palavras:

> A maioria dos homens e mulheres, por nascimento ou natureza, não têm os meios para progredir na riqueza e no poder, mas todos têm a capacidade de progredir no conhecimento (LIVIO, 2007, p.39).

Seus ensinamentos doutrinavam que os mistérios da ciência têm seu centro na matemática. Eles entendiam que os números eram essências de todas as coisas existentes na natureza.

1.3 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Figura 4 - Leonardo de Pisa ou Fibonacci

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Outro estudioso que foi um dos maiores contribuidores para o desenvolvimento do Número de Ouro foi Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci[3].

---

[3] Nasceu em 1170 e viveu durante algum tempo com seu pai que era um funcionário do governo na área de comercio em alfândega chamado Guglielmo, em Bugia (atualmente na Argélia). O apelido Fibonacci (do latim *filius Bonacci,* filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaume Libri numa nota de rodapé em seu livro *Historie Des Sciences Mathematique em Italie* (História das Ciências matemáticas na Itália), de 1838.

Fibonacci, envolvido com a atividade de comerciante do seu pai, teve conhecimento e aprendeu as técnicas matemáticas até então desconhecidas no ocidente. Difundidas por estudiosos mulçumanos de diversas regiões do mundo islâmico, onde alguns desses procedimentos haviam sido criados por matemáticos da Índia. Ao perceber que operações com algarismos arábicos eram mais práticas e eficientes do que com algarismos romanos fez com que Fibonacci deixasse seu pai e viajasse para vários outros países do mediterrâneo (entre eles Grécia, Egito e Síria), em busca de conhecimento.

A contribuição de Fibonacci para o Número de Ouro está relacionada com a resolução do problema de reprodução de coelhos, situado no capítulo XII de seu livro "*Liber abaci*", o qual deu fama mundial à Fibonacci. O problema pode ser expresso como abaixo:

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês. (LIVIO, 2007. p.116)

A solução deste problema é relativamente simples, conforme pode-se observar na figura abaixo:

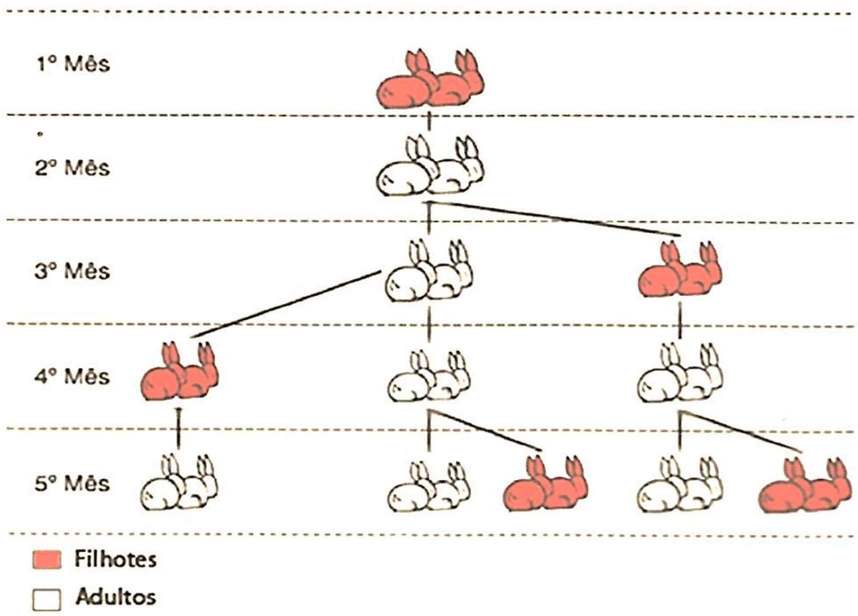


Figura 5 – Problema reprodução de coelhos

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm#fib04.

Como a solução particular de um simples problema de reprodução de coelhos poderia ser importante para a matemática? A princípio, a solução é relativamente simples. Começamos com um par de filhotes. Após o primeiro mês teremos um par de adultos. Ao fim do segundo mês, o par de adultos dá à luz a outro par, de modo que ficamos com dois pares. No fim do terceiro mês, o par adulto dá à luz a outro par de filhotes, enquanto o par de filhotes amadurece. Ficando com três pares, conforme ilustrado na figura acima. No final do quarto mês, cada um dos dois pares maduros dá à luz a outro par, e outro par de filhotes amadurece, ficamos então com cinco pares. Daí, pode se verificar o modo de obter a quantidade de pares de filhotes adultos em um determinado mês. Assim a quantidade de pares de adultos em um determinando mês será equivalente à quantidade total de pares de coelhos no mês anterior. E o número de filhotes do mês anterior é equivalente à quantidade de pares de coelhos adultos do mês que antecedeu o mês em questão.

Portanto, a qualquer mês (começando do terceiro), o número total de pares será a soma do total de pares de coelhos dos dois meses anteriores. O número total de pares segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Isto é:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... na qual cada termo (a partir do terceiro) é a soma dos dois termos anteriores, foi chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891). Munido desta então recente descoberta, Fibonacci descobriu que, no fim do período de 1 ano, terá 144 casais de coelhos.

Mas o que faz uma sequência simples, descoberta para resolver um problema de reprodução de coelhos, ter tanta repercussão até os dias atuais? E qual a relação da sequência de Fibonacci com a Razão Áurea?

Destacando a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597..., vamos agora fazer a razão de seus números sucessivos (aproximado até a décima oitava casa decimal), como mostra a tabela a seguir.

n	a_n	a_n/a_{n-1}	Fn
1	1	–	–
2	1	1/1	1,000000000000000000
3	2	2/1	2,000000000000000000
4	3	3/2	1,500000000000000000
5	5	5/3	1,666666666666666666...
6	8	8/5	1,600000000000000000
7	13	13/8	1,625000000000000000
8	21	21/13	1,615384615384615384...
9	34	34/21	1,619047619047619047...
10	55	55/34	1,617647058823529411...
11	89	89/55	1,618181818181818181...
12	144	144/89	1,617977528089887640...
13	233	233/144	1,618055555555555555...
14	377	377/233	1,618025751072961373...
15	610	610/377	1,618037135278514588...
16	987	987/610	1,618032786885245901...
17	1597	1597/987	1,618034447821681864...
18	2584	2584/1597	1,618033813400125234...
19	4181	4181/2584	1,618034055727554179...
20	6765	6765/4181	1,618033963166706529...
21	10946	10946/6765	1,618033998521803399...
22	17711	17711/10946	1,618033985017357939...

$F_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ onde,

i) $a_n \rightarrow$ n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

ii) $a_{n-1} \rightarrow$ termo antecessor imediato do n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

iii) $n \rightarrow$ posição de cada termo.

iv) $F_n \rightarrow$ quociente entre dois termos consecutivos quaisquer a partir do segundo termo da sequência de Fibonacci.

À medida que prosseguimos na divisão dos termos sucessivos da sequência de Fibonacci, o resultado da divisão oscila em torno da Razão Áurea (sendo alternadamente maior e menor), mas cada vez mais próximo dela.

1.4 A Sequência de Fibonacci e a Reprodução de Abelhas

Fibonacci é hoje conhecido mundialmente porque a sequência de Fibonacci não se limita somente à reprodução de coelhos, mas se aproxima de outros fenômenos dentro e fora da natureza.

Outro fenômeno onde se encontra relação com a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, pode ser observado, na árvore genealógica do Zangão, o macho da abelha.

Em uma colmeia, os ovos de abelhas operárias não fertilizados no final do ciclo se tornam zangões. Desta forma, um zangão não tem um “pai”, somente uma “mãe”. Por outro lado, os ovos da rainha são fertilizados e se tornam fêmeas (operárias ou rainhas). Uma abelha tem, portanto, um “pai” e uma “mãe”. Portanto, um zangão tem uma mãe, dois avós (pai de sua mãe), três bisavós (os pais da avó e a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e uma para seu bisavô) e assim por diante. Estes números da árvore genealógica do zangão, 1, 1, 2, 3, 5, 8... formam uma sequência de Fibonacci como pode ser observado na Figura 6.

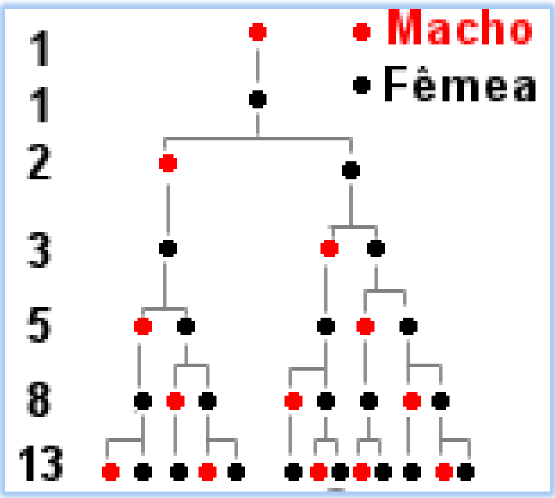


Figura 6 – Árvore Genealógica do Zangão

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.htm

1.5 Retângulo Áureo, Ângulo Áureo e a Espiral Logarítmica

Depois de descoberta, a sequência de Fibonacci começou a aparecer de forma muito aproximada em vários lugares na natureza. Mas, para que possam ser compreendidas melhor essas relações, vamos passar algumas definições importantes à cerca da Razão Áurea: O Retângulo Áureo, O Ângulo Áureo e a Espiral Logarítmica.

1.5.1 O Retângulo Áureo

> *"Nenhuma investigação humana pode se considerar verdadeira ciência se não passar por demonstrações matemáticas."*
>
> *(Leonardo da Vinci)*

O Retângulo Áureo é o retângulo cuja proporção entre o comprimento e a altura é aproximadamente o Número de Ouro, ou seja, 1, 618033...

Sobre o retângulo ABCD, traça um segmento de reta EF de modo que forme o quadrado ABFE. Conforme a Figura 7. Sendo x a medida do lado AB e y a medida do lado AD, um retângulo é dito Retângulo Áureo quando:

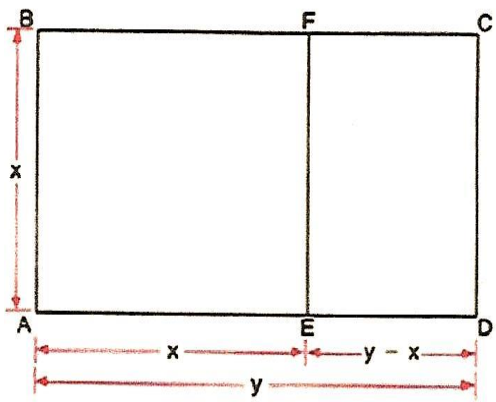


Figura 7 - Retângulo Áureo

Fonte: http://www.qfojo.net/irracionais/irracionais.html

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - x} \cong 1{,}618 \ldots$$

A obtenção é análoga ao caso do segmento áureo da Figura 1.

1.5.2 O Ângulo Áureo

Outra relação formidável contendo a Razão Áurea é o ângulo de divergência (às vezes chamado de Ângulo Áureo). O Ângulo Áureo, o qual veremos em seguida é abundantemente relacionado na botânica. O ângulo aparece no arranjo de pétalas de rosas e também nos flósculos de girassóis.

Considere inicialmente um segmento dividido em razão extrema e média.

Razão Extrema e Média

O Ângulo Áureo, que é de aproximadamente 137,5 graus, é obtido de maneira simples.

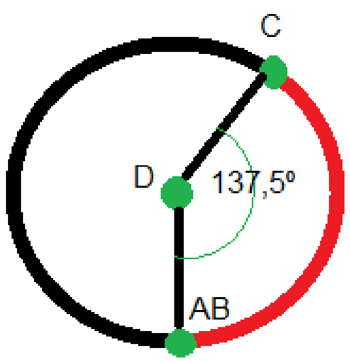


Figura 8 - Ângulo Áureo

Como pode ser observado na Figura 8, o segmento AB dividido na razão extrema e média no ponto C, forma-se a circunferência de centro D, cujo ângulo formado pelo arco circular BC (em vermelho) é o ângulo central de 137,5º que corresponde ao Ângulo Áureo.

Uma forma prática de obter o Ângulo Áureo é fazendo a divisão 360º/ ϕ que resulta em aproximadamente 222,5º, Sendo $\phi = 1{,}618 \ldots$

Como 222,5º corresponde a mais da metade de um círculo, devemos então medir na direção contrária ao círculo. Assim devemos subtrair 222,5º de 360º (360º - 222,5º) o que resulta em 137,5º, o Ângulo Áureo.

1.5.3 A Espiral Logarítmica

A Espiral Logarítmica também é conhecida como Espiral Equiangular, nome dado pelo matemático e filósofo René Descartes (1596–1650) em 1638, foi examinada por Jaques Bernoulli (1654–1705), descendente da família Bernoulli, que era uma família oriunda da Suíça, conhecida por produzir matemáticos célebres. Jaques ficou tão encantado com a beleza da Espiral Logarítmica, que a chamava de Espiral Maravilhosa e quis que seu desenho fosse gravado em seu túmulo.

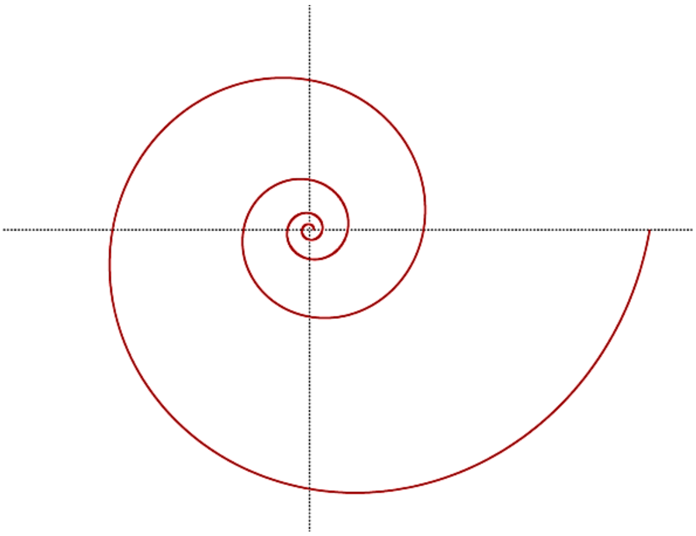


Figura 9 - Espiral Logarítmica

Fonte: http://www.qfojo.net/irracionais/irracionais.html

A Espiral Logarítmica também é conhecida como Espiral Áurea, este nome vem do princípio que o raio da espiral aumenta entre os rolamentos conforme nos afastamos do centro sem alterar sua forma, característica conhecida como auto similaridade (propriedade fundamental exclusiva da espiral logarítmica, mesmo que o seu tamanho aumente, ela não altera o seu formato). Outra característica observada na espiral logarítmica é o fato, dela ser uma curva que forma com todas as retas situadas no seu plano e passando por um ponto fixo desse plano, um ângulo constante (propriedade Equiangular).

As etapas a seguir levam a construção de um retângulo áureo, partindo de um segmento AB dado.

1) Dado o segmento AB, construir um quadrado □ABCD.
2) Determinar o ponto médio E do segmento AB.
3) Marcar o ponto F sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que $\overline{EC}$ = $\overline{EF}$.
4) Marcar o ponto G, pé da perpendicular a CD pelo ponto F, obtendo assim, o retângulo áureo CGFB da Figura 10. Assim, o processo pode ser repetido infinitas vezes e sempre obteremos retângulos áureos.

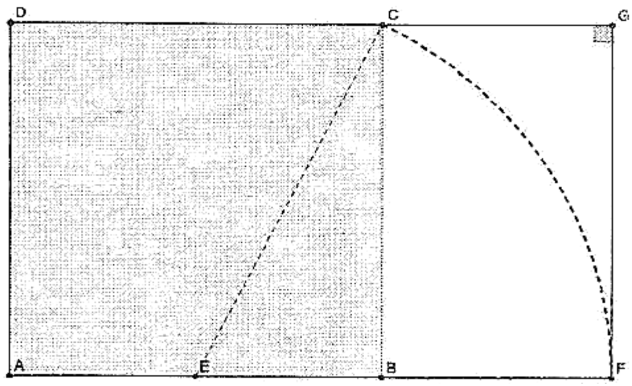


Figura 10 – Etapas do retângulo áureo

Temos então que, o retângulo AFGD da Figura 10 é um retângulo áureo.

Examinando uma série de retângulos áureos conforme as (Figuras 10.1, 10.2 e 10.3) e com o auxílio de um compasso construiremos uma espiral logarítmica, seguindo as seguintes etapas:

1) (Figura 10.1) Fixando a ponta seca do compasso (ponta de metal) em B, com uma abertura AB e traçando um quarto de círculo determinaremos o arco AC.

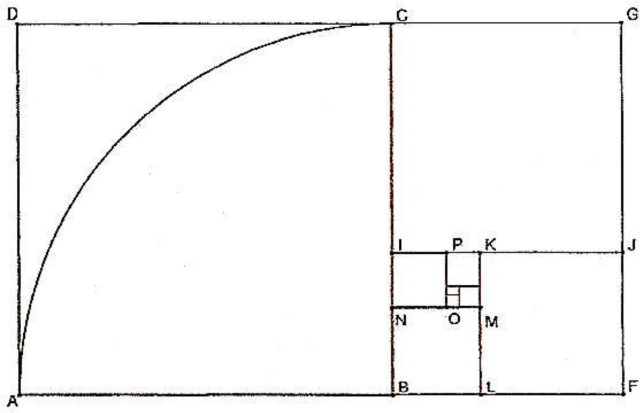


Figura 10.1 – Etapa 1

2) (Figura 10.2) Fixando a ponta seca do compasso em I, com abertura CI e traçando novamente um quarto de círculo determinaremos o arco CJ.

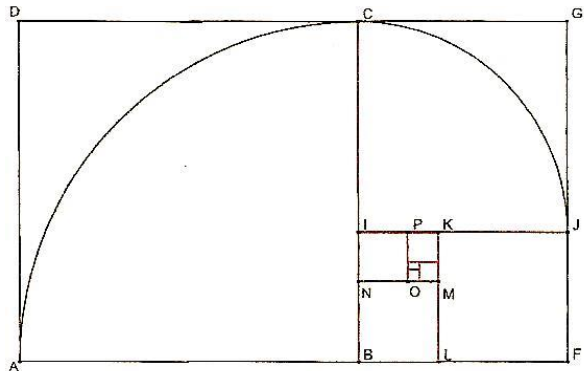


Figura 10.2 – Etapa 2

3) (Figura 10.3) E de forma análoga às etapas 1 e 2 continuaremos o traçado da espiral nos demais quadrados.

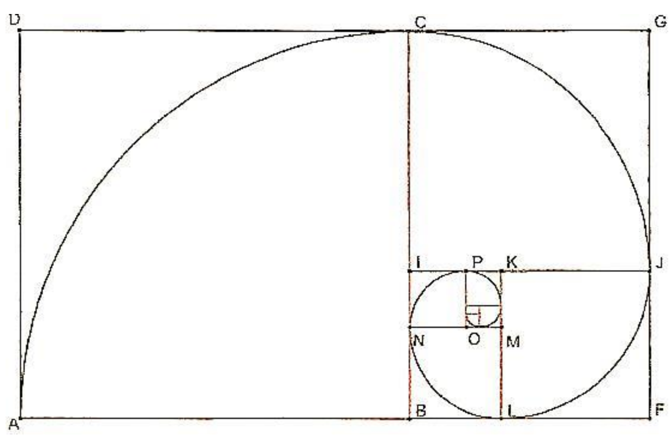


Figura 10.3 – Etapa 3

Tal espiral também pode ser obtida através de um Triângulo Áureo (triângulo isósceles ΔABD, no qual o lado está em uma Razão Áurea em relação à base) bissectando o ângulo do vértice D da base, obtém-se um Triângulo Áureo menor (Δ BCD). Repetindo este processo sucessivamente, uma cadeia de triângulos rodopiantes será obtida conforme Figura 11.

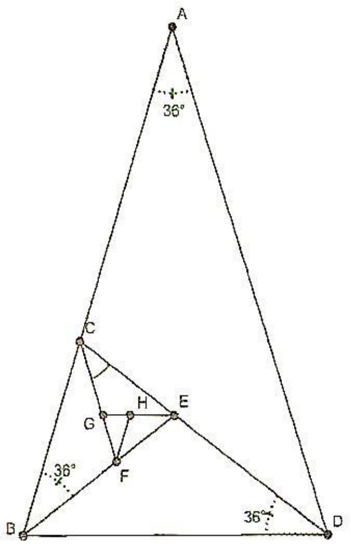


Figura 11 – Triângulos áureos semelhantes

Utilizando a construção de triângulos áureos semelhantes da Figura 11 e com auxílio novamente de um compasso é possível traçar uma espiral logarítmica conforme (Figuras 11.1, 11.2 e 11.3), seguindo as seguintes etapas:

1) (Figura 11.1) Fixando a ponta seca do compasso em C, com abertura AC, traçaremos o arco AD e fixando a ponta seca do compasso em E, com abertura DE, traçaremos o arco BD.

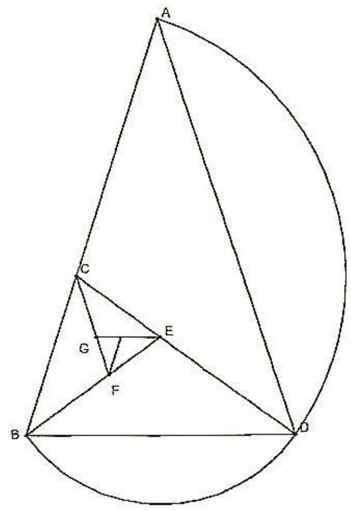


Figura 11.1 – Etapa 1

2) (Figura 11.2) Fixando a ponta seca do compasso em G, traçaremos o arco CE.

