UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Izabela Caroline Rossi

Aprendendo Isometria com Mosaicos

São José do Rio Preto
2014

Izabela Caroline Rossi

Aprendendo Isometria com Mosaicos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
2014

Rossi, Izabela Caroline.
Aprendendo isometria com mosaicos / Izabela Caroline Rossi. -- São José do Rio Preto, 2014
67 f. : il.

Orientador: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Isometria (Matemática) - Estudo e ensino. 4. Geometria plana. 5. Mosaicos (Matemática) 6. Matemática – Metodologia. I. Morgado, Michelle Ferreira Zanchetta. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Izabela Caroline Rossi

Aprendendo Isometria com Mosaicos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCAR – São Carlos

São José do Rio Preto
04 de dezembro de 2014

Dedico este trabalho

Aos meus pais, que sempre me apoiaram e me deram forças para meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força quando mais precisei.

À minha orientadora Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado pela dedicação, paciência e colaboração.

Aos meus amados pais, Beto e Suely, por terem sempre acreditado na minha capacidade e sentirem orgulho de mim.

À minha família e amigos que tiveram paciência quando deixei de sair com eles para ficar estudando em casa.

Ao meu “grude” Milena que tive que deixar alguns momentos com ela para poder estudar .

Aos meus colegas do curso, principalmente Elaine e Rosana, que não me deixaram desistir quando estava desanimada.

À minha amada escola E.E. José Florêncio do Amaral e todos que fazem parte dela, pela compreensão e por terem me apoiado nesses anos.

Ao Profmat, pela oportunidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Deus nunca nos dá problemas cujas soluções não estão ao nosso alcance!”

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de atividades voltadas ao ensino de isometria utilizando mosaicos, em especial os mosaicos de Escher, que são resultados de pavimentações do plano que possuem um certo padrão. É uma maneira diferenciada de ensinar o conteúdo, pois ao invés de apenas usar o método tradicional de ensino, utiliza materiais diferenciados e lúdicos, além de recursos computacionais, que tornam a aula muito mais atraente e motivadora, fazendo com que o aluno sinta mais interesse em participar das atividades e auxiliando na sua aprendizagem.

Palavras-chave: Isometria. Pavimentação. Mosaico.

ABSTRACT

This work presents a proposal of activities aimed at teaching isometry using mosaics, especially the Escher's mosaics, which are results of pavings of the plane that have a certain pattern. It's a different way of teaching content, because instead of just using the traditional method of teaching, uses differentiated and playful materials, in addition to computing resources, which make much more attractive and motivating classroom, making the student feel more interest in participating in activities and assisting in his learning.

Keywords: Isometry. Paving. Mosaic

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da geometria tem despertado o interesse de educadores matemáticos, pois apesar de ser uma área de grande importância para os cidadãos, ela não tem tido a atenção merecida nas escolas. Além de estar quase ausente nos PCNs, pois só é vista nos finais dos anos letivos, tanto no Ensino Fundamental como no Médio, os professores trabalham apenas com definições e fórmulas, deixando de contextualizá-la.

Segundo Lorenzato:

> No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles Peres (1991) e Pavanelo (1993), confirmam essa lamentável realidade educacional. E por que essa omissão? São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas.
> ... A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos (LORENZATO, 1995, p.3-4).

Atualmente, propostas curriculares nacionais e estaduais vem sendo construídas, discutindo sobre quais conteúdos devem ser ensinados e o assunto que mais preocupa os educadores matemáticos sobre como ensinar é a geometria.

Uma perspectiva de investigações em geometria refere-se às pesquisas que apresentam sugestões ou propostas metodológicas para o seu ensino. Andrade & Nacarato (2004) apontam que o movimento de busca pelo resgate do ensino da geometria, por meio de novas estratégias e abordagens educativas, resulta na emergência de tendências didático-pedagógicas de pesquisa, como a experimental e a de ambientes computacionais. Os autores também destacam o considerável número de estudos envolvendo atividades que buscam valorizar situações cotidianas mediante a visualização e representação de objetos.

A geometria dá oportunidade ao professor para que ele ensine o conceito concretamente, além de disponibilizar inúmeros materiais e atividades diversificadas para a aprendizagem, basta apenas que o docente tenha interesse e criatividade para buscar esses recursos.

Uma maneira de contextualizar um conteúdo de matemática é relacioná-lo com a arte, visto que a arte está presente em nossa vida de diferentes formas.

Read afirma que:

> [...] a arte é uma dessas coisas que, como o ar e o solo, estão por toda nossa volta, mas que raramente nos detemos para considerar. Pois a arte não é apenas algo que encontramos nos museus e nas galerias de arte, ou em antigas cidades como Florença e Roma. A arte seja lá como a definimos, está presente em tudo o que fazemos para satisfazer nossos sentidos (READ, 2001, p.16).

Na direção de relacionar geometria com a arte, vamos abordar neste trabalho o ensino de isometria através de mosaicos, para que o aluno possa perceber que o conhecimento teórico deste conceito está presente em coisas do seu cotidiano.

> O estudo da Geometria ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo. A simetria, por exemplo, proporciona oportunidades para os alunos visualizarem a geometria no mundo da arte ou na natureza. Neste domínio, a exploração de conceitos e padrões geométricos pode criar situações muito interessantes para os alunos (ESTUDOS COMPLEMENTARES-AVA 2000: análise da resolução de questões de matemática. p. 44).

A escolha do assunto isometria surgiu através dos seguintes questionamentos: como ela vem sendo ensinada em nossas escolas? Ela está relacionada com outros assuntos matemáticos? O que seu ensino/aprendizagem possibilita?

Levando em consideração esses questionamentos, buscamos sugerir algumas atividades que trabalham com isometrias/simetrias em obras do artista Escher, que são tipos específicos de mosaicos obtidos de pavimentações do plano com polígonos regulares e irregulares. Estas atividades utilizam materiais concretos para manuseio dos alunos, recursos computacionais e a aplicação de um jogo, no intuito de proporcionar uma aula que desperte mais o interesse dos alunos e consequentemente, melhore o processo ensino-aprendizagem.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: iniciamos com uma fundamentação teórica sobre os conceitos a serem utilizados nas atividades; em seguida, apresentamos a proposta de atividades divididas em três partes, de maneira sequencial, onde cada atividade fornece conhecimento para a realização da próxima; finalizamos com a nossa expectativa dos resultados a serem alcançados.

Por uma coincidência, na mesma época em que este trabalho estava sendo feito houve uma exposição sobre a vida e a obra do artista Escher, que é conhecido mundialmente pelos trabalhos que exploram efeitos óticos, de espelhamento e de ilusões, no Shopping Iguatemi na cidade de São José do Rio Preto. Assim, podemos conhecer mais de perto suas obras e ver como muitas pessoas que nunca viram seus trabalhos ficarem admiradas com tanta beleza, sem perceberem quanta matemática há em tudo aquilo. Abaixo estão algumas fotos que foram tiradas na exposição “Experiência Escher”.

Figura 1: Exposição “Experiência Escher”

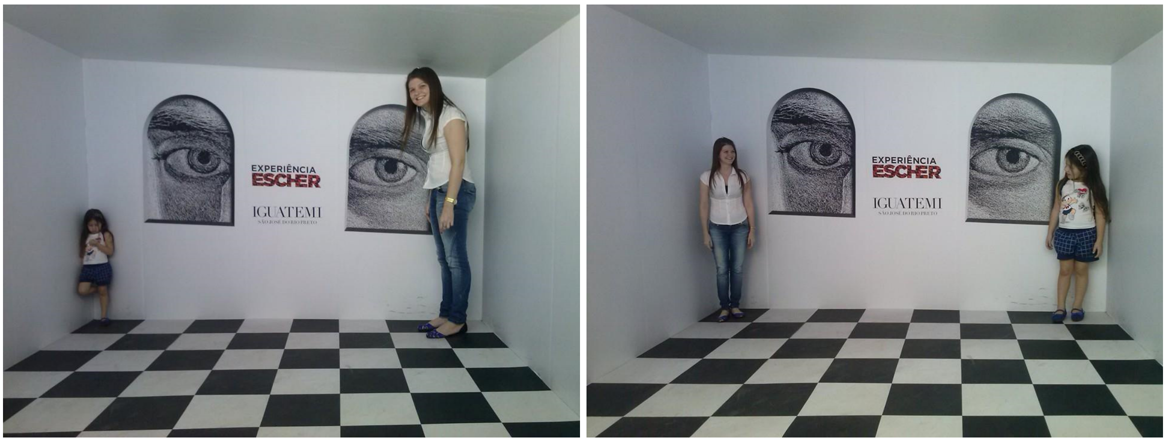


Figura 2: Sala da Relatividade

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns conteúdos necessários para a realização das atividades propostas. Assumimos conhecidos os conceitos de Geometria Euclidiana Plana, porém alguns deles serão definidos para entender sua descrição analítica e também no intuito de fixar notações.

Inicialmente, abordamos o plano euclidiano de maneira analítica. Em seguida, estudamos o conceito e os tipos de isometria no plano, contextualizando este conceito no estudo de funções. Para finalizar, falamos sobre pavimentação, onde são abordadas as pavimentações com polígonos regulares de um só tipo e de tipos diferentes; e sobre mosaicos, que são resultados das pavimentações, dando destaque aos mosaicos de Escher.

1.1. PLANO EUCLIDIANO

Em Geometria Euclidiana Plana, pontos e retas são considerados elementos primitivos da teoria, termos indefinidos, cujo comportamento se baseia em postulados. O plano euclidiano é visto como o conjunto em que os pontos são os elementos e as retas são seus subconjuntos.

Analiticamente, o plano euclidiano é identificado com o conjunto $\mathrm{R}^2 = \{\mathrm{A} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{R}\}$, onde R é o conjunto dos números reais e cada ponto do plano euclidiano é escrito na forma (x, y).

Definição 1.1.1. Uma **métrica** em R^2 é uma função $\mathrm{d}: \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}$, que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{R}^2$:

i. $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = 0$;
ii. Se $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ então $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) > 0$;
iii. $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$;
iv. $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$.

Se d é uma métrica em R^2 então $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ é chamada de **distância** entre os pontos A e B.

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz em R^2) Se x_1, x_2, y_1, y_2 são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^{2} |x_i\, y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demonstração:

A desigualdade $2rs \leq r^2 + s^2$ é verdadeira para quaisquer $r, s \in \mathrm{R}$ uma vez que $(r-s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$. Assim, se fizermos $p = \sqrt[2]{x_1^2 + x_2^2}$ e $q = \sqrt[2]{y_1^2 + y_2^2}$, é verdadeira a relação

$$2.\frac{|x_i|}{p}\frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2}, \qquad \forall\, i = 1{,}2.$$

Somando em relação ao índice i, obtemos

$$\frac{2}{pq}\sum_{i=1}^{2}|x_i\, y_i| \leq 1 + 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2}|x_i\, y_i| \leq pq = \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \blacksquare$$

Proposição 1.1.3. A função $d: \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, dada por $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, onde $A = (x_1, y_1) \in \mathrm{R}^2$ e $B = (x_2, y_2) \in \mathrm{R}^2$, é uma métrica em R^2.

Demonstração:

i) $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0.$

Como $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ e $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$, então $(x_1 - x_2)^2 = 0$ e $(y_1 - y_2)^2 = 0$. Assim, $x_1 - x_2 = 0$ e $y_1 - y_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, o que implica $A = B$. Portanto, $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

ii) Se $A \neq B$, então $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$.

Supondo $x_1 \neq x_2$, temos $x_1 - x_2 \neq 0$, o que resulta $(x_1 - x_2)^2 > 0$. Logo, $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} > 0$, ou seja, $d(A, B) > 0$.

A demonstração é análoga para $y_1 \neq y_2$.

iii) Sabemos que $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ e $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$.
Assim, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, o que implica
$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ou seja, $d(A,B) = d(B,A)$.

iv) Seja $C = (x_3, y_3)$.

$$[d(A,C)]^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = (x_1 - x_2 + x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2 + y_2 - y_3)^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$$
$$+(y_2 - y_3)^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$[d(A,C)]^2 \leq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}} + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\right]^2 = [d(A,B) + d(B,C)]^2.$$

Assim, $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. ■

Consideremos a partir daqui R^2 munido da métrica da proposição anterior, que é a distância utilizada na Geometria Euclidiana.

Denotemos por $B(A,\varepsilon) = \{P \in R^2 \mid d(P,A) < \varepsilon\}$.

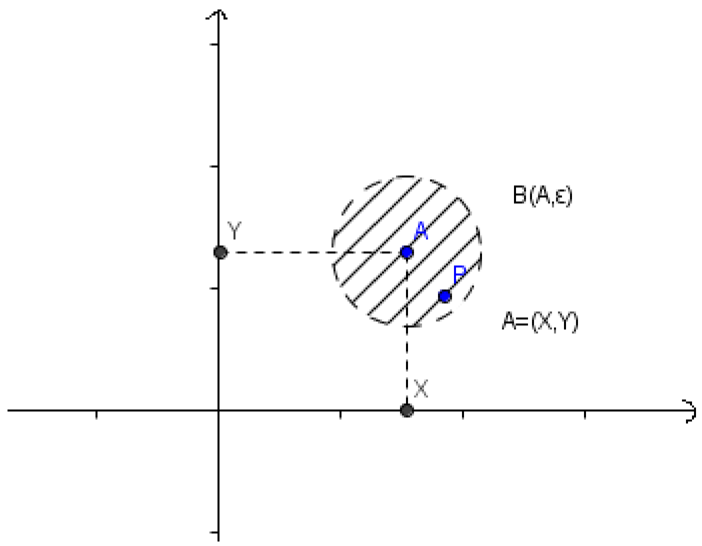


Figura 3: Bola aberta de centro A e raio ε

Definição 1.1.4. Dizemos que os pontos A, B e C do plano são **colineares** se vale uma das igualdades: $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ ou $d(B, C) = d(B, A) + d(A, C)$.

Notação: $A - B - C$ significa que $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ e dizemos que B está entre A e C.

Definição 1.1.5. Uma **reta** definida por dois pontos A e B no plano, denotada por $\overleftrightarrow{AB}$, é o conjunto formado pelos pontos C tais que A, B e C são colineares.

Definição 1.1.6. Um **segmento** com extremidades A e B no plano, denotado por $\overline{AB}$, é o conjunto formado pelos pontos A e B e os pontos C tais que C está entre A e B.

Definição 1.1.7. Uma **semirreta** com origem A contendo o ponto B no plano, denotada por $\overrightarrow{AB}$, é a união do segmento com extremidades A e B com o conjunto dos pontos C tais que B está entre A e C.

