



Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Coordenação de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Aplicação das Cadeias de Markov no Estudo do
Controle Biológico da Planta Aquática
Eichhornia azurea

Ademir Amaro da Silveira Júnior

Jataí-Go

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Ademir Amaro da Silveira Júnior		
E-mail:	ademiramaro@yahoo.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria da Educação do Estado de Goiás		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Aplicação das Cadeias de Markov no Estudo do Controle Biológico da Planta Aquática <i>Eichhornia azurea</i>		
Palavras-chave:	Modelagem Matemática, Cadeias de Markov, Matemática Básica, Planta Aquática, Controle Biológico		
Título em outra língua:	Application of Markov Chain in the Study of Biological Control of Plant Aquatic <i>Eichhornia azurea</i>		
Palavras-chave em outra língua:	Mathematical Modeling, Markov Chains, Basic Math, Aquatic Plant, Biological Control		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	14/03/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. Dra. Graciele P. Silveira		
E-mail:	gracimat@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

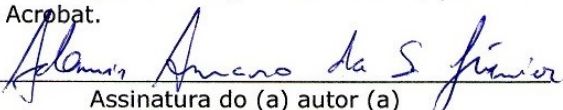
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do (a) autor (a)

Data: 14/03/2014

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ademir Amaro da Silveira Júnior

Aplicação das Cadeias de Markov no Estudo
do Controle Biológico da Planta Aquática
Eichhornia azurea

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico e Modelagem Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Graciele P. Silveira

Jataí-Go

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
BSCAJ/UFG**

S587a

Silveira Júnior, Ademir Amaro da.

Aplicação das cadeias de Markov no estudo do controle biológico da planta aquática *Eichhornia azurea* [manuscrito] / Ademir Amaro da Silveira Júnior. - 2014.

64 f. : il., figs, tabs.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Graciele Paraguaia Silveira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Câmpus Jataí, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e tabelas.

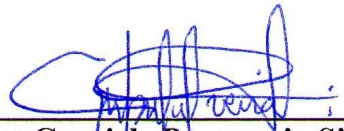
1. Controle biológico – Modelagem matemática. 2. Cadeia de Markov. 3. Planta aquática – Controle. 4. Matemática básica.

CDU: 519.217.12:632.937

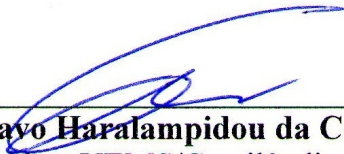
Ademir Amaro da Silveira Júnior

**Aplicação das Cadeias de Markov no Estudo do
Controle Biológico da Planta Aquática
*Eichhornia Azurea***


Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 14 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira
Coordenação de Matemática-CAJ/UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Gustavo Haralampidou da Costa Vieira
Membro-UEMS/Cassilândia



Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Membro - Coordenação de Matemática-CAJ/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Ademir Amaro da Silveira Júnior graduou-se em Ciências/Hab. Matemática pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Câmpus Cassilândia e especializou-se em Ciência da Natureza/Física do Ensino Médio pela Universidade de Brasília. É professor há quatorze anos, sendo que neste período atuou como professor do ensino fundamental e médio. É concursado desde 2004 na Secretaria de Educação do Estado de Goiás.

Dedico este trabalho à minha esposa Solange Ferreira,
minha filha Rafaela Nunes, minha Mãe, meus Irmãos e
a todos os amigos por terem entendido minha ausência.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar a oportunidade, força e persistência para cursar este Mestrado.

Agradeço a minha esposa Solange Ferreira por me apoiar, por aguentar estes 2 anos, abdicando de muitos sonhos e projetos para que este fosse um sonho que ela sonhasse comigo. Obrigado amor, te amo.

Agradeço aos meus familiares pelo apoio e paciência.

Agradeço aos professores que aceitaram trabalhar neste mestrado.

Agradeço a minha Orientadora Prof. Graciele, por aguentar todos os erros com muita paciência e me orientar nesta escrita e trabalho.

Agradeço aos amigos que fizeram este curso comigo.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante o período de estudo.

Resumo

As plantas aquáticas exercem papel importante nas represas, pois auxiliam na filtração da água retirando alguns metais pesados, servindo de alimentos para peixes e de abrigo para alguns insetos. Entretanto, algumas espécies vêm se alastrando e causando grandes transtornos à população ribeirinha, usinas hidrelétricas e outros indivíduos que dependem dos lagos para sobreviverem. O propósito deste trabalho foi fazer um estudo inicial do controle biológico da macrófita aquática *Eichhornia azurea* por meio da inserção do inseto predador *Thrypticus* sp., utilizando modelagem matemática e Cadeias de Markov de ordem 1. Para tanto, um breve histórico sobre a planta aquática e o inseto é apresentado, assim como conceitos relacionados às Cadeias de Markov e suas aplicações na biomatemática são abordados, fornecendo subsídios para a realização da modelagem do problema. Dados reais obtidos de uma pesquisa desenvolvida pelo autor entre 2002 e 2003, no município de Coxim-MS, foram incorporados no processo de modelagem. Simulações de diferentes cenários foram realizadas, supondo infestação pela planta em represas interligadas e os resultados mostraram a quantidade de insetos necessários para controle em cada ciclo. O uso da modelagem matemática e das Cadeias de Markov permite a implementação de vários testes. Contudo, para se alcançar resultados mais precisos em relação ao controle biológico pretende-se, em trabalhos futuros, usar um modelo presa-predador e analisar com mais detalhes o problema, acrescentar mais hipóteses, além de discutir os aspectos referentes à população do predador no ambiente em questão. O trabalho é um fruto do Mestrado Profissional e foi escrito com a intenção de que docentes e estudantes do ensino médio possam compreender as resoluções dos exemplos apresentados.