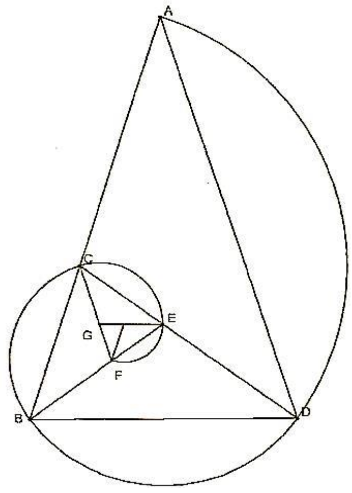


Figura 11.2 – Etapa 2

3) (Figura 11.3) E de forma análoga às etapas 1 e 2 continuaremos o traçado da espiral nos demais triângulos.

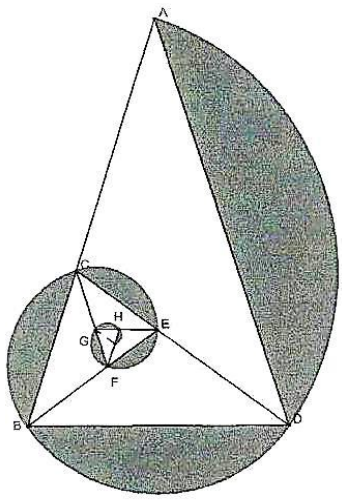


Figura 11.3 – Etapa 3

CAPITULO II

UMA NATUREZA ÁUREA

2.1 Razão Áurea nas Plantas

Depois da descoberta da Razão Áurea, percebe-se que em diversas áreas do conhecimento existe uma estreita relação com a Razão Áurea. Dentre estas, encontra-se a botânica (ramo da biologia que estuda as plantas). Ao darmos um pequeno passeio ao longo de um bosque, ou em qualquer área verde, encontraremos inúmeros exemplos de proporções muito aproximadas. Em algumas plantas, as folhas contidas no galho e os talos ao longo de um ramo obedecem a uma tendência comum ao crescerem, a fim de otimizarem sua exposição aos recursos necessários à sua sobrevivência: o sol, a chuva e o ar.

Ao crescer, o talo de uma planta produz folhas em pontos com espaçamento bem regular. Contudo, as folhas não crescem de maneira desordenada. Pois, assim, poderia ocorrer das folhas ficarem sobrepostas uma sobre as outras, o que impediria que as folhas debaixo recebessem tais recursos necessários à sua sobrevivência. Assim, a passagem de uma folha para a seguinte (ou de um talo para o seguinte ao longo dos ramos) é qualificado por espaçamentos de tipo parafuso. Este tipo de espaçamento pode ser observado na Figura 12.

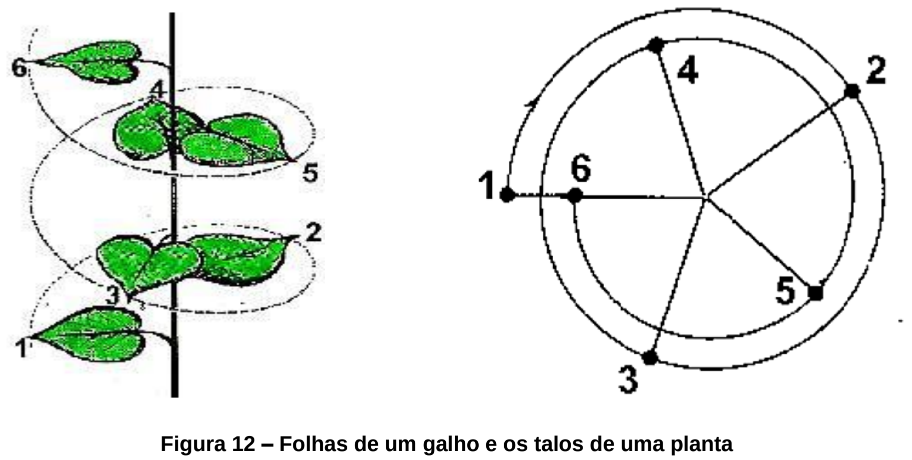


Figura 12 – Folhas de um galho e os talos de uma planta

Fonte: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

Este fenômeno é chamado de *phyllotaxis* (“arranjo de folhas”, em grego) ou Filotaxia, uma palavra cunhada em 1754, pelo naturalista suíço Charles Bonnet (1720 – 1793).

Pela imagem apresentada na Figura 12, pode-se observar que é preciso três voltas até chegar ao sexto ramo, o qual representa a posição da sexta folha. Tal razão é conhecida como razão filotaxia 3/8 que percebe em algumas plantas como a pereira e o salgueiro-chorão. Diferente das macieiras e das tílias americanas que tem razão 2/5 e 1/2 respectivamente. Percebe-se que em algumas plantas estas frações tratam de razões dos membros alternados da sequência de Fibonacci.

É válido observar também a relação entre o desenvolvimento de algumas plantas com os números de Fibonacci. Um exemplo disto pode ser visto na Figura 13, que se refere a uma Eufórbia, uma planta nativa da África, pertencente à família das Euforbáceas, que tem duas sépalas (Folíolo do cálice de uma flor) grandes, três pequenas, cinco pétalas e oito estames. Todos números de Fibonacci.

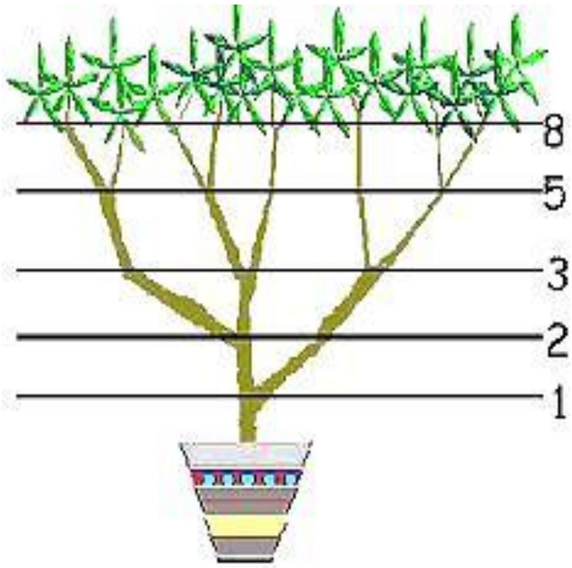


Figura 13 – Eufórbia

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm

É interessante observar o modo como, as sementes de diversas flores se ordenam na natureza. Um exemplo pode ser visto, no girassol Figura 14. A forma com que, as sementes de girassol se apresentam na natureza, pode ser associada a uma espiral logarítmica. Arranjadas tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário de modo mais eficiente para assegurar a divisão de espaço horizontal. Os raios e quantidades de espirais variam de acordo com a espécie, mas o mais fácil de ser encontrado são espécies com 34 espirais em um sentido e 55 em outro. Porém os girassóis variam em quocientes de números de espirais de 89/55, 144/89 e, em raríssimos casos, 233/144. O interessante é que o número de espirais associadas em cada sentido são quase sempre números vizinhos de Fibonacci.

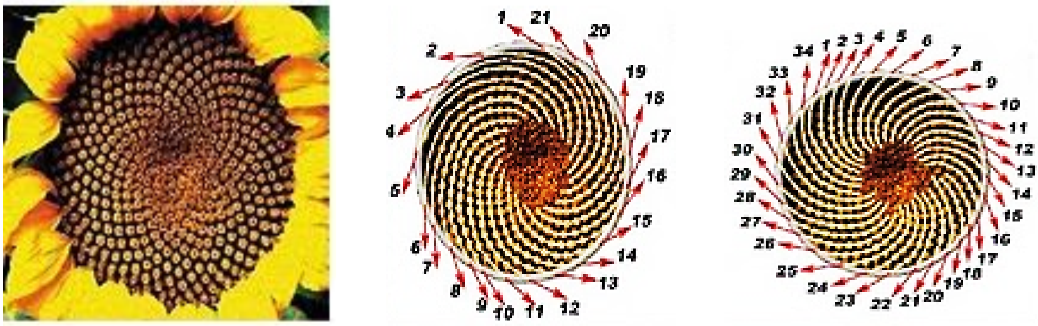


Figura 14 – Girassol

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Quem nunca na sua vida pegou uma flor de margarida do campo e contou suas pétalas? A fim de satisfazer sua curiosidade da seguinte pergunta: “Bem me quer ou mal me quer?”. Não só as margaridas do campo, mas determinadas flores também apresentam a relação com a Razão Áurea e com os números de Fibonacci. Grande parte das margaridas do campo têm treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci. Um exemplo dessas margaridas do campo pode ser visto na Figura 15 onde é apresentada uma margarida do campo com 13 pétalas, o sétimo número na sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...).

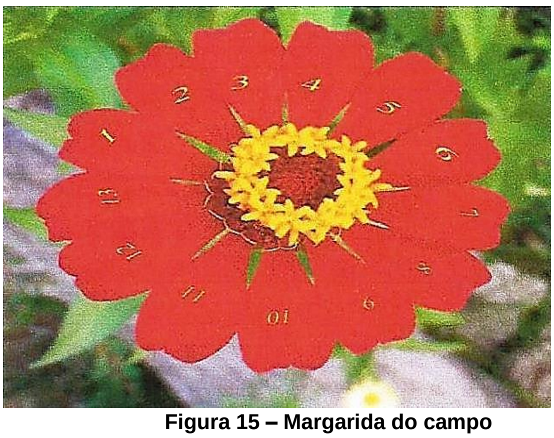


Figura 15 – Margarida do campo

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Dentro do universo das plantas, podemos citar também os jarros, o lírio, íris, os linhos, a columbina, a asterácea, a banana-da-terra, chicória dentre outras. Podemos verificar que o número de pétalas destas e diversas outras flores corresponde a um número de Fibonacci. Conforme pode ser visto abaixo (Figura 16 a 21).


Figura 16 – 1 pétala


Figura 17 – 2 pétalas


Figura 18 – 3 pétalas

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html


Figura 19 – 5 pétalas


Figura 20 – 8 pétalas


Figura 21 – 13 pétalas

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

O arranjo simétrico das pétalas de rosas também se fundamenta na Razão Áurea. Ao examinar as pétalas de uma rosa, observa-se que os ângulos que definem as posições (em frações de uma volta completa) das pétalas são as partes fracionárias de múltiplos simples de ϕ. A pétala 1 está a 0,618 (que equivale a parte fracionária) de uma volta da pétala 0, a pétala 2 a 0,236 (a parte fracionária) de uma volta da pétala 1, e assim sucessivamente, Figura 22. O que leva o resultado das pétalas sucessivas estarem separadas por um ângulo de 137,5 graus, o Ângulo Áureo.

Figura 22 – Arranjo de pétalas de uma rosa

Fonte: http://www.goldennumber.net

Estudos realizados pelos matemáticos, Harold S. M. Coxeter e I. Adler e N. Rivier mostram que as pétalas são arranjadas deste modo (separados pelo ângulo áureo), pois é mais eficiente. Porque se o ângulo de divergência fosse, por exemplo, 120 graus (360/3), um ângulo múltiplo racional de 360 graus, as folhas se alinhariam em três linhas de 120 graus, radialmente deixando grandes espaços no meio. Assim, um ângulo divergente como o Ângulo Áureo (que é múltiplo irracional de 360 graus) traz a segurança de que os botões de flor não se alinhem ao longo de qualquer direção radial específica e preenchendo o espaço de modo mais eficiente. Nenhum número múltiplo irracional de 360 graus é melhor para tal relação que o número Áureo.

A Razão Áurea também pode ser trabalhada utilizando como motivação alguns frutos, um belo exemplo no campo da filotaxia é o abacaxi. Isso porque cada camada hexagonal externa no corpo do abacaxi pode ser associada a três espirais diferentes. Na Figura 23, pode se ver oito linhas paralelas, subindo suavemente da esquerda inferior para a direita superior. Uma das treze linhas paralelas sobe de forma mais inclinada da direita inferior até a esquerda superior, e uma das vinte e uma linhas paralelas bastante inclinadas (da esquerda inferior até a direita superior). A maior parte tem cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na superfície. Todos correspondentes aos números de Fibonacci.

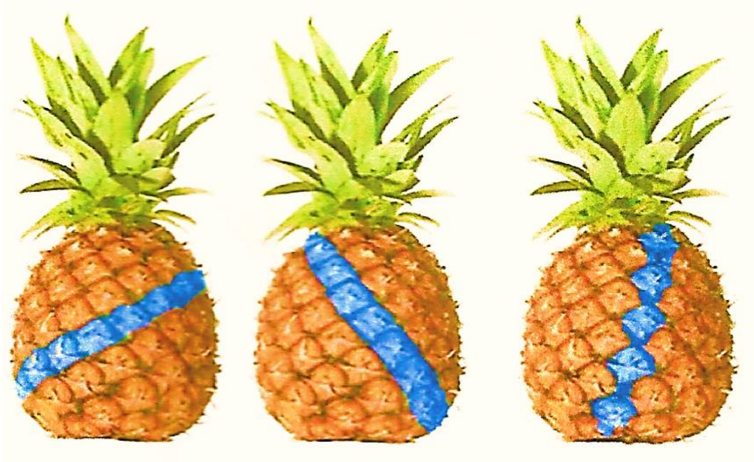


Figura 23 – Abacaxi

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Na pinha Figura 24, ou “fruta do conde” como é conhecida em algumas regiões do Brasil, pode ser visto uma relação com a Razão Áurea envolvendo espirais logarítmicas, semelhante com a ocorrida no girassol e suas sementes. Porém, no caso da pinha, as espirais podem ser associadas em sua casca, como pode ser visto na Figura 24.

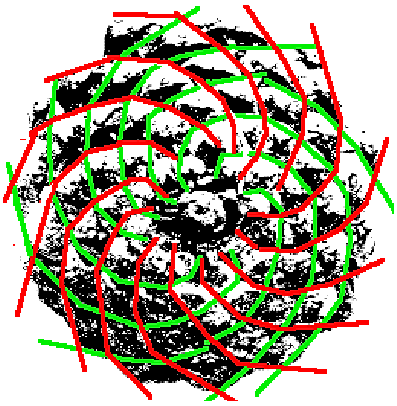
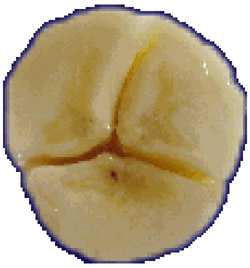


Figura 24– Pinha

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/curiosidouro.htm

A relação da Razão Áurea com as frutas não se limita somente à parte externa. Ao cortarmos uma fruta, notaremos que muitas vezes o número de seções é um número de Fibonacci. Como pode ser visto na Figura 25.

- Banana- 3 seções
- Maça- 5 seções



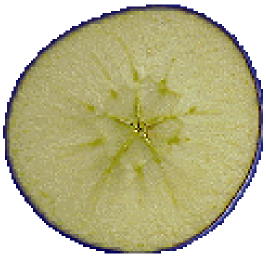


Figura 25 – Banana e maçã

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

2.2 Razão Áurea nos Animais

A partir do estudo dos conceitos da Razão Áurea, percebeu que em alguns casos ela identificava de forma idêntica a estes conceitos. Como a natureza não se limita somente às plantas, flores e frutos, a Razão Áurea também pode ser observada no mundo animal. Tanto na vida terrestre quanto na marítima, envolvendo articulações, número de ossos, feições, entre outros.

O Náutilus é um molusco que vive em mares tropicais e possui uma concha em forma de Espiral. O Náutilus vai construindo, conforme o seu crescimento, câmaras maiores para adequar ao seu tamanho e fechando as câmaras menores, que serão inutilizadas por ele. Este crescimento acontece de forma regular, de modo que a forma da concha não se altera, garantindo ao molusco uma concha no mesmo formato em torno do seu ciclo de vida, sem a necessidade de ajustar o seu equilíbrio à medida que amadurece. Como consequência desse fenômeno, a sua concha pode ser associada à forma de uma Espiral Logarítmica como pode ser visto na Figura 26.

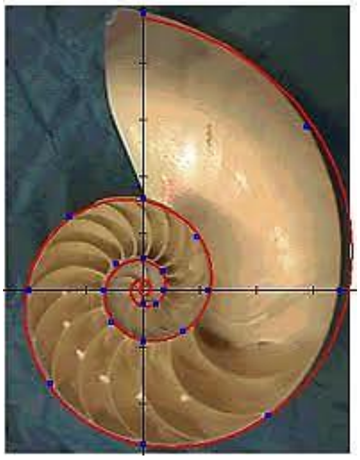


Figura 26 – Náutilus

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Esta propriedade não se limita somente ao Náutilus, também pode ser observada: no rabo do camaleão Figura 27, chifres de animais como os carneiros (Figura 28) e em presas de elefantes.

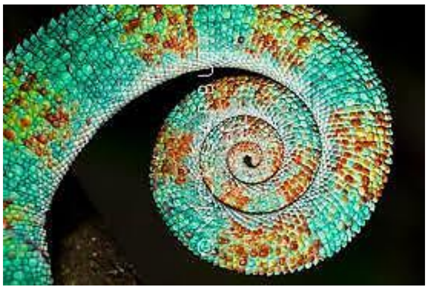


Figura 27 – Rabo do camaleão

Figura 28 - Carneiro

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Nos carneiros, seus chifres adquirem o formato de espiral no espaço, e não no plano como visto no rabo do camaleão. Esta propriedade da Espiral Logarítmica no espaço também é vista nas presas dos elefantes.

A propriedade equiangular da Espiral Logarítmica é aplicada pelos falcões quando vão atacar suas presas. Como o Falcão-peregrino Figura 29. Sua velocidade no ar, ao atacar à presa, chega a 320 quilômetros por hora. Mas esta velocidade podia ser facilmente ultrapassada, se ele mergulhasse em linha reta em vez de seguir uma trajetória espiral até o encontro de suas vítimas. Porém, como os olhos do falcão-peregrino estão situados nas laterais de sua cabeça, para tirar vantagem de sua visão extremamente acentuada (característica comum existente nos falcões), eles necessitariam inclinar sua cabeça 40 graus para a direita ou para a esquerda o que o deixaria muito mais lento. Então o Falcão-peregrino mantém sua cabeça em linha reta e seguem uma Espiral Logarítmica. Aproveitando a propriedade equiangular da espiral, permitindo que ele mantenha a presa à vista sem perder velocidade. Esta trajetória pode ser vista na Figura 30.

Figura 29 – Falcão-peregrino

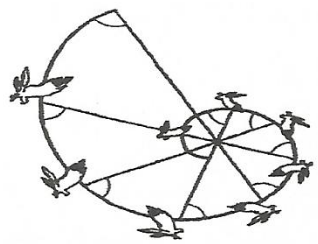


Figura 30 – Trajetória de ataque

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

2.3 Razão Áurea e o Corpo Humano

Os padrões da Razão Áurea, associados a nossa forma de observar, estão espalhados por toda nossa realidade. Seja ela biológica ou catalizadora, ela segue só um padrão. Entretanto, o corpo humano não poderia ficar de fora dessa "lei" que parece reger em tudo que existe, e chegou até ser chamada de divina proporção por Leonardo da Vinci.

O corpo humano apresenta várias proporções bastante próximas da Razão Áurea, em geral, estas pessoas têm simetrias que são pouco encontradas em outras pessoas. Portanto, podemos associar que "matematicamente", são pessoas bonitas.

Nesta relação, vamos começar com as nossas articulações. Na figura ilustrada a seguir, Figura 31 é mostrado o raio-X de uma mão humana e, como podemos perceber, as medidas entre as falanges (ossos dos dedos da mão) seguem o padrão dos números de Fibonacci, ou seja, se medirmos os ossos de forma crescente e dividirmos a medida por sua antecessora encontraremos ϕ.

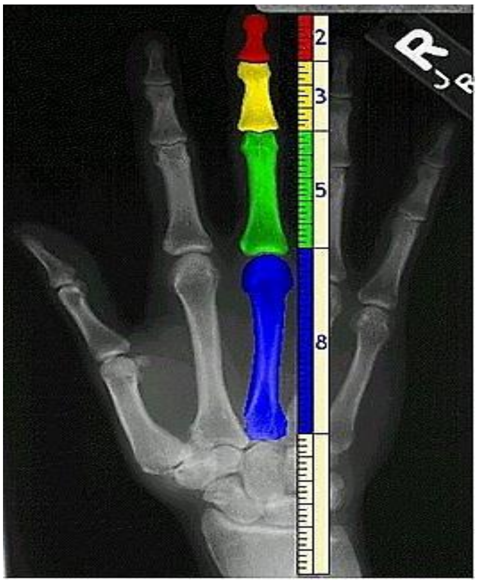


Figura 31 – Raio-X

Fonte: http://www.goldennumber.net

Se medirmos, a medida do ombro até a ponta do dedo e a medida do cotovelo até a ponta do dedo e depois dividirmos esses valores, o número encontrado pode ser um valor próximo do Número de Ouro.

