



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias

Mateus Almeida de Freitas

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	MATEUS ALMEIDA DE FREITAS		
E-mail:	mafmateus@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor	Secretária de Educação do Estado de Goiás		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	BRASIL	UF:GO	CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	ASPECTOS HISTÓRICOS E TEORICAS DAS LOTERIAS		
Palavras-chave:	Loteria, Quina, Mega-Sena, Probabilidade e Geração de números aleatórios.		
Título em outra língua:	Historical and Theoretical Aspects of Lotteries		
Palavras-chave em outra língua:	Lottery, Quina, Mega-Sena, probability and Random Number Generation		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	01-10-2013		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	FABIANO FORTUNATO TEIXERA DOS SANTOS		
E-mail:	FORTUNATO@MAT.UFG.BR		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)
Mateus Almeida de Freitas

Data: 15 / 10 / 2013

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Mateus Almeida de Freitas

Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos

Goiânia
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

F866a Freitas, Mateus Almeida de.
Aspectos históricos e teóricos das loterias [manuscrito] /
Mateus Almeida de Freitas. - 2013.
39 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.

Inclui lista de tabelas e figuras.

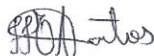
1. Loterias – Mega sena – Probabilidade. 2. Loterias – Quina –
Probabilidade. I. Título.

CDU: 519.21:336.78

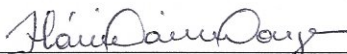
Mateus Almeida de Freitas

Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias

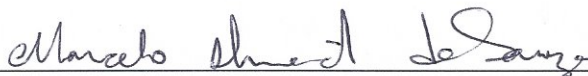
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de outubro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
IFG/Goiânia



Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Mateus Almeida de Freitas graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás.

Agradecimentos

Lembro-me da primeira vez que fui à escola, foi em um grupo de estudos na cidade de Fortaleza-CE aos quatro anos de idade. Era cedo, estava ansioso e preocupado, pois foi a primeira vez que realmente fiquei afastado de minha mãe, ela ficou na esquina da escola vendo eu ir, na mochila (na realidade um saco plástico, de arroz, vazio) continha um pequeno caderno, uma borracha, um lápis, uma cartilha de português e uma pequena tabuada. È assim que lembro como comecei a entrar nesse mundo dos estudos.

Não foi fácil estudar e trabalhar na adolescência, lembro-me de uma frase proferida pela minha mãe que era: **Se você não estudar o tempo passa, se estudar o tempo também passa, é melhor passar o tempo estudando.** Hoje sei o quanto minha mãe estava certa, seu conselho mãe foi muito maravilhoso, obrigado mãe.

A meu pai (o papai) que em sua simplicidade estava torcendo para que eu fosse um vencedor. Bem quero dizer que já fui bem mais longe do que imaginei, hoje sou mais que vencedor, sei o quanto isso é importante para meu pai.

Desejo agradecer de uma forma mais pessoal à minha esposa Flávia Aurélia que me incentivou a voltar à faculdade, fazer matemática, ela sempre esteve ao meu lado, mesmo que eu tivesse que sacrificar o tempo dedicado à família para estudar as matérias da faculdade. Aos meus amados e queridos filhos João Miguel e Maria Fernanda que sempre estiveram me esperando com seu amor incondicional.

Mas tudo que aqui conto, só foi possível porque Deus permitiu; Aleluia Senhor meu! Pois Tu és o grande responsável pelo meu sucesso, pela maravilhosa família que tenho, pela mente agraciada por entender matemática. Obrigado meu Deus por tudo que me deste, pela oportunidade da conquista desse mestrado em matemática.

Aos colegas do curso de mestrado, tais como: Manin, que sem dúvida contribuiu muito para esta digitação em latex, perdeu ele uma manhã comigo, Hugo com suas intervenções, sem falar da grande ajuda na digitação em latex, perdeu ele uma tarde e noite de domingo mostrando os comandos do latex, Cesar Pereira com sua didática tão única, Junio com sua paciência, Leandro, Simão, Frederico, Carlos Eduardo, Eduardo e outros a quem posso estar injustamente aqui esquecendo os nomes. Sei meus amigos, que sem vocês não teria êxito em muitas atividades, pois sempre encontrei alguém disposto a me ajudar a estudar, a resolver exercícios que tinha dúvidas, valeu mesmo a turma do PROFMAT 2011.

Ao colega e parceiro Gean da escola A Elite com quem sempre conversei, você ajudou muito mesmo.

Aos nossos professores do curso de mestrado, que tiveram atenção e paciência, ministrando as aulas nos sábados e nas férias com tanto empenho, são eles: Durval Tonon; Fabiano Fortunato (meu orientador, esse muito paciente comigo); Paulo Henrique; Rogério Chaves (com seus comentários tão minuciosos); Yunier Bello Cruz (com sua sinceridade amiga); Shirlei Serconeck (pontuando a matéria de cálculo de uma forma clara); Ole Peter Smith e Jesus Carlos da Mota, nosso coordenador. Deixo aqui meus sinceros agradecimentos por tudo que aprendi e vivenciei com vocês, tentarei não esquecer nada das aulas, embora saiba que será difícil guardar tanto conhecimento ministrado por vocês nobres professores.

Resumo

Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias inicia-se com o contexto histórico sobre jogos de azar; mostra exemplos de tais jogos, como o lançamento de um dado ou máquinas existentes em cassinos, traz o artigo 50 da lei 3.688 de 03 de outubro de 1941 (que define o que é considerado jogo de azar), mostra fatos curiosos envolvendo jogos, como a construção da Grande Muralha da China, iniciada por volta de 221 a.C., e que foi em parte financiada por uma loteria; comenta o início das loterias no Brasil, que ocorre no período colonial, mais precisamente em Minas Gerais. O trabalho apresenta também a evolução das loterias, de 1784 até nossos dias atuais e trata de dois jogos oferecidos pelas loterias brasileiras contando um pouco de suas histórias. O presente trabalho tem um enfoque matemático, com aplicações de probabilidades voltadas ao universo das loterias federais, em especial de dois produtos ofertados pelas Loterias Caixa: a Mega-Sena e a Quina. Utilizando dois métodos de geração de números aleatórios apresentaremos algumas aplicações de geração de sequências aleatórias na simulação de resultados de apostas.

Palavras chaves: Loteria, Quina, Mega-Sena, Probabilidade e Geração de números aleatórios.

Abstract

Historical Aspects of Theoretical and Lotteries begins with the historical context of gambling; shows examples of such games, such as launching a data or existing machines in casinos, brings Article 50 of Law 3688 of October 3, 1941 (which defines what is considered gambling), shows curious facts involving games such as the construction of the Great Wall of China, starting around 221 BC, and was partly funded by lottery, said the beginning of the lotteries in Brasil, which occurs during the colonial period, more precisely in Minas Gerais. The paper also presents the evolution of the lotteries, 1784 until our present day and is two games offered by lotteries Brazilian telling some stories. This work has a mathematical approach , with applications aimed at adds universe of lotteries, in particular two products offered by the lotteries box: Mega-Sena and Quina. Two methods for generating random numbers present some applications to generate random sequences in simulation betting results.

Keywords: Lottery, Quina, Mega-Sena, Probability and Random Number Generation.

Sumário

Resumo	6
Abstract	7
Introdução	9
1 Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias	10
1.1 Jogos de azar.....	10
1.2 A Evolução das Loterias no Brasil	11
1.3 A Quina e a Mega-Sena.....	14
2 Ferramentas Matemáticas	17
2.1 Noções de Combinatória e Probabilidade	18
2.2 Aplicações	21
2.3 Métodos de Geração de Números Aleatórios	28
2.4 Aplicações	33
3 Conclusão	38

Introdução

Os jogos lotéricos contemporâneos, constituem-se no resultado histórico das diversas formas dos chamados jogos de azar (jogos de cartas, dados, ou mesmo sorteios, dentre outros), onde uma ou mais apostas são feitas, tendo como o universo de possibilidades, resultados numéricos ou não. A modalidade mais popular de jogos de azar no Brasil é a de resultados numéricos de sorteios, hoje congregados pelas Loterias da Caixa Econômica Federal.

Dentre os diversos jogos oferecidos atualmente pelas Loterias Caixa destacam-se as modalidades de apostas conhecidas como Mega-Sena (onde escolhem-se, de seis até quinze números dentre sessenta para formar uma aposta) e a Quina (onde escolhem-se, cinco, seis ou sete números dentre oitenta para formar uma aposta). Por serem modalidades de jogos de alcance nacional, com bom retorno ao investidor vencedor, com facilidade de compreensão e aceitação dos apostadores; têm sido jogos como estes os grandes exemplos de loterias praticadas no Brasil. Tendo isto em mente, o presente trabalho fará um panorama histórico e apresentará uma modelagem da Mega-Sena e da Quina através de tratamento matemático.