Palavras-chave *Modelagem Matemática, Cadeias de Markov, Matemática Básica, Planta Aquática, Controle Biológico.*

Abstract

The aquatic plants play an important role in the dams, because help in the water filtration by removing some heavy metals, serving of fish food and shelter for some insects. However, some species are spreading and causing great inconvenience to the local population, hydroelectrics and other individuals who depend on the lakes for survival. The purpose of this work was to make an initial study of the biological control of the aquatic macrophyte *Eichhornia azurea* by inserting the insect predator *Thryp-ticus* sp., using mathematical modeling and Markov chains of order 1. For that, a brief historical of the aquatic plant and of the insect is presented, as well as concepts related to Markov chains and their applications in biomathematics are discussed, supporting the realization of the modeling of the problem. Actual data obtained from a survey conducted by the author between 2002 and 2003, in the city of Coxim-MS, were incorporated in the modeling process. Simulations were performed for different scenarios, assuming infestation by plant in interconnected dams and the results showed the amount of insects needed to control in each cycle. The use of mathematical modeling and Markov chains allows the implementation of several tests. Nevertheless, to achieve more accurate results in relation to biological control we intend, in future work, to use a predator-prey model and analyze in more detail the problem, add more hypotheses, and to discuss aspects related to the predator population in environment in question. The work is a result of the Professional Masters and was written with the intention that teachers and high school students are being able understand the resolutions of the examples presented.

Keywords *Mathematical Modeling, Markov Chains, Basic Math, Aquatic Plant, Biological Control.*

Lista de Figuras

1	Reservatório de Aimorés.	17
2	<i>Eichhornia azurea</i>	20
3	<i>Dolichopus unguulatus</i>	24
4	Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922).	31
5	Diagrama de Transição com 3 estados.	34
6	Grafo de transição de probabilidade.	35
7	Grafo de decomposição das Cadeias de Markov.	37
8	Grafo de classe de periodicidade das Cadeias de Markov.	38
9	Representação das lagoas e fluxo de água 1.	45
10	Representação das lagoas e fluxo de água 2.	47
11	Representação das lagoas e fluxo de água 3.	49
12	Quantidades de insetos por lagoa após 50 ciclos.	53
13	Representação das lagoas e taxa de fluxo de água na simulação 3.	55
14	Quantidades de insetos por lagoa após vários ciclos.	57

Lista de Tabelas

1	Entomofauna encontrada nos pecíolos de <i>Eichhornia azurea Sw. (Kunth)</i> ocorrentes no município de Coxim/MS 2002 e 2003.	23
2	Peixes adultos, fêmeas adultas e alevinos em cada geração.	30
3	Quantidade de energia transferida entre as usinas.	41
4	Quantidade de energia transferida entre as usinas e a quantidade que permaneceu.	42
5	Taxa de insetos transferido entre as represas.	45
6	Dados para simulação.	55
7	Taxa de insetos transferido entre as represas na simulação 3.	55

Sumário

1	Introdução	14
2	Macrófita Aquática <i>Eichhornia azurea</i> e <i>Thrypticus</i> sp.	20
3	Tópicos de Modelagem Matemática e Cadeias de Markov	27
3.1	Modelagem Matemática	27
3.2	Cadeias de Markov	31
3.2.1	História de Andrei Andreyevich Markov	31
3.2.2	As Cadeias de Markov	33
4	Modelagem e Simulações de Cenários	44
4.1	Modelagem 1	44
4.2	Modelagem 2	47
4.3	Simulação 1	49
4.4	Simulação 2	52
4.5	Simulação 3	54
5	Considerações Finais	58

1 Introdução

Este trabalho faz parte das exigências para a obtenção do grau de mestre em matemática, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional desenvolvido pela SBM - Sociedade Brasileira de Matemática em associação com a Universidade Federal de Goiás. O programa é destinado à professores de matemática, cuja finalidade é aperfeiçoar o ensino da matemática nos ensinos Fundamental e Médio.

A ideia foi apresentar um problema contextualizado, que abrange dados reais sobre uma espécie de planta aquática e um inseto predador e trabalhar com modelagem matemática e com Cadeias de Markov, que envolvem conteúdo de matemática do ensino médio (multiplicação de matrizes), para resolvê-lo.

Todo o processo desenvolvido para modelar o problema, assim como os cenários simulados e os conteúdos utilizados nos cálculos, podem ser reproduzidos e adaptados por professores do ensino médio, durante sua prática em aulas de matemática.

Nesta seção inicial abordaremos aspectos referentes à situação problema proposta, apresentando relevantes opiniões de autores sobre as macrófitas aquáticas, o inseto predador e a interação inseto/planta, que justificam a importância do tema.

O estudo das interações inseto/planta tem despertado o interesse de pesquisadores nos últimos anos, pois a interação entre eles está relacionada à sua aplicação econômica através do controle de pragas e ecológica. A pesquisa sobre controle de pragas ocorre devido à crescente preocupação com o impacto ambiental causado por resíduos de pesticidas e agrotóxicos empregados nas plantações e rios infestados por plantas e insetos.

Muitos fazendeiros usam pesticidas para combater as infestações de insetos em suas plantações, assim como em plantas que infestam lagos e lavouras ou pastos. Estas infestações trazem grande prejuízo para o produtor e para o meio ambiente.

Um dos problemas causados por pragas que podemos citar é a infestação de plantas aquáticas em lagoas ou represas. As lagoas por vezes são usadas como depósitos de lixo por moradores da região e por empresas que despejam os dejetos produzidos por ela sem que haja um tratamento prévio, considerando o alto custo para isso.

Existem diferentes métodos para se obter um controle da proliferação de pragas. Um deles é o controle biológico, onde se usam insetos predadores para eliminar parte da praga. O controle biológico, como conservação de inimigos naturais ou liberação de inimigo natural, pode suprimir temporariamente pragas das culturas, seja nativo ou invasivo. Estes métodos fazem sentido quando o controle de pragas é necessário apenas

em um local e em um momento específico. Portanto, o produtor interessado cobre o custo de implementação de tais práticas, a fim de reduzir as perdas financeiras devido aos danos causados pelas pragas.