Definição 1.1.8. Uma **curva** em R^2 é uma aplicação $f: [a, b] \to R^2$, onde $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$, tal que para cada $t \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$|x - t| < \delta \Rightarrow f(x) \in B(f(t), \varepsilon), \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Dizemos que a curva f é **fechada** se $f(a) = f(b)$; e dizemos que uma curva é **simples** se f é injetiva em $]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$.

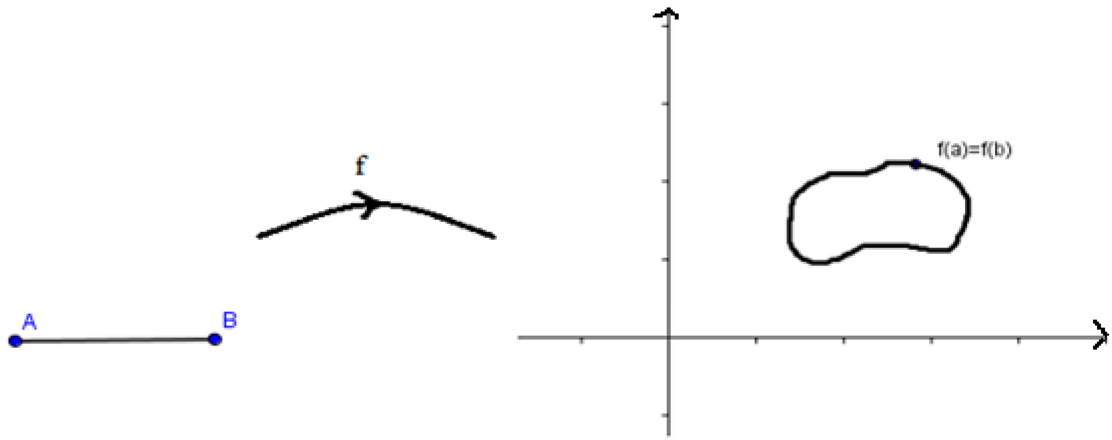


Figura 4: Curva

Exemplo 1.1.9. Considere $f: [-1,1] \to R^2$ dada por $f(t) = (t, at + b)$, $a, b \in R$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{|1+a|} > 0$ temos

$$|x-t| < \delta \Rightarrow (x-t)^2 < \delta^2 \Rightarrow (x-t)^2(1+a)^2 < \delta^2(1+a)^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$(x-t)^2 + (ax+b-(at+b))^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow f(x) \in B(f(t),\varepsilon).$$

Assim, f é uma curva. Ela não é fechada pois $f(-1) = (-1, b-a) \neq (1, a+b) = f(1)$. Além disso, $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow (t_1, at_1 + b) = (t_2, at_2 + b) \Rightarrow t_1 = t_2$, ou seja, f é injetiva. Portanto f é uma curva simples.

Observação 1.1.10. Um reta determinada pelos pontos A e B (distintos) é a imagem da aplicação $f: R \to R^2$ dada por $f(t) = (t, at+b)$, $a, b \in R$, com $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1), a = \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)}$ e $b = y_0 - \frac{(y_0 - y_1)}{(x_0 - x_1)} x_0$ $(\text{se } x_0 \neq x_1)$ ou $a = 1$ e $b = -x_0$ $(\text{se } x_0 = x_1)$. Além disso, cada segmento é a imagem de um intervalo por uma aplicação deste tipo.

Definição 1.1.11. Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:

(a) Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.

(b) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ é chamado **polígono,** o qual denotamos por polígono $A_1A_2 \dots A_n$.

Os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ são chamados *vértices* dos polígonos e os segmentos são seus *lados*.

Definição 1.1.12. Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um dos seus lados.

Proposição 1.1.13. Qualquer polígono convexo no plano euclidiano pode ser visto como a imagem de uma curva fechada e simples em R^2.

Demonstração:

Considere $P = A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo. Pela observação anterior basta considerar um intervalo $[a, b]$, particioná-lo em n partes $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$

com $a_0 = a$ e $a_n = b$, definindo para cada i uma aplicação $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to R^2$ tal que $f_i([a_i, a_{i+1}]) = \overline{A_i\, A_{i+1}}$. Assim, $f: [a, b] \to R^2$ dada por $f|_{[a_i, a_{i+1}]} = f_i$, para todo $i = 0, \dots, n$ é uma curva simples e fechada, com $f([a, b]) = P$. ■

Definição 1.1.14. Considere X a imagem de uma curva em R^2, ou seja, $X = f([a, b]) \in R^2$. O **interior** de X, denotado por $\dot{X}$, é o conjunto dos pontos A tais que existe $\varepsilon > 0$ com $B(A, \varepsilon) \subset X$.

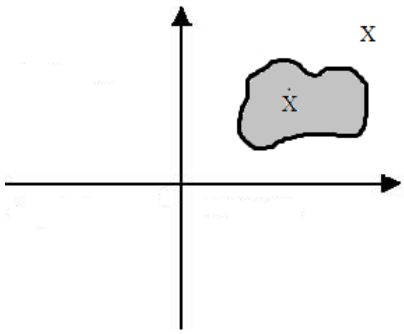


Figura 5: Imagem de uma curva e seu interior

Definição 1.1.15. Uma **figura plana** é a união da imagem de uma curva fechada em R^2 com o seu interior. Se a curva for simples, dizemos que é uma **figura plana simples**. No caso em que X é um polígono a figura plana associada é chamada de **região poligonal**.

1.2. ISOMETRIA

Nesta seção não precisamos da descrição analítica do plano euclidiano (correspondência com R^2). Por isso denotaremos o plano simplesmente por α.

Definição 1.2.1. Uma **transformação** T no plano α é uma função bijetora $T: \alpha \to \alpha$, isto é, uma função tal que:

a) A pontos distintos P e Q de α, T associa imagens distintas $T(P)$ e $T(Q)$ de α;
b) Para cada ponto P de α, existe um único ponto Q em α tal que $P = T(Q)$.

Se $\mathcal{F}$ é uma figura contida em α, a imagem de $\mathcal{F}$ pela transformação T é denotada por $T(\mathcal{F}) = \{T(P),\ P \in \mathcal{F}\}$.

Definição 1.2.2. Uma **isometria** é uma transformação no plano que preserva distância, isto é, se $\mathrm{T}: \alpha \to \alpha$ é uma isometria, para qualquer par de pontos A e B de α vale a relação $\mathrm{d}\big(\mathrm{T(A)}, \mathrm{T(B)}\big) = \mathrm{d(A, B)}$ ou, simplesmente, $\mathrm{T(A)T(B)} = \mathrm{AB}$.

Teorema 1.2.3. Uma isometria $\mathrm{T}: \alpha \to \alpha$ possui as seguintes propriedades:

a) T leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A, B e C são pontos tais que B está entre A e C, então $\mathrm{T(B)}$ está entre $\mathrm{T(A)}$ e $\mathrm{T(C)}$.
Como consequência, T leva retas em retas e leva ângulos em ângulos.

b) T preserva medidas de ângulos, ou seja, para qualquer ângulo θ, $\mathrm{m}\widehat{\mathrm{T}(\theta)} = \mathrm{m}\hat{\theta}$.
Em particular, T leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.

c) T preserva paralelismo entre retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $\mathrm{T(r)}$ e $\mathrm{T(s)}$ também são retas paralelas.

Demonstração:

a) Consideremos os pontos colineares A, B e C, tais que $\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C}$ e sejam A', B' e C' suas imagens pela isometria T.

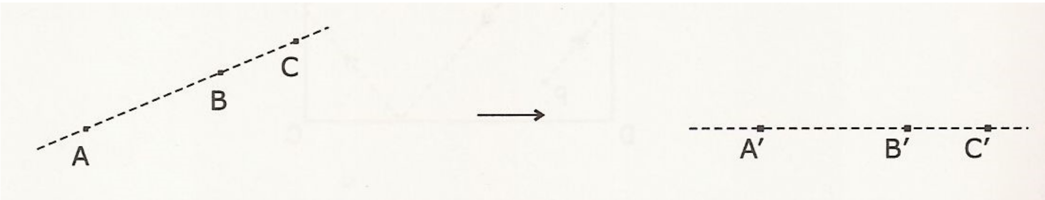


Figura 6: isometria preserva a colinearidades dos pontos

Se A', B' e C' não fossem colineares, então determinariam um triângulo, o triângulo $\mathrm{A'B'C'}$. Pelo Teorema da Desigualdade Triangular, obteríamos a relação $\mathrm{A'C'} < \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'C'}$. Como T é isometria, temos que $\mathrm{A'B'} = AB$, $\mathrm{A'C'} = AC$ e $\mathrm{B'C'} = BC$. Assim, $AC < \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$, que contradiria a hipótese $\mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C}$, que é equivalente a $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$.

Logo temos $\mathrm{A'B'} + \mathrm{B'C'} = \mathrm{A'C'}$. Portanto A', B' e C' são colineares e B' está entre A' e C'.

b) Consideremos o ângulo θ com vértice O e sua imagem $\widehat{\theta'} = \mathrm{T}(\widehat{\theta})$ um ângulo com vértice O'.

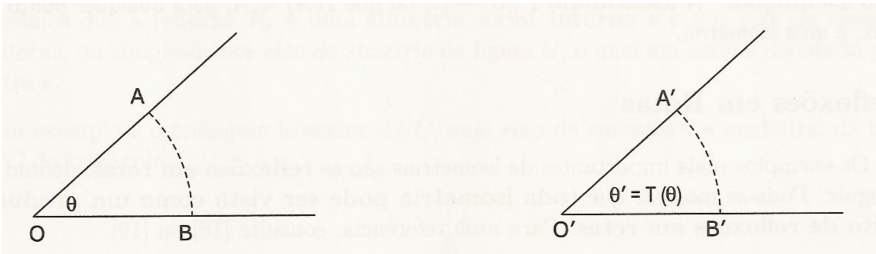


Figura 7: isometria preserva medida de ângulos

Escolhamos pontos A e B, um em cada lado de θ, tal que $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$. É claro que, se A' e B' são as imagens de A e B pela isometria T, temos $\mathrm{O'A'} = \mathrm{O'B'}$.

Ainda pela definição, temos $\mathrm{A'B'} = \mathrm{AB}$.

Logo, pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, os triângulos AOB e $\mathrm{A'O'B'}$ são congruentes, sendo congruentes portanto os ângulos θ e θ'.

c) Consideremos as retas paralelas r e s e suas imagens $\mathrm{r}' = \mathrm{T}(\mathrm{r})$ e $\mathrm{s}' = \mathrm{T}(\mathrm{s})$.

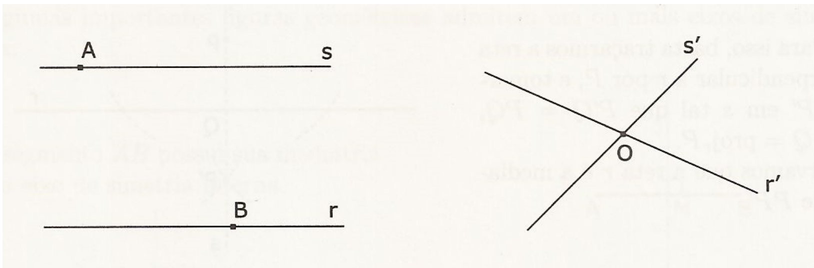


Figura 8: isometria preserva paralelismo de retas

Suponhamos, por absurdo, que as retas r' e s' sejam concorrentes no ponto O, com $\mathrm{O} = \mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}(\mathrm{B})$, sendo A ponto de s e B ponto de r. Isso contraria a definição de isometria visto que A e B são pontos distintos do plano. Logo r' e s' são retas paralelas.■

Definição 1.2.4. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de pontos no plano. Dizemos que $\mathcal{F}$ possui uma **simetria** se existe uma isometria T do plano que deixa $\mathcal{F}$ invariante, ou seja, $\mathrm{T}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Neste caso, $\mathrm{T}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ são ditos **simétricos**.

Observação 1.2.5. Pelo teorema anterior, se $\mathcal{F}$ é um polígono e G é seu simétrico, então G é um polígono congruente a $\mathcal{F}$.

Definição 1.2.6. Um **eixo de simetria** de um conjunto de pontos é uma reta que o divide em dois conjuntos que são simétricos.

Em um triângulo isósceles, a mediatriz da base do triângulo é seu único eixo de simetria.

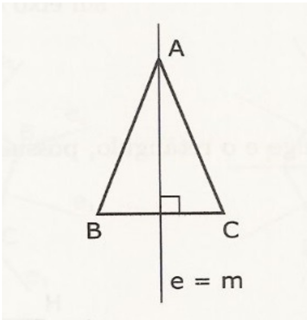
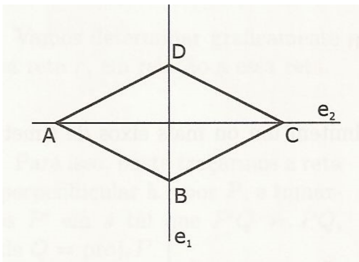


Figura 9: Simetria no triângulo isósceles

Já os losangos e os retângulos possuem dois eixos de simetria.



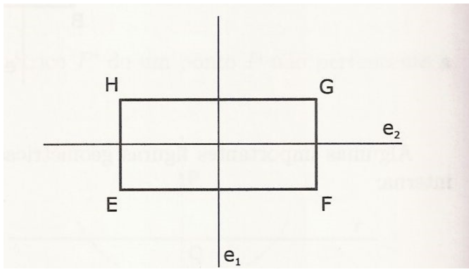


Figura 10: Simetria no losango e no retângulo

Analisar a simetria de um conjunto de pontos no plano é investigar se há isometrias que a deixam invariante. Vamos descrever os tipos de isometrias cujos conjuntos e suas imagens são simétricos.

1.3. TIPOS DE ISOMETRIA

Definição 1.3.1. Consideremos uma reta r. A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r, é chamada **reflexão** em torno da reta r, a qual vamos indicar por $\mathrm{R_r}$. A reta r é chamada eixo da reflexão de $\mathrm{R_r}$.