Na primeira seção, será apresentada a história dos jogos de azar, sua evolução para os jogos lotéricos, elaborados até a constituição do monopólio federal da atividade pela Caixa Econômica Federal. Na segunda seção, inicialmente serão revisados alguns conceitos de Probabilidade, Combinatória e geração de números aleatórios pelos Métodos de Congruência Linear e Quadrados Médios, que serão necessários para a continuidade do trabalho. Ainda na segunda seção, teremos um conjunto de números gerados pelos referidos métodos de geração aleatórios. Na terceira seção temos a conclusão e por fim, na quarta seção apresentamos as referências.

1 Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias

Será apresentada a história dos jogos de azar, sua evolução para os jogos lotéricos, elaborados até a constituição do monopólio federal da atividade pela Caixa Econômica Federal.

1.1 Jogos de azar

Os jogos de azar podem ir de um simples lançar de dados a jogos mais sofisticados que envolvem baralhos e máquinas existentes em cassinos. O art. 50 § 3º da lei 3.688 de 03 de outubro de 1941 vem trazendo em seu corpo o que é considerado um jogo de azar. Vejamos na íntegra:

Art. 50. Estabelecer ou explorar jogo de azar em lugar público ou acessível ao público, mediante o pagamento de entrada ou sem ele: § 3º Consideram-se, jogos de azar: a) o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte, b) as apostas sobre corrida de cavalos fora de hipódromo ou de local onde sejam autorizadas e c) as apostas sobre qualquer outra competição esportiva.

Há registros que comprovam que os jogos de azar datam da pré-história; ao que parece o homem antigo sempre se preocupou com sorte e azar, Canton [3] afirma que:

Já se encontrou em sítios arqueológicos pelo mundo, evidências comprovando que, desde o princípio, o homem recorria à sorte para tomar decisões diante de questões controversas. Povos da Antiguidade, como os egípcios, os antigos chineses e os romanos, estão entre os pioneiros em matéria de jogos de azar. Faraós utilizavam tabuleiros de papiro e peças de pedra ou marfim como instrumentos divinatórios. Na China, o uso dos jogos de azar começou por volta de 2300 a.C., havendo relatos de que a construção da Grande Muralha, iniciada por volta de 221 a.C., foi em parte financiada por uma loteria. (CANTON, P.13., 2010).

O ato de jogar evoluiu e incorporou o ingrediente da diversão. Com o tempo, pequenas placas de marfim ou de madeira, dados, tabuleiros, baralhos, piões, roletas, enfim, elementos dos mais diversos possíveis, passaram a ser empregados na busca de riqueza ou fortuna.

No entender de Eyes [1], a vinculação das loterias à geração de recursos para causas sociais tornou-se uma prática nos países em que o jogo era explorado. A Caixa Econômica Federal no Brasil tem a missão de atuar na promoção da cidadania e do

desenvolvimento sustentável do país. Deste modo, destina parte de sua arrecadação para investimentos em segmentos como educação, saúde, esporte, assistência social e cultura. No Brasil, a cultura dos jogos de azar é tão impregnada que os governos tentam controlar ou mesmo incentivar essa cultura, por meio de propagandas em emisoras de televisão. Um outro exemplo é a administração feita pela Caixa Econômica Federal tanto da oferta de tipos diferentes de jogos e apostas, quanto da própria regulamentação das casas de apostas (lotéricas), que de tão procuradas por pessoas de diversas idades e até mesmo de várias classes sociais, acaba por associar às suas funções de atribuições de atendimento bancário e imobiliário.

A próxima subseção trata do início das loterias no Brasil; seu objetivo inicial, proibições e de como a loteria caiu no gosto popular; por fim, mostra como o governo controla os jogos lotéricos, fazendo uso até mesmo da constituição brasileira.

1.2 A Evolução das Loterias no Brasil

As loterias, oficialmente, iniciaram-se no século XVIII em Minas Gerais. Em 1784, o Capitão-mor Luiz da Cunha Menezes solicitou à Presidência da Câmara Municipal, autorização para promover uma loteria com o objetivo de arrecadar recursos para o término das obras da Casa de Câmara e Cadeia (hoje Museu da Inconfidência) de Vila Rica, a atual Ouro Preto, então capital da Capitania. Com a vinda da Corte portuguesa, em 1808, as loterias proliferaram por todo o Brasil e a Independência não alterou essa situação, que se manteve durante o reinado de D. Pedro I.

Segundo Canton [3], na Regência do padre Diogo Antônio Feijó, em 6 de junho de 1831, foram proibidas as concessões e as extrações de loterias devido ao descontrole nas concessões. A proibição vigorou até novembro de 1837, quando na regência de Pedro de Araújo Lima, a Assembléia Geral Legislativa sancionou os decretos que autorizaram a extração de loterias em favor dos Teatros da Praia de D. Manuel e do Fluminense, ambos no Rio de Janeiro.

As loterias caíram no gosto popular bem rápido, e invadiam todas as classes sociais sem pudor; até mesmo Machado de Assis [8], fez uma crônica que ilustra bem isso, vejamos:

... eis que ouço o grito na rua, um pregão, uma voz esganiçada... : Um de resto! anda hoje! Duzentos contos! Homens e leis tem a vida limitada? eles por necessidades físicas elas por necessidades morais e políticas. Mas a loteria é eterna. A loteria é a própria Fortuna e a Fortuna é a deusa que não conhece incrédulos nem renegados. A cidade fala de umas cousas que esquece, crimes públicos, crimes particulares; mas loteria não é crime particular nem público! Um de resto! anda hoje! Duzentos contos! (ASSIS, P.741, 1894)

O presidente da República general Humberto Castelo Branco, publicou em 27 de fevereiro de 1967 o Decreto-Lei número 204/67, nele fica definido que somente o governo federal poderia explorar o serviço de loterias e que esse serviço ficaria sob a administração das Caixas Econômicas Federais. O Art. 1º da constituição brasileira de 1967 determina que a renda líquida obtida com a exploração do serviço de loteria será obrigatoriamente destinada a aplicações de caráter social e de assistência médica, empreendimentos do interesse público. O Art. 2º da constituição brasileira de 1967 determina que a Loteria Federal, de circulação, em todo o território nacional, constitui um serviço da União, executado pelo Conselho Superior das Caixas Econômicas Federais, através da Administração do Serviço de Loteria Federal, com a colaboração das Caixas Econômicas Federais. Finalmente, o Art.175 da Constituição Federal de 1988 estabelece que incumbe ao Poder Público, na forma da lei, diretamente ou sob regime de concessão ou permissão, sempre através de licitação, a prestação de serviços públicos.

No ano de 1967 o senador João Villasboas, presidente do Conselho Superior das Caixas Econômicas fez estudos para implantar uma nova modalidade de jogo, uma loteria que envolvia futebol; em 27 de maio de 1969, o então presidente da República, general Artur da Costa e Silva, assinou o Decreto-Lei nº 594, que autorizou a implantação da Loteria Esportiva.

No ano de 1970, no Brasil só existiam duas modalidades de loterias: a Loteria Federal e a Loteria Esportiva. A Caixa Econômica já estudava lançar no mercado uma loteria de números e em 12 de novembro de 1979, por meio da Lei no 6.717, a Loto foi implantada. Em 18 de setembro de 1980 foi realizado o primeiro sorteio da nova loteria e em 7 de março de 1988 a Sena foi lançada.

Já em 22 de agosto de 1991 foi a vez da Loteria Instantânea (a “ raspadinha ”), com prêmios em dinheiro (somente em 1996 ela passou a premiar bens, como carros

e motos). Em 13 de março de 1994 a Loto foi substituída pela Quina. A Super-Sena teve seu primeiro sorteio em 10 de abril de 1995 e no fim de 2001 passou a se chamar Dupla Sena. A Mega-Sena passou a vigorar no ano de 1996.

Em 2009 surgiu a Mega da Virada, que tem esse nome porque acontece sempre e somente na virada de ano, em 31 de dezembro, com sorteio único; caso nenhum apostador acerte a sena (ou seja, os seis números), o prêmio é pago ao(s) apostador(es) que acertar(em) a quina (cinco dos seis números sorteados); e se não houver ganhador com cinco acertos, ganha quem acertar a quadra (quatro dos seis números sorteados). O concurso de número 1.140 em 31 de dezembro de 2009, pagou o maior prêmio de uma loteria na América Latina: 144,9 milhões de reais.

Algumas tentativas da Caixa Econômica Federal não funcionaram bem, tais como: a Trinca implantada em 1997, mas três anos após seu lançamento foi extinta, além do Trevo da Sorte, que teve o primeiro sorteio em 6 de dezembro de 1998, com alguns poucos concursos foi trocado pelo jogo denominado Lotomania.

A Caixa Econômica Federal sempre buscou inovar várias formas de jogos e no ano de 2010 tinha a seguinte oferta de loterias: **loterias de bilhetes e de prognósticos**.