O método adotado para o combate de infestações deve ser útil e eficiente no que diz respeito aos custos com o controle. Logo ele deve reduzir as perdas e ser mais conveniente e econômico do que outros métodos de controle disponíveis. Conseqüentemente, deve-se simular várias situações para que o custo não seja tão elevado.

Como existe uma interação entre os insetos e as plantas, pode-se aplicar o controle biológico como método a ser utilizado para tal necessidade, tendo em vista que os herbívoros ocupam o segundo nível trófico¹ da cadeia alimentar [3], ou seja, eles se alimentam das plantas. Partindo deste princípio serão simuladas situações em que a liberação de insetos predadores da planta será usada para controlar a infestação nos lagos. Para isso, será considerado um tipo específico de planta aquática e seu predador na fase larval.

As plantas que durante seu processo de evolução passaram para o meio aquático são chamadas de macrófitas aquáticas, porém são mais conhecidas como plantas aquáticas. Em relação as macrófitas aquáticas, foram descritas 500 espécies de herbívoros pertencentes a 75 famílias e 4 classes [22].

Alguns autores acreditam que essas plantas são raramente consumidas quando vivas, sendo funcionalmente insignificantes para a cadeia alimentar aquática [29].

No entanto, Newman (1991) [34] considerou possível que o consumo de macrófitas aquáticas vivas pelos herbívoros seja subestimado. Esta hipótese é reforçada por autores como Jacobsen e Sand-Jensen (1992) [27], e Neiff e Poi de Neiff (1984) [33].

O *Thrypticus* sp. foi reconhecido como um agente de controle biológico desde levantamentos iniciais durante a década de 1960 realizados por [5], onde foi mencionado *Thrypticus* atacando jacinto de água no norte da América do Sul e Trinidad. Esses autores descreveram e ilustraram os danos e a estimada densidade de insetos, mas eles não deram informações específicas.

Cruttwell (1973) [14] relatou investigações preliminares sobre a história de vida de uma espécie não identificada de *Thrypticus* associada com aguapé. Explorações de campo realizadas por uma equipe da América do Sul do Laboratório de Controle Biológico (SABCL) na Argentina entre 1997e e1999, mostraram que *Thrypticus* sp. atacou todas as espécies comuns de Pontederiaceae [13], onde as larvas atacam na

¹Existem três tipos de nível trófico: os produtores, consumidores e decompositores.

parte basal dos longos pecíolos de aguapé.

Partindo de estudos já comprovados e com base em pesquisas realizadas anteriormente pelo autor desta dissertação, nos anos de 2002 e 2003, sobre a abundância de larvas *Thrypticus* sp. (Diptera: Dolichopodidae) em pecíolos da macrófita aquática *Eichhornia azurea* Sw (Kunth)(Pontederiaceae), ocorrentes no município de Coxim/MS, observou-se que muitos insetos predadores vivem em plantas aquáticas, seja para se alimentarem dela ou para utilizá-la como abrigo.

Portanto, pode-se considerar que as macrófitas aquáticas são importantes componentes de ecossistemas aquáticos, possuindo papel fundamental na ciclagem de nutrientes e na formação de detritos. Frequentemente, constituem-se em substrato para alguns insetos, oferecendo proteção contra predadores, servindo de fonte direta (tecido vegetal) e indireta (substrato para crescimento de comunidade perifítica) de alimento, assim como servindo de locais de emergência de vários insetos aquáticos e semi-aquáticos.

Entretanto, em muitas lagoas estas plantas têm se tornado verdadeiros problemas, devido a um crescimento desordenado, alastrando-se demasiadamente. Na Figura 1 observa-se um reservatório na cidade de Aimorés-MG que está infestado de uma planta aquática. As populações de macrófitas aquáticas formam extensas e densas colonizações. Nestas condições, seus efeitos benéficos podem ser suplantados por interferências negativas ao próprio ambiente e às atividades do homem. Em virtude disso, elas causam grandes prejuízos aos diversos tipos de corpos hídricos.

A alta concentração destas macrófitas pode alterar os padrões de qualidade da água, como a concentração de oxigênio dissolvido, metilação do mercúrio, formação de gases tóxicos e outras [30], [10], [37], [23], promover condições adequadas para instalação e desenvolvimento de populações de organismos indesejáveis como insetos, moluscos e outros vetores de doenças humanas e animais [21]; aumentar as perdas d'água por evapotranspiração no caso de macrófitas emergentes como a *Eichhornia azurea*, flutuante ou marginais, afetar a geração de energia elétrica, reduzir a capacidade de transporte de canais de irrigação e drenagem.

Pode-se citar ainda os prejuízos à produção e qualidade dos peixes, dificuldades na navegação, redução na capacidade de armazenamento de represas rurais e interferem na captação de água para irrigação e uso público, proporcionam prejuízos ao transporte fluvial e à edificações no corpo hídrico, especialmente pontes [46].

Por outro lado, a presença das macrófitas aquáticas em pequenas quantidades é útil aos ambientes aquáticos, tendo em vista que filtram a água e servem de alimento para alguns peixes. Portanto, o objetivo não é o extermínio da planta e sim um controle do



Figura 1: Reservatório de Aimorés.
Fonte: Merenda [31].

seu crescimento, para evitar os problemas já comentados.

Existem várias maneiras de se controlar o crescimento das macrófitas aquáticas. Entre elas pode-se citar a correção do ambiente, inimigos naturais, controle químico e mecânico, além de métodos de inundação [39]. No entanto, a aplicação dessas técnicas muitas vezes esbarra nas limitações ecológicas, sociais e econômicas (Vellini 2000) Vellini recaindo em gastos elevados.