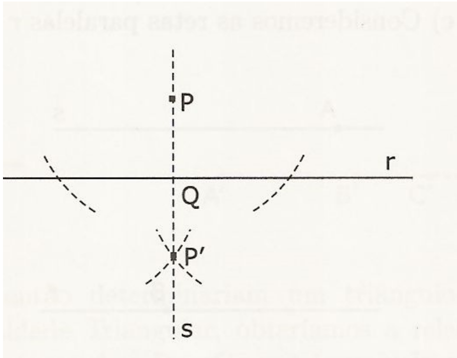


Figura 11: Reflexão do ponto P

Em outras palavras, a reflexão de um conjunto de pontos em torno de uma reta funciona como se r fosse um espelho e a imagem obtida por esta isometria fosse sua imagem no espelho. O conjunto e sua imagem são simétricos. Logo, r é o eixo de simetria entre o conjunto e sua imagem pela reflexão. Isso gera uma simetria chamada de **simetria de reflexão.**

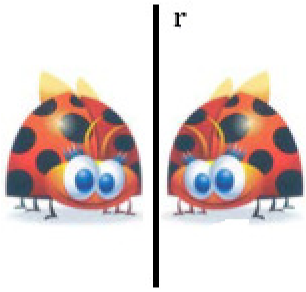


Figura 12: Simetria de reflexão

Definição 1.3.2. Sejam A e B pontos distintos do plano α. A **translação** determinada pelos pontos A e B, $\mathrm{T_{AB}}: \alpha \to \alpha$, é a isometria no plano α, que leva um ponto X de α no ponto $\mathrm{T_{AB}(X) = X'}$, tal que $\mathrm{ABX'X}$ é um paralelogramo, se $\mathrm{A, B}$ e X não são colineares. Se $\mathrm{A, B}$ e X são colineares, então $\mathrm{T_{AB}}$ é tal que $\overline{\mathrm{XX'}}$ está na reta AB e os segmentos $\overline{\mathrm{AX'}}$ e $\overline{\mathrm{BX}}$ tem o mesmo ponto médio.

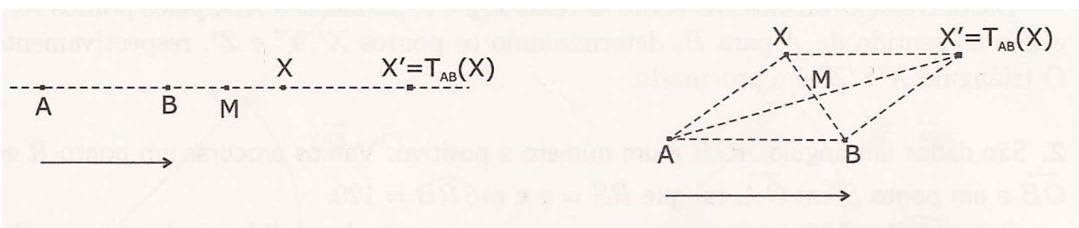


Figura 13: Translação do ponto X

Em outras palavras, a translação de um conjunto determinada pelos pontos A e B, admite como sua imagem um conjunto simétrico a ele deslocado na direção da reta determinada por A e B, onde $\mathrm{d}(\mathrm{X}, \mathrm{X}') = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ para todo ponto X no conjunto. Isso gera uma simetria chamada de **simetria de translação**.

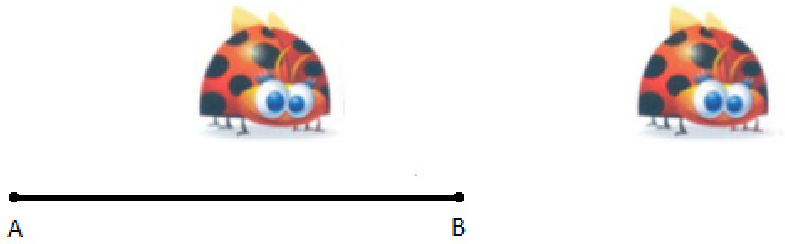


Figura 14: Simetria de translação determinada por A e B

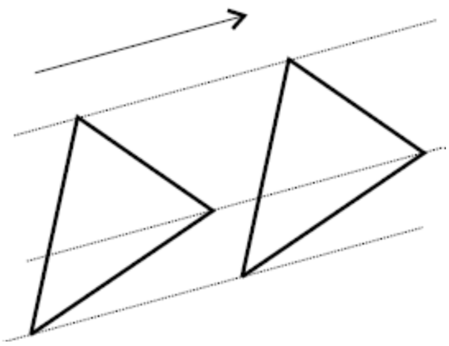


Figura 15: Figura deslocando-se ao longo de uma reta

Definição 1.3.3. Dizemos que um ângulo $\mathrm{B\hat{A}C}$ está **orientado** de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ para $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ se estabelecemos que a semirreta $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ é o lado inicial e a semirreta $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ é o lado final.

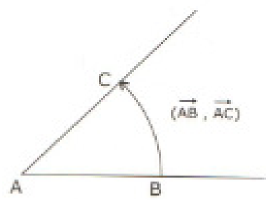


Figura 16: Ângulo orientado de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ para $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Notação: $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

Definição 1.3.4. Seja O um ponto do plano e θ um número real com $-180 < \theta \leq 180$. A **rotação** de centro O e ângulo θ é a isometria $\Delta_{0,\theta}: \alpha \to \alpha$, que deixa fixo o ponto O e leva cada ponto X de α, $\mathrm{X} \neq \mathrm{O}$, no ponto $\mathrm{X}' = \Delta_{0,\theta}(\mathrm{X})$, tal que $\mathrm{OX} = \mathrm{OX}'$ e a medida do ângulo orientado $(\overrightarrow{\mathrm{OX}}, \overrightarrow{\mathrm{OX}'})$ é igual a θ, se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $\mathrm{OX}' = \mathrm{OX}$, sendo O o ponto médio de $\overline{\mathrm{XX}'}$, se $\theta = 180$; e $\mathrm{X}' = \mathrm{X}$ se $\theta = 0$.

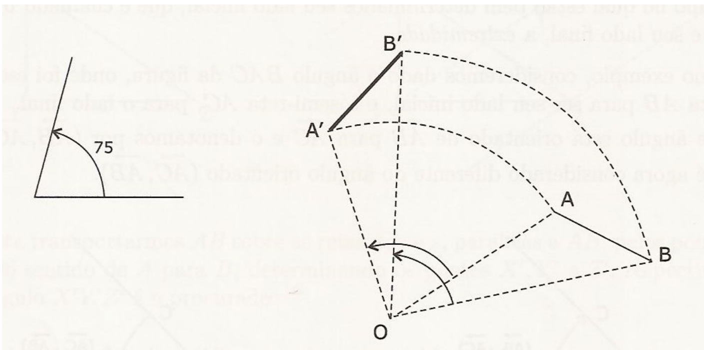


Figura 17: Rotação do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ com relação ao ponto O e ângulo de medida 75

Pela definição de rotação, a imagem de um conjunto de pontos é simétrico a sua imagem pela rotação. Assim, uma rotação gera uma simetria chamada de **simetria de rotação**.

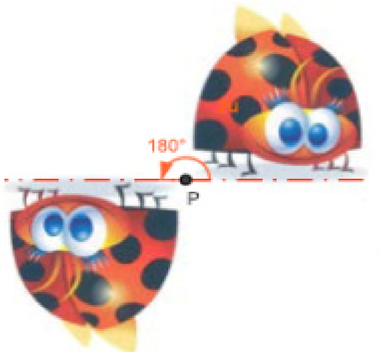


Figura 18: Simetria de rotação em torno do ponto 180 com ângulo medindo 180

Definição 1.3.5. Um conjunto de pontos $\mathcal{F}$ no plano possui uma **simetria de rotação** se existe um ponto O e ângulo θ tal que $\mathcal{F}$ coincida com a sua imagem pela rotação de centro O e ângulo θ. Neste caso dizemos que $\mathcal{F}$ possui **simetria θ-rotacional**.

Exemplo 1.3.6. O paralelogramo possui simetria 180-rotacional, pois coincide com sua imagem pela rotação de 180º ao redor de seu centro.

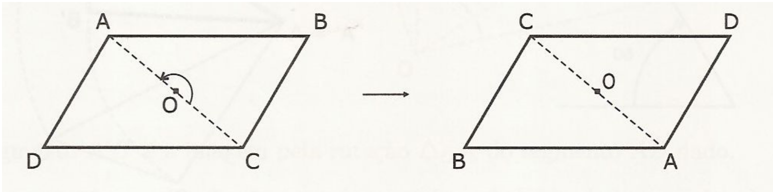


Figura 19: Simetria de rotação no paralelogramo

Da mesma forma, o quadrado possui simetria 90-rotacional.

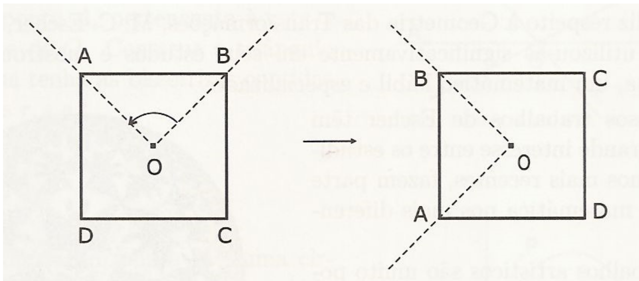


Figura 20: Simetria de rotação no quadrado

Observação 1.3.7. De maneira geral, todo polígono regular de n-lados possui simetria θ-rotacional, onde $\theta = \mathrm{i}\frac{360}{\mathrm{n}}$, i um número inteiro positivo, sendo $\mathrm{i} = 0, \dots, \frac{\mathrm{n}}{2}$ para n par, ou $\mathrm{i} = 0, \dots, \frac{\mathrm{n}-1}{2}$ para n ímpar.

1.4. ISOMETRIAS EM FUNÇÕES

O assunto isometria está inserido no estudo do gráfico de funções $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função pode apresentar muitos tipos de isometria ou nenhum. O conhecimento "a priori" das propriedades de isometria de uma função pode nos ajudar enormemente no traçado de seu gráfico: poderemos, por exemplo, determinar os valores de uma função em uma determinada zona do plano, conhecendo tão somente os valores que essa função assume na zona simétrica.

Definição 1.4.1. Dada uma função $\mathrm{f}: \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamamos de **gráfico** da função o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem a condição $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, ou seja, é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in D, y = f(x)\}.$$

Dada uma função $h: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos a função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = c\,h(dx + b) + a,\ \ a, b, c, d \in R$. Analisando o gráfico de h e o gráfico de f, obtemos as seguintes propriedades:

- O parâmetro aditivo a determina translação vertical nos gráficos das funções; no sentido positivo do eixo (para cima), se o valor do parâmetro for positivo e no sentido negativo do eixo (para baixo), se o valor do parâmetro for negativo;
- O parâmetro aditivo b determina translação horizontal nos gráficos das funções; no sentido positivo do eixo (para a direita), se o valor de b for negativo e no sentido negativo do eixo (para a esquerda), se seu valor for positivo;
- O parâmetro multiplicativo c provoca um esticamento vertical se seu valor for maior que 1; um encolhimento vertical se o valor do parâmetro estiver entre 0 e 1; um esticamento vertical composto com reflexão em relação ao eixo horizontal se seu valor for menor que -1 e, um encolhimento vertical composto com uma reflexão em relação ao eixo horizontal se seu valor estiver entre -1 e 0;
- O parâmetro multiplicativo d provoca um encolhimento horizontal se seu valor for maior que 1; um esticamento horizontal se seu valor estiver entre 0 e 1; um encolhimento horizontal composto por uma reflexão em relação ao eixo vertical se o valor do parâmetro for menor que -1 e, um esticamento composto com uma reflexão em relação ao eixo vertical se seu valor estiver entre –1 e 0.

Assim, concluímos que existem isometrias entre os gráficos de h e f. Consideremos alguns exemplos específicos.

Quando ensinamos funções trigonométricas no Ensino Médio, podemos explorar os efeitos desses parâmetros nas curvas, como mostra os exemplos abaixo:

Exemplo 1.4.2. Considere $h(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \operatorname{sen}(x - 1)$. Note que, na notação acima temos $a = 0, b = -1, c = d = 1$.

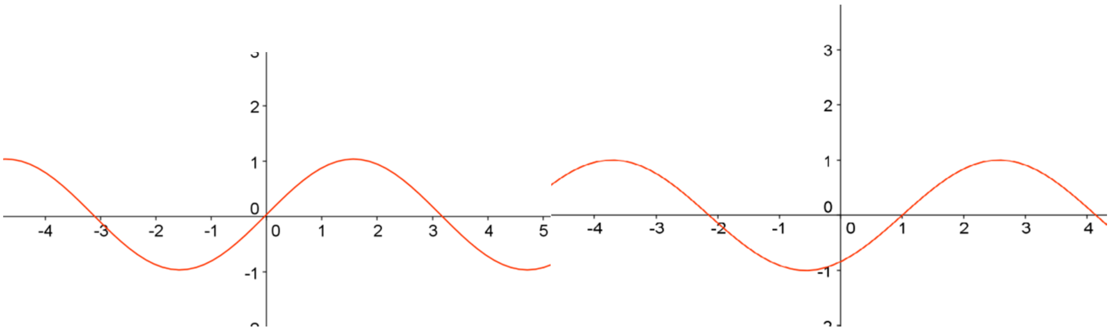


Figura 21: Gráficos das funções: $\mathrm{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{sen}\ \mathbf{x}$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{sen}\ (\mathbf{x} - \mathbf{1})$

Nesse caso, observamos uma translação horizontal no sentido positivo do eixo devido ao parâmetro aditivo -1, somado à variável da função.

Outros exemplos que também podem ser explorados são as chamadas função par e função ímpar.

Definição 1.4.3. Uma função $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada **par** se $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(-\mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4.4. Seja $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 3$. A função é par, pois $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = (-\mathrm{x})^2 - 3 = \mathrm{x}^2 - 3 = \mathrm{f}(\mathrm{x})$.

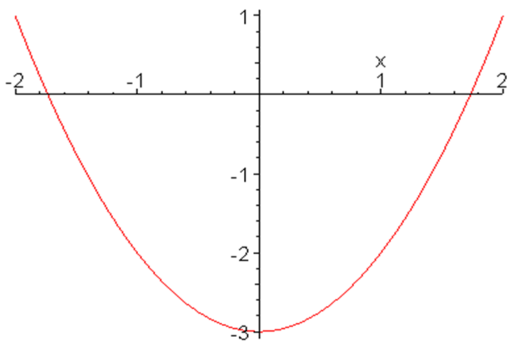


Figura 22: Gráfico da função $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{3}$

Observando o gráfico da função podemos ver que ele possui simetria em relação ao eixo y.

Definição 1.4.5. Uma função $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada **ímpar** se $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(-\mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4.6. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. A função é ímpar, pois $-f(-x) = -(-x)^3 = -(-x^3) = x^3 = f(x)$.

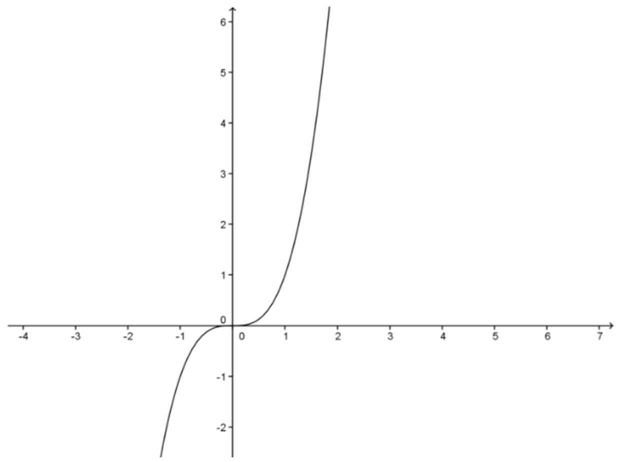


Figura 23: Gráfico da função $\mathbf{f(x) = x^3}$

É possível observar que o gráfico da função possui uma rotação em torno do ponto (0,0).