As loterias de bilhetes, são jogos impressos (bilhetes) vendidos nas unidades lotéricas ou por revendedores fixos e ambulantes credenciados pela Caixa Econômica. Dividem-se em **Loteria Federal**: bilhetes numerados que atribuem premiações aos números escolhidos por sorteio público realizado pela Caixa Econômica; **Loteria Instantânea**, mais conhecida como “ raspadinha ”, são bilhetes impressos com uma área raspável que revela combinações de números, símbolos ou códigos, nos quais o apostador verifica o resultado.

Já as loterias de prognósticos são jogos nos quais o apostador tenta prever os resultados que serão sorteados. As loterias de prognósticos dividem-se em **Loterias de prognósticos numéricos**: são os jogos em que o apostador tenta prever quais serão os números sorteados no próximo concurso (sorteio). São eles: Quina, Mega-Sena, Lotomania, Dupla-Sena e Lotofácil; **Loterias de prognósticos esportivos**: são aquelas em que o apostador tenta prever o resultado de jogos esportivos. A Caixa Econômica utiliza apenas o futebol para essa modalidade de loteria. São elas: Loteca e Lotogol; **Loterias de prognósticos específicos** combinam as loterias de prognósticos numé-

ricos com a paixão pelo futebol. O apostador, além de escolher os números, também marca no volante seu “time do coração”.

O presente trabalho se concentra em especial, a dois produtos ofertados pelas Loterias Caixa: a **Mega-Sena** e a **Quina** cujos volantes aparecem nas figuras 1 e 2.

MEGA-SENA

VOCÊ PODE JOGAR MARCANDO EM UM OU NOS DOIS QUADROS ABAIXO:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

Para anular este jogo, marque ao lado:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

Para anular este jogo, marque ao lado:

Assinale quantos números você está marcando neste jogo:
[6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15]

SURPRESINHA - Aqui o sistema escolhe os números por você. Indique quantas apostas deseja fazer:
[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8]

TEIMOSINHA - Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo (não é válido para Bolão):
[2] [4] [8]

BOLÃO - Aqui você faz seu bolão de até 100 cotas. Assinale abaixo o nº de cotas:
[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] Dezena
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] Unidade
[100] Cota limite

CONFIRA O BILHETE IMPRESSO PELO TERMINAL. ELE É O ÚNICO COMPROVANTE DA APOSTA.

Loterias CAIXA

Preencha toda a área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta.

Figura 1: Volante da Mega Sena

QUINA

VOCÊ PODE JOGAR MARCANDO EM UM OU NOS DOIS QUADROS ABAIXO:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]
[61]	[62]	[63]	[64]	[65]	[66]	[67]	[68]	[69]	[70]
[71]	[72]	[73]	[74]	[75]	[76]	[77]	[78]	[79]	[80]

Para anular este jogo, marque ao lado:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]
[61]	[62]	[63]	[64]	[65]	[66]	[67]	[68]	[69]	[70]
[71]	[72]	[73]	[74]	[75]	[76]	[77]	[78]	[79]	[80]

Para anular este jogo, marque ao lado:

Assinale quantos números você está marcando neste jogo:
[5] [6] [7]

SURPRESINHA - Aqui o sistema escolhe os números por você. Indique quantas apostas deseja fazer:
[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8]

TEIMOSINHA - Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo (não é válido para Bolão):
[3] [6] [12] [18] [24]

BOLÃO - Aqui você faz seu bolão de até 25 cotas. Assinale abaixo o nº de cotas:
[1] [2] Dezena
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] Unidade

CONFIRA O BILHETE IMPRESSO PELO TERMINAL. ELE É O ÚNICO COMPROVANTE DA APOSTA.

Loterias CAIXA

Preencha toda a área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta.

Figura 2: Volante da Quina

1.3 A Quina e a Mega-Sena

Algumas regras da Quina divulgadas pela Loteria Federal, no verso dos volantes são:

- Escolha de 5 a 7 números dentre os 80 disponíveis. Confira seu recibo no ato da aposta. Apenas maiores de 18 anos podem apostar, conforme o Artigo 81, inciso VI, da lei 8.069/90.
- A aposta simples, de 5 números, custa R\$ 0,75. Apostas com 6 e 7 números custam, respectivamente, R\$ 3,00 e R\$ 7,50.

- Os sorteios, abertos ao público, são realizados no caminhão da sorte - em diversos municípios do país - no auditório da Caixa Econômica Federal, em Brasília, ou em estúdios de TV, nas datas previamente divulgadas.
- Qual o prazo para receber o prêmio ? Até 90 dias corridos, após a realização do sorteio. Ao final deste período, o prêmio prescreve e seu valor é repassado para o FIES (Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior).

No mesmo volante da Quina encontramos resultados de probabilidades como:

- Para a aposta mínima, as chances de acertar são : $\frac{1}{866}$ (terno), $\frac{1}{64.106}$ (quadra) e $\frac{1}{24.040.016}$ (quina). Para aposta múltiplas, consulte a casa lotérica ou o sítio da Caixa Econômica Federal (www.caixa.gov.br/loterias).

A mesma análise que foi feita no jogo lotérico denominado Quina pode ser feita para o jogo lotérico chamado **Mega-Sena** por meio dos volantes, de acordo com as regras e resultados de probabilidades divulgadas pela Loteria Federal, no verso dos volantes, temos :

- Escolha de 6 a 15 números dentre os 60 disponíveis.
- Confira seu recibo no ato da aposta.
- Apenas maiores de 18 anos podem apostar, conforme o Artigo 81, inciso VI, da lei 8.069/90.
- A aposta simples, de 6 números, custa R\$ 2,00. Aposta com mais números, consulte na casa lotérica ou no sítio da Caixa Econômica Federal [4].

Cosultando o sítio da Caixa Econômica Federal temos acesso aos dados, com os quais foi possível montar a tabela, veja figura 3.

Quantidade de n° jogados	Valor da aposta da Mega-Sena em Reais
6	2,00
7	14,00
8	56,00
9	168,00
10	420,00
11	924,00
12	1.848,00
13	3.452,00
14	6.006,00
15	10.010,00

Figura 3: Tabela de valores da Mega sena.

- Os sorteios, abertos ao público, são realizados no caminhão da sorte - em diversos municípios do país - no auditório da Caixa Econômica Federal, em Brasília, ou em estúdios de TV, nas datas previamente divulgadas.
- Qual o prazo para receber o prêmio? Até 90 dias corridos, após a realização do sorteio. Ao final deste período, o prêmio prescreve e seu valor é repassado para o FIES (Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior).

Finalizamos esta subseção mostrando um gráfico de valores das apostas com a quantidade de dezenas jogadas, veja figura 4.