Mesmo que o controle biológico da planta aquática apresente alguns aspectos negativos, como a demora na obtenção dos resultados e o alto custo inicial, sua aplicação apresentou resultados satisfatórios em inúmeras situações, como no controle de *Salvinia* spp. na Austrália, *Alternanthera philoxeroides* em Porto Rico e *Eichhornia crassipes* no Sudão. Estes resultados mostram uma boa aceitação quanto ao emprego de tal

prática.

Assim, usar o controle biológico da planta torna-se uma maneira economicamente viável a longo prazo, uma vez que a planta é consumida por alguns insetos que já foram identificados [45]. A ideia seria encontrar uma forma de reproduzir os insetos e liberá-los na lagoa para que consumam parcialmente as plantas.

O inseto identificado como um dos predadores da planta aquática é conhecido como *Thrypticus* sp., pertence a família Dolichopodidae e a ordem Díptera. Como já foi mencionado anteriormente, ele é conhecido como um predador da planta aquática desde a década de 1960 e portanto constitui-se em um grande candidato a agente no controle biológico destas plantas.

Para tratar do estudo do controle biológico de uma planta aquática, pretende-se trabalhar com modelagem matemática e utilizar as Cadeias de Markov para simular uma situação em que três lagoas estão interligadas por córregos, onde há um fluxo de água entre elas e uma represa deságua na outra, como será mostrado adiante.

As Cadeias de Markov de ordem 1 envolvem probabilidades do estado atual para se obter resultados do estado posterior. No processo são necessárias multiplicações entre matrizes e vetores.

Diante do exposto, foram traçados os seguintes objetivos:

- Apresentar as principais características da macrófita aquática *Eichhornia azurea* e do inseto herbívoro *Thrypticus* sp.;
- Expor aspectos importantes sobre a modelagem matemática, inclusive como estratégia de ensino e aprendizagem;
- Explicitar conceitos relacionados às Cadeias de Markov e suas aplicações;
- Utilizar a modelagem matemática e as Cadeias de Markov para simular, em diferentes cenários, o número de insetos predadores necessários para que haja um controle biológico da planta;
- Obter matrizes, vetores e equações que possam representar de maneira simplificada a situação descrita.

A Seção 2 trata da macrófita aquática *Eichhornia azurea*, o que leva a proliferação indesejada, alguns meios de combate, a opinião de alguns autores e dados reais obtidos

em uma pesquisa realizada pelo autor desta dissertação. Com relação ao inseto *Thrypticus* sp., descreveremos as vantagens e desvantagens de utilizá-lo como predador em um controle biológico.

A Seção 3 inicia-se com a abordagem de conceitos importantes relacionados à Modelagem Matemática, onde apresentamos alguns exemplos de aplicações. A seção traz ainda uma pequena biografia de Andrei A. Markov e seu trabalho conhecido como as Cadeias de Markov, assim como definições e teoremas referentes ao assunto.

A Seção 4 destina-se à modelagem do problema proposto e à realização de simulações de cenários envolvendo a planta aquática *Eichhornia azurea* e o inseto predador *Thrypticus* sp.. Por fim, são apresentadas as considerações finais com algumas conclusões do autor deste trabalho e sugestões de prosseguimento das pesquisas.

2 Macrófita Aquática *Eichhornia azurea* e *Thrypticus* sp.

As macrófitas aquáticas são importantes componentes de ecossistemas aquáticos, possuindo papel fundamental na produção de nutrientes e na formação de detritos, oferecendo proteção contra predadores de outros insetos, servindo de fonte de alimento para alguns peixes.

Alguns estudos demonstram que a riqueza de espécies de insetos associados variam tipicamente com as espécies de macrófitas aquáticas [25].

A *Eichhornia azurea* é uma macrófita aquática flutuante, que apresenta longos caules providos de folhas à semelhança de um cordão que chega a atingir 2m de comprimento. Amplamente encontrada nas regiões quentes do país, tanto em mananciais de águas paradas e brejos como em águas correntes, apresenta um crescimento rápido, chegando a formar grandes estandes.



Figura 2: *Eichhornia azurea*.

Fonte: Foto tirada pelo autor em Coxim-MS no ano de 2002.

Muitas alterações no meio ambiente favorecem o crescimento de plantas aquáticas,

por exemplo a eutrofização do corpo hídrico, a introdução de organismos exóticos, a redução da diversidade e da densidade dos predadores destas plantas e alteração do regime de fluxo e da profundidade de corpos hídricos.

Assim, em lagos que estão sobre influência direta do homem são favorecidas em detrimento das demais e formam extensas e densas colonizações. Nestas condições, seus efeitos benéficos podem ser suplantados por interferências negativas ao próprio ambiente e às atividades do homem.

Devido as grandes proporções que estas plantas tomam nas lagoas e rios, elas passaram a ser consideradas pragas nos locais onde ocorrem. Com isso, as macrófitas aquáticas do gênero *Eichhornia* (popular aguapé) e seus herbívoros associados vêm despertando o interesse de muitos pesquisadores ao longo dos anos.

Nos últimos anos, a proliferação indesejada de macrófitas aquáticas tem se tornado frequente em ambientes antropizados². Isso porque as alterações ambientais como desmatamento e uso inadequado da terra levam ao carregamento de nutrientes para o leito dos rios e reservatórios, tornando a disponibilidade de nutrientes ainda maior, o que estimula a proliferação das plantas [46].

As infestações elevadas de macrófitas aquáticas nos reservatórios de usinas hidrelétricas e outros corpos hídricos geram situações em que a necessidade de executar uma medida de controle torna-se indispensável.

No reservatório de Barra Bonita, SP, encontram-se dezessete espécies de macrófitas aquáticas que ocupavam uma área de 1,87 hectares, sendo as mais importantes, Brachiaria mutica, B. subquadripara e E. crassipes as macrófitas [11].

Cavenaghi [12] também identificou a *B. subquadripara*, *B. mutica*, *E. crassipes* e *T. domingensis* como as principais macrófitas aquáticas dos cinco principais reservatórios da bacia do Rio Tietê.