1.5. PAVIMENTAÇÃO

Definição 1.5.1. Uma **pavimentação** de um polígono P é uma subdivisão de P em um número finito de figuras planas simples tais que:

(1) P é a união de todas estas figuras planas simples;

(2) a interseção dos interiores de quaisquer duas destas figuras planas simples é vazia.

Dizemos que temos uma **pavimentação do plano** se dividirmos todo o plano euclidiano com as propriedades anteriores.

Observação 1.5.2. Quando todas as figuras planas simples de uma pavimentação forem regiões poligonais então o item (2) da definição é equivalente a dizer que a interseção de quaisquer duas regiões poligonais é um conjunto finito de pontos ou de segmentos de reta.

Definição 1.5.3. Consideremos uma pavimentação formada somente por regiões poligonais. Chamamos de **nós** de uma pavimentação os vértices dos polígonos desta pavimentação.

Buscamos entender a existência de planificação do plano com regiões poligonais regulares. O estudo está dividido em duas direções: primeiro com regiões poligonais regulares de um só tipo e, em seguida, de tipos diferentes.

Teorema 1.5.4. Se $\mathrm{F} = \{\mathrm{P_i}\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ é uma pavimentação do plano, onde $\mathrm{P_i}$ é uma região poligonal regular de n lados, para todo i, então $\mathrm{n} = 3, 4$ ou 6.

Demonstração:

Seja m o número de polígonos ao redor do ponto, nota-se que $m \geq 3$.

Se em um nó desta pavimentação aparecem m polígonos, então a soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice deve ser igual 360^0. Como a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado pela expressão $\frac{(\mathrm{n}-2)180}{\mathrm{n}}$, então $\mathrm{m}.\frac{(\mathrm{n}-2)180}{\mathrm{n}} = 360$, ou seja, $\mathrm{m} = \frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}-2}$. Como $\mathrm{m} \geq 3$, temos que $\mathrm{m} = \frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}-2} \geq 3$ e, com isso, $\mathrm{n} \leq 6$ $(\mathrm{n} = 3, 4, 5$ ou , $6)$.

Se $\mathrm{n} = 3$, então $\mathrm{m} = 6$. E assim é possível ter pavimentação como na figura abaixo.

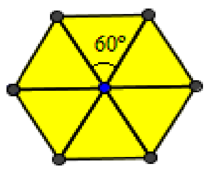


Figura 24: Pavimentação com triângulos equiláteros ao redor de um nó.

Se $\mathrm{n} = 4$, então $\mathrm{m} = 4$. Assim é possível ter pavimentação como na figura abaixo.

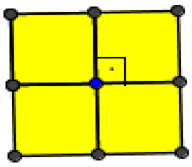


Figura 25: Pavimentação com quadrados ao redor de um nó.

Se $n = 5$, então $m = \frac{10}{3}$. Como m deve ser um inteiro, não é possível ter pavimentação com regiões poligonais regulares com 5 lados.

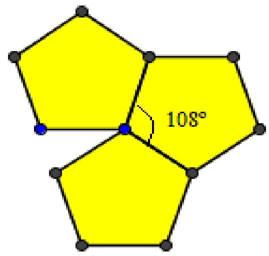


Figura 26: Posicionamento de pentágonos regulares ao redor de um ponto.

Se $n = 6$, então $m = 3$. Assim é possível ter pavimentação como na figura abaixo.

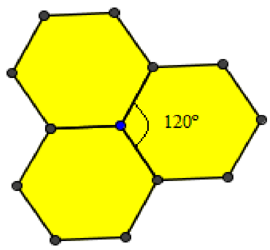


Figura 27: Pavimentação com hexágonos regulares ao redor de um nó.

Logo, $n = 3, 4$ ou 6. ■

Para representar os possíveis padrões de pavimentações, utilizaremos a notação $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, que significa que em um nó aparecem m polígonos regulares, onde cada n_i é o número de lados de cada polígono, $i = 1, \ldots, m$.

Pelo resultado anterior, podemos representar os três tipos de pavimentações que aparecem como (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) e (6,6,6), respectivamente.

Teorema 1.5.5. Se $F = \{P_i\}_{i \in I}$ é uma pavimentação do plano, onde P_i é uma região poligonal regular de n_i lados, $n_i \geq 3$, então, eliminando os casos de um só tipo, as seguintes configurações pavimentam o plano: (3,12,12), (4,8,8), (4,6,12), (3,4,6,4), (3,6,3,6), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4), (3,3,4,3,4).

Demonstração:

Seja m o número de polígonos ao redor do ponto, nota-se que $m \geq 3$. Além disso, o menor valor do ângulo interno de um polígono regular é 60º, segue que o maior valor de m é dado por $\frac{360°}{60°} = 6$. Logo,$3 \leq m \leq 6$.

1º caso: $m = 3$

Suponhamos três polígonos regulares com números de lados n_1, n_2 e n_3, respectivamente. Então, a soma dos ângulos internos ao redor do ponto é

$$\frac{(n_1 - 2)180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)180°}{\mathrm{n}_2} + \frac{(n_3 - 2)180°}{n_3} = 360°$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 180, obtemos:

$$\frac{(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)}{\mathrm{n}_2} + \frac{(n_3 - 2)}{n_3} = 2,$$

que é equivalente a $1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3} = 2$.

Subtraindo três nos dois lados da equação e, em seguida, dividindo por dois negativo ambos os membros, obtemos $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ (I).

Supondo, sem perda de generalidade, que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, então $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$. Logo $n_1 \leq 6$.

Como o menor valor de n_1 se verifica para triângulo equilátero, temos que $3 \leq n_1 \leq 6$.

Por outro lado, (I) também fornece que $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{n_1 - 2}{2n_1}$ (II). Como $n_3 \geq n_2$, de (II) concluímos que $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq \frac{n_1 - 2}{2n_1}$, ou seja, $n_2 \leq \frac{4n_1}{n_1 - 2}$ (III).

- $n_1 = 3$

  Fazendo $n_1 = 3$, então, $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{n_3} = \frac{(n_2 - 6)}{6n_2}$. Como n_2 e n_3 são números positivos, então $n_2 - 6 > 0$, o que nos dá $n_2 \geq 7$.

  De (III) temos $n_2 \leq 12$. Portanto, $7 \leq n_2 \leq 12$.

- $n_1 = 4$

  Procedendo de maneira análoga, obtemos $n_1 = 4 \Rightarrow 5 \leq n_2 \leq 8$.

- $n_1 = 5$

De (II), chegamos que $n_2 \geq 4$, mas $n_2 \geq n_1$, então $n_2 \geq 5$ e de (III) encontramos que $n_2 \leq 6$.

- $n_1 = 6$

De (II) obtemos $n_2 > 3$, mas $n_2 \geq n_1$, prevalece $n_2 \geq 6$. De (III) temos $n_2 \leq 6$, logo $n_2 = 6$.

Substituindo os possíveis valores de n_1 e n_2 , lembrando que n_3 é inteiro, obtemos a seguinte tabela:

n_1	n_2	n_3
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

2º caso: $m = 4$

Suponhamos agora, quatro polígonos regulares de lados n_1, n_2, n_3 e n_4, respectivamente. A soma dos ângulos ao redor do ponto será:

$$\frac{(n_1-2)180°}{n_1} + \frac{(n_2-2)180°}{n_2} + \frac{n_3 180°}{n_3} + \frac{(n_4-2)180°}{n_4} = 360°.$$

Com isso, obtemos $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$ (IV).

Repetindo o argumento anterior, supondo $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, temos, substituindo n_2 , n_3 e n_4 por n_1, que $n_1 \leq 4$. Como $n_1 \geq 3$, ficamos com dois únicos valores: $n_1 = 3$ ou $n_1 = 4$.

De (IV), obtemos $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{n_1-1}{n_1}$ (V). Como $n_2 \leq n_3 \leq n_4$, $n_2 \leq \frac{3n_1}{n_1-1}$ (VI). Assim, se $n_1 = 3$, então $n_2 \leq 4$, mas, como $n_2 \geq n_1$, segue que $n_2 = 3$ ou $n_2 = 4$. Analogamente, se $n_1 = 4$, obtemos $n_2 = 4$.

- $n_1 = 3,\ n_2 = 3$

De (IV), temos que $n_3 \geq 4$, mas $n_3 \leq n_4$, então, trocando n_4 por n_3, encontramos $n_3 \leq 6$, ou seja, $4 \leq n_3 \leq 6$.

- $n_1 = 3, n_2 = 4$

Também de (IV), obtemos $n_3 \geq 3$, mas $n_3 \geq n_2$, então $n_3 \geq 4$. Porém, $n_3 \leq n_4$, então $n_3 \leq 4$. Logo, $n_3 = 4$.

- $n_1 = 4, n_2 = 4$

Ainda de (IV), com $n_3 \leq n_4$, encontramos $n_3 \leq 4$, mas como $n_3 \geq n_2$, resulta $n_3 = 4$, de onde calculamos o único valor $n_4 = 4$.

Os valores encontrados estão na tabela abaixo:

n_1	n_2	n_3	n_4
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6
4	4	4	4

3º caso: $m = 5$

Sendo n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5, lados dos polígonos regulares, respectivamente, temos, $\frac{(n_1-2)180°}{n_1}+\frac{(n_2-2)180°}{n_2}+\frac{(n_3-2)180°}{n_3}+\frac{(n_4-2)180°}{n_4}+\frac{(n_5-2)180°}{n_5}=360°$. Logo,

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}. \text{ (VII)}$$

Supondo $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, (VII) fornece $\frac{5}{n_1} \geq \frac{3}{2}$, ou seja, $n_1 \leq \frac{10}{3}$. Como $n_1 \geq 3$, concluímos que $n_1 = 3$.

Agora, (VII) fornece que $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6}$. Como $n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, obtemos $n_2 \leq \frac{24}{7}$, ou seja, $n_2 \leq 3$. Novamente teremos o valor único $n_2 = 3$.

Fazendo $n_2 = 3$, encontramos $\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6}$. Como $n_3 \leq n_4 \leq n_5$, temos que $n_3 \leq \frac{18}{5}$, ou seja, $n_3 \leq 3$, resultando também em $n_3 = 3$.

Fazendo agora $n_3 = 3$, encontramos $\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}$. Como $n_4 \leq n_5$, obtemos $n_4 \leq 4$. Logo, $3 \leq n_4 \leq 4$. Pela equação $\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}$, temos que se $n_4 = 3$ então $n_5 = 6$ e se $n_4 = 4$ então $n_5 = 4$.

Assim, temos as seguinte tabela de possibilidade:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

4º caso: $m = 6$

Procedendo como anteriormente, concluímos que $n_i = 3$, para todo $i = 1, \dots, 6$, que é o caso dos seis triângulos equiláteros, já estudado anteriormente.

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
3	3	3	3	3	3

Eliminando os casos de um só tipo, usando a notação de m-uplas e considerando as posições entre os polígonos, temos as seguintes possibilidades de solução: (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (3,12,12), (4,8,8), (4,5,20), (4,6,12), (5,5,10), (3,3,4,2), (3,4,3,2), (3,3,6,6), (3,6,3,6), (3,4,4,6), (3,4,6,4), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4), (3,3,4,3,4).

Falta agora verificar quais dessas configurações pavimentam o plano.

Um arranjo envolvendo um triângulo equilátero e outros dois polígonos regulares distintos não pavimentam om plano, como mostra a figura.

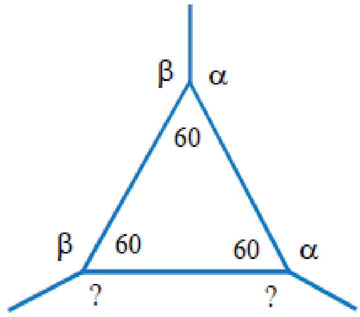


Figura 28: Arranjo com triângulo equilátero

Logo, as configurações (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18) e (3,10,15) não pavimentam o plano.

Da mesma forma, arranjos que possuem um pentágono regular e outras duas figuras regulares diferentes não podem ser estendidas de forma a formar um mosaico no plano. É o caso de (4,5,20) e (5,5,10).

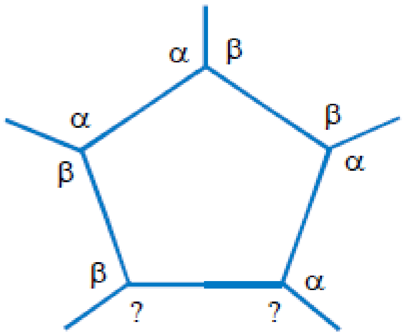


Figura 29: Arranjo com pentágono regular

Com as configurações de quatro figuras ao redor do ponto, podemos concluir que as que não podem pavimentar o plano são (3,3,6,6), (3,3,4,12), (3,4,3,12) e (3,4,4,6), como mostram as figuras seguintes.