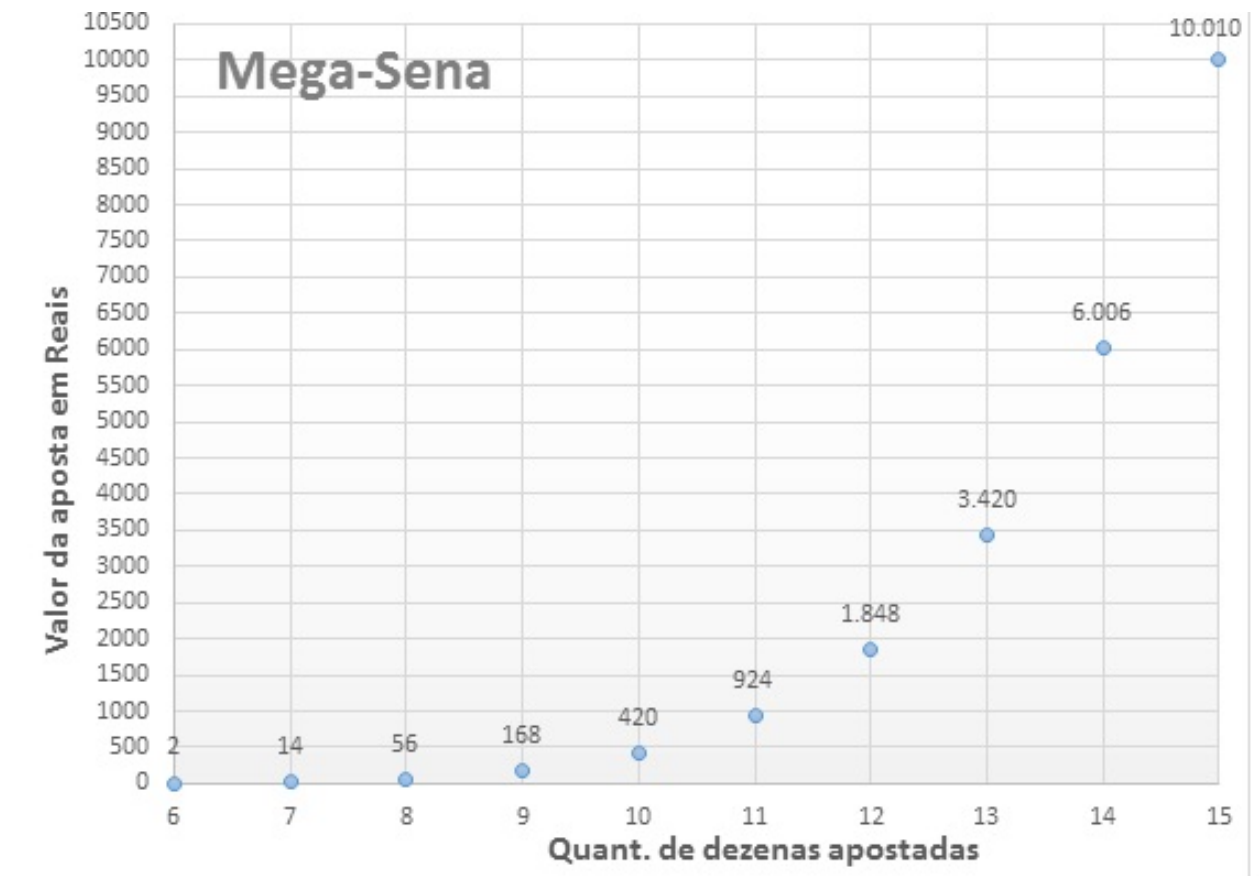


Figura 4: Gráfico de valores das apostas da Mega-Sena em função da quantidade de dezenas.

A seção seguinte tratará das ferramentas que serão utilizadas neste trabalho, tais como: probabilidade e geração de números aleatórios. Todas essas idéias serão usadas para reforçar conclusões futuras nas próximas seções.

2 Ferramentas Matemáticas

Nesta seção serão expostas as seguintes ferramentas matemáticas: noções de Probabilidade e Congruência.

2.1 Noções de Combinatória e Probabilidade

Considere o seguinte problema:

Problema 2.1. *Em um lançamento de um dado, qual a chance de ocorrer um número maior que 4? E um número menor que 7?*

Para dar resposta a esse problema deve-se expor a noção de espaço amostral, evento e probabilidade.

É importante enfatizar que existem experimentos determinísticos e aleatórios. Um experimento é dito **determinístico** se, feito diversas vezes sempre nos levar a resultados conhecidos; já um experimento é denominado **aleatório** se repetido sob as mesmas condições nos conduz a resultados diferentes, mas previsíveis.

As Probabilidades dentro da Matemática tem um papel significativo, de grande valia, que pode ser aplicada a fenômenos meteorológicos quando se atribui um valor à chance de chover, fazendo com que pessoas decidam o tipo de roupa, se levarão ou não um guarda-chuva ao saírem. Ao chegar em uma bifurcação que tenha três trajetos de opções para se chegar a um local desejado, dependendo das condições de trânsito e das estradas é possível atribuir um valor à chance de chegar mais rápido ao local desejado. Um médico quando prescreve um determinado medicamento já existente no mercado a um paciente, pode-se atribuir novamente um valor à chance de cura do paciente ou até mesmo aos jogos lotéricos das loterias pode-se associar um valor à chance de acerto do jogo.

Para compreender o conceito de Probabilidade deve-se, inicialmente, definir espaço amostral Ω como sendo o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento em estudo; mas este texto tratará de espaços amostrais finitos e equiprováveis, ou seja, conjuntos com uma quantidade finita de elementos e conjuntos onde para cada elemento se atribua a mesma chance de ocorrência. Chamando de eventos todos os subconjuntos do espaço amostral Ω , pode-se então definir a probabilidade $P(A)$ de que um evento A ocorra como sendo o quociente do número de elementos de A pelo número de elementos de Ω , $n(\Omega)$:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (1)$$

Da equação (1), a probabilidade de um evento A é um número entre 0 a 1 que indica a chance de ocorrência do evento A . Quanto mais próxima de 1 é $P(A)$, maior é a chance de ocorrência do evento A , e quanto mais próxima de zero, menor é a chance de ocorrência do evento A . O evento é chamado impossível se tiver probabilidade 0 e é chamado certo se tiver probabilidade 1.

A probabilidade de um evento satisfaz algumas propriedades importantes. Segundo Morgado [2], considerando um evento A e o espaço amostral Ω , da equação (1), tem-se as seguintes propriedades:

- (i) Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) $P(\phi) = 0$.

O problema proposto no início da seção pode ser resolvido assim: O espaço amostral associado ao experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chamando de K o evento onde ocorre um número maior que 4, então $K = \{5, 6\}$ e W o evento onde ocorre um número menor que 7 obtemos e $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tem-se as probabilidades $P(K) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $P(W) = \frac{6}{6} = 1$.

Agora já conhecendo o conceito de probabilidade, considere outro problema:

Problema 2.2. *Um professor resolveu sortear um livro de Biologia entre seus 50 alunos existentes na sala de aula, em um dado dia, notou que neste dia a sala era composta de 20 homens e 30 mulheres, entre elas estava Maria Fernanda, após ter feito o sorteio, anunciou que a pessoa sorteada era uma mulher, qual a probabilidade de Maria Fernanda ser essa mulher?*

O problema pode ser resolvido com a noção de probabilidade condicional. Em Morgado [2] encontramos a definição de probabilidade condicional:

Definição 2.1. *Dados dois eventos A e B , a probabilidade condicional de B dado A é o número $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Representamos este número pelo símbolo $P(B|A)$. Temos então simbolicamente $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Nota-se que este número só está definido quando $P(A) > 0$.*

Então de agora em diante fica definida a probabilidade condicional como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2)$$

Seja A o evento que ocorre pessoa escolhida é mulher, B pessoa escolhida é a Maria Fernanda e Ω os 50 alunos da sala. Temos as seguintes probabilidades abaixo para o problema.

$$P(A) = \frac{30}{50} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{50}, \text{ portanto } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{30}{50}} = \frac{1}{30}$$

Nem sempre é simples contar o número de elementos de Ω . Eventualmente alguma técnica combinatória pode ser necessária. Considere o problema que segue abaixo.

Problema 2.3. *João Miguel é o diretor do Hospital das Clínicas em Goiânia, ele tem a sua disposição uma equipe médica formada por vinte e nove médicos, o diretor deseja formar um plantão de fim de semana composto por cinco médicos, então quantas equipes o diretor João Miguel pode formar?*

Em outras palavras, quer-se saber de quantos modos podemos escolher p objetos distintos, com $0 < p \leq n$, entre n objetos distintos? Este problema pode ser resolvido recorrendo à noção de combinação de n elementos tomados p a p (Em Morgado [2]).

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (3)$$

Agora pode-se resolver o problema fazendo uso da equação (3), para $n = 29$ e $p = 5$, logo:

$$C_{29,5} = \frac{29!}{5!24!} = 118.755 \text{ equipes.}$$

A próxima subseção apresenta o funcionamento dos cálculos das probabilidades para a Quina e Mega-Sena, fala dos valores das apostas verso as probabilidades das mesmas.

2.2 Aplicações

Para entender o cálculos das Probabilidades na Quina para uma única aposta simples, vamos iniciar definindo os eventos: acertos da *quina* da Quina como A , acerto da *quadra* da Quina sendo B e acerto da *terna* da Quina como C , obtemos:

- a) No caso de acertar a quina, temos todos os possíveis resultados dos sorteios, que podem ser calculados fazendo a combinação das 80 dezenas existentes escolhidas 5 a 5: $C_{80,5} = \frac{80!}{5!75!} = 24.040.016$. Como só houve uma aposta, a probabilidade é $P(A) = \frac{1}{24.040.016}$.
- b) No caso de acertar a quadra, tem-se um acerto de 4 das 5 dezenas apostadas e 1 dezena das 75 que não foram apostadas, logo há $C_{5,4} \cdot C_{75,1} = 375$ possibilidades. Então tem-se a probabilidade $P(B) = \frac{375}{24.040.016} = \frac{1}{64.106}$.
- c) No caso de acertar a terna, tem-se um acerto de 3 das 5 dezenas apostadas e 2 dezena das 75 que não foram apostadas, então temos um total de $C_{5,3} \cdot C_{75,2} = 27.750$ modos de ocorrer. Logo tem-se a probabilidade $P(C) = \frac{27.750}{24.040.016} = \frac{1}{866}$.