Com o intuito de controlar o crescimento populacional de macrófitas aquáticas, surgiram várias técnicas diferentes como, correção do ambiente, inimigos naturais, controle químico e mecânico, além de métodos de inundação [39]. No entanto, a aplicação dessas técnicas muitas vezes esbarra nas limitações ecológicas, sociais e econômicas.

A aplicação de agentes biológicos no controle e manejo de macrófitas aparece como uma alternativa aos métodos convencionais. Algumas técnicas de controle biológico, utilizando peixes como agente predador destas macrófitas que apresentaram resultados

²Local onde o homem ocupa para exercer atividades sociais e econômicas no ambiente.

satisfatórios, são citadas por [18], o uso de insetos é citado por [1] e fungos por [39]. Embora esse método de controle seja considerado de baixo impacto ambiental, apresenta problemas relacionados a imprevisibilidade de sucesso da introdução de inimigos naturais e mesmo da técnica inundativa.

O controle químico de macrófitas aquáticas, embora empregado no exterior com resultados satisfatórios, não é utilizado no Brasil, pois não existem herbicidas regulamentados para o uso em ambiente aquático no país [39].

No Brasil as únicas modalidades de controle empregadas são: o controle preventivo com o monitoramento frequente e educação ambiental, e o controle mecânico, especialmente pela remoção das plantas do corpo hídrico.

Embora o controle mecânico apresente algumas vantagens, como ação de modo pontual nas áreas infestadas e não contaminação do ambiente com compostos químicos e tóxicos existe a preocupação em relação ao material coletado a ser descartado, haja vista a grande quantidade de biomassa envolvida nesse processo [6].

Esta modalidade de controle apresenta alguns problemas relacionados ao destino da biomassa vegetal coletada. Normalmente, os volumes são muito grandes e as plantas são provenientes de águas eutrofizadas³ com diferentes níveis de nutrientes e metais pesados, lixo, organismos patogênicos ou vetores de doença e, em sua decomposição, podem liberar grandes quantidades de substâncias químicas e contaminar solos e águas superficiais localizados em quotas mais baixas.

Esse é o problema do simples descarte de biomassa, que depende de licença ambiental junto às instituições estaduais de defesa do meio ambiente, seguindo os mesmos procedimentos requeridos para o depósito de lixo urbano, embora se conheça que as macrófitas constituem um material muito mais nobre e longe de ser incluído na categoria de resíduo urbano.

É importante avaliar os destinos para esta biomassa, uma vez que não há perspectivas de que o crescimento das macrófitas seja reduzido pela melhoria na qualidade da água ou pela introdução de outro processo de controle destas populações.

O controle biológico com a utilização de peixes, fungos ou outros insetos tem dados grandes resultados. Porém, o controle biológico apresenta alguns negatividades, por exemplo o tempo na obtenção dos resultados e o alto custo inicial. Este meio apresentou resultados satisfatórios na Austrália no controle de *Salvinia* spp. e no Sudão no controle

³Águas com grande quantidade de nutrientes.

da *Eichhornia crassipes* e isso garante uma boa aceitação quanto ao emprego desta prática no combate as plantas aquáticas.

Para se aplicar o controle biológico é necessário que primeiramente se levante os predadores desta planta. Assim, em pesquisas realizadas anteriormente pelo autor desta dissertação no ano de 2002 e 2003, estabeleceu-se os níveis de abundância de larvas de *Thrypticus* sp. encontrados nos pecíolos de *Eichhornia azurea* ocorrentes no município de Coxim-MS. Durante o levantamento da abundância aplicou-se a seguinte metodologia para obtenção do insetos predadores da planta aquática. Ao final de cada mês, foram amostradas manchas de *Eichhornia azurea* ocorrentes numa lagoa permanente localizada no município de Coxim-MS. Nessas manchas eram retiradas cinco parcelas de 50 X 50 cm de macrófita ao longo de um transecto estabelecido na área de maior densidade da mancha. Entre as parcelas foi mantida a distância de 2 metros. Todo material enquadrado nas parcelas foi recolhido em sacos plásticos, para triagem no laboratório.

No laboratório os pecíolos foram retirados, pesados para estimativa da biomassa a fresco e então colocados em frascos plásticos levemente umedecidos por um período de 30 dias, para obtenção dos insetos adultos cujas larvas se desenvolveram no interior destes pecíolos. Todos os insetos obtidos foram fixados em álcool 70% e identificados os táxons do grupo família.

A biomassa total de pecíolos obtida nas coletas foi igual a 5212g. Quanto aos insetos coletados, foram obtidos 120 indivíduos pertencentes a 08 famílias. Das famílias obtidas mereceram destaque a família Phloeothripidae (Thysanoptera) com 51 indivíduos e a família Dolichopodidae (Diptera) com 42 indivíduos, de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1: Entomofauna encontrada nos pecíolos de *Eichhornia azurea Sw. (Kunth)* ocorrentes no município de Coxim/MS 2002 e 2003.

ORDEM	FAMÍLIA	NÚMERO DE INDIVÍDUOS
Diptera	Dolichopodidae	42
Diptera	Cecidomyiidae	05
Diptera	Rhagionidae	05
Diptera	Simulíidae	02
Coleoptera	Curculionidae	03
Orthoptera	Sp1	03
Thysanoptera	Phloethripidae	51
Hymenoptera	Mymaridae	09
TOTAL	08	120

Nas plantas foram encontrados vários tipos de insetos, porém será dado enfoque ao *Thrypticus* sp. (Diptera: Dolichopodidae) pois esta mosca se alimenta do pecíolo da planta durante sua fase larval.

As Dolichopodidae são moscas de pernas longas, formam uma grande família de moscas verdadeiras⁴ com mais de 7.000 espécies descritas em cerca de 230 gêneros, distribuídos em todo o mundo. O gênero *Dolichopus* possui o maior número de espécies, com cerca de 600 exemplares. Elas geralmente são pequenas moscas com olhos grandes e proeminentes e um elenco metálico à sua aparência, embora considerável variação é observada. A maioria tem pernas longas, embora alguns não o fazem. A Figura 3 mostra a imagem de uma mosca Dolichopodidade, a espécie *Dolichopus unguulatus*.