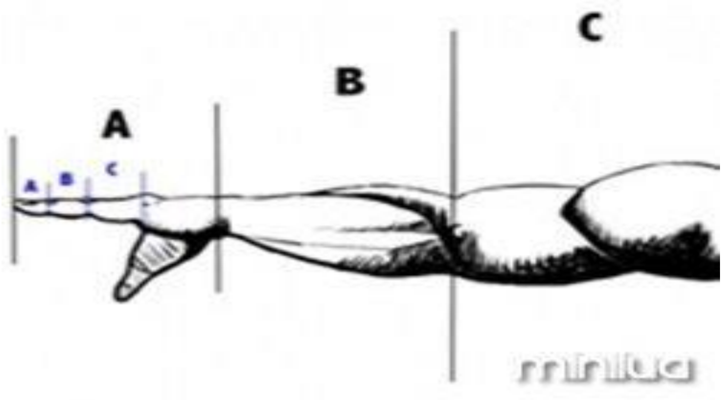


Figura 32 – Braço humano

Fonte: http://www. goldennumber.net

O corpo humano apresenta outras relações que se aproximam do Número de Ouro:

- A altura do corpo dividido pela altura do umbigo até o chão.
- A medida do seu quadril na altura do umbigo ao chão, dividida pela medida do seu joelho até o chão.

Todos os limites dos mecanismos móveis do nosso corpo estarão sempre associados matematicamente numa proporção dois por três, que correspondem aos, terceiro e quarto números da sequência de Fibonacci.

Um belo sorriso é admirado por todos. O rosto humano transmite uma infinidade de emoções. Mas, quando estamos sorrindo, é o momento em que nosso rosto mais se ajusta para associar à Razão Áurea. Nossos dentes estão em Razão Áurea o que pode ser visto na Figura 33.

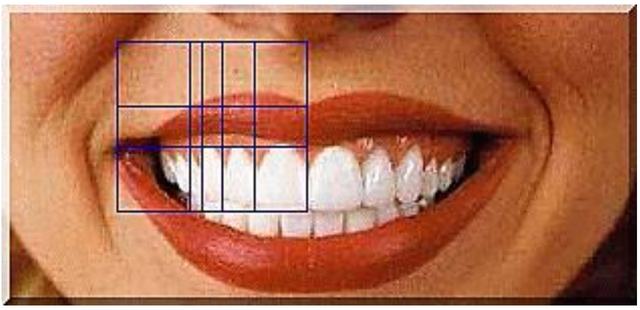


Figura 33 – Sorriso

Fonte: http://www.labordental.com.br/GOLDENSECTION.htm

A orelha humana segue um formato idêntico a da Espiral Logarítmica, sendo a cóclea localizada na orelha interna, o ponto inicial da construção da espiral, Figura 34.

Figura 34 – Orelha humana

Fonte: http:// www.goldennumber.net

A Razão Áurea ainda pode ser associada na frequência entre a pressão sistólica e diastólica em uma pessoa saudável, ou seja, o segmento linear entre, dois pulsos da pressão sistólica é dividido na média e extrema razão pela pressão diastólica, Figura 35.

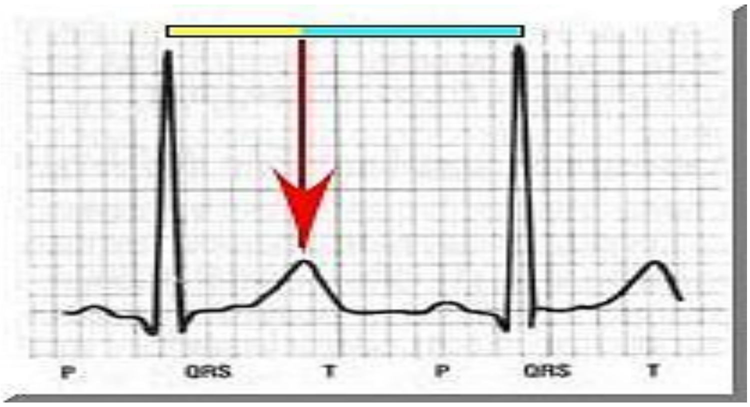


Figura 35 – Eletrocardiograma

Fonte: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

2.4 Aplicações do Número de Ouro

> *"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura."*
>
> *(Bertrand Russell)*

Após a descoberta desse misterioso número, o homem percebeu que era possível associá-lo em diversas formas e objetos existentes em nosso dia a dia. Afinal, o Número de Ouro não é apenas um número com o valor numérico aproximado, sendo 1,61803... Esse número irracional é considerado por muitos o símbolo da harmonia.

Proporção Áurea ou Razão Áurea, como também é chamada o Número de Ouro, pode ser associado: na arte, na arquitetura, na música, entre outros, tornando uma forma mais agradável de observar ao nosso redor, porém não esquecendo, de todo conceito matemático utilizado.

2.4.1 Número de Ouro na Arte

O homem sempre buscou explicações sobre as belezas encontradas na natureza e na arte através da matemática. E aos poucos se questionava se existia algo na própria matemática para explicar essa agradável sensação de perfeição.

O envolvimento do Número de Ouro com a arte pode ser facilmente associado em obras renascentistas. As obras de Leonardo da Vinci estão entre as mais famosas e caras do mundo. Das suas famosas obras, daremos destaque à Mona Lisa Figura 36, sendo que o Retângulo Áureo pode ser observado em diversas partes do quadro quanto no rosto da Mona Lisa. Esta é a mais famosa obra feita por Leonardo da Vinci. Para ter uma ideia, ela é considerada impagável, por tamanha importância.

> “resguardada atrás de um vidro de segurança, afastada do público por um cordão de isolamento [...] e é a mais conhecida obra de arte do mundo”. (Disponível em: http://guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/mona-lisa-433454.shtml)

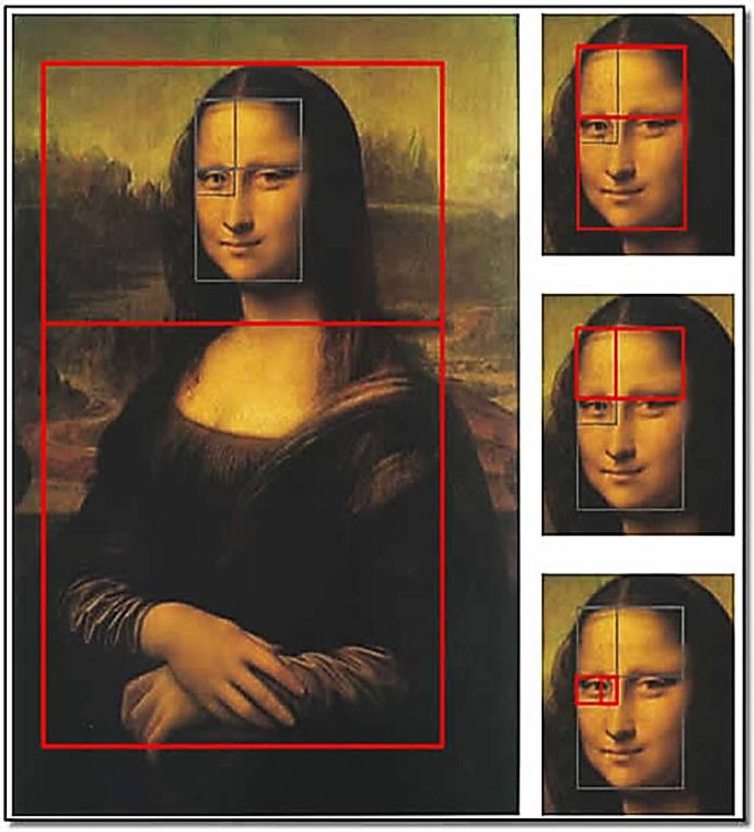


Figura 36 - Mona Lisa

Fonte:http://antoniofreitasformação.blogspot.com/2011_03_01_archive.htm

O uso da obra “A Mona Lisa” como material de apoio, torna-se importante pela abordagem que ela traz, não só sobre a razão áurea, mas também sobre formas geométricas, além das diversas análises da imagem seguindo conceitos históricos e artísticos. Segundo Mandarino (2011, p.10), “com a obra, é possível ressaltar aos discentes a grande importância do tema para a construção de uma obra que hoje é tida como uma das mais intrigantes da história da arte”, levando, novamente, o docente a fazer o uso da interdisciplinaridade nas aulas de matemática.

O Número de Ouro também é lembrado por Leonardo da Vinci em “O Homem Vitruviano” Figura 37, na qual os números 1, 2, 3, 4,...,17 estão enumerando as medidas dos segmentos representados na figura. Leonardo da Vinci era um gênio e utilizava a Razão Áurea em suas obras para garantia de uma beleza, harmonia e perfeições únicas em suas obras.

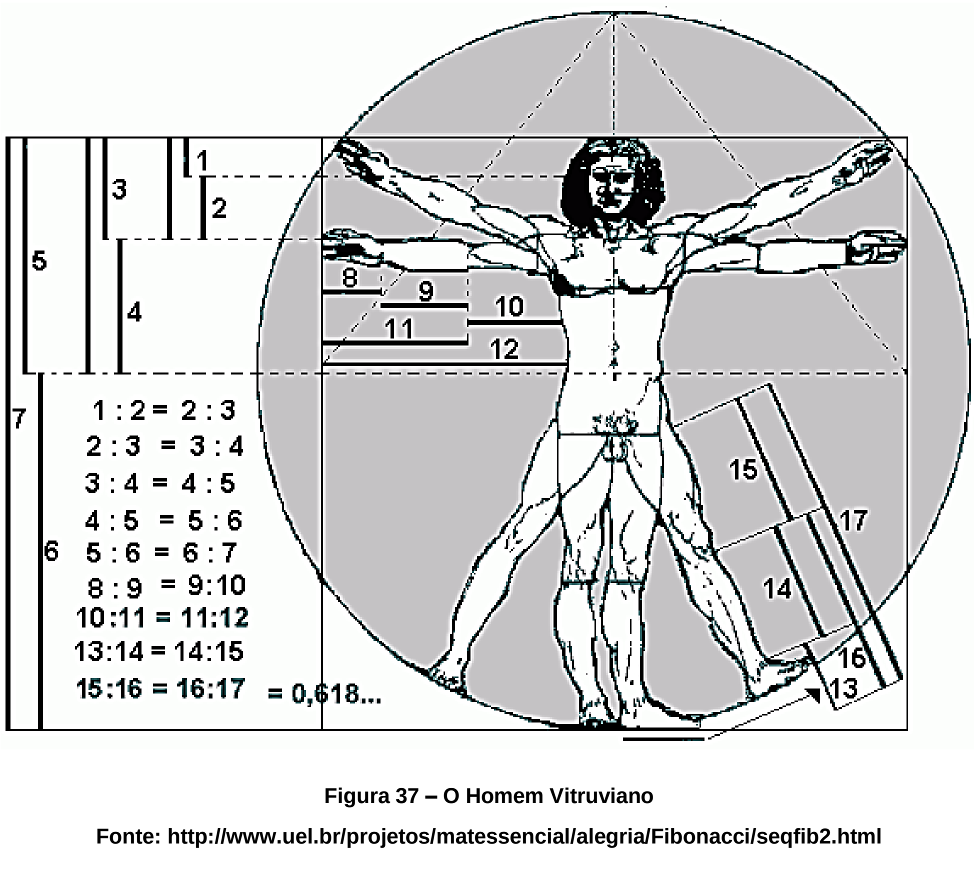


Figura 37 – O Homem Vitruviano

Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/Fibonacci/seqfib2.html

A imagem “O Homem Vituviano” descreve uma figura masculina que ao mesmo tempo se encontra em duas posições sobrepostas e com o corpo dentro de um círculo e um quadrado, com os braços e as pernas esticados, tendo o umbigo como o centro do círculo. E com isso mostrando tais proporções entre as partes do corpo como aparecem na figura acima.

O estudo do desenho “O Homem Vitruviano” é uma forma de mostrar a aplicação de conceitos matemáticos como os de proporção e números racionais dentro da arte. Mostrar também para os discentes a importância do uso desses conceitos para se obter a perfeição das relações que existem na obra e fazendo assim com que a aula fique mais dinâmica. Esse estudo faz também com que o discente acabe adentrando no contexto em que ele foi criado, podendo proporcionar o estudo do período histórico da obra e do autor.

Outros pintores que utilizaram a Razão Áurea foram: Salvador Dali, Giottodi Bondone, Gino Severini, Picasso, dentre outros.

2.4.2 Número de Ouro na Música

> *“Assim como a harmonia e a dissonância se combinam na beleza musical assim a ordem e o caos se combinam na beleza matemática.”*
>
> *(Ian Stewart)*

Ainda nos dias atuais, os quartetos de cordas e todas as orquestras sinfônicas utilizam a descoberta de Pitágoras, relacionando números inteiros e os diferentes tons musicais. A música na era medieval era algo vinculado à matemática, assim os músicos focavam seus esforços na compreensão das bases matemáticas dos tons. Devido a essas relações históricas entre a música e os números, o homem acabou descobrindo que na música também é possível encontrarmos a Razão Áurea.

O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato aparece com frequência. Habitualmente, a caixa de som do violino contém doze ou mais arcos de curvatura de cada lado. O arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Secção Áurea (é a forma de dividir em duas partes o comprimento do violino), a partir da linha do centro.

Alguns dos violinos mais famosos foram feitos por Antônio Stradivari (1644-1737), de Cremona na Itália. Através de desenhos originais, Figura 38 é possível observar que Stradivari tinha um cuidado especial em dispor geometricamente o lugar dos “olhos”, em posições determinadas pela Razão Áurea. Sendo assim, a relação da Razão Áurea com a música vai desde a composição à construção de instrumentos.

Figura 38 - Violino Stradivarius

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/números.htm

Outro instrumento musical frequentemente associado aos números de Fibonacci é o piano. Uma oitava do piano é composta por treze teclas. No qual são oito teclas brancas e cinco teclas pretas.

As cinco teclas pretas formam um grupo de três teclas e outra de dois. Aparecendo assim os números, 2, 3, 5, 8 e 13 que são números consecutivos da sequência de Fibonacci como mostra a Figura 39.

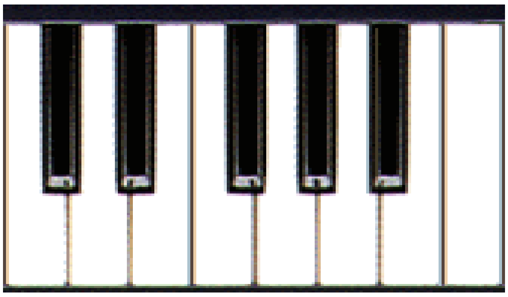


Figura 39 - Teclas do piano

Fonte:http://math2033.uark.edu/wiki/index.php/Fibonacci-Musical-Compositon

Assim como o Número de Ouro na natureza nos permite ter uma sensação mais harmônica do ambiente, na música não seria diferente. Um tom musical puro é caracterizado por uma sequência fixa que é medida por vibrações por minutos e por uma amplitude fixa que determina a sonoridade instantânea.

2.4.3 Número de Ouro na Arquitetura

Desde os tempos antigos a Razão Áurea é observada nas modelações e decorações da arquitetura. O Retângulo Áureo e a Espiral Logarítmica são facilmente associados em diversas obras arquitetônicas.

A pirâmide de Quéops está centrada nas três pirâmides situadas no Cairo, capital do Egito, foi construída há aproximadamente 4500 anos e é considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo. Cada bloco inferior da pirâmide é 1,618 vezes maior que o bloco de nível imediatamente superior e a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da pirâmide é igual ao Número de Ouro (phi = ϕ), Figura 41.

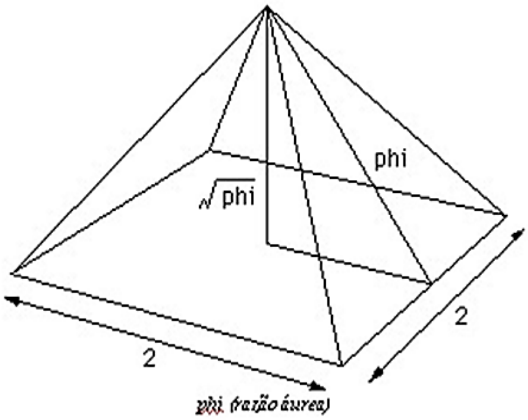


Figura 40 - Pirâmide de Quéops **Figura 41 – Construção da pirâmide**

Fonte: http:/ / www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/números.htm

Construído há centenas de anos, entre 447 e 432 a.C. , o Templo das Virgens, ou mais conhecido como “Parthenon Grego”, é uma obra arquitetônica construída por iniciativa de Péricles e supervisionada por um dos maiores escultores da Grécia, Fídias, Figura 42.

> O Parthenon, em Atenas, construído no século no V a.C., uma das estruturas mais famosas do mundo. Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas quase exatamente em um retângulo áureo, conforme demonstrado abaixo. Ele representa, portanto, outro exemplo de valor estético desse formato específico. (HUNTLEY.1970.p.69)

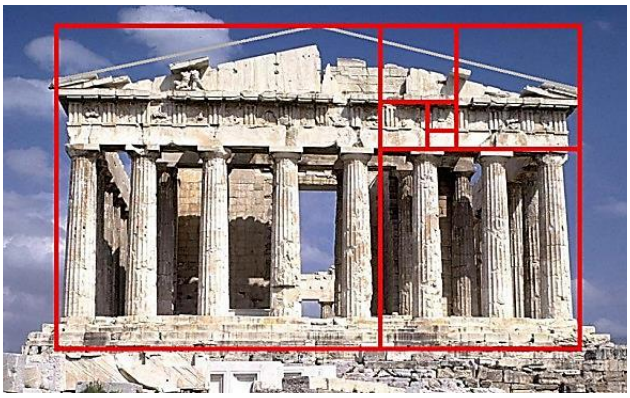


Figura 42 – Parthenon

Fonte:http://sophiaofnature.wordpress.com/a-mitologia-e-a-verdade-da-razão-de-ouro/gold08/

Fídias o fez assim, pois achava que seria: mais harmonioso, bonito e agradável de ver os retângulos que possuíam a forma mostrada na figura acima e que ficou conhecida como Razão Áurea.

Há também outros monumentos arquitetônicos que foram criados com base na Razão Áurea, como, por exemplo, a “Catedral de Notre-Dame”.

É possível observar na Figura 43, como a razão áurea aparece em sua fachada, sendo a parte vermelha representada pela letra x e a parte azul representada pela letra y.

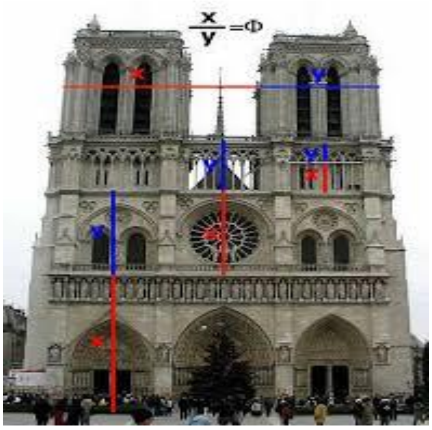


Figura 43 – Catedral de Notre-Dame

Fonte: http://matematicamaf1620.blogspot.com/2012/05sequencia-de-fibonacci-e-razao-aurea.html

A harmonia resultante da razão áurea é mais que beleza, é um conceito que engloba também proporção, ordem e equilíbrio, e cuja percepção vem se mantendo inalterada ao longo dos séculos. Torna-se fácil observar a aparição do Número de Ouro também no prédio das “Nações Unidas” (ONU), em Nova Iorque, EUA.

O prédio das Nações Unidas está localizado no setor leste de Manhattan, em Nova Iorque, Estados Unidos. Sua construção iniciou em 1949 e terminou em 1952, com a ajuda do arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer.

Os representantes da ONU montaram uma equipe composta por diversos arquitetos de vários países para a composição do projeto, onde, dentre todas as propostas diferentes, as escolhidas foram as de Niemeyer e Corbusier para a base do desenho final, como podemos observar na Figura 44.

Figura 44 – Prédio da ONU

Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/Fibonacci/seqfib2.html

Le Corbusier foi um arquiteto francês de origem suíça. É considerado um dos arquitetos mais importante do século XX. Le Corbusier, em uma de suas passagens pela Alemanha, encontrou com Peter Behrens, com quem trocou alguns conhecimentos acerca do Número de Ouro. Depois disso, Le Corbusier foi para Atenas estudar o Parthenon e outros edifícios da Grécia Antiga.

A busca por uma padronização na proporção levou Le Corbusier a criar um novo sistema proporcional chamado de “Modulor”. Modulor é uma palavra composta a partir de module, ou seja, unidade de ouro: a divisão de uma reta tal que o segmento menor está para o maior assim como o segmento maior está para o todo.

O Modulor, Figura 45 é um sistema de medição desenvolvido entre 1942 e 1948, baseado nos números de Fibonacci e na Razão Áurea e também nas dimensões médias humanas. O Modulor foi para Le Corbusier um sistema de medidas que serviu como referência para encontrar harmonia das obras.