Por que tornam-se mais caras apostas com mais dezenas na Quina? Caso não se deseje a aposta mínima com cinco dezenas, mas sim apostas com seis dezenas ou sete dezenas, por exemplo, então deve-se estar preparado para novos preços. Tal fato reside nas probabilidades de acerto das dezenas de cada aposta. Denominando o evento D como sendo acertar cinco dezenas tendo escolhido seis e E o evento de acertar cinco dezenas tendo escolhido sete, tem-se:

A aposta de 5 dezenas tem probabilidade $P(A) = \frac{1}{24.040.016}$ (já calculado anteriormente em 2.2 item a). Agora, a aposta de 6 dezenas tem probabilidade $P(D) = \frac{6}{24.040.016}$, e seu cálculo é feito lembrando-se de que no caso de acertar a 5 dezenas de 6 dezenas, há $C_{6,5} = 6$ possibilidades. Usando a equação (1) então temos $P(D) = \frac{6}{24.040.016} = \frac{1}{4.006.669}$. Uma probabilidade seis vezes maior que a aposta simples de cinco dezenas. Por fim a aposta de 7 dezenas tem probabilidade $P(E) = \frac{21}{24.040.016}$, o cálculo é feito partindo-se do caso de acertar a 5 dezenas de 7, há $C_{7,5} = 21$ modos. Usando a equação (1) então temos $P(E) = \frac{21}{24.040.016} = \frac{1}{1.144.763}$. Uma probabilidade vinte e uma vezes maior que a aposta simples de cinco dezenas.

É importante ressaltar que se o critério de valorização da aposta fosse com base na aposta simples (R\$ 0,75), então os valores justos de cada aposta na **Quina** deveriam ser: A aposta de 6 dezenas, tem probabilidade seis vezes maior que a aposta mínima, pois $P(D) = 6P(A)$, logo ficaria 6 vezes R\$ 0,75, o que daria R\$ 4,50 e não o valor R\$ 3,00. A aposta de 7 dezenas, tem probabilidade vinte e uma vezes maior que a aposta mínima, pois $P(E) = 21P(A)$, assim o valor deveria ser 21 vezes R\$ 0,75, teríamos R\$ 15,75 e não R\$ 7,50. Conclui-se que os valores das apostas da **Quina** não tomam por base o valor da aposta simples, pois conforme cálculos de probabilidades apresentados acima, os valores praticados pelas loterias federais são diferentes dos valores esperados pelos cálculos. Veja a figura 5, ela mostra o como as probabilidades das apostas da Quina estão associadas a quantidade de dezenas jogadas.

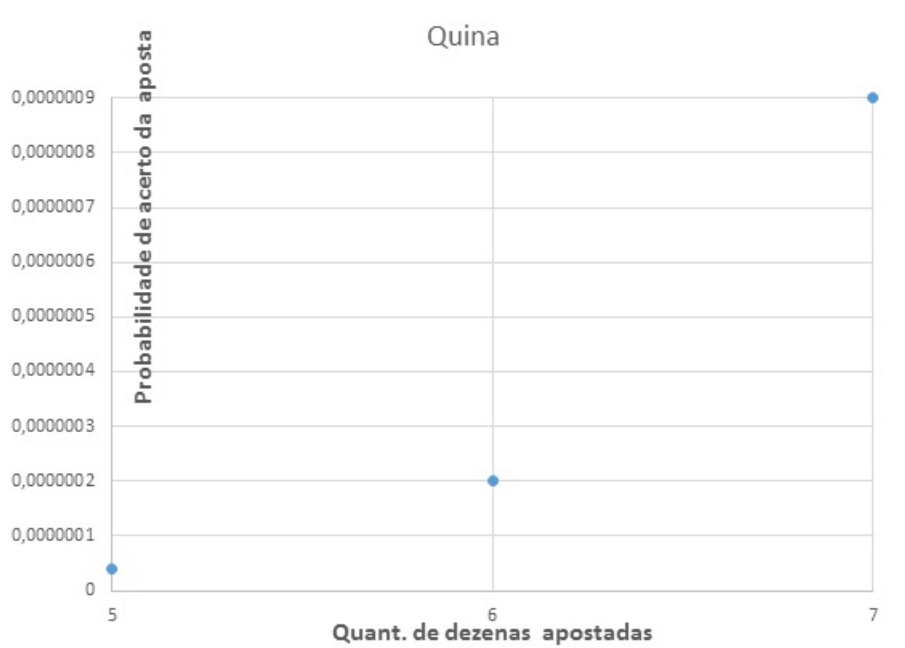


Figura 5: Gráfico de probabilidades das apostas da Quina em função da quantidade de dezenas.

Agora vamos nos deter nos cálculos das Probabilidades na Mega-Sena para a aposta simples. Será feita comparação dos cálculos das probabilidades na **Mega-Sena** com relação a aposta simples. Consideremos definidos os eventos F como acerto da *sena* da Mega-sena, G acerto da *quina* da Mega-Sena e H acerto da *quadra* da Mega-Sena. Os cálculos seguem abaixo:

- d) No caso de acertar a sena, os possíveis resultados dos sorteios são calculados pela combinação das 60 dezenas existentes escolhidas 6 a 6, como $C_{60,6} = \frac{60!}{6!54!} = 50.063.860$.

Concorrendo com uma única aposta simples, a probabilidade é $P(F) = \frac{1}{50.063.860}$.

- e) No caso de acertar a quina, temos um acerto de 5 das 6 dezenas apostadas e 1 dezena das 54 que não foram apostadas, logo há $C_{6,5} \cdot C_{54,1} = 324$ possibilidades.

Logo, tem-se $P(G) = \frac{324}{50.063.860} = \frac{1}{154.518}$.

- f) No caso de acertar a quadra, temos um acerto de 4 das 6 dezenas apostadas e

2 dezena das 54 que não foram apostadas, então temos um total de $C_{6,4}.C_{54,2} = 21.465$ modos. Temos a probabilidade $P(H) = \frac{21.465}{50.063.860} = \frac{1}{2.332}$.

Por que torna-se mais caro apostas com mais dezenas na Mega-Sena? Por que o valor das apostas se alteram quando apostam-se 6 dezenas (valor R\$ 2,00), 7 dezenas (valor R\$14,00), 8 dezenas (valor R\$56,00) e assim sucessivamente conforme tabela fornecida pela Caixa Econômica Federal [4]?

Considerando as probabilidade da Mega-Sena para a aposta mínima e admitindo os eventos I como acertar a sena escolhida 7 dezenas, J acertar a sena escolhida 8 dezenas e L sendo acertar a sena escolhida 15 dezenas, pode-se evidenciar os cálculos das probabilidades para as apostas mencionadas da forma abaixo:

No caso de acertar a 6 dezenas de 7, há $C_{7,6} = 7$ possibilidades. Assim temos a probabilidade $P(I) = \frac{7}{50.063.860} = \frac{1}{7.151.980}$, que é uma probabilidade sete vezes maior que a aposta simples de seis dezenas. No caso de acertar a 6 dezenas de 8, há $C_{8,6} = 28$ modos. Então tem-se a probabilidade $P(J) = \frac{28}{50.063.860} = \frac{1}{1.787.995}$, que é uma probabilidade vinte e oito vezes maior que a aposta simples de seis dezenas e por fim na situação de acertar a 6 dezenas de 15, há $C_{15,6} = 5.005$ modos. Logo tem-se $P(L) = \frac{5.005}{50.063.860} = \frac{1}{10.003}$, uma probabilidade cinco mil e cinco vezes maior que a aposta simples de seis dezenas.

Tomando como referência as probabilidades de cada aposta e o valor da aposta simples que é R\$ 2,00, o valor suposto de cada aposta deveria ser:

- A aposta de 7 dezenas, tem probabilidade sete vezes maior que a simple, $P(I) = 7P(F)$, então o valor deveria ser 7 vezes R\$ 2,00, o que daria R\$ 14,00, realmente o valor cobrado é R\$ 14,00.
- A aposta de 8 dezenas, tem probabilidade vinte oito vezes maior, $P(J) = 28P(F)$, então o valor deveria ser 28 vezes R\$ 2,00 . De fato o valor cobrado é R\$ 56,00.
- A aposta máxima é de 15 dezenas, tem probabilidade cinco mil e cinco vezes maior, $P(L) = 5005P(F)$, então o valor deve ser 5005 vezes R\$ 2,00. De fato, o valor cobrado é R\$ 10010,00.