Figura 3: *Dolichopus unguulatus*.
Fonte: Hans Ulrich e Rüdiger Schmels [24].

Os machos têm frequentemente alargadas genitais, que pode ser útil para o reconhecimento da espécie. Os adultos são predadores de outros pequenos insetos. Estas espécies, *Thrypticus truncatus* e *T. sagittatus*, ambos têm larvas fitófagos que vivem nos tecidos dos pecíolos. Eles cavam sua mina através dos pecíolos e alimentam-se da seiva dos feixes vasculares.

⁴Moscas com duas asas.

De um modo geral, o ciclo das moscas passa por quatro fases [9]:

- Ovo: precisa de um período de 8 a 12 horas para eclodir, dependendo da temperatura. Em temperaturas de congelamento pode aumentar esse período para até 50 horas.
- Larva: sofre três mudas de pele antes de formar o casulo, em 3 a 6 dias (em climas frios pode levar quase um mês. Pode sobreviver a zero graus por vários dias. Alimenta-se vorazmente de resíduos orgânicos. Respira através de aberturas existentes nas laterais e na extremidade posterior do corpo. Necessita de umidade mas não sobrevive no substrato coberto com água.
- Pupa: Formada pela desidratação (ressecamento) da pele da larva de 3º estágio, tem forma oval regular e coloração castanha. Em 3 a 6 dias dará origem ao adulto (21 dias em climas frios).
- Adulto: Vive por 25 a 35 dias. A fêmea inicia a postura em 3 a 4 dias de vida e após o acasalamento e põe de 100 a 150 ovos de cada vez, podendo fazer até seis posturas durante a vida.

Nove novas espécies de *Thrypticus* (Diptera, Dolichopodidae) são descritas na América do Sul: *T. truncatus*, *T. sagittatus*, *T. Yanayacu*, *T. circularis*, *T. chanophallus*, *T. romus*, *T. azuricola*, *T. formosensis*, e *T. Taragui*. Todas as nove espécies foram criadas a partir dos pecíolos e caules de plantas aquáticas e semi-aquáticas Pontederiaceae, cinco deles de aguapé, *Eichhornia* [7].

Estas espécies de *Thrypticus* postam ovos em locais difíceis e têm potencial como agentes de controle biológico de *Eichhornia*. Vários trabalhos são apresentados na história de vida dessas duas espécies, com base em observações de campo e câmara de criação.

O *Thrypticus* sp. é um predador da planta aquática em sua fase larval. O comprimento das larvas dependem da idade e da nutrição recebida. Em geral, as larvas das espécies são 2-3 mm de comprimento. As espécies de *Thrypticus* se desenvolvem dentro do aerênquimas das suas plantas hospedeiras.

A estrutura deste aerênquimas é semelhante entre espécies, que consiste, a partir do interior da epiderme, de uma camada fina e compacta de células parenquimatosas com pequenos feixes direto sob a epiderme, por baixo, o pecíolo é composta por ar preenchida com células ao redor dos feixes vasculares distribuídos regularmente dentro do

pecíolo. Esses feixes são maiores do que aqueles encontrados sob a epiderme. Variações particulares desta morfologia de base podem ser encontrados entre as espécies.

As minas são feitas por uma série de células de ar adjacentes ligados por orifícios feitos no septos pelas larvas. O tamanho dos orifícios é sempre igual ao diâmetro do corpo das larvas. As larvas de todas as espécies têm hábitos alimentares semelhantes, obtendo o seu alimento a partir da seiva dos orifícios de alimentação raspados nos feixes vasculares.

Assim, com todas as características descritas, o *Thrypticus* sp. poderia ser usado como predador da planta aquática *Eichhornia azurea* para obter seu controle biológico e a modelagem matemática proposta neste trabalho estabelece esta hipótese.

Partindo dos dados do levantamento sobre o número de insetos predadores da macrófita aquática *E. azurea*, encontrados nos pecíolos ocorrentes no município de Coxim/MS, um dos objetivos passa a ser a discussão da modelagem da situação problema, usando as Cadeias de Markov para otimizar o número de insetos necessários para predação da planta. O cenário principal considerado é uma região com três represas interligadas por córregos e a intenção é obter resultados que hipoteticamente levem ao controle, com o menor grau de impacto ambiental.

Outro objetivo é mostrar como professores podem trabalhar com problemas deste tipo, de modo que os alunos percebam a importância da matemática aplicada em situações reais.

3 Tópicos de Modelagem Matemática e Cadeias de Markov

Nesta seção são abordados tópicos sobre a modelagem matemática, onde são citados exemplos de problemas que foram modelados por Bassanezi (2011) [2]. Em seguida, será exposta uma breve biografia de Markov e o tema desenvolvido por ele, conhecido como Cadeias de Markov.

3.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos, tais como física, química, biologia, economia e engenharias. Ou seja, modelagem matemática consiste em descrever matematicamente um fenômeno.

Os modelos matemáticos apresentam uma série de aspectos úteis do ponto de vista científico. Além de apresentar naturalmente uma linguagem concisa, que pode vir a facilitar sua manipulação, um modelo matemático traz também aspectos como a possibilidade de confirmar ou rejeitar determinadas hipóteses relacionadas a complexos sistemas, revelar contradições em dados obtidos e/ou hipóteses formuladas, prever o comportamento de um sistema sob condições não testadas ou ainda não “testáveis”, dentre outros.

Por outro lado, quanto maior é a proximidade do modelo com a realidade, mais complexo será o modelo. Isto significa um maior número de parâmetros e consequentemente uma maior dificuldade tanto na obtenção de dados a partir do modelo quanto na interpretação desses dados gerados pelo modelo em questão.