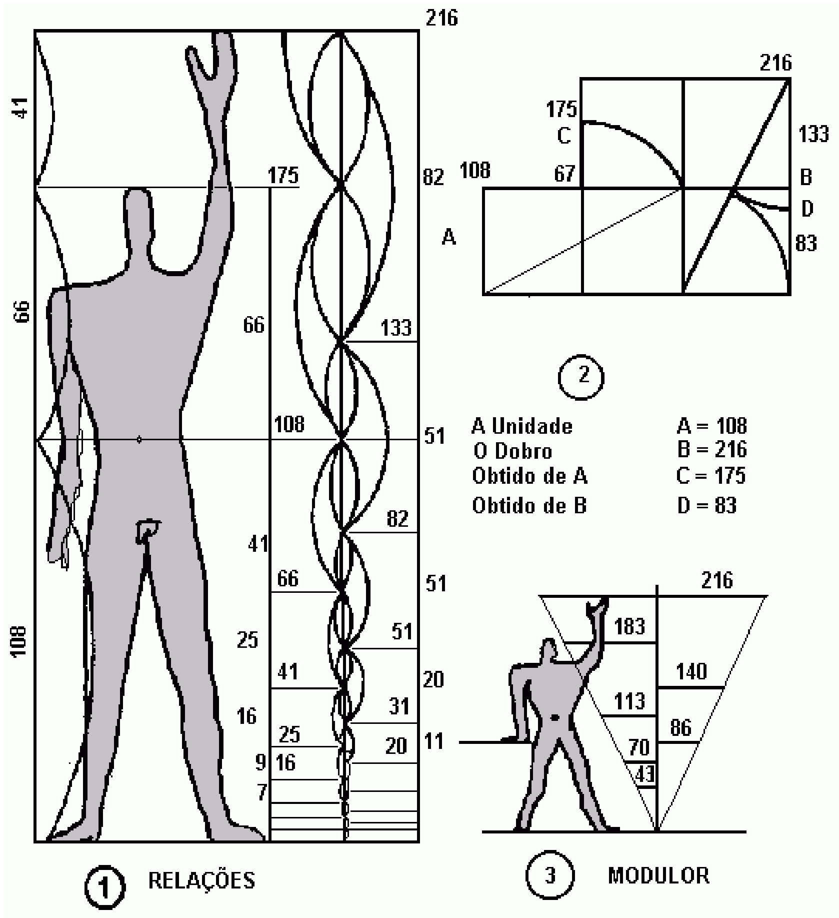


Figura 45 – Modulor

Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/Fibonacci/seqfib2.html

Porém há muitas diferenças entre as construções antigas e as modernas, diferenças estas que são notáveis. A arquitetura nos tempos antigos era feita visando encontrar a beleza harmônica mesmo que para isso fosse preciso gastar muito além do necessário. E, nos dias atuais, o homem vem se preocupando cada vez mais com os valores a serem gastos, assim, deixam para trás a possibilidade de possuir, tamanha beleza próxima de si.

2.4.4 Número de Ouro no Cotidiano

No nosso cotidiano, a Razão Áurea pode ser encontrada de forma aproximada em diversos objetos inimagináveis como: cartão de crédito Figura 46, livros, televisores LCD, notebooks, dentre outros. Nos cartões de crédito, a razão entre o comprimento e a largura é um valor aproximado do Número de Ouro.

Figura 46 – Cartão de Crédito

Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/Fibonacci/seqfib2.html

CAPÍTULO III

PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

3.1 A Razão Áurea no Ensino

Atualmente, têm-se muitos estudantes com dificuldades de aprendizagem em matemática. Com isso, é fundamental compreender como se processa a aprendizagem para que o docente consiga fazer com que o discente supere suas dificuldades de aprendizagem. Neste sentido, apresenta-se a seguir algumas visões da aprendizagem, para em seguida, fazer uma análise acerca da temática aqui tratada.

Como existem muitos estudantes com dificuldades de aprendizagem em matemática, é importante que o docente busque aprimorar, o seu trabalho de ensino e aprendizagem usando uma metodologia de abordagens mais aprofundadas e com mais detalhes, visando uma melhor compreensão do discente acerca do conteúdo. Para o docente, ter o domínio dos conteúdos é tão importante quanto à escolha de uma metodologia que proporcione um melhor aprendizado ao discente como salientam diversos estudiosos da aprendizagem.

Entender a aprendizagem não é algo fácil. Diversas teorias tentam explicá-la, conceituá-la, mas sua explicação conceitual é intrínseca ao ambiente e ao processo analisado. Ou seja, a cada ser se aplicam determinados processos que fazem a diferença no desenvolvimento dos saberes e que devem ser considerados individualmente. O trabalho docente é então focado neste processo que precisa ser entendido como essencial ao estudante, cabendo boa parte das competências desenvolvidas pela criança, o estímulo à leitura e à escrita. Assim, serão detalhadas a seguir algumas teorias acerca da aprendizagem advindas dos estudos da Psicologia.

Para Skinner (1982, p.56), “a aprendizagem é a conexão entre o estímulo e a resposta. Completada a aprendizagem, estímulo e resposta estão de tal modo unidos, que o aparecimento do estímulo evoca a resposta.” Esta é uma teoria do estímulo e resposta, que considera que o ser humano só aprende a partir dos estímulos que recebe. Por longos anos, foi considerada como essencial para a compreensão da estrutura cognitiva do ser humano.

Na teoria de Campo, que tem sua base na teoria Gestaltista, a aprendizagem é decorrente da seguinte situação: “são as forças do ambiente social que levam o indivíduo a reagir a alguns estímulos e não a outros. Ou que levam indivíduos diferentes a reagirem de maneira diferente ao mesmo estímulo.” (BOCK, 1999. p.26) Diante desta consideração, pode-se compreender que no processo de evolução da compreensão da aprendizagem é uma teoria que apresenta importantes modificações, pois amplia a possibilidade do sujeito reagir ou não, diante dos estímulos que recebe. Então, aprender é algo que depende também da disponibilidade do sujeito.

Outra importante teoria que apresenta a aprendizagem e seu acontecimento é a cognitiva. Nela compreende-se o seguinte:

> A teoria cognitiva, elaborada inicialmente por Dewey e depois por Bruner concebe a aprendizagem como solução de problemas. É por meio da solução dos problemas do dia-a-dia que os indivíduos se ajustam a seu ambiente. Da mesma forma deve proceder a escola, no sentido de desenvolver os processos de pensamento do discente e melhorar sua capacidade para resolver problemas do cotidiano. (BOCK, 1999. p.87)

Assim, há uma aproximação com os contextos atuais acerca da aprendizagem. De certo modo, ao promover situações problemas, o educador propicia ao discente um momento em que este pode atuar sobre determinadas situações que o levarão a aprender.

Das teorias mais recentes, segundo Piaget (1973. p.27), “a criança desenvolve seu conhecimento ao passo que se relaciona com o mundo externo. Durante seu crescimento, a criança passa por momentos de adaptações com as novas situações.” É um processo denominado por este estudioso como assimilação para que haja a incorporação de elementos novos aos conhecimentos já existentes. É por meio das novas situações que o sujeito assimila as situações já vividas e, consequentemente, aprende, sendo que o conhecimento é construído e passa por um processo de maturação.

> A estrutura do pensamento posterior depende da estrutura do pensamento anterior. Toda estrutura embora não visível tem um funcionamento. O processo de identificação da criança com o mundo depende da iniciativa da própria criança. Ao nascer a criança não possui noção de diferença entre o eu e o mundo. A consciência dá inicio devido ao próprio egoísmo de construção. (BARROS, 1998. p.101)

Ao idealizar esta teoria, Piaget propõe que a influência dessas forças sobre o indivíduo dependeria, em alto grau, das próprias necessidades, atitudes, sentimentos e expectativas do indivíduo, pois são estas condições internas que constituem o campo psicológico de cada um.

Já os estudos de Barros (1998. p.45), propõem que “a aprendizagem é a modificação do comportamento e aquisição de hábitos.” E mostra que o psicólogo norte-americano Edward Lee Thorndike é um pioneiro da psicologia da aprendizagem, destacando que suas experiências tiveram início em 1897 onde realizou inicialmente experiências com cães, macacos e gatos onde observou o processo de aprendizagem destes animais e posteriormente nos humanos.

Diante destas considerações iniciais acerca da aprendizagem, é relevante então compreender a importância deste estudo como forma de analisar a aprendizagem no ensino de matemática.

Diante desta compreensão, esta é uma abordagem aos docentes a qual permite uma prática de forma mais contextualizada da matemática, usando a Razão Áurea para favorecer o processo de ensino-aprendizagem de vários conteúdos de matemática. Dentre estes conteúdos analisados serão propostas quatro atividades envolvendo alguns desses conteúdos, porém de extrema importância. Salientar a representação numérica das relações matemáticas, usando a parte teórica e a álgebra com suas respectivas propriedades para fazer demonstrações com o objetivo de aproximar os discentes de uma matemática pura e aplicada.

A proposta deste estudo está diretamente relacionada à necessidade de aproximar o discente de alguns importantes conteúdos da Matemática, usando a Razão Áurea no ensino como motivação para contextualizar e mostrar que a matemática está tão presente no cotidiano e que na maioria das vezes nem é percebida.

Portanto, as quatro atividades propostas foram construídas nos moldes da contextualização, sendo a primeira fazendo referência ao corpo humano (Homem

Vitruviano) e suas possíveis medidas áureas, a segunda fazendo contextualização com objetos retangulares do cotidiano do discente, com o objetivo de verificar a possibilidade de serem retângulos áureos ou o quanto se aproximam das medidas áureas, a terceira uma pesquisa no laboratório de informática sobre as flores em que o número de pétalas expressa um número da sequência de Fibonacci e a quarta é uma construção de sequências numéricas utilizando a recursividade da sequência de Fibonacci.

As atividades propostas foram realizadas em uma turma heterogênea, do 9º ano do ensino fundamental, do Centro de Ensino Fundamental Buriti Vermelho no qual o pesquisador é docente o qual ministra a disciplina de matemática, com o público alvo de 25 discentes.

Contemplando a prática pedagógica como um processo contínuo, respeitando a diversidade, os diferentes ritmos de aprendizagem de cada discente, oferecer possibilidades de aproximação do discente e a matemática em sua forma pura e aplicada por meio da temática de razões áureas, viabilizando situações-problemas que os envolva e os capacite a interagir matematicamente, com o que aprendem na escola ou vivenciam, são os objetivos principais das quatro atividades.

De acordo com Barros (1998. pg.101), “a estrutura do pensamento posterior depende da estrutura do pensamento anterior.” Portanto, para que haja uma estruturação do conhecimento, compreendendo fatores lógicos e também cronológicos, o aprendizado deve considerar além de aspectos cognitivos, a existência de conceitos já formados e de saberes já adquiridos pelos discentes, fato este que pode ser considerado como fator maturacional para uma aprendizagem eficaz. E essa interação da teoria e prática, se dá através da valorização de avaliações diagnósticas, afim de que haja não somente a verificação do que o discente já sabe, mas também a compreensão do que ele quer expressar.

3.2 Perspectivas Metodológicas

Com esta proposta de trabalho, haverá a construção da aprendizagem coletiva ou individual do discente e na participação qualitativa e participativa do discente.

Sendo que a participação qualitativa do discente está relacionada ao seu engajamento na realização das atividades propostas no trabalho, na busca de conhecimentos a partir de pesquisas orientadas ou não e também na construção da autonomia na realização de estudos a partir da mediação pedagógica.

Para a realização do estudo, serão utilizadas nesta proposta:

- Contextualização histórica;
- Experimentos e construções.

A contextualização histórica auxilia o discente a perceber que, ao longo da história, vários pensadores, de várias épocas, deram a sua contribuição para a construção de conceitos utilizados atualmente.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a demonstração no estudo da matemática é enfatizada e visa convencer o discente na validação, veracidade de uma proposição matemática por meio dos axiomas ou argumentos, com isso, contextualizando historicamente, ou seja:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo discente, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 2005. p.55)

Com isso, o discente percebe que a construção de um conceito matemático é feito ao longo de um processo lógico e cronológico, associando assim a matemática e a história.

Diante disso, cabe considerar que a aprendizagem Matemática envolve uma rede de conhecimentos pré-estabelecidos pelo sujeito ao longo de sua existência. O estímulo é fundamental, principalmente porque este se baseia na criatividade e na utilização dos conhecimentos pré-estabelecidos pelo sujeito ao longo de sua existência. Ainda definindo a Matemática e sua aplicação, pode-se considerar o seguinte:

> A Matemática é também uma ciência aplicada. Muitos matemáticos concentram a sua atenção na resolução de problemas que têm origem no mundo da experiência. Também eles procuram padrões e relações e para isso usam técnicas que são semelhantes àquelas utilizadas na prática da Matemática pura. A diferença reside essencialmente na intenção. (VASCONCELOS, 2009. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect6.htm)

São as descobertas advindas desta área do conhecimento que fizeram com que a humanidade progredisse em diversas áreas e conseguisse modificar suas ações frente à natureza e às necessidades dos seres humanos. Assim, a Matemática não é uma área limitada, mas abrange outras importantes áreas do conhecimento, bem como influencia diretamente no contexto histórico atual.

Diante do que se propõe em relação ao ensino e aprendizagem em Matemática, é fundamental considerar os estudos de Piaget que faz importante análise sobre este processo. Sobre a Educação Matemática ele considera:

> O papel inicial das ações e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para chegar-se ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervém nestas deduções posteriores derivam justamente das ações: ações interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior se bastará a si mesmo. A segunda razão é que a coordenação de ações e as experiências lógicas matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se, a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente a abstração lógica e matemática. (PIAGET, 1973, p.145)

O desenvolvimento do sujeito e de seus conhecimentos em Matemática se dá então por um processo de reconhecimento das experiências e acomodação destes conhecimentos junto aos conhecimentos pré-existentes. É um processo de representação permeado de situações que ampliam as condições de raciocínio do sujeito. Os esquemas do desenvolvimento ampliam-se de modo a garantir uma nova tomada de consciência daquilo que se tem como conhecimento e de sua atuação sobre o meio. Ao promover certo desequilíbrio nas estruturas já estabelecidas no sujeito se tem condições de ampliar seus conhecimentos.

Neste sentido, é fundamental que o processo de ensino-aprendizagem na área de Matemática com direcionamento em relação a Razão Áurea possa melhorar a condição de abstração e o raciocínio lógico do discente. E também favoreça a coletividade que institui a troca de experiências que é fundamental para o desenvolvimento do ser humano.

3.3 Experimentos e Construções

As perspectivas metodológicas foram alcançadas através de experimentos e construções. Os experimentos foram feitos em sala de aula, onde os discentes fizeram as medições nos colegas para em seguida efetuarem as razões, as médias aritméticas dessas razões e depois verificar qual das médias se aproxima mais da razão áurea (atividade 1) e as medições em objetos retangulares para em seguida efetuarem as razões desses objetos (Atividade 2). Já as construções teóricas, em sala, do segmento áureo e da sequência de Fibonacci visam o discente desenvolver habilidades de censo crítico de suas ideias em verificar, através da atividade, qual menino e menina que mais se aproxima da razão áurea, ou seja, se eles enquadram no conceito de beleza áurea (atividade 1). A explicação do retângulo possibilitou desenvolver uma atividade buscando observar a obtenção da razão áurea em objetos retangulares do nosso cotidiano (atividade 2). Com o conhecimento dos discentes sobre a sequência de Fibonacci, foi possível propor uma atividade de pesquisa no laboratório de informática sobre as flores em que o número de pétalas expressa um número da sequência de Fibonacci (atividade 3) e uma construção de sequências numéricas utilizando a recursividade da sequência de Fibonacci (atividade 4).

Sendo assim tanto os experimentos quanto as construções, oportunizam ao discente, um processo de aprendizagem, que visa a relação da prática com a teoria matemática e a utilização de materiais concretos proporcionando a habilidade de comprovar por meio da verificação teórica dos conceitos matemáticos e entender a veracidade ou não de cada conceito, não sendo apenas a memorização sem nenhuma relação entre a teoria e a prática.

Levando em consideração esta proposta, observa-se que, o papel que cada um desempenha é fundamental para que o processo ensino e aprendizagem se efetivem, principalmente quando se considera que no contexto atual, todo o ensino deve estar voltado para a realidade, ou seja, para a prática no cotidiano. Neste contexto, o docente deve ser aquele que estimula, mostra caminhos e faz com que o discente aprenda significativamente. Já o discente é parte central do processo, pois é este que buscará essencialmente ampliar seus domínios de conhecimento, desde que estes sejam significativos para sua ação diária.

Quanto à matemática, entende-se que esta se estabeleceu historicamente e que seus conceitos foram sendo modificados ao longo deste processo. Importante é saber que sua amplitude permitiu ao ser humano instalar-se em um novo processo de conhecimento que lhe imprimiu conquistas inigualáveis ao longo da história da humanidade.

De acordo com Vasconcelos (2009):

> A Matemática é, essencialmente, uma atividade criativa. A formulação e a resolução de problemas constituem os elementos fundamentais da atividade matemática - sem resolver e sem formular problemas não se faz Matemática - e é isso que lhe confere esse caráter criativo. Por outro lado, fruto do desenvolvimento interno e autônomo da Matemática ou suscitados por necessidades e exigências que lhe são exteriores, esses problemas, a sua formulação e resolução, constituem a contribuição mais importante da Matemática nas suas relações com as diversas ciências e outras atividades humanas. Além disso, ao nível do ensino da Matemática, considera-se que situações de caráter problemático favorecem a criação de ambientes de aprendizagem ricos e estimulantes. (VASCONCELOS, Cláudia Cristina. <http://www.ipv.pt/millenium/20_etc6.htm>)

Assim, a Matemática, que atravessou a história da humanidade, tem papel fundamental em todas as outras ciências. Isso porque suas regras fizeram com que elementos fossem comprovados e provados de modo a fazer com que o ser humano encontrasse novas possibilidades de atuação na sociedade. Estas possibilidades se expressam em particular no desenvolvimento da tecnologia que permitiu a medicina, engenharia, física, química e outras áreas do conhecimento ampliar seu campo de atuação em busca da melhoria da qualidade de vida dos seres humanos.

3.4 Atividades Propostas

Neste momento foram apresentadas quatro propostas de atividades, sendo elas: O conceito de beleza áurea no corpo humano a partir do Homem Vitruviano

Atividade 1), Razões áureas em objetos retangulares no cotidiano do discente (Atividade 2), Razão áurea na Biologia – quantidade de pétalas nas flores (Atividade 3) e Construção de sequências numéricas utilizando a recursividade da sequência de Fibonacci (Atividade 4), onde os conteúdos matemáticos abordados nas atividades, foram desenvolvidos anteriormente à aplicação das mesmas.

3.4.1 Atividade 1 – Conceito de Beleza Áurea no Corpo Humano

Procedimentos metodológicos:

Formam-se grupos de três a cinco discentes. Em seguida, cada grupo recebeu do docente o material didático, contendo o texto (O Homem Vitruviano), bem como uma tabela para registros (Anexo C).

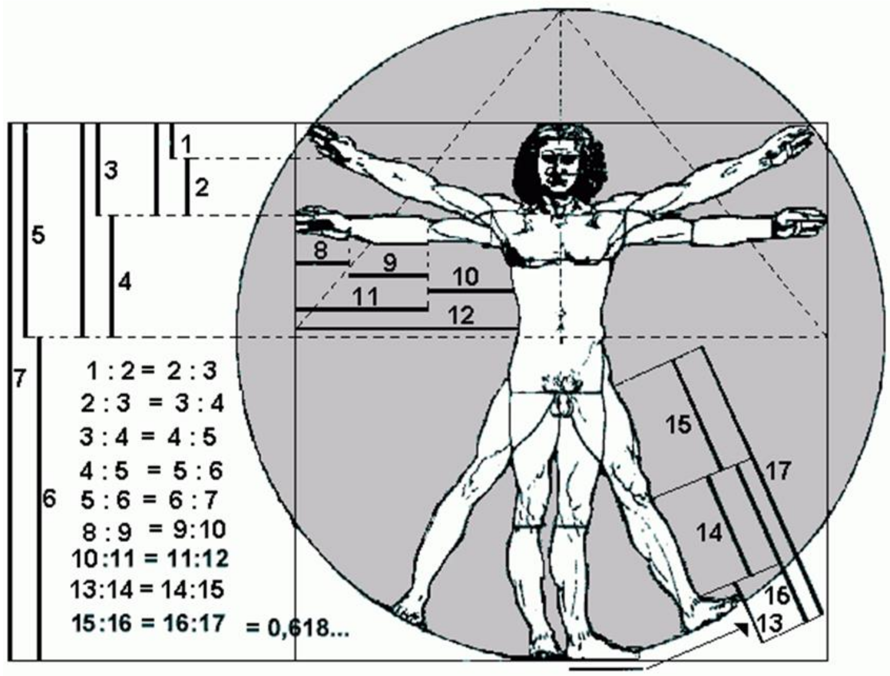
Com o material em mãos, realizou-se uma leitura coletiva do texto e em seguida uma discussão do mesmo. Logo após, os discentes de cada grupo realizou as medições de cada integrante de seu grupo e em seguida registrou na tabela, observando que a tabela tem um campo para ser inserido o nome. Após a realização das medidas, efetuou-se as razões e as médias aritméticas das razões obtidas por cada integrante do grupo. Em um segundo momento, de posse de todas as médias aritméticas das razões de cada integrante do grupo, verificou-se qual desses integrantes mais se aproxima do Número Áureo.

E, no último momento, verificou-se em toda sala de aula do menino e também da menina que mais se aproximam do número áureo, com isso sendo o “menino áureo” e a “menina áurea”.

Para concluir esta atividade, o docente questionou toda a turma sobre a aceitação desta beleza áurea.

Texto para atividade:

O Número de Ouro também é lembrado por Leonardo da Vinci em “O Homem Vitruviano” figura abaixo. Leonardo da Vinci era um gênio e utilizava a Razão Áurea em suas obras para garantia de uma beleza, harmonia e perfeições únicas.