Logo, a **Mega-Sena** toma por base o valor da aposta simples e as probabilidades das outras apostas, assim oferecer os valores das demais apostas, conforme cálculos desenvolvidos nesta seção, apresenta-se agora um gráfico de probabilidade de acerto da aposta da Mega-Sena em função da quantidade de dezenas apostadas. Veja figura 6:

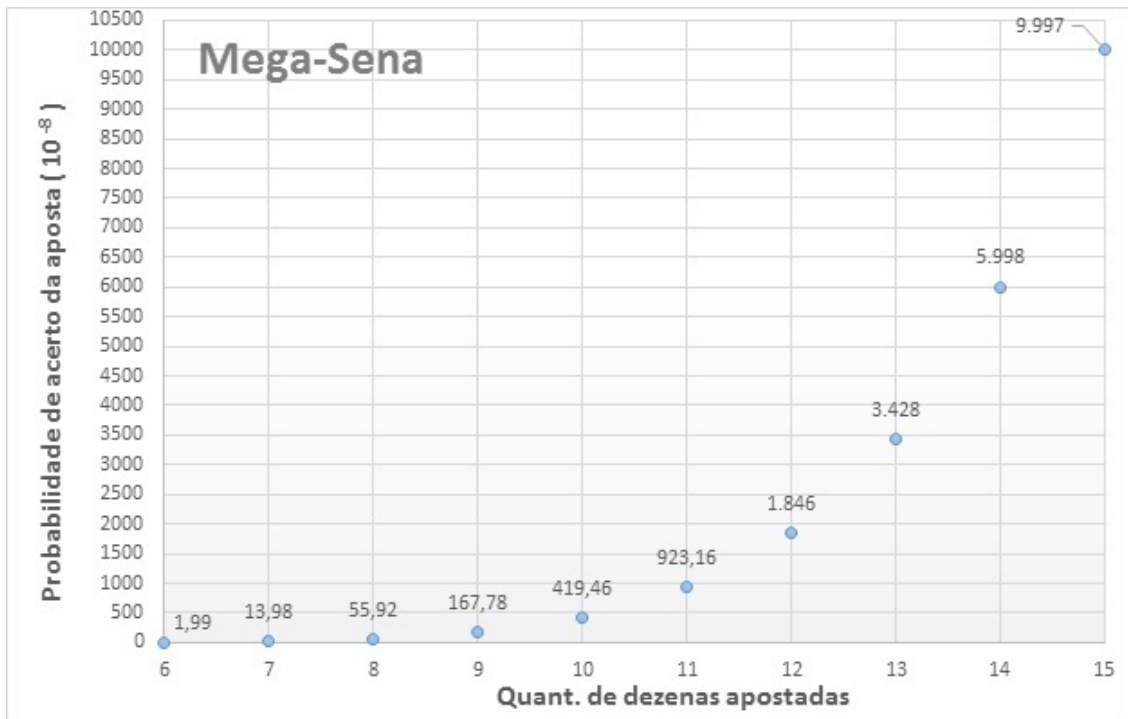


Figura 6: Gráfico de probabilidade de acerto da aposta da Mega-Sena em função da quantidade de dezenas apostadas.

Considere o seguinte problema:

Problema 2.4. *Quantos números deveriam ser apostados para que a probabilidade de acertar as seis dezenas da Mega-sena fosse maior do que $\frac{1}{2}$? E igual a 0,9?*

Para dar uma solução a esse problema iniciamos determinando quanto representa metade dos possíveis resultados dos sorteios, o que pode ser feito fazendo a divisão de $C_{60,6} = \frac{60!}{6!54!} = 50.063.860$ por 2, então temos 25.031.930. Suponhamos que a quantidade de números jogados seja x , então devemos acertar 6 números dentre os x números, basta resolver a inequação $C_{x,6} = \frac{x!}{6!(x-6)!} > 25.031.930$; resolvendo essa última inequação encontramos para x o valor de 54, pois $C_{54,6} = \frac{54!}{6!48!} = 25.827.165 > 25.031.930$. Então concluímos que a quantidade de números que deveriam ser jogados para se ter uma probabilidade de acerto maior que $\frac{1}{2}$ deveria ser 54. Agora para a segunda parte desse problema, que é uma probabilidade igual a noventa por cento, fazemos 0,9 vezes 50.063.860; que é igual a 45.057.474. Suponha que a quantidade de números jogados seja y , então devemos acertar 6 números dentre os y números, esse número pode ser achado por $C_{y,6} = \frac{y!}{6!(y-6)!} = 45.057.474$; resolvendo a equação encontramos $y=59$, pois $C_{59,6} = \frac{59!}{6!53!} = 45.057.474$. Então a quantidade de números a serem jogados para ser ter 0,9 de acerto, deveria ser exatamente 59.

Se todas as apostas fossem permitidas seria possível montar o gráfico de probabilidade associada a quantidade de números jogados, os resultados são interessantes pois as probabilidades de acerto só começam a ficar notáveis para aposta superiores a 30 números, o que pelas regras do jogo Mega-Sena propostas pelas Loteria da Caixa Econômica Federal não é aceito, pois a maior quantidade de números permitida é 15 (Veja a figura (7)).

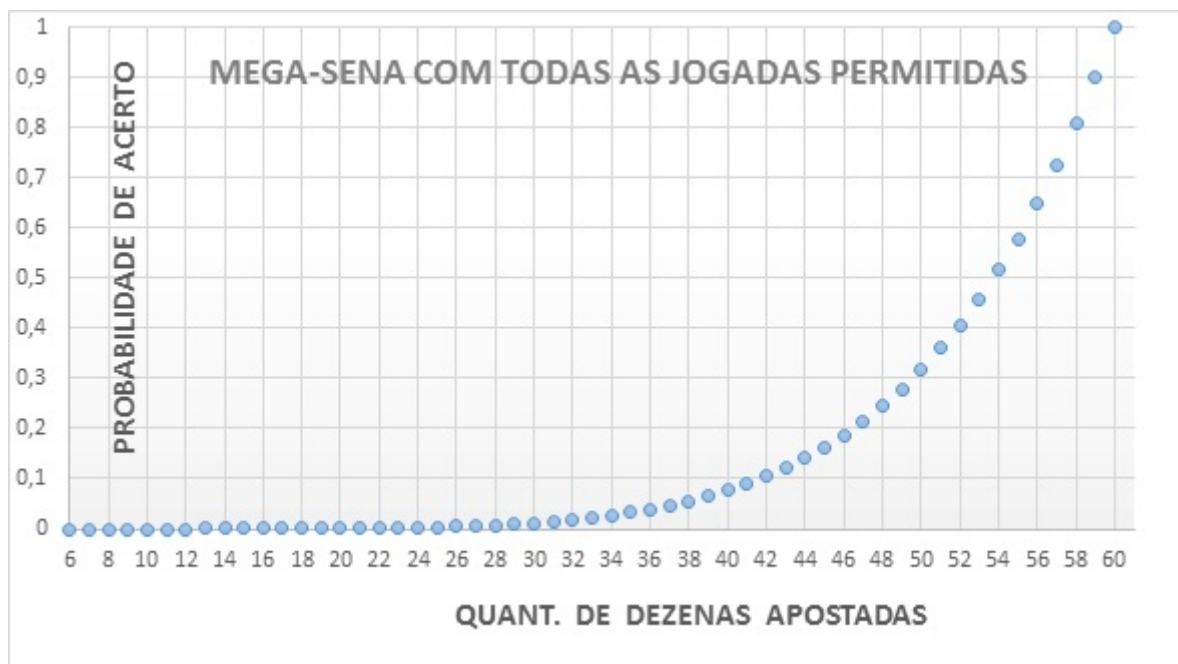


Figura 7: Gráfico alterado de probabilidade de acerto da aposta em função da quantidade de dezenas apostadas.

Por fim, quatro problemas interessantes:

Problema 2.5. *Qual será o valor da probabilidade de um jogador acertar os cinco números da Quina, sabendo que já acertou a terna da Quina?*

Problema 2.6. *Qual será a probabilidade de um jogador acertar os cinco números da Quina, sabendo que já acertou a quadra da Quina?*

Problema 2.7. *Qual será a probabilidade de um apostador acertar os seis números da Mega-Sena, sabendo que já acertou a quadra da Mega-Sena?*

Problema 2.8. *Quanto vale a probabilidade de um apostador acertar os seis números da Mega-Sena, sabendo que já acertou a quina da Mega-Sena?*

Considere novamente os eventos já definidos: A como acerto da *quina* da Quina, B acerto da *quadra* da Quina, C acerto da *terna* da Quina, F acerto da *sena* da Mega-Sena, G acerto da *quina* da Mega-sena, H acerto da *quadra* da Mega-Sena e as probabilidades desses eventos já calculadas nesse texto. Usando probabilidade condicional é possível dar solução a cada um dos quatro problemas acima.

O Primeiro problema pode ser resolvido por $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$, mas $P(C) = \frac{27.750}{24.040.016} = \frac{1}{866}$, agora o cálculo $P(A \cap C)$ deve ser feito, é importante notar que o evento $A \cap C$ significa acerto da terna e quina da Quina, então o evento só pode ser satisfeito de um modo, que é o acerto da Quina, logo $P(A \cap C) = \frac{1}{24.040.016}$, conseqüentemente se obtém $P(A|C) = \frac{1}{27.750}$.

O segundo problema será resolvido por $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) = \frac{375}{24.040.016} = \frac{1}{64.106}$, fazendo o cálculo $P(A \cap B)$, o evento $A \cap B$ representa acerto da quadra e quina da Quina, logo o evento só pode ser satisfeito de um modo, que é o acerto da Quina, logo $P(A \cap B) = \frac{1}{24.040.016}$, assim $P(A|B) = \frac{1}{375}$.