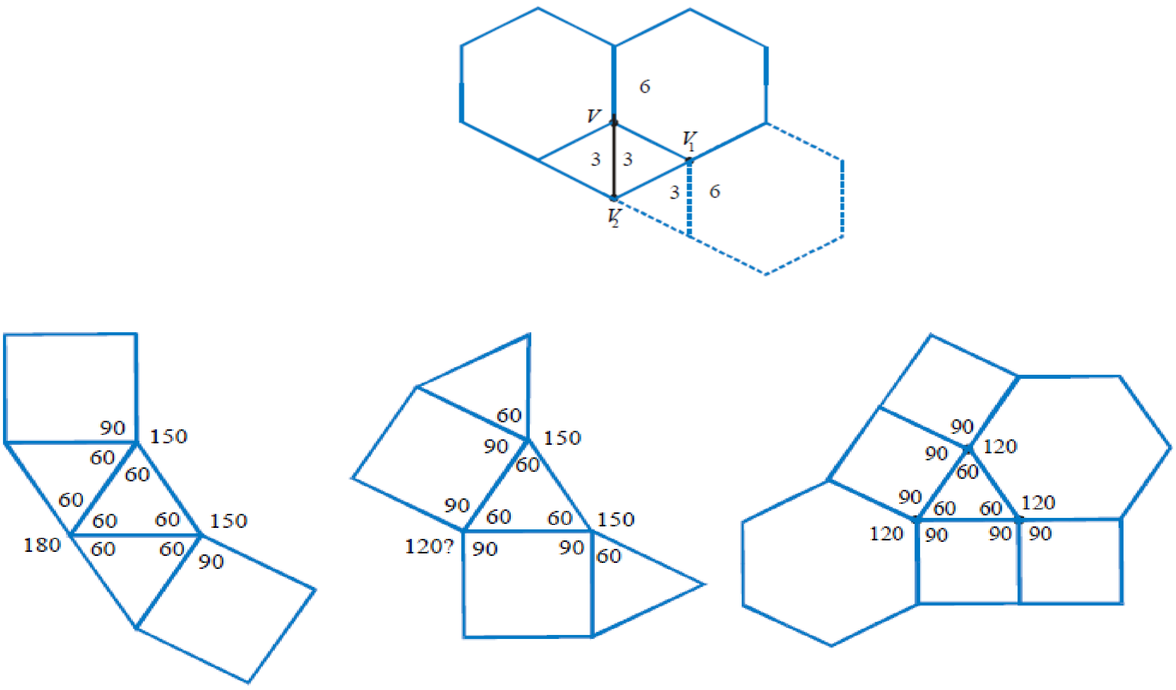
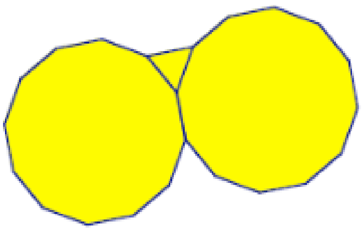
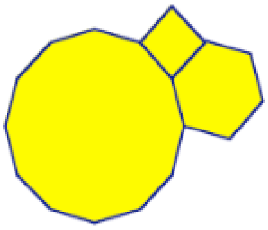
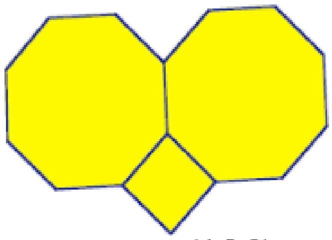


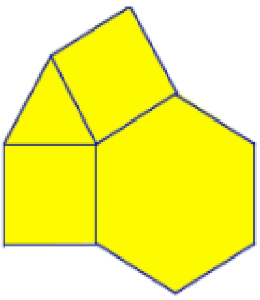
Figura 30: (3,3,6,6), (3,3,4,12), (3,4,3,12), (3,4,4,6)

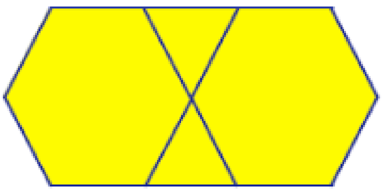
Como mostram as figuras a seguir, as oito configurações restantes pavimentam o plano.

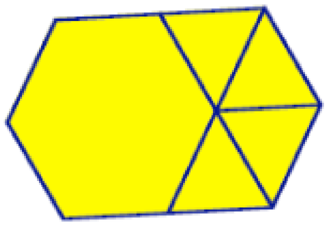

(3,12,12)


(4,6,12)


(4,8,8)


(3,4,6,4)


(3,6,3,6)


(3,3,3,3,6)

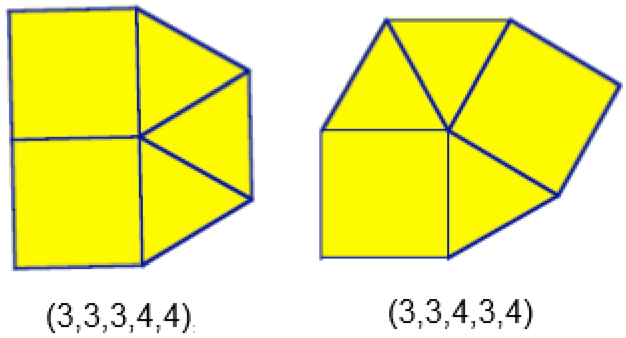


Figura 31: Combinações que pavimentam o plano ■

1.5.1. MOSAICOS DE ESCHER

Definição 1.5.1.1. Chamamos de **mosaico** o resultado de uma pavimentação.

Muitos mosaicos apresentam padrões geométricos, que estão presentes no nosso cotidiano há muito tempo. Eles aparecem utilizando-se pedras, ladrilhos, madeiras e outros materiais.

> Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. Muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração. (...) O objetivo do artífice era e é encontrar um certo tipo de simetria ornamental com o emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético. (Barbosa,p.1)

O registro mais antigo de mosaicos foi na Mesopotâmia, na cidade de Ur, há cinco mil anos atrás. Uma referência mundial é o palácio de Alhambra em Granada, construído pelos mouros vindos do norte da África. Sua arquitetura e decorações artísticas são de beleza incomparável.

Um exemplo atual é o calçadão de Copacabana. Vários são os exemplos de mosaico na nossa vida cotidiana como na arquitetura e no artesanato.

Figura 32: Calçadão de Copacabana

Figura 33: Artesanato

Os trabalhos do artista Maurits Cornelis Escher são importantes manifestações de mosaico através da arte. Ele nasceu em 17 de junho de 1898 em Leeuwarden, atual Holanda, e faleceu no dia 27 de março de 1972. Escher foi convencido pelos pais a estudar arquitetura e seu talento pelas artes gráficas foi descoberto pelo professor e artista Samuel Jessurum, com quem aprendeu muito. Após terminar os estudos, Escher decidiu viajar e conhecer o mundo. Passou por Espanha e Itália, tendo residido em Roma de 1923 a 1935, onde dedicou-se ao trabalho gráfico. Mais tarde, passou pela Suíça, Bélgica, voltou a visitar a costa italiana e a Espanha. Essas passagens por diferentes países inspiraram Escher, principalmente o palácio de Alhambra, em Granada, tendo feito cópias detalhadas dos mosaicos mouros. A partir de 1937, os trabalhos de Escher mostraram sua paixão pelas composições geométricas.

Os mosaicos de Escher são obtidos de maneira especial. Primeiro ele considera uma pavimentação do plano por polígonos regulares de mesmo tipo. Em seguida ele altera (da mesma maneira) cada região poligonal, formando uma figura plana de mesma área que a região poligonal inicial.

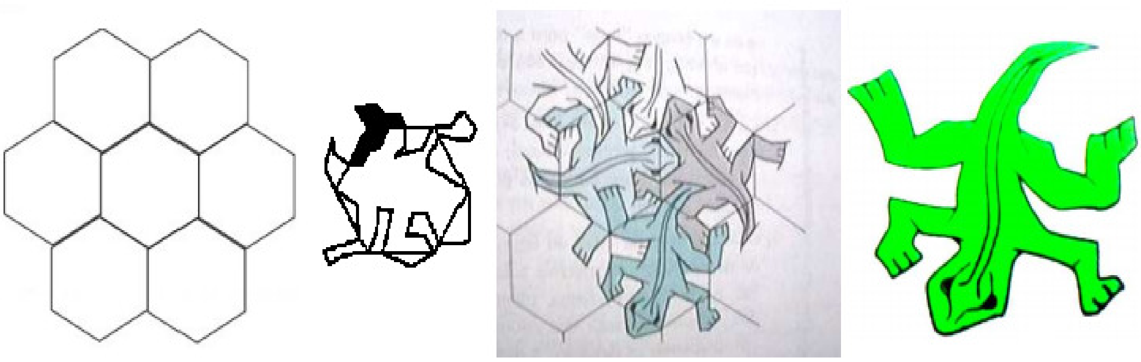
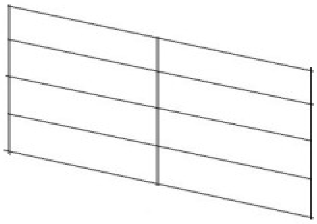


Figura 34: Exemplo do processo para obtenção do mosaico de Escher



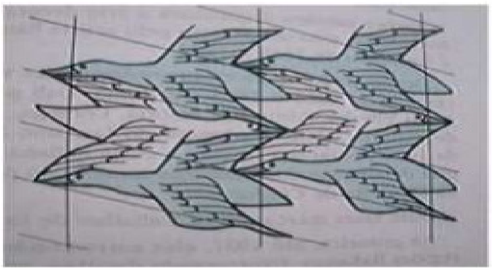
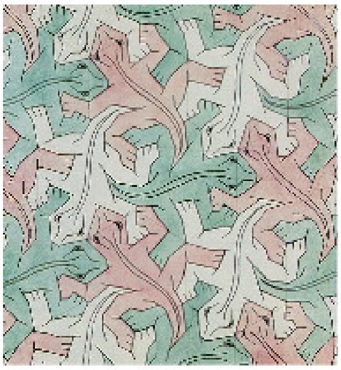


Figura 35: Outro exemplo de mosaico de Escher

Vejamos abaixo alguns trabalhos de Escher, resultantes do processo anterior:



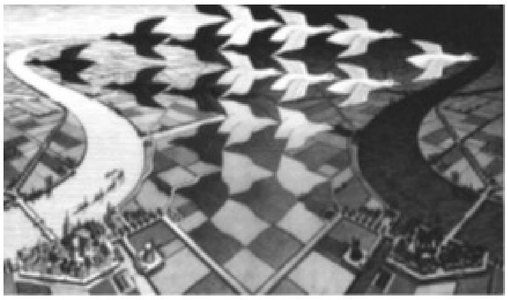


Figura 36: Obra “Répteis”

Figura 37: Obra “Dia e Noite”

Mesmo sem conhecimento prévio em Matemática, seus trabalhos apresentam todos os tipos de simetrias mencionadas.

> “Apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas.” M.C. Escher.

2. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Neste capítulo serão apresentadas atividades para que os alunos possam aplicar os conceitos de isometria em mosaicos. Inicialmente, trabalharemos com uma atividade sobre pavimentação através de uma situação problema, que leva os alunos a buscar os tipos de pavimentações possíveis utilizando polígonos regulares de mesmo tipo e de tipos diferentes. A segunda atividade propõe que sejam aplicados esses conhecimentos para a construção de mosaicos. Na terceira atividade, propomos um jogo de cartas sobre os mosaicos de Escher, pois nos trabalhos desse grande artista podemos verificar todos os tipos de isometrias estudados.

PÚBLICO ALVO

O estudo da isometria é tratado no Ensino Fundamental, geralmente no 7º ano, de maneira pouco aprofundada. Na maioria das vezes é ensinada apenas a isometria reflexiva, que é mais comumente chamada de simetria reflexiva.

Nossa ideia é aprofundar este conceito através de atividades com materiais concretos e uso de um software matemático.

No Ensino Médio também é possível trabalhar com simetrias através do estudo do gráfico de funções, mostrando sua importância. Neste trabalho não foram propostas atividades neste sentido.

AVALIAÇÃO

Será contínua e observadora, analisando a participação dos alunos nas atividades e a aplicação dos conhecimentos adquiridos nas atividades propostas.

CONHECIMENTO PRÉVIO

É necessário que os alunos tenham conhecimento sobre conceito de polígonos e seus ângulos, quando eles são regulares e sobre os tipos de simetria no plano.

2.1. ATIVIDADE 1

Objetivo: Analisar quais polígonos regulares pavimentam o plano.

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.

Organização dos alunos: grupos de 4 alunos.

Recursos e materiais necessários: Para cada grupo seis cópias do anexo I e uma cópia do anexo II, além do software "Pavimentação com Polígonos Regulares" disponível em http://www.uff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html.

O professor deve introduzir a aula fazendo um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o que são polígonos, quais são regulares e o cálculo da medida dos ângulos internos quando são regulares.

Em seguida, distribui-se para cada grupo os polígonos já recortados do anexo I e a ficha de atividade do anexo II.

O professor deve fazer a atividade com os alunos, fazendo os questionamentos e instruindo-os a responderem na ficha.

Inicialmente, pergunta-se aos alunos se é possível colocar apenas triângulos ao redor de um ponto, sem que haja sobreposição e não fique nenhum espaço vazio entre os polígonos, utilizando os triângulos recortados. Espera-se até que eles cheguem à conclusão de que a resposta é sim e respondam na folha quantos triângulos foram possíveis colocar ao redor do ponto.

Em seguida, pede-se para eles fazerem o mesmo utilizando quadrados e depois hexágonos, preenchendo a ficha com as respostas. Assim, os alunos irão concluir que é possível colocar esses três tipos de polígonos regulares ao redor do ponto, sendo necessários seis triângulos, quatro quadrados e três hexágonos, como mostra a figura a seguir.

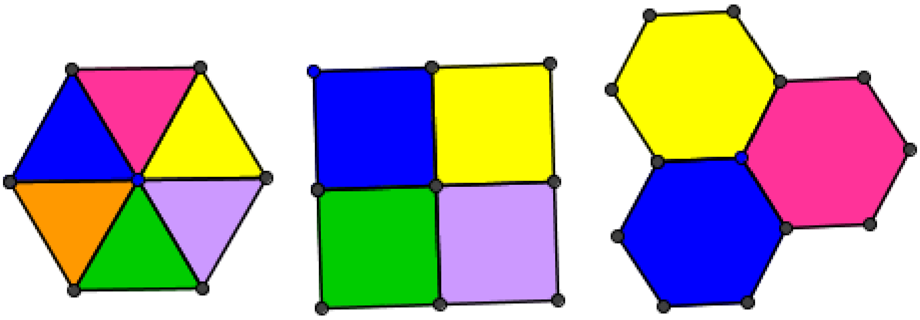


Figura 38: Polígonos regulares ao redor de um ponto

Após a socialização das respostas, o professor deve fazer a leitura da seguinte situação-problema com os alunos:

“A sogra de um professor de Matemática, cansada de sempre usar, triângulos, quadrados ou hexágonos nos tapetes que fazia, tentou fazer um só de pentágonos. – Impossível de fazer esse tapete! – disse o professor. Responde a sogra: - Por que impossível? Você pode entender de Matemática, mas de tapetes quem entende sou eu!”

Agora é o momento de perguntar aos alunos se o professor ou a sogra está correto. Para isso, eles devem tentar fazer a mesma experiência utilizando os pentágonos recortados.

Ao realizarem a experiência, os alunos perceberão que não é possível colocar os pentágonos ao redor do ponto, pois sobrará um espaço onde não cabe outro pentágono.

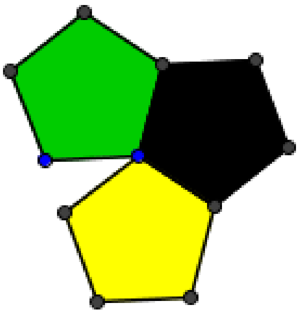


Figura 39: Tentativa de pavimentação com pentágonos

Assim, o professor discutirá com a classe o porquê não é possível realizar a atividade com os pentágonos. O professor induzirá os alunos, através de questionamento, a chegarem a conclusão de que a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto seja 360º, lembrando que cada medida pode ser calculada por uma fórmula usando a quantidade de lados do polígono e que este número é um inteiro.