O Homem Vitruviano

A imagem “O Homem Vitruviano” descreve uma figura masculina que ao mesmo tempo se encontra em duas posições sobrepostas e com o corpo dentro de um círculo e um quadrado, com os braços e as pernas esticados, tendo o umbigo como o centro do círculo. E com isso mostrando tais proporções entre as partes do corpo como aparecem na figura acima.

O estudo do desenho “O Homem Vitruviano” é uma forma de mostrar a aplicação de conceitos matemáticos dentro da arte. Mostrar também para os discentes a importância do uso desses conceitos para se obter a perfeição das relações que existem na obra e fazendo assim com que a aula fique mais dinâmica. Esse estudo faz também com que o discente acabe adentrando no contexto em que ele foi criado, podendo proporcionar o estudo do período histórico da obra e do autor.

Outros pintores que utilizaram a Razão Áurea foram: Salvador Dali, Giottodi Bondone, Gino Severini, Picasso, dentre outros.

Objetivos pedagógicos:

Abordar a Razão Áurea que é pouco ministrada por docentes de matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Realizar o estudo do sistema de unidades de medidas de comprimento. Em seguida, cada grupo realizou na prática as medidas dos próprios integrantes do grupo.

Fazer o estudo de razão e proporção e aplicar tais conceitos para que possivelmente possa obter as razões áureas com as medidas obtidas por cada grupo.

Fazer o estudo de média aritmética e aplicar tal conceito para obter a média aritmética das medidas dos integrantes de cada grupo, para que possamos ter uma média das razões áureas de cada estudante, para saber de forma geral qual se aproxima mais da medida áurea.

Despertar no discente as curiosidades da beleza matemática na estética, entre outras.

Tornar explícito que a matemática possui diferentes maneiras de abordagens práticas muito significativas no cotidiano dos indivíduos e que tais abordagens são ignoradas por muitos docentes.

Tornar a sala de aula um ambiente de troca de experiências entre discentes e docente e com isso desenvolver habilidades nas crianças de explicitar suas ideias nas aulas de matemática, o que, de maneira geral, pouco acontece.

Fazer uma valorização positiva da matemática em relação à sua beleza e lógica.

Material pedagógico:

- Calculadora;
- Fita métrica;
- Lápis;
- Caneta;
- Borracha;
- Tabela abaixo (contendo as razões das medidas do corpo humano);
- Cópias do texto – “Homem Vitruviano”.

Tabela para a atividade:

		Discentes					
Medidas		01	02	03	04	05	06
01	Tamanho do olho						
02	Distância entre os olhos						
03	Razão entre as medidas 01 e 02						
04	Medida do quadril ao chão						
05	Medida do joelho ao chão						
06	Razão entre as medidas 04 e 05						
07	Altura do crânio						
08	Medida da mandíbula até o alto da cabeça						
09	Razão entre 07 e08						
10	Tamanho do dedo médio inteiro						
11	Dobra central até a ponta						
12	Razão entre 10 e 11						
13	Medida da cintura até a cabeça						
14	Tamanho do tórax						
15	Razão entre 13 e 14						
16	Altura do corpo do chão até a extremidade da cabeça.						
17	Distância do umbigo até o chão						
18	Razão entre 16 e 17.						
16	Media aritmética das Razões 03, 06,09, 12, 15 e 18						

3.4.2 Atividade 2 – Razões Áureas em Objetos Retangulares no Cotidiano do Discente

Procedimentos metodológicos:

Fazer uma leitura e um comentário do texto “O Retângulo Áureo” com os discentes. E depois demonstrar no quadro, o Retângulo Áureo contido no texto (Anexo D).

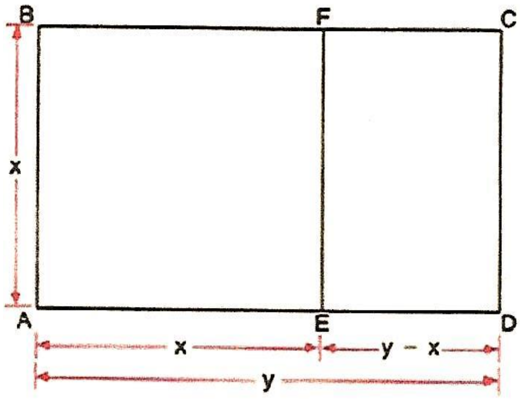
Formar grupos, no mínimo 3 e máximo 6 discentes. A partir da formação dos grupos e para que a atividade fique direcionada, os discentes receberam uma tabela que se encontra na atividade 2 contendo sugestões de objetos retangulares. Em seguida, os discentes de cada grupo irão medir o comprimento e a largura de cada objeto e registrar essas medições na tabela. Após a realização das medidas, os discentes efetuaram a razão entre o comprimento e a largura nesta ordem de cada objeto e registrar todas as informações na mesma tabela.

E, no último momento, de posse de todas as razões obtidas dos objetos da tabela, como sugestão sobre esta atividade, cada grupo apresentará os objetos retangulares que mais se aproximarão da razão áurea e assim o docente poderá aproveitar o momento para falar mais sobre o assunto de retângulo áureo.

Texto para atividade:

O Retângulo Áureo é o retângulo cuja proporção entre o comprimento e a altura é aproximadamente o Número de Ouro, ou seja, 1, 618033...

Sobre o retângulo ABCD, traça um segmento de reta EF de modo que forme o quadrado ABFE. Conforme a Figura 47. Sendo x a medida do lado AB e y a medida do lado AD, um retângulo é dito Retângulo Áureo quando:



Retângulo Áureo
Fonte: http://www.qfojo.net/irracionais/irracionais.html

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - x} \cong 1{,}618 \ldots$$

Objetivos pedagógicos:

Organizar trabalhos em grupos provocando a interação, facilitando assim o aprendizado pela troca de informações;

Fazer o estudo de Razão e Proporção e aplicar tais conceitos para que possivelmente possa obter as razões áureas com as medidas dos objetos retangulares;

Realizar um estudo do sistema de unidades de medidas de comprimento. Em seguida, após o estudo citado, fazer as medidas dos objetos retangulares.

Material pedagógico:

- Objetos retangulares do cotidiano;
- Fita métrica;
- Cópia do texto – “O Retângulo Áureo”;

- Régua;
- Lápis;
- Borracha;
- Caneta;
- Cópia da tabela com os objetos a serem medidos.

Tabela para a atividade:

Objeto	Comprimento (a)	Largura (b)	Razão a/b
Carteira de motorista			
Cartão de banco			
Carteira de identidade			
Cartão do CPF			
Capa de um caderno			
Capa do livro de matemática			
Mesa do discente			
Tela do aparelho de TV			
Folha de papel A4			
Janela da sala			
Porta da sala			
Monitor do computador			
Tamanho da sala			
Cerâmica de revestimento			

3.4.3 Atividade 3 – Razão Áurea na Biologia – Quantidade de Pétalas nas Flores

Procedimentos metodológicos:

Propor a leitura do texto “Sequência de Fibonacci” e mediar uma discussão sobre o mesmo com o embasamento teórico da leitura do texto.

Formar alguns grupos de discentes com o número de integrantes, definidos pelo docente.

Encaminhar os grupos formados para o laboratório de informática para fazerem uma pesquisa, de no mínimo quatro flores, em que o número de pétalas é expresso por um número da sequência de Fibonacci.

Após a pesquisa, cada grupo apresentará aos demais grupos o resultado obtido da sua pesquisa.

O docente pode aproveitar o momento para mostrar para os discentes que existem muitas flores em que o número de pétalas é correspondente ao número da sequência de Fibonacci.

Registrar na tabela fornecida pelo docente o nome de cada flor pesquisada com o seu respectivo número de pétalas.

Texto para atividade:

Quem nunca na sua vida pegou uma flor de margarida do campo e contou suas pétalas? A fim de satisfazer sua curiosidade da seguinte pergunta: “Bem me quer ou mal me quer?”. Não só as margaridas do campo, mas determinadas flores também apresentam a relação com a Razão Áurea e com os números de Fibonacci. Grande parte das margaridas do campo têm, treze, vinte e um ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci. Um exemplo dessas margaridas do campo pode ser visto na Figura 48 onde é apresentada uma margarida do campo com 13 pétalas, o sétimo número na sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...).

Margarida do campo

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Dentro do universo das plantas, podemos citar também os jarros, o lírio, íris, os linhos, a columbina, a asterácea, a banana-da-terra, chicória dentre outras. Podemos verificar que o número de pétalas destas e diversas outras flores corresponde a um número de Fibonacci. Conforme pode ser visto abaixo Figura 49 a 54.

1 pétala **2 pétalas** **3 pétalas**

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

5 pétalas **8 pétalas** **13 pétalas**

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Objetivos pedagógicos:

Abordar a sequência de Fibonacci que é pouco ministrada por docentes de Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Organizar trabalhos em grupos provocando a interação e assim facilitar o aprendizado e discussões entre os grupos.

Mostrar a relação da Matemática com a natureza.

Fazer observações na natureza e relacionar com a Matemática.

Conscientizar a importância da preservação do meio ambiente visto que não é necessário colher as flores para esta pesquisa.

Abordar a interdisciplinaridade com a Biologia para mostrar a sua relação com a Matemática.

Material pedagógico:

- Computador;

- Lápis;
- Borracha;
- Cópia do texto – “Sequência de Fibonacci”;
- Cópia da tabela abaixo.

Tabela para atividade:

Flor	Número de pétalas

3.4.4 Atividade 4 – Construção de Sequências Numéricas Utilizando a Recursividade da Sequência de Fibonacci

Procedimentos metodológicos:

Propor a leitura do texto “Sequência de Fibonacci” e mediar uma discussão sobre o mesmo, com o embasamento teórico da leitura do texto.

Formar grupos de discentes com a quantidade de integrantes definida pelo docente.

Em seguida, preencher a tabela fornecida pelo docente com sequências recursivas que tem os dois primeiros termos começando por 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e a partir do terceiro termo sendo igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores, seguindo a ideia da recursividade da sequência de Fibonacci.

Texto para atividade:

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233..., na qual cada termo (a partir do terceiro) é a soma dos dois termos anteriores, foi aproximadamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891).

Sendo assim,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Objetivos pedagógicos:

Abordar a sequência de Fibonacci que é pouco ministrada por docentes de Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Organizar trabalhos em grupos provocando a interação e assim facilitar o aprendizado e as discussões entre os grupos.

Material pedagógico:

- Lápis;
- Borracha;
- Caneta;
- Cópia do texto – “Sequência de Fibonacci”;
- Cópia da tabela da atividade.

Tabela para atividade:

Termos	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**	**10º**	**Soma dos 10 termos**
Sequências											
Sequência Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	
2ª Sequência (x 2)	2	2									
3ª Sequência (x 3)	3	3									
4ª Sequência (x 4)	4	4									
5ª Sequência (x 5)	5	5									
6ª Sequência (x 6)	6	6									
7ª Sequência (x 7)	7	7									

CAPÍTULO IV

OBSERVAÇÃO DA REALIDADE

4.1 Metodologia da Pesquisa

4.1.1 Descrição do Estudo

No que se refere a sua finalidade esta é uma pesquisa descritiva e exploratória. Segundo Vergara (2006, p.47), "esta pesquisa expõe características de determinada população ou de determinado fenômeno. Portanto, não tem compromisso de explicar os fenômenos que descreve, embora sirva de base para tal explicação".

Quanto aos meios, a investigação consta de pesquisa bibliográfica e de campo. A opção pela pesquisa bibliográfica se deve ao fato de que toda pesquisa científica pressupõe a análise das teorias diversas sobre o tema.

Para Marconi e Lakatos (2006), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos, com o objetivo de identificar as informações e os dados constantes do material impresso e estabelecer relações entre as informações e os dados com o problema proposto.

Quanto à pesquisa de campo, Vergara (2007, p.47) descreve que "é a investigação empírica realizada no local onde ocorre ou ocorreu um fenômeno ou que dispõe de elementos para explicá-lo." Assim, esta forma de pesquisa é importante para que se possam compreender determinados acontecimentos ou fenômenos, pois possibilita ao pesquisador coletar, por meio de entrevistas, aplicação de questionários e outros instrumentos, dados que lhe permitem relacionar a teoria e a prática sobre determinada temática.

4.1.2 População e Amostra

A população pesquisada consiste em discentes do 9º ano do Ensino Fundamental do Centro de Ensino Fundamental Buriti Vermelho, na cidade satélite Paranoá, no Distrito Federal. A amostra é de 25 discentes, pois toda a turma participou da realização da pesquisa, não sendo descartado nenhum participante da pesquisa.

4.1.3 Instrumentos de Pesquisa

O instrumento de pesquisa utilizado foi uma atividade constando de onze questões de cunho sociocultural e de conhecimentos prévios acerca da temática analisada neste estudo. Este também consta de sete questões específicas sobre razão, proporção e razão áurea que foi aplicado em duas etapas. Inicialmente, aplicaram-se as dezoito questões a toda a turma. Ao final das intervenções, novamente foram aplicados os questionários com as sete questões de razão, proporção e razão áurea para que se pudesse estabelecer um comparativo entre os resultados iniciais e finais.

4.1.4 Coleta de Dados

A coleta de dados ocorreu durante os meses de setembro e outubro do ano de 2014 por meio da realização de seis intervenções em sala de aula, totalizando doze aulas. Inicialmente aplicou-se o diagnóstico e, após sua análise, realizaram-se aulas expositivas sobre os conteúdos tratados. Foram realizadas diversas atividades e discussões em sala de aula para, ao final do processo, aplicar novamente a atividade diagnóstica. Ressalta-se que a atividade diagnóstica foi aplicada sem que os discentes fossem avisados previamente, pois o intuito foi verificar a construção de conhecimentos a partir das intervenções realizadas.

4.2 Apresentação e Análise dos Resultados da Pesquisa

A partir deste momento, analisam-se especificamente os resultados da pesquisa realizada com a turma do 9º ano do Ensino Fundamental do Centro de Ensino Fundamental Buriti Vermelho, na cidade satélite Paranoá, no Distrito Federal. A pesquisa, como já ressaltado, realizou-se a partir da aplicação de uma avaliação diagnóstica no início e ao final das intervenções.

Foram realizadas doze aulas em seis intervenções. A finalidade foi verificar os conhecimentos prévios dos discentes acerca do conteúdo de razão, proporção e razão áurea para em seguida realizar a intervenção no intuito de promover a construção de conhecimentos sobre a temática.

A apresentação dos resultados será dividida em cinco etapas distintas apresentadas a seguir.

4.2.1 Aplicação do Primeiro Diagnóstico

Esta atividade foi realizada pela aplicação de um questionário sociocultural (Anexo A) e questões específicas (Anexo B) do conteúdo tratado neste estudo.

Inicialmente foi apresentada a turma, a proposta e os objetivos do desenvolvimento da pesquisa para a equipe gestora da Unidade Educacional para que houvesse aprovação prévia para a sua realização em sala de aula. Após a aprovação para a sua realização, a mesma foi apresentada aos discentes do 9º ano do Ensino Fundamental, não havendo rejeição quanto à participação.

Para que os discentes participassem efetivamente da pesquisa, foi enviada uma solicitação aos responsáveis que foi devolvida à Unidade Escolar preenchida e assinada pelos responsáveis legais, sendo pertinente observar que todos os responsáveis autorizaram esta participação.

A partir da autorização, iniciou-se a pesquisa a partir da aplicação do questionário (Anexo A), tendo como objetivo verificar se os discentes estudam por gostar ou por que são obrigados, bem como a disciplina de sua preferência. Sobre o ensino de Matemática, foram questionados sobre a forma como ela é ensinada e se há aprendizagem ou se é necessária à inserção de novos recursos, quer tecnológicos ou não, no processo de ensino e aprendizagem. Entre estes recursos podem ser citados: jogos, o computador, bem como os docentes procederem de modo a garantir a contextualização dos conteúdos com a realidade vivenciada pelos discentes.

Também buscou-se compreender qual a principal dificuldade destes discentes com o ensino e a aprendizagem em Matemática, tais como: assimilar o conteúdo; interpretação das atividades propostas; explicação do entendimento de razão em matemática; compreensão de razão áurea e média aritmética. A partir de então, os discentes resolveram em sala de aula e sem nenhuma explicação prévia os sete exercícios envolvendo razão, proporção e razão áurea, os quais serão comentados posteriormente quanto aos resultados percebidos, estabelecendo-se uma ampla relação entre estes resultados e os resultados da segunda aplicação.

Procedendo-se uma análise do diagnóstico inicial, percebe-se que 92% dos discentes gostam de estudar, sendo que 36% dos pesquisados responderam que a disciplina com que mais se identificam é a matemática. Ressalta-se ainda que 92% dos discentes pesquisados gostam de como as aulas de matemática são realizadas e o conteúdo ensinado. Cercam de 76% dos discentes preferem um ensino de matemática mais contextualizado e utilizando estratégias como jogos, o computador, entre outros.

Analisando os resultados, ainda é perceptível que aproximadamente 72% dos discentes comentam com os docentes de suas dificuldades em relação à disciplina de Matemática. Dentre estes discentes, 28% têm dificuldades em assimilar os conteúdos; 24% têm dificuldades em interpretar as atividades e 48% têm dificuldades em realizar os cálculos.

4.2.2 Intervenção em Sala de Aula – Aplicação da Atividade 1 (Conceito de Beleza Áurea no Corpo Humano)

O primeiro momento da intervenção realizada promoveu uma reflexão e aprendizagem acerca do conceito de beleza estético no corpo humano. O docente pesquisador realizou a aula expondo as ideias acerca da atividade, deixando a curiosidade dos discentes aguçada. Após a explicação, foi proposto que todos participassem da atividade no intento de descobrir qual deles se aproximariam mais do padrão de beleza estética, sendo a atividade dividida em três encontros.

Primeiro encontro

No primeiro momento, o docente pesquisador fez uma atividade demonstrando o segmento áureo usando conceitos de razão e proporção. Houve a mediação de uma discussão ampla sobre o tema, buscando a participação de todos os discentes sobre a temática. Finalizando o primeiro momento, os discentes transcreveram a demonstração do segmento áureo. Houve uma intensa satisfação pelo fato de que a realização desta atividade era bem aceita pela turma.

Segundo encontro

No segundo encontro, foram formados grupos de três a cinco discentes. Em seguida foi distribuído o texto “Homem Vitruviano” e uma tabela (Anexo C) para que pudessem registrar as medições no corpo de cada um para que, posteriormente, fossem estabelecidos os resultados.

Com o material em mãos, os discentes realizaram a leitura coletiva do texto e em seguida uma discussão dentro do grupo e no grande grupo mediado pelo docente pesquisador. Em seguida os discentes realizaram as medições de cada integrante do grupo registrando na tabela (Anexo C). Finalizou-se o segundo encontro com a observação dos discentes sobre o trabalho realizado, sendo que alguns discentes realizaram comentários como: “Nossa, a matemática assim é mais legal!”, mostrando a importância do trabalho desenvolvido.

Terceiro encontro

O terceiro momento desta atividade iniciou-se com as medidas já efetuadas anteriormente, realizando-se as razões dessas medidas e as médias aritméticas das razões obtidas. Com estas médias em mãos, os discentes puderam verificar o quanto eles se aproximaram da razão áurea. Foi realizada a anotação no quadro branco para que pudessem verificar em toda a sala de aula o menino e a menina que mais se aproximava da razão áurea. Assim, ficaram claros para eles o “menino áureo” e a “menina áurea”. Finalizando o momento, o docente pesquisador questionou a turma sobre a aceitação desta beleza obtendo visões e opiniões diversas sobre o tema. Cerca de 80% dos discentes pesquisados concordaram com a beleza áurea proposta na atividade.

4.2.3 Intervenção em Sala de Aula – Aplicação Atividade 2 (Razões Áureas em Objetos Retangulares no Cotidiano do Discente)

Foi realizada a observação da razão áurea em objetos retangulares que fazem parte do cotidiano dos discentes. Inicialmente o docente pesquisador expôs a atividade a ser trabalhada com os retângulos e os discentes foram questionados sobre como seria realizada, pensando em todos os objetos retangulares do seu cotidiano escolar. Com isso, a atividade foi dividida também em três encontros para facilitar a aprendizagem.

Primeiro encontro

O docente pesquisador fez uma construção detalhada de um retângulo áureo usando conceitos da geometria e também da álgebra tais como: paralelismo, teorema de Pitágoras, quadriláteros, razão, proporção, entre outras. Posterior a este momento, os discentes realizaram diversos questionamentos sobre o tema, que foram respondidos com exemplos pelo docente pesquisador. Houve um longo momento de mediação da discussão e os discentes participaram ativamente. Finalizando o primeiro encontro com a turma, foi solicitado que os discentes transcrevessem a atividade para o caderno.

Segundo encontro

Neste encontro o docente pediu para que os discentes formassem grupos de três a seis discentes. Em seguida foi distribuído um texto intitulado “O retângulo áureo” e uma tabela com objetos retangulares do cotidiano dos discentes, os quais estão na atividade em (Anexo D).

Com o material em mãos, foi realizada uma leitura coletiva do texto e posteriormente uma discussão do mesmo mediado pelo docente pesquisador. Logo após os discentes começaram a fazer as medições em todas as partes da escola, utilizando fita métrica, com o intuito de coletar dados para o preenchimento da tabela da Atividade 2 (Anexo D) com os objetos retangulares propostos. Finalizando este encontro com o retorno dos discentes à sala de aula para uma breve observação dos resultados. Entre os comentários dos discentes vale destacar: “Se todos os docentes de matemática fizessem assim, seria muito mais fácil aprender matemática”.