A resolução do terceiro problema será por $P(F|H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)}$, mas $P(H) = \frac{21.465}{50.063.860} = \frac{1}{2.332}$, agora o cálculo $P(F \cap H)$ deve ser feito, é importante notar que o evento $F \cap H$ significa acerto da quadra e acerto da sena da Mega-Sena, então o evento só pode ser satisfeito de um modo, que é o acerto da sena, logo $P(F \cap H) = \frac{1}{50.063.860}$, conseqüentemente se obtém $P(F|H) = \frac{1}{21.465}$.

O quarto problema pode ser resolvido por $P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$, mas $P(G) = \frac{324}{50.063.860} = \frac{1}{154.518}$, agora o cálculo $P(F \cap G)$ deve ser feito, é importante notar que o evento $F \cap G$ significa acerto da quina e da sena da Mega-Sena, então o evento só pode ser satisfeito de um modo, que é o acerto da sena da Mega-Sena, logo $P(F \cap G) = \frac{1}{50.063.860}$, conseqüentemente se obtém $P(F|G) = \frac{1}{324}$.

Na subseção seguinte, serão geradas sequências aleatórias por meio dos métodos dos Quadrados Médios e Congruente Linear Multiplicativo.

2.3 Métodos de Geração de Números Aleatórios

O estudo das congruências será importante, para desenvolver a geração de números aleatórios. Em Hefez, [5] encontra-se:

Definição 2.2. *Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , podemos escrever: $a \equiv b \pmod{m}$.*

Exemplos de aplicação da definição acima:

Exemplo 2.1. *Temos $33 \equiv 13 \pmod{10}$, pois os restos da divisão de 33 e 13 por 10 são iguais a 3.*

Exemplo 2.2. *Logo $247 \equiv 22 \pmod{5}$, já que os restos da divisão de 247 e 22 por 5 são iguais a 2.*

Exemplo 2.3. *Então $10009 \equiv 19 \pmod{10}$, pois os restos da divisão de 10009 e 19 por 10 são iguais a 9.*

A seguinte proposição é também encontrada em Hefez, [5]:

Proposição 2.1. *Sejam a, b, c, m números naturais, com $c \neq 0$ e $m > 1$. Temos que:*

$$ac \equiv (bc) \pmod{m} \iff a \equiv (b) \pmod{k}, \quad (4)$$

sendo k o quociente de m pelo mdc entre c e m .

Vamos agora expor três exemplos muito importantes com o uso da proposição 2.1., eles irão nos ajudar a explicar os resultados que aparecerão nos exemplos 2.11 e 2.13:

Exemplo 2.4. *Então é verdade que $27 \equiv 90 \pmod{63}$, pois é possível reescrever a expressão como $3 \cdot 9 \equiv (10 \cdot 9) \pmod{63}$, conforme (4) temos $3 \equiv (10) \pmod{7}$, já que 7 é o $\text{mdc}(63, 9)$.*

Exemplo 2.5. *Temos também que $81 \equiv 270 \pmod{63}$, pois podemos reescrever a expressão como $3 \cdot 27 \equiv (10 \cdot 27) \pmod{63}$, usando (4) obtemos $3 \equiv (10) \pmod{7}$, com 7 igual ao $\text{mdc}(63, 9)$.*

Exemplo 2.6. *Por fim considere o caso $45 \equiv 108 \pmod{63}$, reescrevendo como $5 \cdot 9 \equiv (12 \cdot 9) \pmod{63}$, devido a (4) temos $5 \equiv (12) \pmod{7}$, pois o $\text{mdc}(63, 9) = 9$.*

Uma sequência pode ser gerada com um dado, para ilustrar isso considere o lançamento de um dado não viciado: não importa se o último valor foi 1,2,3,4,5 ou 6, o próximo valor tem a mesma chance de ser 1,2,3,4,5 ou 6. Independente do número de vezes que obtem-se cada resultado, o próximo lançamento é imprevisível. Quando o dado é viciado, o resultado de obtenção de um número em um lançamento continua imprevisível, embora as chances de ocorrência das faces não sejam as mesmas.

Neste trabalho iremos usar o Método Congruente Linear Multiplicativo e o Método dos Quadrados Médios na geração de números aleatórios.

O Método Congruente Linear Multiplicativo foi introduzido por D.H. Lehmer em 1948, segundo Knuth [6] ; neste algoritmo os números aleatórios estão sujeitos a critérios iniciais, são gerados sucessivamente por recorrências pela equação:

$$X_{n+1} \equiv (aX_n + b) \pmod{m} \quad (5)$$

Na equação (5) temos a **semente** representada por X_n ; isto é, um valor inicial que é usado para começar a sequência. A sequência se inicia de forma diferente se usarmos novas **sementes**; na realidade, a **semente** mostra em que posição da sequência o gerador congruente começará. Iniciado sempre com a mesma **semente**, obtem-se sempre os mesmos números gerados, exatamente na mesma ordem.

Em (5), a é o termo multiplicativo e b é o termo aditivo. Se $b \neq 0$, o gerador é denominado de misto, se $b = 0$ o gerador é chamado de multiplicativo. A quantidade de valores distintos gerados será $m-1$.

Uma das preocupações na geração de sequência pelo Método Congruente Linear Multiplicativo, é a escolha das constantes a e m . Não é uma tarefa simples, e não é suficiente escolher quaisquer valores achando que, com isso, tem-se um gerador perfeito de números aleatórios. Aconselha-se a leitura de Knuth [6], pois ele descreve estratégias para a obtenção de valores adequados para estes parâmetros, e toda a teoria matemática em questão.

Exemplo 2.7. Escolhendo os valores $m = 3$, $a = 2$ e $b = 0$ e $X_0 = 10$, obtemos de(5):

$$X_1 = 2 \cdot 10 \pmod{3} \Rightarrow X_1 = 2 \pmod{3}$$

$$X_2 = 2 \cdot X_1 \text{ mod } 3 \Rightarrow X_2 = \mathbf{1} \text{ mod } 3$$

$$X_3 = 2 \cdot X_2 \text{ mod } 3 \Rightarrow X_3 = \mathbf{2} \text{ mod } 3$$

$$X_4 = 2 \cdot X_3 \text{ mod } 3 \Rightarrow X_4 = \mathbf{1} \text{ mod } 3$$

$$X_5 = 2 \cdot X_4 \text{ mod } 3 \Rightarrow X_5 = \mathbf{2} \text{ mod } 3$$

$$X_6 = 2 \cdot X_5 \text{ mod } 3 \Rightarrow X_6 = \mathbf{1} \text{ mod } 3$$

Então a sequência de números aleatórios é (2, 1, 2, 1, 2, 1). Só obtemos dois valores pois o valor de m da equação (5) foi 3, como a quantidade de valores esperados é $m-1$, logo está de acordo com a condição sobre m .

Exemplo 2.8. Escolhendo os valores $m = 7$, $a = 3$, $b = 0$ e $X_0 = 5$, tem-se de (5):

$$X_1 = 3 \cdot 5 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_1 = \mathbf{1} \text{ mod } 7$$

$$X_2 = 3 \cdot X_1 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_2 = \mathbf{3} \text{ mod } 7$$

$$X_3 = 3 \cdot X_2 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_3 = \mathbf{2} \text{ mod } 7$$

$$X_4 = 3 \cdot X_3 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_4 = \mathbf{6} \text{ mod } 7$$

$$X_5 = 3 \cdot X_4 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_5 = \mathbf{4} \text{ mod } 7$$

$$X_6 = 3 \cdot X_5 \text{ mod } 7 \Rightarrow X_6 = 5 \text{ mod } 7$$

A sequência gerada de números aleatórios é (1, 3, 2, 6, 4, 5). A quantidade de valores é $m-1$, neste caso $m=7$, então eram esperados seis valores.

Agora será apresentado o **Método dos Quadrados Médios**, este método foi desenvolvido por John Von Neumann na década de 40, segundo Santos [7] foi um dos primeiros métodos de geração de números aleatórios.

O processo tem início com um número chamado de semente. O número é então elevado ao quadrado e os dígitos centrais do número gerado formam o próximo número da sequência. Este segundo número é então elevado ao quadrado e os dígitos centrais do número gerado formam o próximo número da sequência. Este terceiro número é então elevado ao quadrado e os números centrais do número gerado são o próximo número da sequência e assim processo o continua. Santos [7] aponta dois pontos fracos no Método dos Quadrados Médios, que são: normalmente os períodos são curtos e se o número gerado é zero, o método só apresenta zero.