Se fosse possível e m fosse o número de pentágonos então $\mathrm{m}.\frac{(7-2)180}{7} = 360$, ou seja, $\mathrm{m} = 2{,}8$, que não é um inteiro.

Até o momento, o professor não falou sobre a palavra pavimentação. Contudo, após realizar as experiências e chegar a conclusão necessária, ele pode agora introduzir o conceito de pavimentação, falando que esse processo que os alunos realizaram de colocar polígonos ao redor de um ponto e outros novos polígonos ao redor de cada novo ponto formado é chamado de pavimentação do plano.

Surge então a seguinte questão: quando tivermos polígonos regulares com n lados, $n \geq 7$, é possível repetir o mesmo processo? Ou seja, eles devem responder a seguinte questão da ficha: “Quais polígonos regulares pavimentam o plano?”

O professor sugere olharem para os cálculos que eles fizeram anteriormente, mas ao invés de colocar o número 5, colocar a variável n, trabalhando com o conceito de desigualdade e de número inteiro. Espera-se que os alunos cheguem a conclusão que para nenhum outro inteiro n isso seja possível.

Para dar continuidade a atividade, o professor continua lendo a situação-problema entre a sogra e o professor de Matemática:

“Após tentar fazer o tapete com polígonos regulares de mesmo tipo, a sogra muda de ideia e fala para o professor de Matemática: - agora quero fazer tapetes utilizando mais de um tipo de polígonos regulares! – o professor responde: - não quero nem ver quanto tempo vai levar para descobrir quais polígonos deve utilizar!”

Para ajudar a pobre sogra, que nada entende de Matemática, pede-se para os alunos utilizem um software online, chamado “Pavimentação com Polígonos Regulares”, e tentem descobrir com quais tipos de polígonos regulares de tipos diferentes é possível pavimentar o plano.

Com o software é possível que os alunos utilizem toda a sua criatividade e realizem tentativas para encontrar a solução do problema.

Esse software é muito simples de se utilizar. A tela inicial é a seguinte:

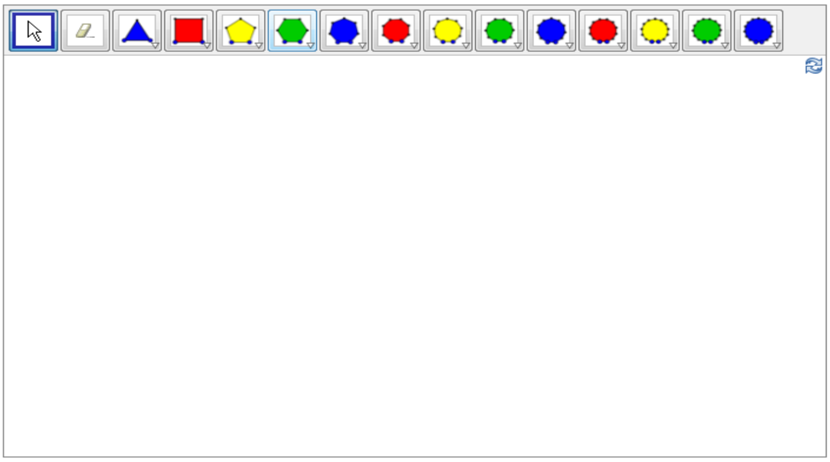


Figura 40: Tela inicial

O aluno deve começar escolhendo um polígono na barra de ferramentas. Como mostrar a figura abaixo, ele vai selecionar o polígono escolhido em alguma cor. Depois disso, clique no espaço em branco e será feito um ponto, o qual será nosso referencial. Para construir o polígono, deve ser feito outro ponto na medida do lado desejado. Então, automaticamente será construído seu polígono.

Figura 41: Escolhendo o polígono para construir

Para ir colocando outros polígonos e tentar obter uma pavimentação ao redor do ponto referencial, basta selecionar o polígono desejado na barra de ferramentas e clicar em dois vértices consecutivos do polígono já obtido (um deles será o ponto referencial). Observe que a ordem dos vértices é importante. Se quiser apagar um polígono, selecione o ícone "borracha" na barra de ferramenta e clique depois no objeto a ser apagado.

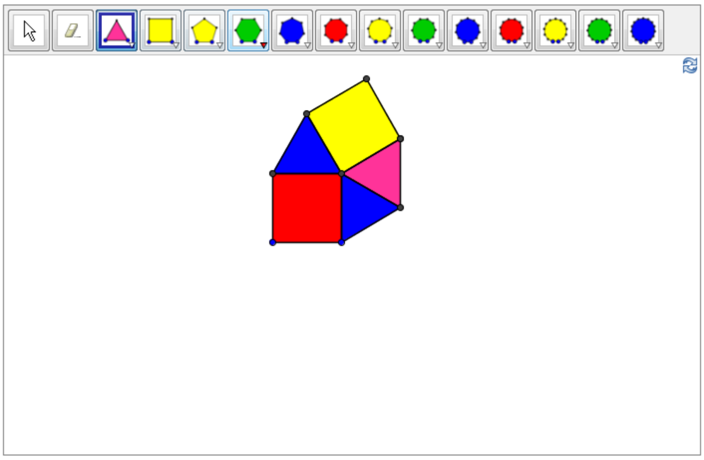


Figura 42: Colocando polígonos ao redor de um ponto

Feito isso, deve-se continuar o processo nos vértices comuns a somente dois polígonos. O interessante é tentar usar cores diferentes nos polígonos que se interseccionam e manter o padrão obtido ao redor do ponto referencial.

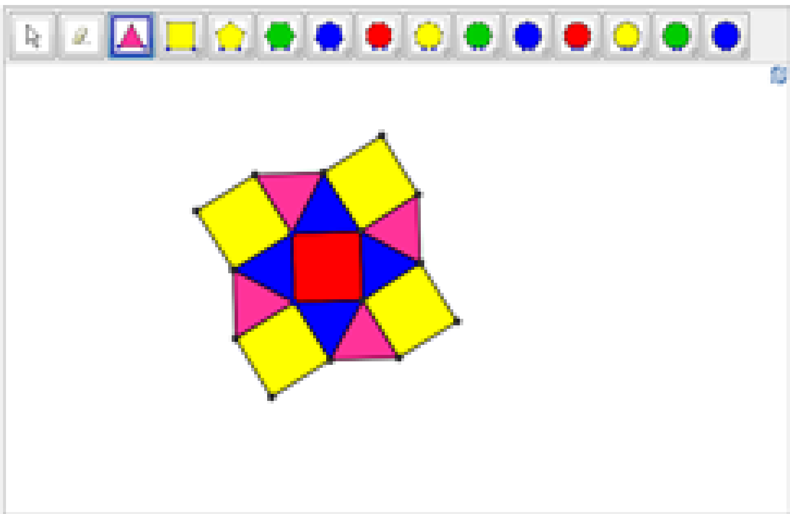


Figura 43: Construindo pavimentações

O professor pedirá que cada grupo mostre a sua figura obtida ao redor de um ponto referencial e explicará que esta figura pode ser representada na forma $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, que significa que no ponto referencial aparecem m polígonos regulares, onde cada n_i é o número de lados de cada polígono, $i = 1, \ldots, m$, que se interseccionam nesta ordem. Pedirá que cada grupo escreva como fica a representação da sua pavimentação na ficha de atividade (última questão).

O professor dirá que o raciocínio para obter todas as possibilidades de solução é parecido com a obtida no caso de polígonos regulares de mesmo tipo mas envolve mais possibilidades a serem consideradas. Ele não fará as contas com os alunos mas levará pronto e mostrará aos alunos todas as soluções possíveis. Isso se encontra nas páginas 35 e 36.

2.2. ATIVIDADE 2

Objetivo: Construir mosaicos a partir de pavimentações com polígonos regulares e os tipos de simetrias conhecidos, e reconhecer simetrias a partir de mosaicos.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Organização dos alunos: individual.

Recursos e materiais necessários: Uma cópia do anexo III para o professor e uma cópia dos anexos IV e V para cada aluno, lápis de cor, software "Pavimentação com Polígonos Regulares" disponível em http://www.uff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html.

Inicialmente, o professor deve explicar os três tipos de simetrias no plano: reflexão, rotação e translação através da figura do anexo III.

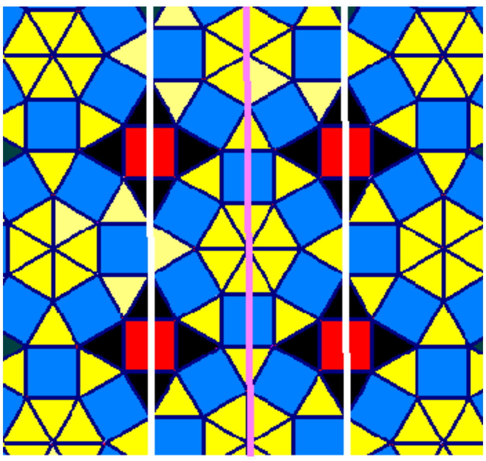


Figura 44: Figura do Anexo III

Podemos observar que na figura acima encontramos os três tipos de simetrias. Analisando pelo eixo branco, notamos uma translação alternando as colunas. Já pelo eixo rosa, temos uma simetria de reflexão. É possível notar também uma rotação, sendo o ponto de rotação o encontro dos triângulos amarelos.

Em seguida, deve falar sobre o que são mosaicos, que a figura anterior é mosaico obtido de uma pavimentação com triângulos equiláteros e quadrados, pintando cada um deles com certas cores. Os alunos já têm familiaridade com pavimentação usando polígonos regulares pela Atividade 1.

Distribua a ficha de atividade 2 aos alunos e peça para que eles analisem os mosaicos que estão contidos lá e respondam qual simetria eles encontram.

Depois disso, o professor distribui para os alunos as folhas do anexo V, uma delas é uma pavimentação usando só triângulos equiláteros e a outra é uma pavimentação usando triângulos equiláteros e quadrados. Usando lápis de cor, os alunos devem pintar as regiões poligonais obtendo mosaicos contendo simetrias. O professor sugere que os alunos comecem pela primeira pavimentação, pois ela é mais simples. Após o término das construções, o professor pedirá que os alunos troquem entre si os mosaicos obtidos e que eles descubram qual a simetria existente (se houver).

Ao invés de utilizar as folhas do anexo V e pedir que eles pintem as regiões poligonais para obterem os mosaicos com simetria, isso poderia ser feito com o software utilizado na Atividade 1 da seguinte maneira: primeiro eles obtêm uma pavimentação ao redor de um ponto referencial inicial e depois eles repetem este padrão para todos os vértices que são intersecção de dois polígonos desta pavimentação. Como isso eles vão obter um mosaico com simetrias já que as regiões poligonais já são pintadas na construção e mantiveram o mesmo padrão.

2.3. ATIVIDADE 3

Objetivo: Identificar os tipos de simetrias nos trabalhos de Escher.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Organização dos alunos: Inicialmente individual e depois em duplas.

Recursos e materiais necessários: Cópia do anexo VI para cada aluno, uma cópia do anexo VI para cada quatro alunos, papel cartão ou E.V.A e software "Jogos Artísticos Geométricos", disponível em

http://www.uff.br/cdme/jogos_artisticos_geometricos_eletronico/index.html.

O professor deve iniciar a atividade falando um pouco sobre a vida do artista Escher e seus trabalhos. É possível encontrar vídeos na internet que mostram sua história e várias de suas obras.

Através dos mosaicos de Escher, é possível estudar detalhadamente os padrões utilizados na construção e os tipos de simetrias encontrados, pois suas obras são belíssimas e de enorme criatividade. Uma característica importante em seus mosaicos é que todos são construídos através de pavimentação do plano com polígonos regulares, onde são feitas algumas alterações para chegar no desenho desejado.

Para que os alunos percebam isso, propomos na ficha de atividade 3 do anexo VI, alguns questionamentos quanto a simetria nos mosaicos de Escher.

No primeiro exercício, é proposta a obra "Anjos e Demônios", onde podemos encontrar simetria de rotação e simetria de reflexão. Na imagem abaixo mostramos quais são os eixos de simetria.

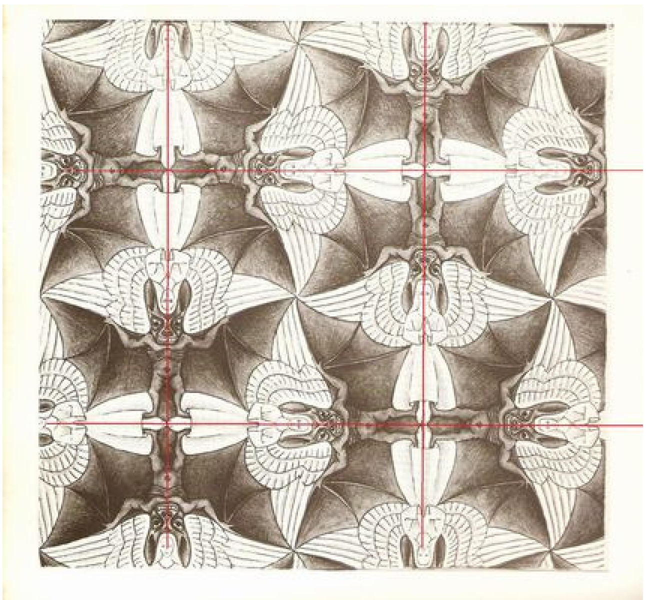


Figura 45: Obra "Anjos e Demônios"

No exercício 2, pedimos aos alunos que descubram qual foi a pavimentação utilizada na construção da obra “Répteis”. Pode não ser muito fácil para eles, mas o professor pode auxiliá-los, induzindo-os para que cheguem na resposta correta.

Observamos na figura seguinte que o polígono utilizado na divisão no plano foi o hexágono, sendo o mosaico construído através dessa pavimentação.