Os discentes mostraram-se satisfeitos com os resultados da atividade realizada e mantiveram a motivação para os próximos encontros.

Terceiro encontro

Neste encontro iniciaram-se as atividades com as medidas já efetuadas anteriormente. Assim, os discentes realizaram as razões entre o comprimento e a largura nesta ordem de cada objeto da tabela (Anexo D) podendo assim verificar qual objeto retangular mais se aproxima do retângulo áureo. Finalizando a atividade, o docente pesquisador pode observar que até mesmo os discentes considerados “problemas”, em razão das dificuldades de aprendizagem, participaram efetivamente da atividade conseguindo compreender o conceito de retângulo áureo, tendo alguns observado que houve aprendizagem verdadeira dos conceitos.

4.2.4 Intervenção em Sala de Aula – Aplicação da Atividade 3 (Razão Áurea na Biologia – Quantidade de Pétalas nas Flores)

A atividade proposta aqui envolve as razões áureas na biologia, sendo foco da análise a quantidade de pétalas das flores. A atividade foi realizada em dois encontros, sendo que percebeu-se um entusiasmo fora do comum por parte da turma participante da pesquisa. A pesquisa foi desenvolvida com a utilização do laboratório de informática, sendo a mesma realizada em dois encontros.

Primeiro encontro

O docente pesquisador realizou uma exposição da sequência de Fibonacci, utilizando uma construção das potências do número áureo (Anexo G), evidenciando a sequência como sendo os coeficientes dos resultados dessa potência. A partir desta compreensão, mostrou-se a questão recursiva da sequência de Fibonacci. Finalizando o primeiro encontro, o docente solicitou que os discentes transcrevessem a exposição do docente e houve resultados positivos e visíveis.

Muitos discentes comentaram que está muito mais fácil aprender desta forma e registraram: “Nossa, parece que na matemática tudo está ligando uma coisa à outra.”

Segundo encontro

Neste segundo e último encontro, o docente pesquisador propôs que os discentes formassem grupos de três integrantes e foram encaminhados a um laboratório de informática para pesquisar no mínimo quatro flores em que o número de pétalas dessas flores fosse expresso por um número da sequência de Fibonacci e anotassem em uma tabela da Atividade 3 (Anexo E). E, em seguida, voltaram para a sala de aula e cada grupo apresentou as flores que encontraram que tinham relação com a sequência de Fibonacci.

Com isso, o docente pesquisador aproveitou o momento para comentar o aparecimento da sequência de Fibonacci na natureza. Os discentes ficaram muito interessados pela aula e agradeceram ao docente pesquisador pela atitude na realização de aulas diversificadas.

4.2.5 Intervenção em Sala de Aula – Aplicação da Atividade 4 (Construção de Sequências Numéricas Utilizando a Recursividade da Sequência de Fibonacci)

A atividade realizada neste último momento teve como intuito construir sequências numéricas utilizando a recursividade da sequência de Fibonacci. O docente pesquisador propôs a leitura do texto “Sequência de Fibonacci” e fez a mediação de uma discussão sobre o tema. Solicitou aos discentes que formassem grupos de três discentes e usou uma tabela da Atividade 4, em (Anexo F). Visto que já haviam sido expostas as características da Sequência de Fibonacci na Atividade 3 (Razões áureas na Biologia) e, com isso, os discentes construíram as sequências recursivas com os dois primeiros termos, sendo: 2, 3, 4, 5, 6 e 7 com cada sequência contendo os dez primeiros termos e a soma desses primeiros termos.

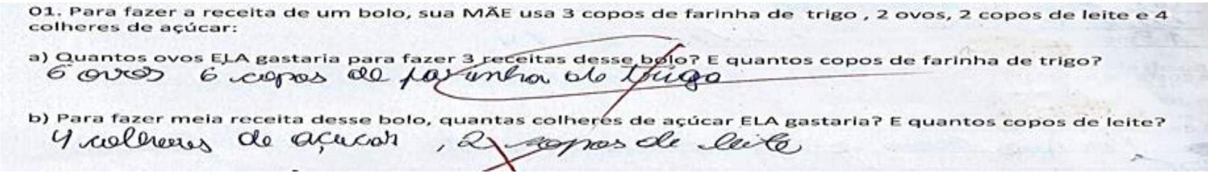
Cerca de 40% (quarenta por cento) dos discentes perceberam que não precisavam somar todos os termos, que bastava multiplicar a soma dos dez termos da sequência de Fibonacci pelos números em questão, ou seja, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e também usaram o mesmo raciocínio para obtenção de cada termo das sequências recursivas que foram criadas. Com isso, o docente pesquisador realizou uma intervenção dizendo que cada coluna da tabela preenchida equivale a uma sequência numérica previsível, ou seja, que você consegue sempre prever os próximos termos. O docente ressaltou ainda que este conteúdo será analisado ainda na 1ª série do Ensino Médio com o nome de Progressão Aritmética (P.A).

4.2.6 Aplicação do Segundo Diagnóstico

Após a aplicação do primeiro diagnóstico contendo duas partes, sendo a primeira parte composta de onze questões socioculturais, a segunda parte de sete questões específicas (razão, proporção, média aritmética e razão áurea) em (Anexo B) e feitas algumas intervenções tais como: aula expositiva, atividades em sala de aula e atividade extraclasse, aplicou-se novamente o mesmo diagnóstico, mas priorizando a segunda parte.

Com a análise dos resultados, obtivemos indícios de que o processo de ensino-aprendizagem utilizando a contextualização para aproximar o discente da matemática pura e aplicada propiciou um aumento significativo da compreensão do discente em relação ao tema.

Com a primeira questão pretendia-se ter uma noção básica sobre o nível de conhecimento e compreensão dos discentes com relação à razão e proporção, pois a mesma expressa uma receita de bolo. Portanto, na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 72% (setenta e dois por cento) de acertos, 8% (oito por cento) de meio acerto e 20% (vinte por cento) de erros. Observando a Figura 47, percebe-se que o discente apresenta dificuldades na compreensão do significado de aumentar e diminuir na mesma proporção os ingredientes do bolo e não conseguiu resolver o problema proposto. Após a segunda aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 92% (noventa e dois por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) de meio acerto e 4% (quatro por cento) de erros. Assim, analisando a Figura 48, percebe-se que o mesmo discente apresentou compreensão sobre o tema e que ele teve um crescimento significativo do conhecimento prévio em relação à primeira aplicação.



01. Para fazer a receita de um bolo, sua MÃE usa 3 copos de farinha de trigo , 2 ovos, 2 copos de leite e 4 colheres de açúcar:

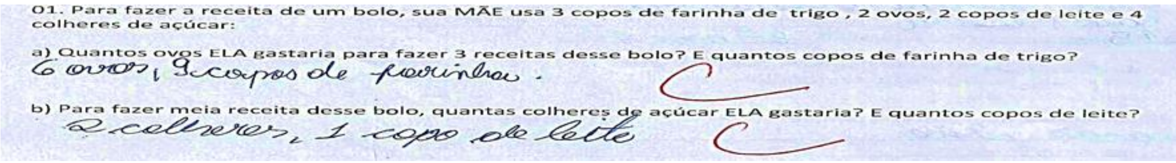
a) Quantos ovos ELA gastaria para fazer 3 receitas desse bolo? E quantos copos de farinha de trigo?

6 ovos 6 copos de farinha de trigo

b) Para fazer meia receita desse bolo, quantas colheres de açúcar ELA gastaria? E quantos copos de leite?

4 colheres de açucar , 2 copos de leite

Figura 47 – Primeira Aplicação – Questão 01



01. Para fazer a receita de um bolo, sua MÃE usa 3 copos de farinha de trigo , 2 ovos, 2 copos de leite e 4 colheres de açúcar:

a) Quantos ovos ELA gastaria para fazer 3 receitas desse bolo? E quantos copos de farinha de trigo?

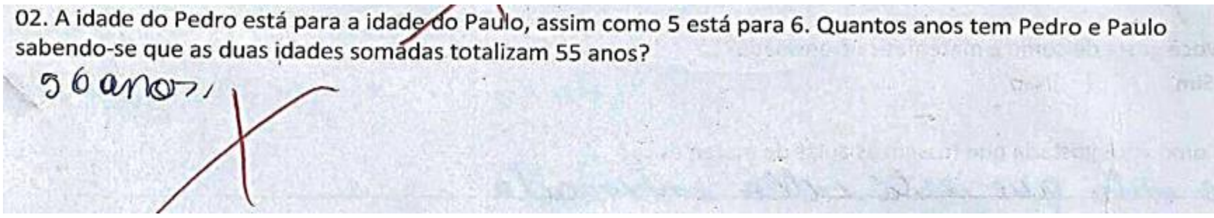
6 ovos, 9 copos de farinha .

b) Para fazer meia receita desse bolo, quantas colheres de açúcar ELA gastaria? E quantos copos de leite?

2 colheres, 1 copo de leite

Figura 48 – Segunda Aplicação – Questão 01

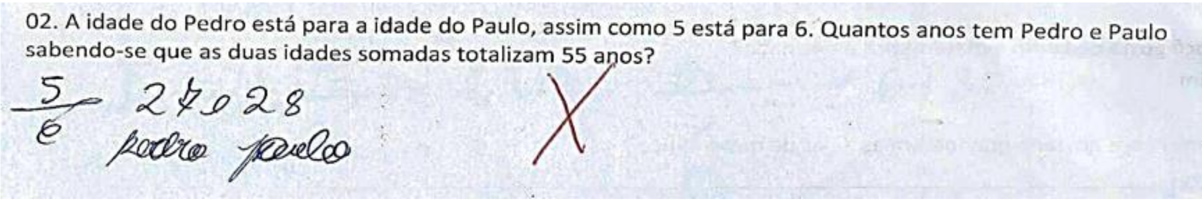
A segunda questão tinha como objetivo que os discentes conseguissem associar um problema do cotidiano com o conteúdo de razão e proporção e com essa percepção pudessem resolver situações-problema. Assim, na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 100% (cem por cento) de erros. Observando a Figura 49, percebe-se que o discente apresenta dificuldades na compreensão do problema e, sendo assim, não conseguiu resolver o problema proposto corretamente. Após a segunda aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos novamente 100% (cem por cento) de erros. Assim, analisando a Figura 50, percebe-se que o mesmo discente apresentou novamente dificuldades na compreensão do problema e que ele não teve um crescimento significativo do conhecimento prévio em relação à primeira aplicação. E, com base nesse resultado, o docente pesquisador levou os resultados para a sala de aula e vários questionamentos foram feitos, entre eles, se haviam compreendido sistema de equações na série anterior. A maioria dos discentes disse que sim, porém não lembrava do conteúdo. Com essa declaração, o docente pesquisador concluiu que deveria ter feito uma breve revisão de resolução de sistema de equações do primeiro grau.



02. A idade do Pedro está para a idade do Paulo, assim como 5 está para 6. Quantos anos tem Pedro e Paulo sabendo-se que as duas idades somadas totalizam 55 anos?

56 anos

Figura 49 – Primeira Aplicação – Questão 02

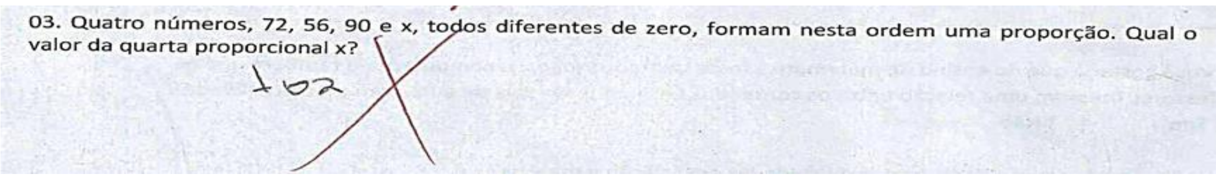


02. A idade do Pedro está para a idade do Paulo, assim como 5 está para 6. Quantos anos tem Pedro e Paulo sabendo-se que as duas idades somadas totalizam 55 anos?

5/6 27 0 28
pedro paulo

Figura 50 – Segunda Aplicação – Questão 02

A terceira questão exige capacidade de compreensão da razão e proporção respeitando uma ordem para encontrar a quarta proporcional. Na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 36% (trinta e seis por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) de meio acerto e 60% (sessenta por cento) de erros. Observando a Figura 51, percebe-se que o discente não conseguiu analisar a questão de forma a identificar o que significa a quarta proporcional e assim foram feitas intervenções com aulas e atividades. Após a segunda aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 100% (cem por cento) de acertos. Analisando a Figura 52, percebe-se que o mesmo discente teve compreensão do tema e o docente pesquisador teve a certeza de que os discentes tiveram crescimentos significativos em razão e proporção respeitando uma ordem prévia.



03. Quatro números, 72, 56, 90 e x, todos diferentes de zero, formam nesta ordem uma proporção. Qual o valor da quarta proporcional x?

102

Figura 51 – Primeira Aplicação – Questão 03

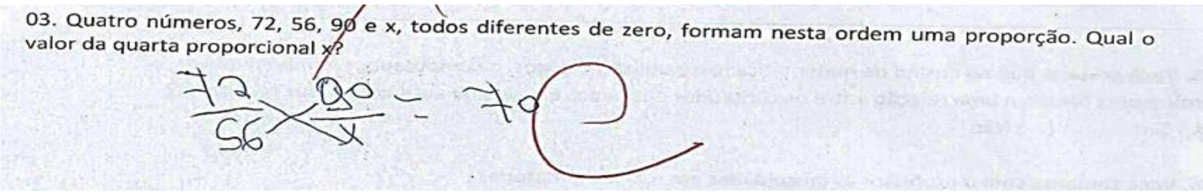


Figura 52 – Segunda Aplicação – Questão 03

Com a quarta questão, pretendia-se ter uma noção sobre a compreensão dos discentes em relação à média aritmética e de que a mesma mostra uma tendência central de um conjunto de valores e também o manuseio das operações fundamentais para operacionalizar esta média aritmética. Portanto, na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 32% (trinta e dois por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) meio acerto e 64% (sessenta e quatro por cento) de erros. Conforme a Figura 53, percebe-se que o discente não teve um conhecimento prévio do tema, portanto não compreendeu como resolver a questão. Com esses dados, o docente pesquisador aplicou diversas intervenções, entre elas: aulas expositivas, atividades em sala de aula e extraclasse e várias discussões acerca do tema. Após as intervenções, foi feita a segunda aplicação do diagnóstico (parte específica) obtendo 76% (setenta e seis por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) de meio acerto e 20% (vinte por cento) de erros. Observando a Figura 54, percebe-se que o mesmo discente teve uma compreensão e competência em resolver as médias aritméticas, concluindo que foram satisfatórias as intervenções feitas pelo docente pesquisador.

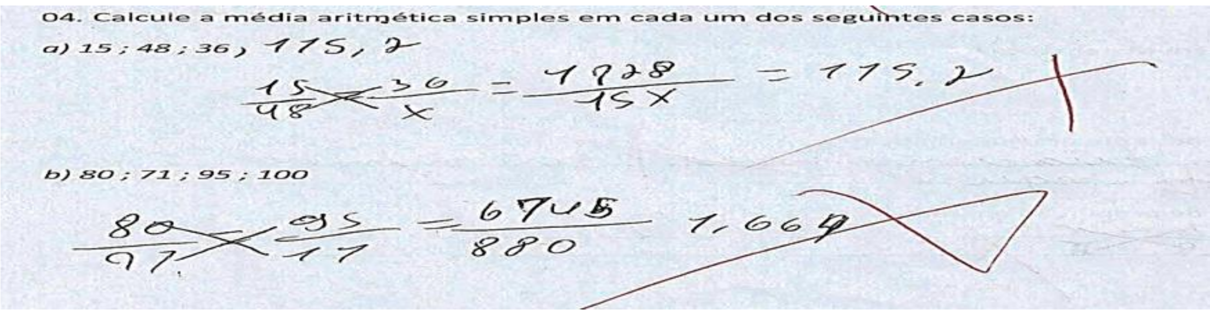
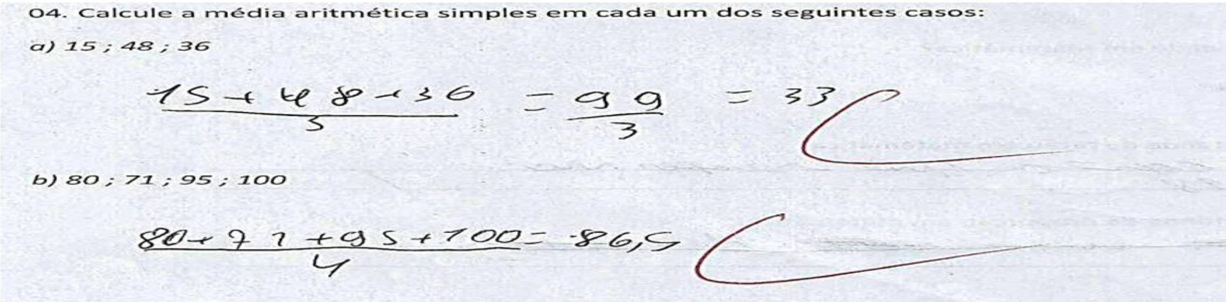


Figura 53 – Primeira Aplicação – Questão 04



04. Calcule a média aritmética simples em cada um dos seguintes casos:

a) 15 ; 48 ; 36

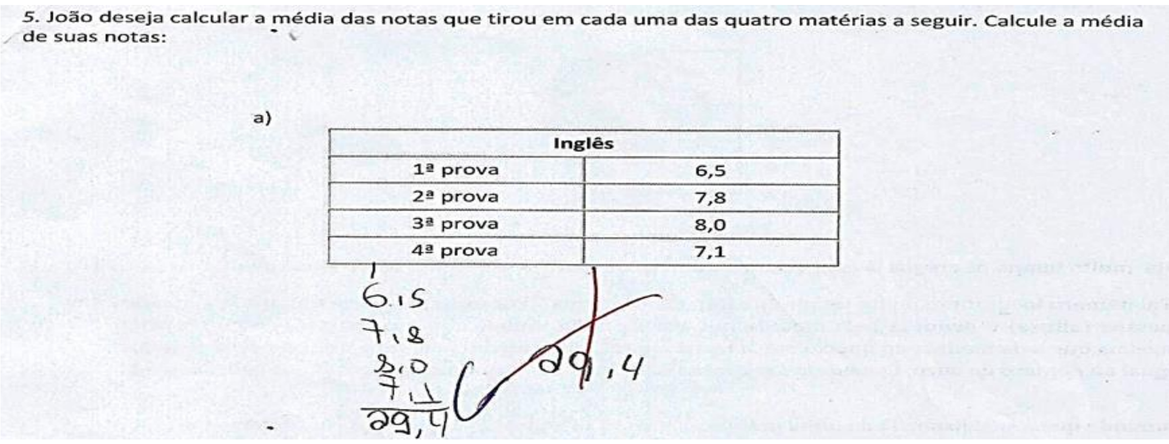
$$\frac{15+48+36}{5} = \frac{99}{3} = 33$$

b) 80 ; 71 ; 95 ; 100

$$\frac{80+71+95+100}{4} = 86,5$$

Figura 54 – Segunda Aplicação – Questão 04

A quinta questão exigia que os discentes tivessem a compreensão da média aritmética contextualizada e que a mesma mostra uma tendência em um determinado período investigado, como, por exemplo, na questão citada a investigação queria saber qual a tendência das notas de inglês do discente João em quatro avaliações. Na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 48% (quarenta e oito por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) de meio acerto e 48% (quarenta e oito por cento) de erros. Percebe-se, na Figura 55, que o discente conseguiu iniciar corretamente o problema, porém cometeu um erro na operação de divisão e sua conclusão indica que o discente tem dificuldade em operar divisões. Na segunda aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 80% (oitenta por cento) de acertos, 4% (quatro por cento) de meio acerto e 16% (dezesseis por cento) de erros. Observando a Figura 56, percebe-se que o mesmo discente teve a mesma compreensão do tema conforme a primeira aplicação e que resolveu o problema corretamente, demonstrando o domínio que passou a ter em operar a divisão.