Exemplo 2.9. *Gerar uma sequência de cinco números aleatórios de 2 dígitos pelo Método dos Quadrados Médios, considerando como semente o número 94.*

$$94^2 = 8836 \Rightarrow 83.$$

$$83^2 = 6889 \Rightarrow 88.$$

$$88^2 = 7744 \Rightarrow 74.$$

$$74^2 = 5476 \Rightarrow 47.$$

$$47^2 = 2209 \Rightarrow 20.$$

Exemplo 2.10. Gerar, pelo Método dos Quadrados Médios, três números aleatórios de 4 dígitos tendo 3187 como semente.

$$3187^2 = 10156969 \Rightarrow 1569.$$

$$1569^2 = 02461761 \Rightarrow 4617.$$

$$4617^2 = 21316689 \Rightarrow 3166.$$

A subseção seguinte é uma aplicação dos Métodos de Congruência Linear e Quadrados Médios, para geração de exemplos de apostas para Mega-Sena e a Quina.

2.4 Aplicações

Exemplos de geração aleatória para Mega-Sena.

Exemplo 2.11. Considere o gerador Congruente Linear com $m = 63$, $a = 3$, $b = 0$ e $X_0 = 9$, usando-se (5) tem-se os seguintes resultados:

$$X_1 = 3 \cdot X_0 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_1 = \mathbf{27} \text{ mod } 63$$

$$X_2 = 3 \cdot X_1 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_2 = \mathbf{18} \text{ mod } 63$$

$$X_3 = 3 \cdot X_2 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_3 = \mathbf{54} \text{ mod } 63$$

$$X_4 = 3 \cdot X_3 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_4 = \mathbf{36} \text{ mod } 63$$

$$X_5 = 3 \cdot X_4 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_5 = \mathbf{45} \text{ mod } 63$$

$$X_6 = 3 \cdot X_5 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_6 = \mathbf{9} \text{ mod } 63$$

Continuando o processo chega-se a um período de 62 números que aparecerão até ocorrer uma repetição novamente, como só convém os seis primeiros números para uma aposta mínima, desde que não ultrapassem o valor de 60, são eles: **(27, 18, 54, 36, 45, 9)**.

Exemplo 2.12. *Considere o gerador Congruente Linear com $m = 63$, $a = 3$, $b = 2$ e $X_0 = 9$, usando-se (5) tem-se os seguintes resultados:*

$$X_1 = (3 \cdot X_0 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_1 = \mathbf{29} \text{ mod } 63$$

$$X_2 = (3 \cdot X_1 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_2 = \mathbf{26} \text{ mod } 63$$

$$X_3 = (3 \cdot X_2 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_3 = \mathbf{17} \text{ mod } 63$$

$$X_4 = (3 \cdot X_3 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_4 = \mathbf{53} \text{ mod } 63$$

$$X_5 = (3 \cdot X_4 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_5 = \mathbf{35} \text{ mod } 63$$

$$X_6 = (3 \cdot X_5 + 2) \text{ mod } 63 \Rightarrow X_6 = \mathbf{44} \text{ mod } 63$$

Os números são: **(17, 26, 29, 35, 44, 53)**.

Exemplo 2.13. *Considere o gerador Congruente Linear com $m = 63$, $a = 5$, $b = 0$ e $X_0 = 9$, usando-se (5) tem-se os seguintes resultados:*

$$X_1 = 5 \cdot X_0 \bmod 63 \Rightarrow X_1 = \mathbf{45} \bmod 63$$

$$X_2 = 5 \cdot X_1 \bmod 63 \Rightarrow X_2 = \mathbf{36} \bmod 63$$

$$X_3 = 5 \cdot X_2 \bmod 63 \Rightarrow X_3 = \mathbf{54} \bmod 63$$

$$X_4 = 5 \cdot X_3 \bmod 63 \Rightarrow X_4 = \mathbf{18} \bmod 63$$

$$X_5 = 5 \cdot X_4 \bmod 63 \Rightarrow X_5 = \mathbf{27} \bmod 63$$

$$X_6 = 5 \cdot X_5 \bmod 63 \Rightarrow X_6 = \mathbf{9} \bmod 63$$

Vale ressaltar que a sequência é composta pelos mesmos números do exemplo 2.10, que são: **(27, 18, 54, 36, 45, 9)**. A explicação para esse fato leva em consideração a proposição 2.1. e os exemplos que foram dados referentes a esta proposição.

Exemplo 2.14. *Gerar uma sequência de seis números aleatórios de 2 dígitos para uma aposta da Mega-Sena pelo Método dos Quadrados Médios, considerando como semente o número 46.*

$$46^2 = \mathbf{2116} \Rightarrow 11.$$

$$11^2 = \mathbf{0121} \Rightarrow 12.$$

$$12^2 = \mathbf{0144} \Rightarrow 14.$$

$$14^2 = \mathbf{0196} \Rightarrow 19.$$

$$19^2 = 0361 \Rightarrow 36.$$

$$36^2 = 1296 \Rightarrow 29.$$

O método foi feito até 6 números, que são: **(11, 12, 14, 19, 36, 29)**.

Exemplos de geração aleatórias para Quina.

Exemplo 2.15. Gerar uma sequência pelo Método de Congruência Linear fazendo $m = 63$, $a = 12$, $b = 0$ e uma semente $X_0 = 19$ em (5).

$$X_1 = 12 \cdot X_0 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_1 = \mathbf{39} \text{ mod } 63$$

$$X_2 = 12 \cdot X_1 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_2 = \mathbf{27} \text{ mod } 63$$

$$X_3 = 12 \cdot X_2 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_3 = \mathbf{9} \text{ mod } 63$$

$$X_4 = 12 \cdot X_3 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_4 = \mathbf{45} \text{ mod } 63$$

$$X_5 = 12 \cdot X_4 \text{ mod } 63 \Rightarrow X_5 = \mathbf{36} \text{ mod } 63$$

O processo foi feito até encontrarmos 5 números, o suficiente fazer uma aposta mínima. São eles: **(39, 27, 09, 45, 36)**.

Exemplo 2.16. Gerar uma sequência de cinco números aleatórios de 2 dígitos para uma aposta da Quina pelo Método dos Quadrados Médios, considerando como semente o número 93.

$$93^2 = 8649 \Rightarrow 64.$$

$$64^2 = 4096 \Rightarrow 9.$$

$$9^2 = 0081 \Rightarrow 8.$$

$$8^2 = 0064 \Rightarrow 6.$$

$$6^2 = 0036 \Rightarrow 3.$$

O método foi feito até a obtenção de 5 números. São eles: **(64, 9, 8, 6, 3)**.

3 Conclusão

Ao aplicar as noções de Probabilidade nos jogos Quina e Mega-Sena concluímos que os valores de aumento das apostas da Quina não seguem os valores esperados comparados com a aposta simples e aumento de probabilidades, o que foi reforçado com apresentação de cálculos e gráfico. Já a Mega-Sena no que refere aos aumentos de valores das apostas, comparadas com aposta simples e o aumento de probabilidades, comporta-se da maneira esperada, conforme os cálculos e gráficos apresentados.

O trabalho termina com aplicações de Congruência, com o Método Congruente Linear Multiplicativo e Método dos Quadrados Médios, usados na geração de sequências pseudo aleatórias para a Quina e Mega-Sena, algo que enriqueceu muito o texto, pois mostramos os cálculos envolvidos, geralmente os programas computacionais existentes no mercado apenas geram a sequências, não tendo a preocupação de mostrar como foram feitos os cálculos.

Espero que este trabalho contribua com o ensino de probabilidade, como um texto auxiliar no que se refere a jogos lotéricos, pois apresentamos cálculos relevantes sobre a Quina e a Mega-Sena. Redigir esse texto foi algo muito gratificante. Fica a esperança que qualquer leitor que tenha contato com o trabalho sinta-se motivado a prosseguir com esse estudo, pois creio que esse texto pode ser útil a alunos do ensino básico e médio que buscam um pouco mais de conhecimento.

Referências

- [1] **EYES, Howard, John K.** *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: 10ª edição, Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [2] **MORGADO, Augusto César de Oliveira** *Análise Combinatória e Probabilidade, Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro:SBN, 2004.
- [3] **CANTON, Ana Maria** *A Rede Lotérica no Brasil* . Brasília: Ipea, 2010.
- [4] sítio da CAIXA (www.caixa.gov.br/loterias)
- [5] **HEFEZ, Abramo** *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: 2ª edição, SBM, 2011.
- [6] **KNUTH, Donald E.** *The Art of Computer Programming*. Second Edition. Stanford University, Volume 2, 1981.
- [7] **SANTOS, Maurício Pereira** *Introdução à Simulação Discreta*. Rio de Janeiro: Departamento de Matemática Aplicada e Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO,1999.
- [8] **ASSIS, Machado de** *A Semana, [1894]* In *COUTINHO, Afrânio (org.). Machado de Assis: Obra Completa, 9ª edição, volume III, página 741, Rio de Janeiro: Nova Aguilar 1994.*