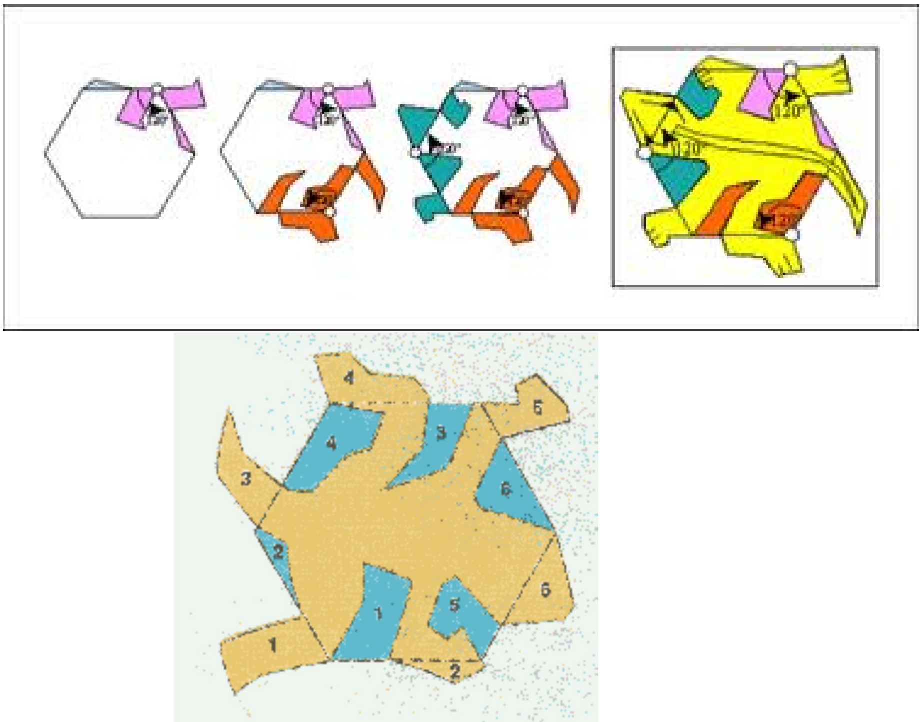


Figura 46: Pavimentação utilizada na obra “Répteis”

Nos próximos exercícios, propomos duas atividades lúdicas para a turma ainda trabalhar com a obra “Répteis”, uma das mais conhecidas de Escher. Primeiramente, os alunos irão utilizar o software “Jogos Artísticos Geométricos” onde irão montar esse mosaico com as peças para serem encaixadas, como se fosse um quebra-cabeça. Em seguida, o professor irá propor a construção do mesmo mosaico, mas agora utilizando as peças feitas de papel cartão ou E.V.A., através do molde disponível no anexo VI.

É importante que eles identifiquem que nesse mosaico encontramos simetria de rotação e encontrem o ponto onde devemos colocar as figuras em volta para ser possível a formação do mosaico, como mostra a figura abaixo.

Figura 47 Simetria de rotação

Para encerrar a atividade, criamos o jogo “Baralho de Escher”, para que os alunos possam conhecer suas diferentes obras e encontrar as simetrias utilizadas.

É importante que o professor leia com antecedência as regras do jogo (anexo VII) para que possa explicar para a turma antes de dar início.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho é uma sugestão de atividades sobre isometrias para serem aplicadas, de preferência, no 7º ano do Ensino Fundamental, mas nada impede de aprofundar esse conteúdo em outras séries seguintes.

O objetivo desta pesquisa foi criar uma estratégia diferenciada para ensinar os alunos, que hoje em dia demonstram falta de interesse nas aulas tradicionais, e fazer com eles aprendam através de atividades lúdicas.

Esperamos que esse material sirva de apoio aos professores que quiserem trabalhar com isometria, auxiliando-os na preparação de uma aula diversificada, onde eles possam utilizar as atividades sugeridas e até criar novas ideias para serem aplicadas em sala de aula.

É esperado também que o aluno fique motivado a participar da aula, buscando novas informações e questionando o professor sobre o tema, além de desenvolver sua criatividade na construção de mosaicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, S. E. M. D. **Mosaicos no plano,** Revista do professor de matemática, São Paulo, n. 40, 2° quadrimestre de 1999.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**, São Paulo: Atual, 1993.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: **Matemática**. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRESSAN, R. **O uso de ferramentas computacionais para o ensino de simetria**. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte - MG. Anais IX ENEM, 2007.

Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática, disponível em http://www.uff.br/cdme/#softwares, acesso em julho de 2014.

ESTUDOS COMPLEMENTARES - AVA 2000**: Análise da resolução de questões de matemática/Secretaria de Estado da Educação**. Diretoria Geral, Núcleo de Informações Educacionais. - Curitiba: SEED/DG, 2002.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos mosaicos,** São Paulo: Scipione, 2000.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos,** Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2005.

LIMA, G. C. **Pavimentação do plano com polígonos regulares,** Trabalho de Conclusão de Curso – Licenciatura em Matemática, Universidade Católica de Brasília, 2011.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?**, Educação Matemática em Revista - Geometria, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 4 - 13, 1995.

MORAN, J.M. **A integração das tecnologias na educação,** s.d. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/integracao.htm> Última consulta em: 24/07/2008.

MORGADO, M.C.F.; PINTO, D. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**, 1. reimp. Rio de Janeiro: Editora UFRJ / SR-1, 2001.

NETO, A.C.M. **Tópicos de matemática Elementar 2: Geometria Euclidiana Plana,** 1ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

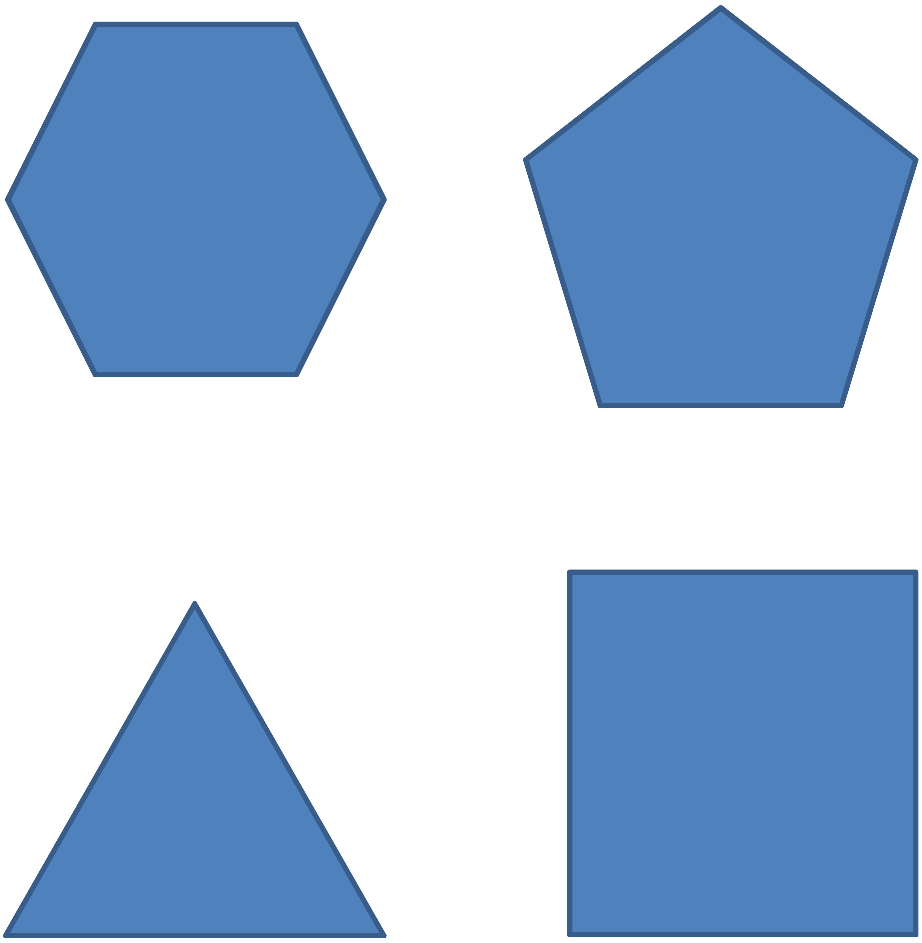
READ, H. **A educação pela arte,** São Paulo: Martins Fontes, 2001

REIS, E. L.; FREITAS, E. C.; JAFELICE, R. S. M. **Ornamentos: uma aplicação da modelagem matemática para o ensino,** FAMAT em revista, nº 09, outubro de 2007.

REZENDE, E. Q. F. ; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas,** 2ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

TJABBES, P. **O mundo mágico de Escher,** São Paulo: Art Unlimited, 2011.

ANEXO I



ANEXO II

Nomes do alunos:____

Ficha de Atividade 1

1) Responda, para cada polígono abaixo, se é possível colocá-los ao redor de um ponto sem que haja sobreposição e não fique nenhum espaço vazio. Em caso afirmativo, escreva o número de polígonos que você precisou para isso.

    a) Triângulos
    ( ) sim ( ) não
    Número de triângulos necessários:

    b) Quadrados
    ( ) sim ( ) não
    Número de quadrados necessários:

    c) Hexágonos
    ( ) sim ( ) não
    Número de hexágonos necessários:

2) Leia o problema a seguir e responda quem está correto, o professor ou a sogra. (Justifique)

"A sogra de um professor de matemática, cansada de sempre usar triângulos, quadrados ou hexágonos nos tapetes que fazia, tentou fazer um só de pentágonos. – Impossível de fazer esse tapete! – disse o professor. Responde a sogra: - Por que impossível? Você pode entender de matemática, mas de tapetes quem entende sou eu!"

3) Quais polígonos regulares de um só tipo pavimentam o plano? (Justifique)

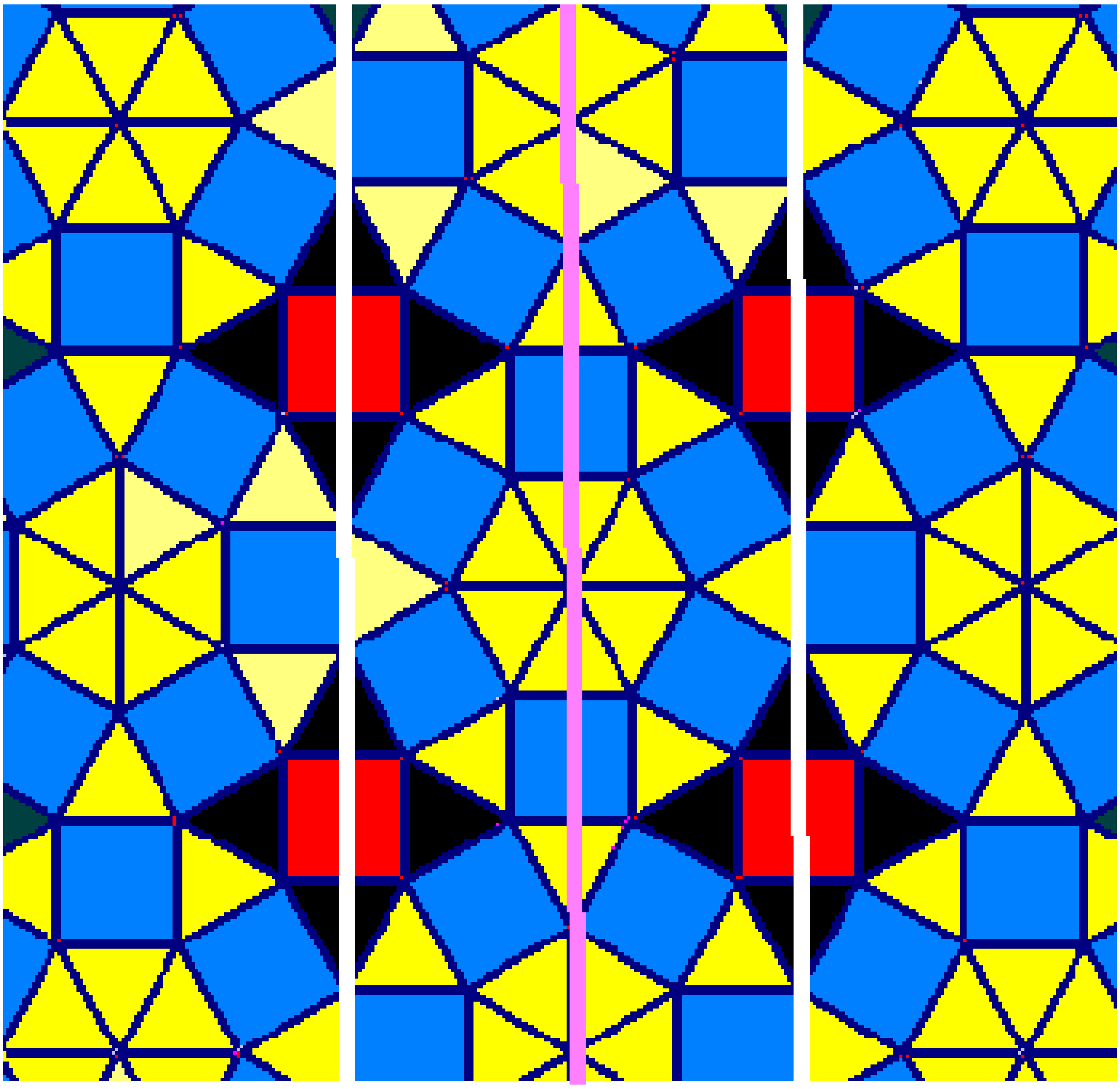
4) Leia agora o seguinte problema:

"Após tentar fazer o tapete com polígonos, a sogra muda de ideia e fala para o professor de matemática: - agora quero fazer tapetes utilizando mais de um tipo de polígonos regulares! – o professor responde: - não quero nem ver quanto tempo vai levar para descobrir quais polígonos deve utilizar!"

Utilizando o software "Pavimentação com Polígonos Regulares", tente ajudar a sogra do professor de matemática a descobrir quais os tipos de tapetes que ela pode fazer.

5) Considerando um ponto referencial, coloque a representação da pavimentação ao redor deste ponto obtida no software anteriormente.