Segundo Howard Emmons (De Vries, 2001) [47], “o desafio em modelagem matemática não é produzir os modelos descritivos mais compreensíveis, mas sim produzir modelos suficientemente simples que incorporam as principais características do fenômeno em questão”. Portanto, a modelagem matemática ajuda a evitar ou reduzir a necessidade de gastos excessivos em experimentos, ou até mesmo simular experimentos impossíveis de serem realizados na prática.

Para Bassanezi 2011 [2], “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

A modelagem alia teoria e prática, motiva o usuário a buscar o entendimento da realidade que o cerca e buscar meios para agir sobre ela e transformá-la.

A modelagem matemática de fenômenos biológicos ganhou credibilidade com os modelos de interação entre espécies devidos a Lotka-Volterra e Kostitzin e com os modelos de epidemiologia de Kermack-McKendrick nos meados do século XX. A Biomatemática, que associa a biologia e a matemática, é uma área em ascensão, onde os pesquisadores se dedicam ao estudo de aplicações da matemática em problemas biológicos. Nos últimos anos a Biomatemática tem se desenvolvido graças a novas teorias tais como, Teoria Fuzzy, Espaços de Aspectos, Teoria do Caos, etc.

Muitos problemas envolvendo a modelagem em biomatemática são descritos no livros de Leah 1998 [28], a saber: divisão celular, população de insetos, propagação anual das plantas, entre outros.

Um modelo matemático depende dos objetivos e recursos disponíveis do que se propõe modelar. Assim, um modelo pode ser muito bom para o modelador e não ter utilidade para quem precise usá-lo, tendo em vista que os problemas modelados são mais simples que os modelos relamente úteis, principalmente quando se trata de dinâmica do fenômeno estudado.

De acordo com Bassanezi o modelo se torna útil quando satisfaz uma necessidade humana.

No que se refere a utilidade, reconhecemos que uma coisa é considerada útil quando tem a capacidade de satisfazer de algum modo, uma necessidade humana - desta forma a utilidade depende essencialmente do usuário [2].

Se um modelo é insuficiente para um certo problema, é preciso tentar novos caminhos que o melhore ou compará-lo com outro já existente. Um modelo nunca é definitivo, pois, é sempre um aproximação da realidade.

O uso da modelagem também no ensino básico ou superior pode ser uma motivação para os alunos, já que eles poderão partir de um problema real ou não e buscar os conhecimentos necessários para solucioná-lo, e com isso levantar hipóteses, fazer simplificações e testar as soluções. Partir das teorias e trabalhar outros fatos e fenômenos propostos pela realidade, elaborando modelos do mundo real.

No ensino médio, os professores de matemática podem usar a modelagem como metodologia de ensino, onde o aluno tem a oportunidade de buscar o próprio conhecimento. A modelagem possui multidisciplinariedade e permite o envolvimento de vários campos como a Física, a Química, a Biologia.

A modelagem fomenta essas possibilidades num processo de ensino-aprendizagem em que a Matemática pode ser encarada como um jogo maior em que os perdedores são aqueles que não conseguem se divertir jogando. [2].

Para que um professor de matemática ensine bem seus alunos é preciso buscar estratégias alternativas de ensino-aprendizagem que facilitem sua compreensão e utilização dos conhecimentos obtidos e a modelagem matemática em seus vários aspectos é um processo que alia teoria e prática, motiva os alunos na busca por entendimento da realidade que o cerca e meios para agir sobre ela e transformá-la.

Vejamos um problema solucionado via modelagem matemática, obtido do livro de Bassanezi 2011, 98p.

Dinâmica populacional da “Tilápia do Nilo”

As tilápias são peixes de água doce, da família Cichlidae que apresentam, essencialmente, 3 estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. Adultos quando têm a capacidade de se reproduzir, o que ocorre proximadamente aos 4 meses de idade. Em condições naturais, quando a temperatura da água permanece acima de 20°C, a tilápia pode desovar a cada 2 meses. As fêmeas põem seus ovos nos ninhos que são fecundados pelos machos. Após a fecundação, as fêmeas recolhem os ovos na boca para a incubação, eclosão e proteção das larvas. A eclosão dá-se, aproximadamente, em 72 horas e as larvas continuam na boca por um período de 7 a 10 dias. O número de larvas produzidas depende do tamanho da fêmea, variando de 100 a 600 por desova com uma taxa de mortalidade igual a 50%. Num processo contínuo de criação destes peixes é recomendável que exista um macho para cada duas fêmeas.

Para a formulação do modelo matemático da dinâmica populacional da tilápia, consideramos:

- P_0 : quantidade inicial de peixes adultos no tanque de reprodução, sendo $\frac{2}{3}$ fêmeas;
- θ : quantidade de ovos de uma desova por cada fêmea, sendo que somente a metade tem sucesso de eclodir e sobreviver.

Sejam P_t , F_t e A_t , respectivamente, quantidade de peixes adultos, fêmeas adultas e alevinos em cada geração.

Vamos supor que metade dos alevinos sejam fêmeas. Então o número de alevinos gerados em cada estágio é dado por:

$$A_t = F_t \times \frac{\theta}{2} \text{ para } t \geq 1$$

Usando estas informações num processo iterativo obtemos a Tabela 2:

Tabela 2: Peixes adultos, fêmeas adultas e alevinos em cada geração.