5. João deseja calcular a média das notas que tirou em cada uma das quatro matérias a seguir. Calcule a média de suas notas:

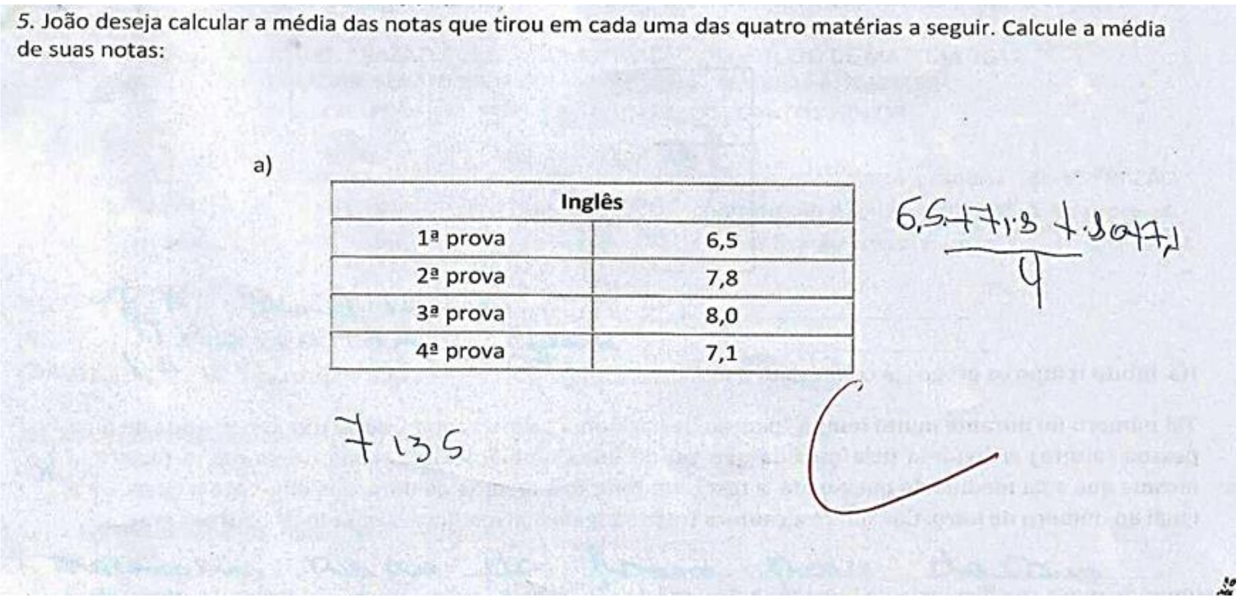
a)

Inglês	
1ª prova	6,5
2ª prova	7,8
3ª prova	8,0
4ª prova	7,1

6.15
7.8
8.0
7.1
29,4

29,4

Figura 55 – Primeira Aplicação – Questão 05



5. João deseja calcular a média das notas que tirou em cada uma das quatro matérias a seguir. Calcule a média de suas notas:

a)

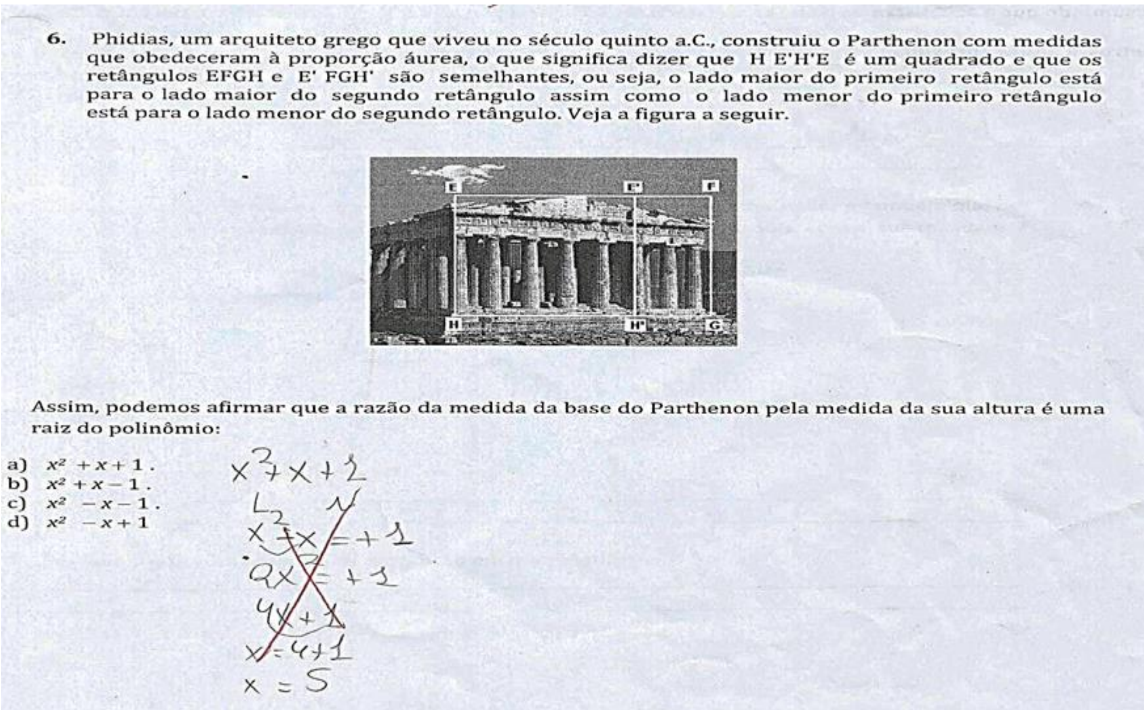
Inglês	
1ª prova	6,5
2ª prova	7,8
3ª prova	8,0
4ª prova	7,1

$\frac{6,5+7,8+8,0+7,1}{4}$

7 135

Figura 56 – Segunda Aplicação – Questão 05

A sexta questão, que é específica de razão áurea, exigiu habilidade dos discentes em associar o retângulo áureo na figura, fazendo a razão e proporção de suas dimensões, obtendo uma equação de segundo grau, a qual uma de suas raízes é o número áureo. Com a primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 4% (quatro por cento) de acertos e 96% (noventa seis por cento) de erros. Percebe-se na Figura 57, que o discente não conseguiu responder a questão porque não tinha compreensão sobre o tema razão áurea. Com esses dados, uma das intervenções, realizada pelo docente pesquisador foi, a própria construção do retângulo áureo em uma das suas aulas expositivas. Na segunda aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 88% (oitenta e oito por cento) de acertos e 12% (doze por cento) de erros. Observando a Figura 58, percebe-se que o conhecimento do discente, sobre o tema razão áurea, foi ampliado e ele soube aplicar seu conhecimento para obter uma resolução eficaz.



6. Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que H E'H'E é um quadrado e que os retângulos EFGH e E' FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura a seguir.

Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

a) $x^2 + x + 1$.
b) $x^2 + x - 1$.
c) $x^2 - x - 1$.
d) $x^2 - x + 1$

$x^2 + x + 2$

$x^2 + x = +1$

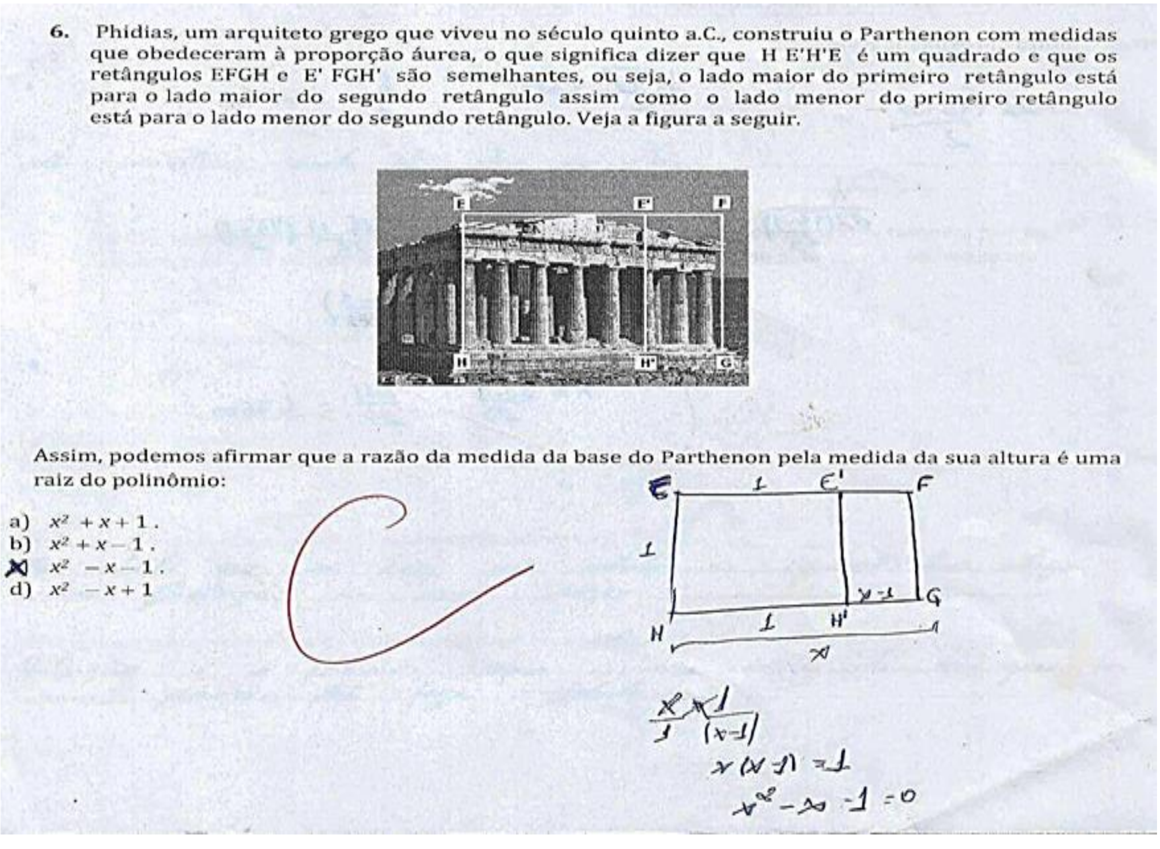
$2x^2 = +1$

$4x + 1$

$x = 4 + 1$

$x = 5$

Figura 57 – Primeira Aplicação – Questão 06



6. Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que H E'H'E é um quadrado e que os retângulos EFGH e E' FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura a seguir.

Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

a) $x^2 + x + 1$.
b) $x^2 + x - 1$.
X) $x^2 - x - 1$.
d) $x^2 - x + 1$

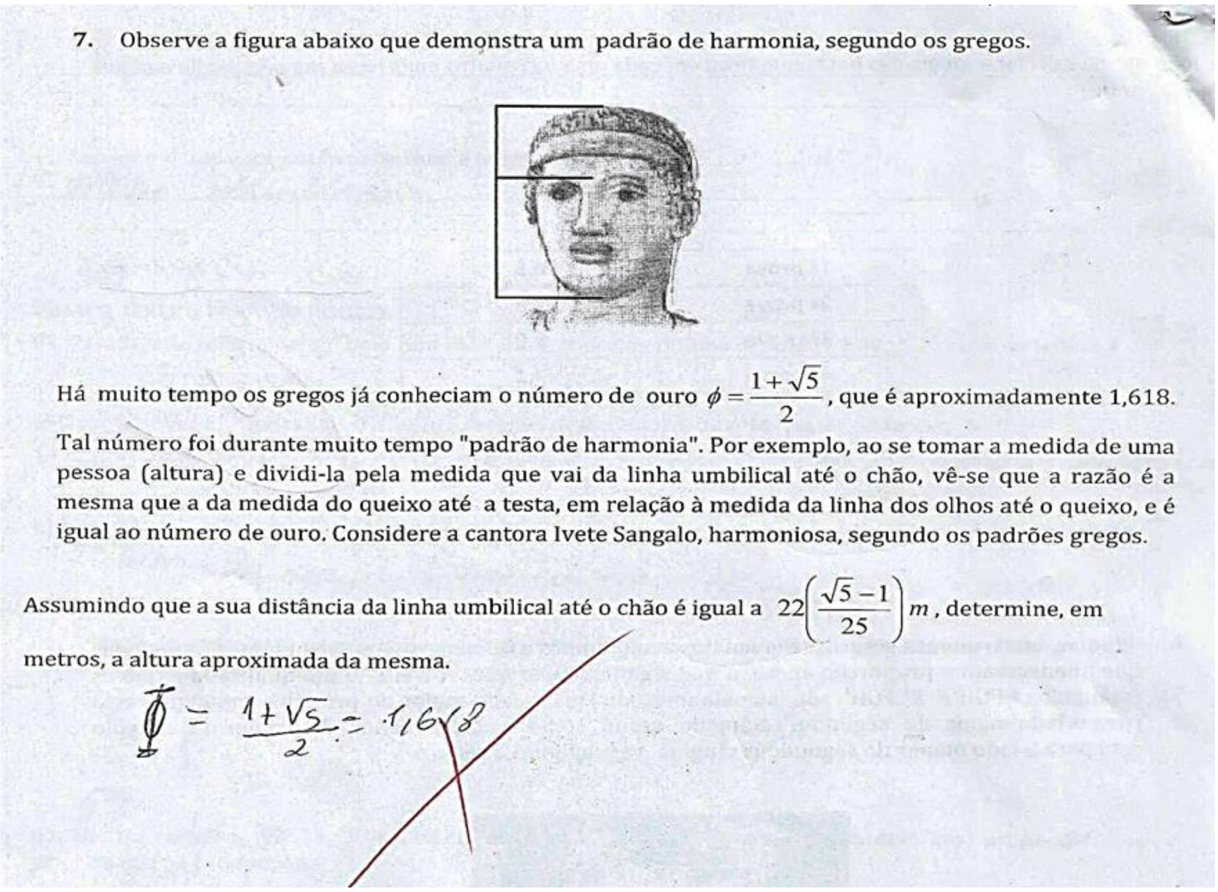
$\frac{x}{1} = \frac{1}{(x-1)}$

$x(x-1) = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

Figura 58 – Segunda Aplicação – Questão 06

Na sétima e última questão, os discentes tinham que associar os conteúdos de razão e proporção com a razão áurea, sendo ela uma questão contextualizada sobre a beleza áurea no corpo humano. Portanto, na primeira aplicação do diagnóstico (parte específica), obtivemos 100% (cem por cento) de erros. Na Figura 59, observa-se que o discente não tem compreensão sobre aplicação do tema razão áurea. Após intervenções, acerca do tema razão áurea, aplicou-se o segundo diagnóstico (parte específica), obtendo 52% (cinquenta e dois por cento) de acertos e 48% (quarenta e oito por cento) de erros. Já na Figura 60, é possível perceber que o mesmo discente compreendeu o tema obtendo êxito na resolução do problema. Com essas informações em mãos, o docente pesquisador observou que os discentes conseguiram melhorar a sua compreensão em relação ao tema, porém de forma não muito satisfatória.



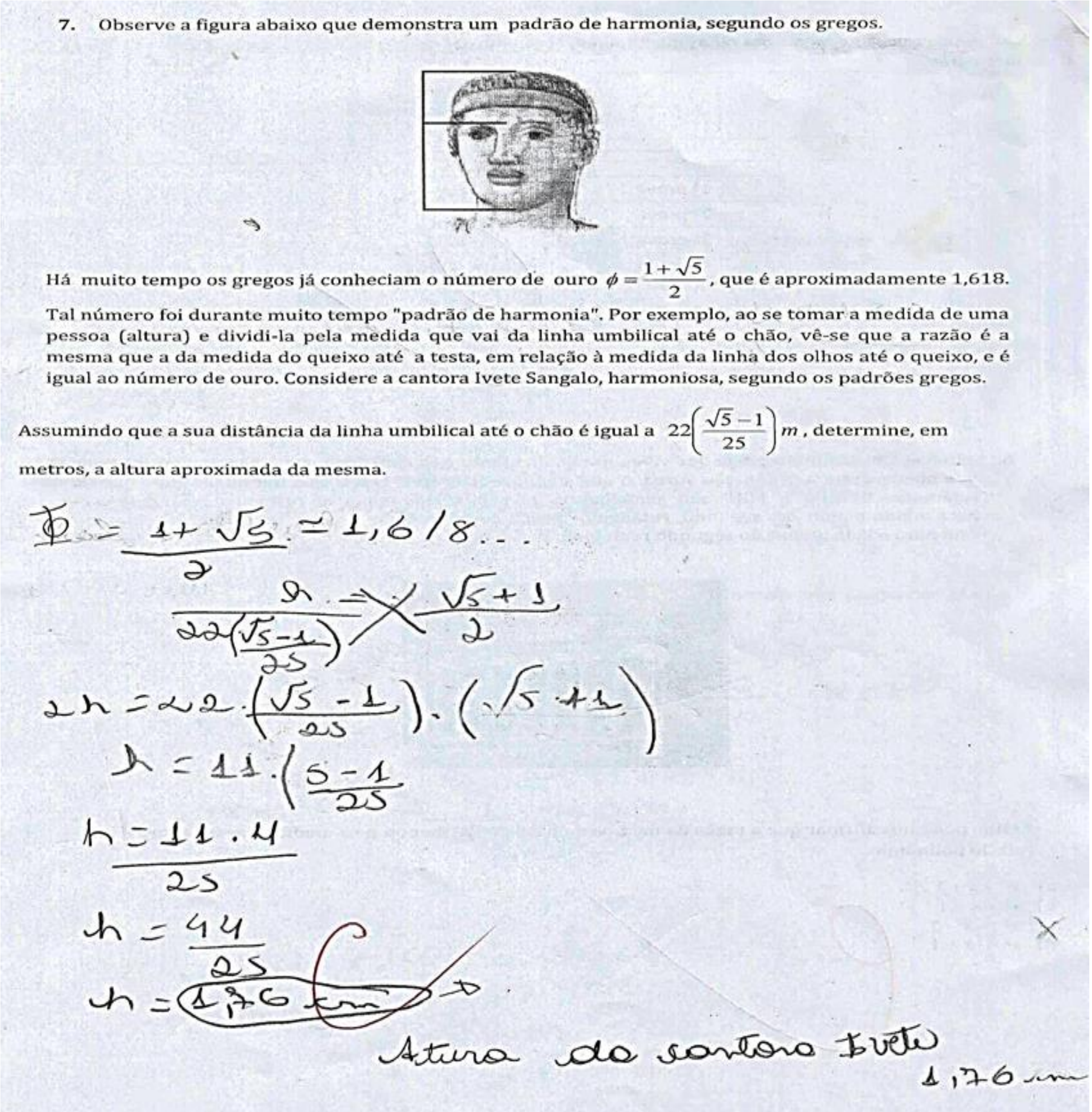
7. Observe a figura abaixo que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos.

Há muito tempo os gregos já conheciam o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia". Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao número de ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos.

Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual a $22\left(\frac{\sqrt{5}-1}{25}\right)m$, determine, em metros, a altura aproximada da mesma.

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$

Figura 59 – Primeira Aplicação – Questão 07



7. Observe a figura abaixo que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos.

Há muito tempo os gregos já conheciam o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia". Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao número de ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos.

Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual a $22\left(\frac{\sqrt{5}-1}{25}\right)m$, determine, em metros, a altura aproximada da mesma.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618\ldots$$

$$\frac{h}{22\left(\frac{\sqrt{5}-1}{25}\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$2h = 22\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{25}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$h = 11\cdot\left(\frac{5-1}{25}\right)$$

$$h = \frac{11\cdot 4}{25}$$

$$h = \frac{44}{25}$$

$$h = 1{,}76\ m \rightarrow$$

Atura da cantora Ivete 1,76 m

Figura 60 – Segunda Aplicação – Questão 08

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste estudo levou a conclusões que podem ser consideradas óbvias, mas fundamentais na compreensão do processo analisado.

O educador que atua na área do ensino de Matemática encontra uma diversidade de dificuldades para ampliar seu campo de atuação frente ao processo de aprendizagem. Isso porque há uma retórica de que aprender matemática é algo difícil e muitos ainda questionam qual a necessidade da aprendizagem dos conteúdos que são lançados cotidianamente. De um modo geral, os discentes encontram dificuldades na aprendizagem de matemática e isso afeta a sua autoestima em relação a esta área.

Diante desta problemática, o docente precisa encontrar meios para fazer com que o discente se interesse por esta área. E mais ainda, que encontre os caminhos do aprendizado para facilitar sua atuação pessoal e profissional em uma sociedade cada vez mais exigente. As vivências intelectuais e pessoais precisam ser agregadas a esta nova realidade para que o discente consiga modificar-se na sua atuação, na construção de sua própria história.

A Razão Áurea e a sequência de Fibonacci, com o passar do tempo, mostram-se serem muito mais que apenas números, tendo aplicabilidade nos mais diversos ramos do conhecimento. Apesar de não ter abordado todos os campos de conhecimentos que são compreendidos por ela, este trabalho abre nossa mente em relação a muitos dos nossos questionamentos, sobre as diversas formas, comportamentos e sua contribuição para o processo de ensino-aprendizagem de matemática. Faz com que, a partir de agora, tenhamos outra visão sobre as diversas formas presentes no universo que nos cerca.

Na proposta, foi apresentada a opção de contextualizar o conteúdo estudado em sala de aula, para que o mesmo faça sentido quando relacionado com o cotidiano do discente.

Com base na escolha desta metodologia, o trabalho foi desenvolvido em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental do Centro de Ensino Fundamental Buriti Vermelho, situado na Zona Rural do Paranoá, cidade satélite do Distrito Federal.

Quando foi apresentada a proposta para a turma, de trabalhar com eles a Razão Áurea para motivá-los no ensino de razão e proporção, os discentes reclamaram muito, dizendo que nunca haviam escutado falar de Razão Áurea e que a mesma deveria ser um conteúdo muito difícil. A partir dos relatos dos discentes, não tive dúvida de que tinha escolhido a turma certa e que iria modificar a opinião deles.

Começamos o trabalho com a aplicação de um diagnóstico dividido em duas etapas, sendo a primeira parte composta por onze questões socioculturais e a segunda parte composta por sete questões específicas de razão, proporção, média aritmética e razão áurea. Com o desenvolver da proposta, os discentes começaram a participar mais das aulas, porque foram percebendo que, a cada atividade feita de forma contextualizada, se sentiam mais motivados e, com isso, começaram a participar da execução de cada atividade de maneira mais eficaz, como: fazendo as medidas do corpo humano e registrando-as em uma tabela (Atividade 1), medir objetos retangulares propostos pelo docente com o objetivo de saber qual deles mais se aproximava do retângulo áureo e registrando-os em uma tabela (Atividade 2), pesquisa feita no laboratório de informática sobre algumas flores em que o número de pétalas expressava um número da sequência de Fibonacci e registrando-as em uma tabela (Atividade 3) e com o conhecimento prévio da sequência de Fibonacci, os discentes construíram algumas sequências numéricas com a mesma característica da recursividade da sequência de Fibonacci e registrou-as em uma tabela proposta pelo docente (Atividade 4).