ANEXO III

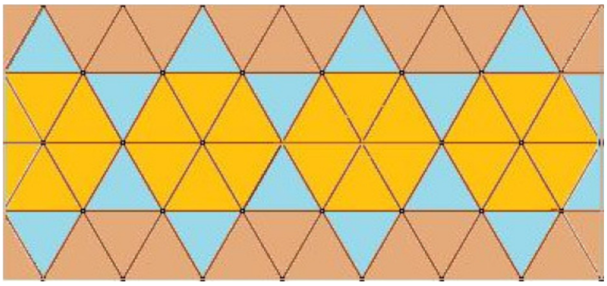


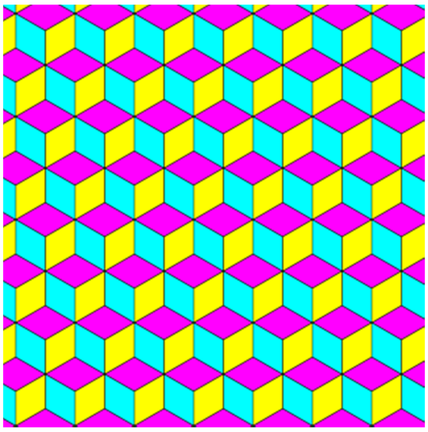
ANEXO IV

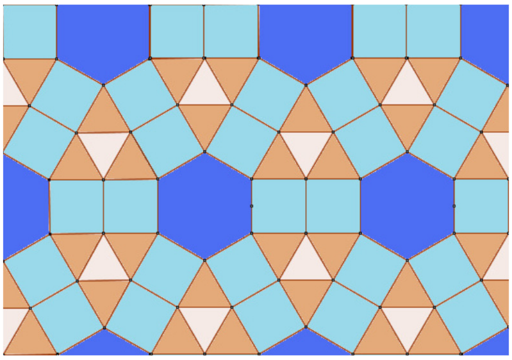
Nome do aluno:____

Ficha de Atividade 2

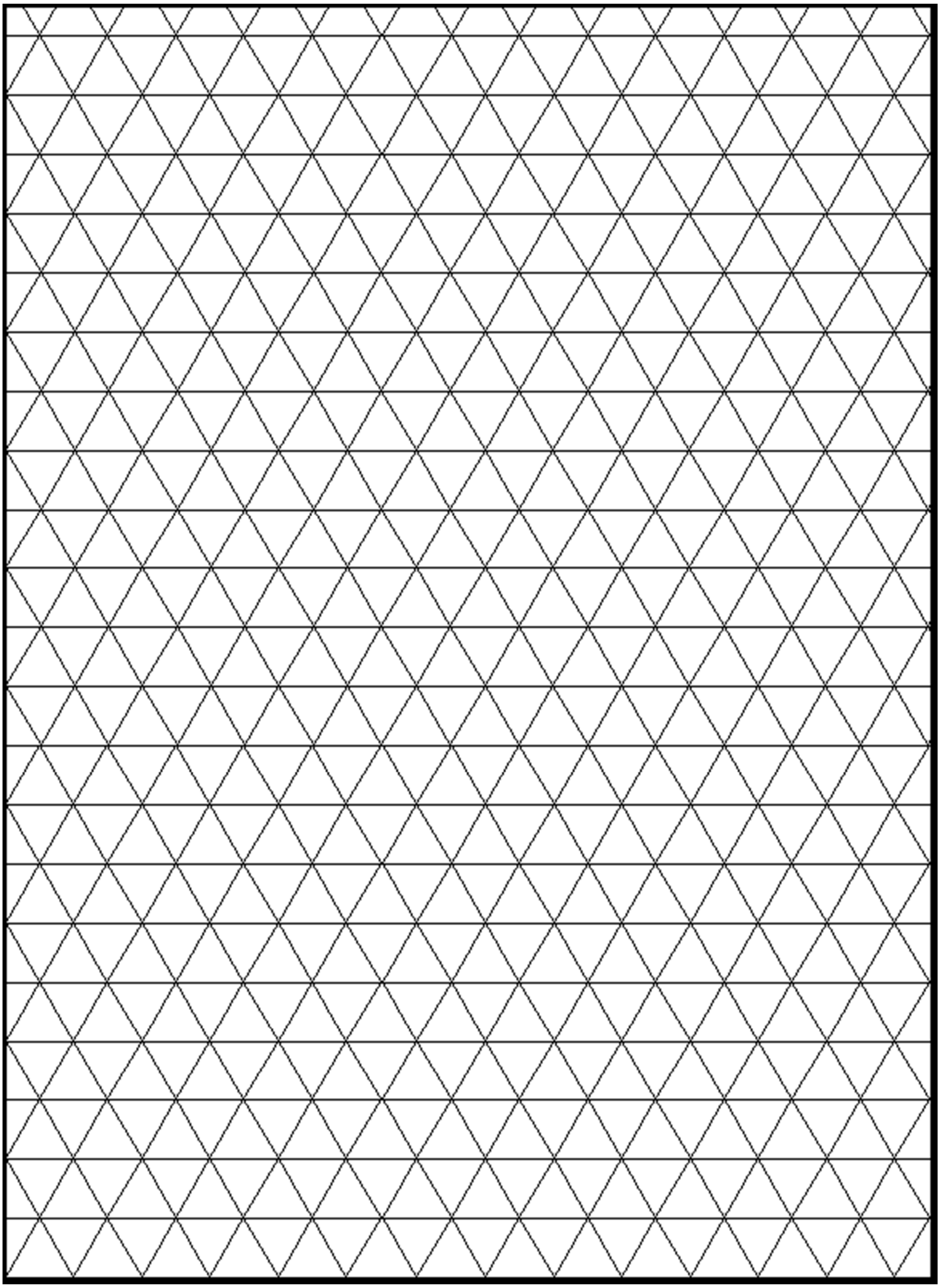
Identifique quais simetrias podemos ter nos mosaicos abaixo

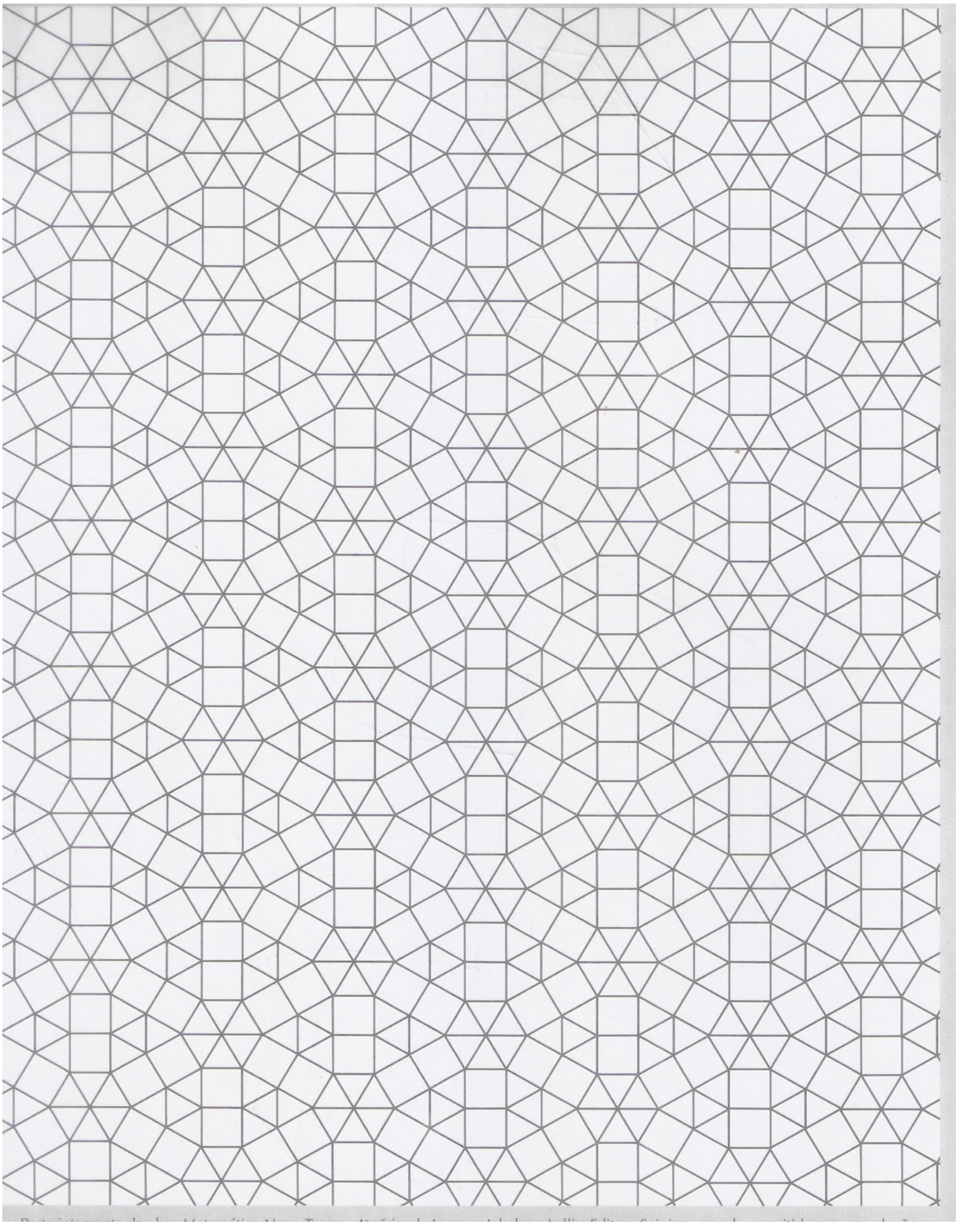






ANEXO V



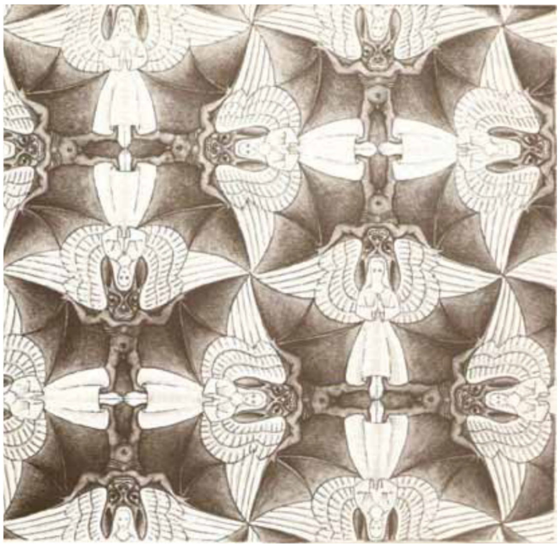


ANEXO VI

Nome do aluno:____

Ficha de Atividade 3

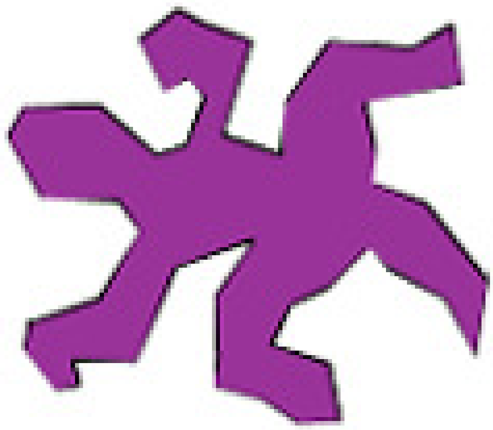
1) Observe a obra “Anjos e Demônios” de Escher e descubra o tipo de simetria utilizada.



2) Na obra “Répteis” de Escher, em qual polígono foi dividido o plano para a construção do mosaico?

3) Através do software online, tente montar o mosaico dos lagartos.
   Site:
   http://www.uff.br/cdme/jogos_artisticos_geometricos_eletronico/Mosaico/aluno01.html

4) Faça o molde abaixo e construa várias cópias em três cores diferentes de E.V.A. ou papel cartão para a confecção do mosaico de Escher.



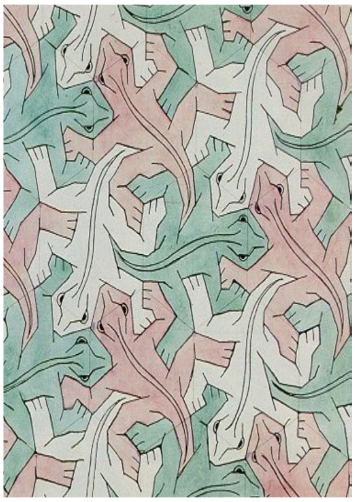
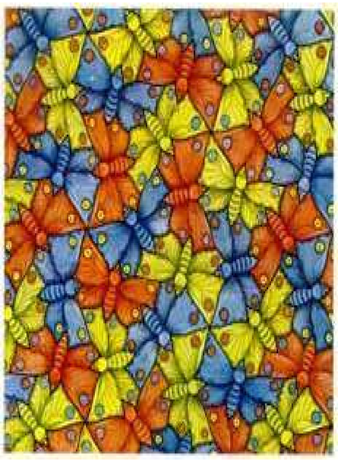
ANEXO VII

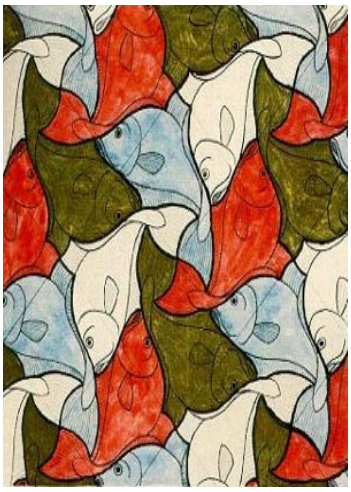
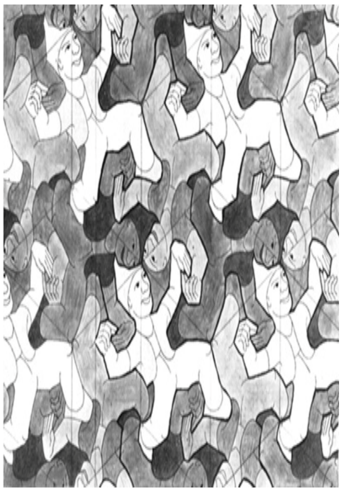
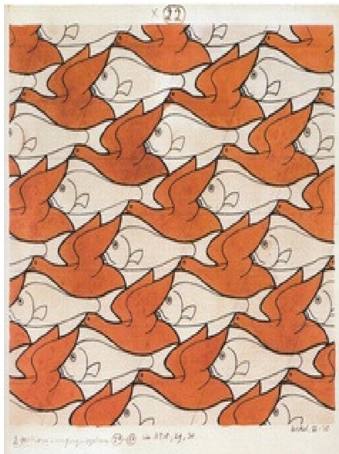
Jogo “Baralho de Escher”

Regras do jogo:

1. Embaralhar as cartas e distribuir três para cada jogador.
2. Colocar o restante das cartas num monte no centro da mesa, com o conteúdo voltado para baixo.
3. O primeiro jogador pesca uma carta do monte e o outro jogador tem que pegar uma carta da mão do adversário, sem olhá-las. Se o jogador que pegou a carta do outro tiver formado algum par de cartas contendo um mosaico e o tipo de simetria que consta nela, ele pode baixar essas duas cartas na mesa.
4. Em seguida, é a vez desse jogador pescar uma carta do monte e deixar que o primeiro jogador pegue uma carta de sua mão. Da mesma maneira, se tiver um par de cartas ele vai baixá-las também.
5. Se por acaso algum jogador tiver dois pares de cartas nas mãos, ele deve escolher apenas um para baixar.
6. O jogo continua dessa maneira até que acabem as cartas do monte e todos os jogadores não tiverem mais cartas nas mãos. Se por acaso, não tiver mais cartas no monte para pescar e os jogadores tiverem cartas nas mãos ainda, cada um, na sua vez, pescará uma carta do adversário até acabar o jogo.
7. Vence o jogo aquele que tiver mais pares de cartas baixados e formados corretamente.

CARTAS

REFLEXÃO	ROTAÇÃO	ROTAÇÃO
ROTAÇÃO	TRANSLAÇÃO	REFLEXÃO
REFLEXÃO	REFLEXÃO	ROTAÇÃO

ROTAÇÃO	**ROTAÇÃO**	**TRANSLAÇÃO**
TRANSLAÇÃO	**ROTAÇÃO**	**REFLEXÃO**