E finalmente foi aplicado o segundo diagnóstico com as mesmas questões do primeiro, com o objetivo de comparar o crescimento do conhecimento individual e coletivo da turma pesquisada, que por sua vez foi notório, como expressa os dados percentuais contidos no capítulo quatro.

Sendo assim, a simplicidade da Razão Áurea desperta a curiosidade das pessoas mais distantes da matemática, ajudando a quebrar a grande barreira que muitas pessoas erguem frente ao aprendizado da mesma, deixando o aprendizado da matemática muito mais dinâmico e prazeroso. Portanto, esta razão torna-se um poderoso instrumento para docentes despertarem o interesse nos discentes pela matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Trad. Marco Shinobu Matsumura. 2ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2007.

[2] LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Trad. Marco Shinobu Matsumura. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

[3] HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção – Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.** Brasília: Universidade de Brasília, 1970. 69p.

[4] BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de Ouro e secção áurea:** considerações para a sala de aula. Brasil: Furb, 1996.

[5] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/curiosidouro.htm - Acesso 09/02/2014.

[6] http://www.goldenumber.net/ - Acesso 15/02/2014.

[7] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm - Acesso 04/03/2014.

[8] http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf – Acesso 12/03/2014.

[9] http://www.cienciaviva.pt/rede/upload/grupo8artigo1gusmao.pdf - Acesso 24/03/2014.

[10] http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias-digitais-II/modulo-IV/numero-de-ouro.pdf - Acesso 02/04/2014.

[11] http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/fibonacci.html - Acesso 06/05/2014...

[12] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO. http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf - Acesso em 20/05/2014.

[13] O GUIA DO ESTUDANTE – EDITORA ABRIL. http://www.guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/mona-lisa-433454.shtml. – Acesso em 22/05/2014.

[14] MANDARINO, Denis. **ENSAIO:** A Divisão Áurea por detrás do olhar de Mona Lisa. São Paulo, 2011. 10p. http://denismandarino.blogspot.com.br/2012/05/ensaio-divisao-aurea-por-detras-do.html. – Acesso em 23/05/2014.

[15] **O Número de Ouro.** Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm. – Acesso em 04/06/2014.

[16] PIAGET, Jean. **Psicologia e Epistemologia.** Rio de Janeiro: Forense, 1973. p.27 e p.145.

[17] BARROS, Célia Silva Guimarães. **Pontos da psicologia escolar.** 5 ed. São Paulo: Ática, 1998, p.101 e p.45.

[18] SKINNER, Burrhus F. **Sobre o Behaviorismo.** Tradução: Maria da Penha Villa Lobos. São Paulo: Martins Fontes, 1982, p.56.

[19] BOCK, Ana Mercês Bahia. **et al Psicologias.** 13 ed. São Paulo: Saraiva,1999, p.87 e p.26.

[20] VASCONCELOS, Cláudia Cristina. **Ensino-aprendizagem da Matemática:** velhos problemas, Novos desafios. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect6.htm. - Acesso em 02/09/2014.

[21] LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Técnicas de pesquisa**. São Paulo: Ed. Atlas, 2006, p.32.

[22] VERGARA, Sylvia Constant. **Projetos e relatórios de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2006.

ANEXOS

ANEXO - A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS"
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Caro discente (a), Este questionário visa coletar dados para nossa pesquisa sobre: "RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS". A sua contribuição é muito significativa no processo de ensino aprendizagem. Vale ressaltar que todos os dados da pesquisa ficarão em sigilo.

ESCOLA:____
NOME: ____
IDADE: _______________ SÉRIE:________________

Diagnóstico 1

01. Você gosta de estudar?
( ) Sim ( )Não

02. Qual disciplina você mais gosta? E porquê?
____
____
____

03. Você gosta de como a matemática é ensinada?
( ) Sim ( )Não

04. Como você gostaria que fossem as aulas de matemática?
____
____
____

05. Você gostaria que no ensino de matemática fosse utilizado: jogos, o computador e também que os docentees fizessem uma relação entre os conteúdos ensinados em sala de aula com a sua realidade ?
( ) Sim ( ) Não

06. Você comenta com o docente as dificuldades em relação a matéria?
( ) Sim ( ) Não

07. Qual a sua maior dificuldade em Matemática?
( ) Assimilar o conteúdo.
( ) Interpretar as atividades
( ) Efetuar cálculos

08. Explique o que você entende de razão em matemática:

09. Explique o que você entende de proporção em matemática:

10. Explique o que você entende de razão áurea:

11. Explique o que você entende de média aritmética:

ANEXO – B

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: “RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS”
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Caro discente (a), Este questionário visa coletar dados para nossa pesquisa sobre: “RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS”. A sua contribuição é muito significativa no processo de ensino aprendizagem. Vale ressaltar que todos os dados da pesquisa ficarão em sigilo.

ESCOLA:____
NOME: ____
IDADE: _______________ SÉRIE:________________

Diagnóstico 2

VAMOS “EXERCITAR” UM POUCO:

01. Para fazer a receita de um bolo, sua MÃE usa 3 copos de farinha de trigo, 2 ovos, 2 copos de leite e 4 colheres de açúcar:

a) Quantos ovos ELA gastaria para fazer 3 receitas desse bolo? E quantos copos de farinha de trigo?

b) Para fazer meia receita desse bolo, quantas colheres de açúcar ELA gastaria? E quantos copos de leite?

02. A idade do Pedro está para a idade do Paulo, assim como 5 está para 6. Quantos anos têm Pedro e Paulo sabendo-se que as duas idades somadas totalizam 55 anos?

03. Quatro números, 72, 56, 90 e x, todos diferentes de zero, formam nesta ordem uma proporção. Qual o valor da quarta proporcional x?

04. *Calcule a média aritmética simples em cada um dos seguintes casos:*

a) 15; 48; 36

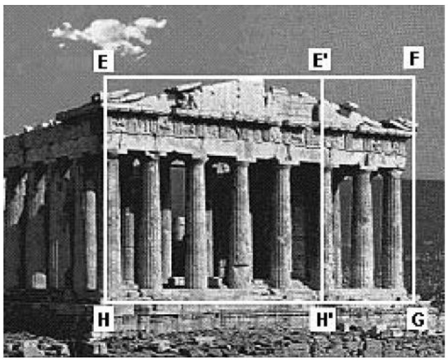
b) 80; 71; 95; 100

5. João deseja calcular a média das notas que tirou em cada uma das quatro matérias a seguir. Calcule a média de suas notas:

a)

Inglês	
1ª prova	6,5
2ª prova	7,8
3ª prova	8,0
4ª prova	7,1

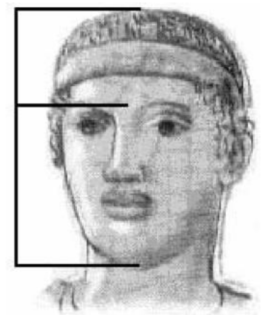
6. Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que H E'H'E é um quadrado e que os retângulos EFGH e E' FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura a seguir.



Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

a) $x^2 + x + 1$.
b) $x^2 + x - 1$.
c) $x^2 - x - 1$.
d) $x^2 - x + 1$

7. Observe a figura abaixo que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos.



Há muito tempo os gregos já conheciam o Número de Ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia". Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao Número de Ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos.

Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual a $22\left(\frac{\sqrt{5}-1}{25}\right)m$,

determine, em metros, a altura aproximada da mesma.

ANEXO – C

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: “RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS”
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

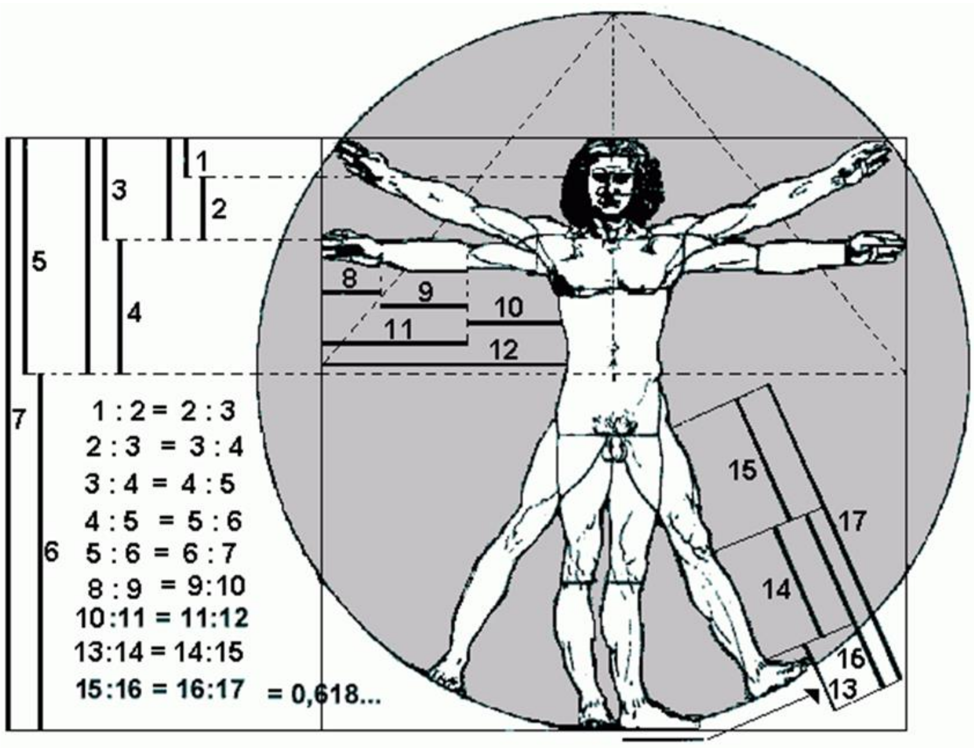
Atividade 1 – Conceito de beleza áurea no corpo humano

ESCOLA:____
NOMES: ____
____

IDADE: ________________ SÉRIE:_________________

Texto para atividade:

O Número de Ouro também é lembrado por Leonardo da Vinci em “O Homem Vitruviano” figura abaixo. Leonardo da Vinci era um gênio e utilizava a Razão Áurea em suas obras para garantia de uma beleza, harmonia e perfeições únicas.



O Homem Vitruviano

A imagem “O Homem Vitruviano” descreve uma figura masculina que ao mesmo tempo se encontra em duas posições sobrepostas e com o corpo dentro de um círculo e um quadrado, com os braços e as pernas esticados, tendo o umbigo como o centro do círculo. E com isso mostrando tais proporções entre as partes do corpo como aparecem na figura acima.

O estudo do desenho “O Homem Vitruviano” é uma forma de mostrar a aplicação de conceitos matemáticos dentro da arte. Mostrar também para os discentes a importância do uso desses conceitos para obter a perfeição das relações que existem na obra e fazendo assim com que a aula fique mais dinâmica. Esse estudo faz também com que o discente acabe adentrando no contexto em que ele foi criado, podendo proporcionar o estudo do período histórico da obra e do autor.

Outros pintores que utilizaram a Razão Áurea foram: Salvador Dali, Giottodi Bondone, Gino Severini, Picasso, dentre outros.

Tabela para a atividade:

		Discentes					
Medidas		01	02	03	04	05	06
01	Tamanho do olho						
02	Distância entre os olhos						
03	Razão entre as medidas 01 e 02						
04	Medida do quadril ao chão						
05	Medida do joelho ao chão						
06	Razão entre as medidas 04 e 05						
07	Altura do crânio						
08	Medida da mandíbula até o alto da cabeça						
09	Razão entre 07 e08						
10	Tamanho do dedo médio inteiro						
11	Dobra central até a ponta						
12	Razão entre 10 e 11						
13	Medida da cintura até a cabeça						
14	Tamanho do tórax						
15	Razão entre 13 e 14						
16	Altura do corpo do chão até a extremidade da cabeça.						
17	Distância do umbigo até o chão						
18	Razão entre 16 e 17.						
16	Media aritmética das Razões 03, 06,09, 12, 15 e 18						

ANEXO – D

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS"
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Atividade 2 – Razões Áureas em objetos retangulares no cotidiano do discente

ESCOLA:____
NOMES: ____
____

IDADE: _______________ SÉRIE:________________

Texto para atividade:

O Retângulo Áureo é o retângulo cuja proporção entre o comprimento e a altura é aproximadamente o Número de Ouro, ou seja, 1, 618033...

Sobre o retângulo ABCD, traça um segmento de reta EF de modo que forme o quadrado ABFE. Conforme a Figura 7. Sendo x a medida do lado AB e y a medida do lado AD, um retângulo é dito Retângulo Áureo quando:

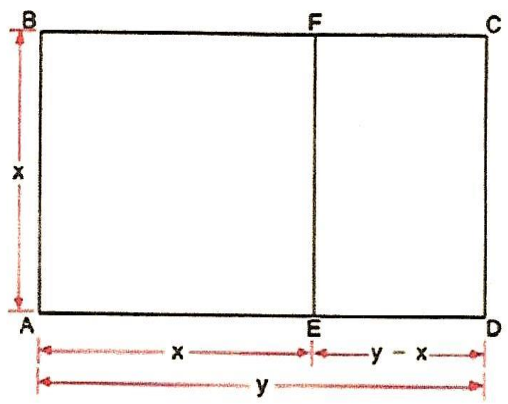


Figura 7 - Retângulo Áureo

Fonte: http://www.qfojo.net/irracionais/irracionais.html

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - x} \cong 1{,}618 \ldots$$

Tabela para atividade:

Objeto	Comprimento (a)	Largura (b)	Razão a/b
Carteira de motorista			
Cartão de banco			
Carteira de identidade			
Cartão do CPF			
Capa de um caderno			
Capa do livro de matemática			
Mesa do discente			
Tela do aparelho de TV			
Folha de papel A4			
Janela da sala			
Porta da sala			
Monitor do computador			
Tamanho da sala			
Cerâmica de revestimento			

ANEXO – E

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: “RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTÚDOS MATEMÁTICOS”
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Atividade 3 – Razão áurea na Biologia – Quantidade de pétalas nas flores

ESCOLA:____

NOMES: ____

____

IDADE: _______________ SÉRIE:________________

Procedimentos metodológicos:

Propor a leitura do texto “Sequência de Fibonacci” e mediar uma discussão sobre o mesmo com o embasamento teórico da leitura do texto.

Formar alguns grupos de discentes, com o número de integrantes definido pelo docente.

Encaminhar os grupos formados para o laboratório de informática para fazerem uma pesquisa de no mínimo quatro flores em que o número de pétalas é expresso por um número da sequência de Fibonacci.

Após o trabalho de pesquisa cada grupo apresentará aos demais grupos o resultado obtido da sua pesquisa.

O docente pode aproveitar o momento para mostrar para os discentes que existem muitas flores em que o número de pétalas é correspondente aos números da sequência de Fibonacci.

Registrar na tabela fornecida pelo docente o nome de cada flor pesquisada com o seu respectivo número de pétalas.

Texto para atividade:

Quem nunca na sua vida pegou uma flor de margarida do campo e contou suas pétalas? A fim de satisfazer sua curiosidade da seguinte pergunta: “Bem me quer ou mal me quer?”. Não só as margaridas do campo, mas determinadas flores também apresentam a relação coma Razão Áurea e com os números de Fibonacci. Grande parte das margaridas do campo têm: treze, vinte e um ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci. Um exemplo dessas margaridas do campo pode ser visto na *Figura 15,* onde é apresentada uma margarida do campo com 13 pétalas, sendo o sétimo número na sequência de Fibonacci (*1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...).*

Margarida do campo

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Dentro do universo das plantas, podemos citar também os jarros, o lírio, íris, os linhos, a columbina, a asterácea, a banana-da-terra, chicória dentre outras. Podemos verificar que o número de pétalas destas e diversas outras flores corresponde a um número de Fibonacci. Conforme pode ser visto abaixo (*figura 16* a *21*).



1 pétala **2 pétalas** **3 pétalas**

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html



5 pétalas **8 pétalas** **13 pétalas**

Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Objetivos pedagógicos:

Abordar a sequência de Fibonacci que é pouco ministrada por docentees de Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Organizar trabalhos em grupos provocando a interação e assim facilitar o aprendizado e discussões entre os grupos.

Mostrar a relação da Matemática com a natureza.

Fazer observações na natureza e relacionar com a Matemática.

Mostrar a importância da preservação do meio ambiente.

Fazer a interdisciplinaridade com a Biologia para mostrar a sua relação com a Matemática.

Material pedagógico:

- Computador;
- Lápis;
- Borracha;
- Cópia do texto – “Sequência de Fibonacci”;
- Cópia da tabela abaixo.

Tabela para atividade:

Flor	Número de pétalas

ANEXO – F

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS"
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Atividade 4 – Construção de sequências numéricas utilizando a recursividade da sequência de Fibonacci

ESCOLA:____
NOMES: ____
____

IDADE: ________________ SÉRIE:________________

Procedimentos metodológicos:

Propor a leitura do texto "Sequência de Fibonacci" e mediar uma discussão sobre o mesmo, com o embasamento teórico da leitura do texto.

Formar grupos de discentes com a quantidade de integrantes por grupo definida pelo docente.

Em seguida, preencher a tabela fornecida pelo docente com sequências recursivas que tem os dois primeiros termos começando por 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e a partir do terceiro termo sendo igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores, seguindo a ideia da recursividade da sequência de Fibonacci.

Texto para atividade:

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233..., na qual cada termo (a partir do terceiro) é a soma dos dois termos anteriores, foi aproximadamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891).

Sendo assim,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Objetivos pedagógicos:

Abordar a sequência de Fibonacci que é pouco ministrada por docentees de Matemática nos anos finais do ensino fundamental.

Organizar trabalhos em grupos provocando a interação e assim facilitar o aprendizado e as discussões entre os grupos.

Fazer com que esta atividade possa encaminhar algumas análises previsíveis desenvolvendo o princípio crítico nos discentes.

Material pedagógico:

- Lápis;
- Borracha;
- Caneta;
- Cópia do texto – “Sequência de Fibonacci”;
- Cópia da tabela da atividade

Tabela para atividade:

Termos	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**	**10º**	**Soma dos 10 termos**
Sequências											
Sequência Fibonacci											
2ª Sequência (x 2)											
3ª Sequência (x 3)											
4ª Sequência (x 4)											
5ª Sequência (x 5)											
6ª Sequência (x 6)											
7ª Sequência (x 7)											

Anexo – G

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS"
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

PLANO DE AULA DO DIA 13/10/2014

Aula expositiva DIA 13/10/2014

Exposição do Professor pesquizador da sequência de fibonacci

1 - Segmento Áureo

Fazendo $AC = x$ e $BC = y$

Diz que um segmento foi cortado pelo um ponto áureo se e somente se o segmento todo está para o segmento maior, e este segmento maior está para o menor, ou seja:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$x^2 = yx + y^2$$

$$x^2 - yx - y^2 = 0$$

Resolvendo na variável x temos:

$$\Delta = (-y)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-y^2)$$

$$\Delta = y^2 + 4y^2$$

$$\Delta = 5y^2$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2}$$

$$x = \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{y + y\sqrt{5}}{2}$$

$$x = y\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$\Phi' = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad e \quad \Phi'' = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\Phi' \simeq 1{,}618\ldots \qquad \cancel{\Phi'' \simeq -0{,}618}$$

Como $\frac{x}{y} = \Phi$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\boxed{\Phi^2 - \Phi - 1 = 0}$$

Potências de Φ

$$\Phi^1 = 1\Phi$$
$$\Phi^2 = 1\Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$
$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$
$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$
$$\vdots$$

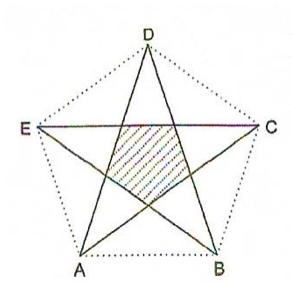
Com isso temos a sequência de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Anexo – H

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: “RAZÃO ÁUREA: COMO MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS”
PESQUISADOR: RENATO RODRIGUES SILVA MATRICULA: 20121150
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

DEMOSNTRAÇÃO DA RAZÃO ENTRE O LADO E A DIAGONAL DO PENTÁGONO REGULAR



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}} = \Phi$$

Sabendo que o pentágono ABCDE é regular, ou seja, AB ≡ BC ≡ CD ≡ DE ≡ EA = x e os ângulos $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv \hat{E}$, então temos:

I. Considere as diagonais, AD = d, EC = d, DB = d, AC = d e EB = d, ou seja, todas são congruentes (mesma medida).

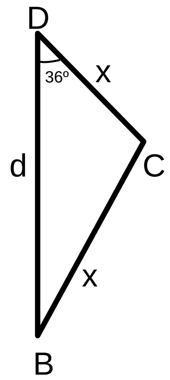
II. Retirando o triângulo ΔBDC do pentágono e aplicando a Lei dos Cossenos, com $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, temos:

$$x^2 = x^2 + d^2 - 2xd \cdot \cos 36°$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \cancel{2}xd \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\cancel{4}}\right) = d^2$$

$$x\cancel{d} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \cancel{d} \cdot d$$

$$x \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = d$$



$\therefore \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \rightarrow \frac{DB}{BC} = \Phi$, $\frac{AD}{AB} = \Phi$ e $\frac{CA}{AE} = \Phi$, então temos, $\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{CA}{AE} = \Phi$.