$t = \text{tempo}(2 \text{ meses})$	$P_t = \text{adultos}$	$F_t = \text{fêmeas}$	$A_t = \text{alevinos}$
0	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	0
1	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	$\frac{\theta}{2}F_1$
2	P_0	$\frac{2}{3}P_0$	$\frac{\theta}{2}F_2 + \frac{\theta}{2}F_1$
3	$P_0 + A_1$	$\frac{2}{3}P_0 + \frac{1}{2}A_1$	$(A_2 - A_1) + \frac{\theta}{2}F_3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t	$P_{t-1} + A_{t-2}$	$F_{t-1} + \frac{1}{2}A_{t-2}$	$(A_{t-1} - A_{t-2}) + \frac{\theta}{2}F_t$

Como

$$A_t = (A_{t-1} - A_{t-2}) + \frac{\theta}{2}F_t = \frac{\theta}{2}(F_t + F_{t-1})$$

e

$$F_t = F_{t-1} + \frac{1}{2}A_{t-2}$$

então

$$F_t = F_{t-1} + \frac{1}{2} \frac{\theta}{2} (F_{t-2} + F_{t-3}) \text{ com } F_0 = F_1 = F_2 = \frac{2}{3}P_0.$$

Logo temos um modelo que permite calcular o número de fêmeas adultas conhecendo o número de fêmeas em três estágios imediatamente inferiores. Em diversos modelos matemáticos de fenômenos físicos, o tempo, que costuma ser a variável independente, varia continuamente. Assim, a variação é uma grandeza infinitesimal e as mudanças na variável dependente podem ser descritas por derivadas.

Nesses casos, usamos as equações diferenciais para construir modelos matemáticos que descrevam melhor, em termos numéricos, um determinado fenômeno. Este é um exemplo envolvendo equações de diferenças, mais adiante será visto outro exemplo de modelagem matemática envolvendo as Cadeias de Markov.

3.2 Cadeias de Markov

As Cadeias de Markov são um tipo especial de processo no qual utilizamos matrizes para otimizar resultados. O matemático Andrey Markov em 1906 conseguiu os primeiros resultados para estes processos.

Atualmente, as Cadeias de Markov têm sido estudadas e utilizadas em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, ciências biológicas, sociais e administrativas, probabilidades ligadas a jogos e evolução de populações.

3.2.1 História de Andrei Andreyevich Markov



Figura 4: Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922).
Fonte: Silva [44].

Andrei Andreyevich Markov, Figura 4, nasceu em Ryazan na Rússia no dia 14 de junho de 1856. Ele fez o ensino secundário em São Petersburgo, onde mostrou talento excepcional para a matemática. Seu primeiro trabalho ainda realizado no ginásio sobre equações diferenciais lineares não era novo, porém levantou expectativas nos principais professores da universidade, Korkin e Zolotarev.

Em 1874, ele entrou na Física e Matemática da Universidade de São Petersburgo, onde participou de seminários dirigidos por Korkin e Zolotarev e assistiu a palestras de Chebyshev, o chefe do departamento de matemática.

Markov graduou-se na Universidade de São Petersburgo (1878) e ganhou medalha de ouro pelo trabalho na integração de equações diferenciais por meio de frações contínuas.

Ele se tornou mestre em 1880 com sua tese sobre “as formas quadráticas binárias com determinante positivo”.

Com o término do mestrado Markov passou a atuar como professor na mesma Universidade enquanto estudava em seu doutorado que concluiu em 1884 com sua tese “Em certas aplicações de frações contínuas”. A partir de 1900 estudou processos estocásticos.

Como palestrante, Markov exigiu muito de seus alunos [48].

Suas palestras foram distinguidas por um rigor irrepreensível. Ele incluiu em seus cursos muitos resultados recentes de investigações, embora muitas vezes omitindo questões tradicionais. As palestras foram difíceis, e somente os estudantes sérios poderia compreendê-lo. Durante suas palestras ele não se preocupava com a ordem das equações no quadro, nem sobre a sua aparência pessoal.

Markov tornou-se um professor extraordinário na Universidade de São Petersburgo em 1886 e um professor ordinário em 1893. Chebyshev indicou Markov como adjunto da Academia Russa de Ciências, em 1886. Ele foi eleito como membro extraordinário em 1890 e um acadêmico comum em 1896.

Os primeiros trabalhos de Markov foram em teoria dos números e análise, principalmente em frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e convergência de séries. O método das frações contínuas foi inicialmente desenvolvido por seu professor Pafnuty Chebyshev (1821-1894), mas Markov descobriu que poderia aplicar o conhecimento destas frações à teoria de probabilidade [15].

As Cadeias de Markov apareceram em um trabalho onde em um certo texto ele estudava a probabilidade de uma consoante ocorrer em uma determinada posição de uma palavra qualquer. Como hipótese, ele supôs que a probabilidade deveria depender apenas se a letra precedente à consoante fosse uma vogal ou outra consoante. Deste estudo nasceram as Cadeias de Markov.

No desenvolvimento da teoria de processos estocásticos onde as Cadeias de Markov são um tipo especial desses processos, foi o que tornou Markov um famoso cientista. Sua teoria é aplicada em diversas áreas como física atômica, teoria quântica, biologia, genética, comportamento social, economia e finanças.

Em 20 julho de 1922 Andrei A. Markov faleceu na então cidade de Petrogrado, hoje São Petersburgo, na Rússia.

Em 1923 Norbert Winter se tornou o primeiro autor a tratar rigorosamente um

processo contínuo de Markov. A teoria geral dos processos de Markov foi estabelecida em 1930 por Andrei Kolmogorov.

3.2.2 As Cadeias de Markov

Os cálculos em probabilidade levantam um questionamento quanto a existência ou não da dependência em ocorrências de fenômenos simultâneos ou sucessivos. Partindo destes questionamentos sobre a teoria de probabilidades é que muitos matemáticos como, Thomas Bayes, Kolmogorov, Fisher, Pearson, foram em busca de respostas a perguntas similares, e com isso contribuíram no desvendar desse fascinante universo das incertezas [19]

Em particular, pode-se citar Andrei A. Markov, precursor no estudo da propriedade da perda de memória, propriedade que levou ao desenvolvimento da teoria sobre Cadeias de Markov, ferramenta de grande aplicabilidade nos mais diversos ramos da ciência.

Cadeias de Markov são os mais simples modelos matemáticos para os fenômenos aleatórios que evoluem no tempo. Sua estrutura simples torna possível dizer muito sobre o seu comportamento. Ao mesmo tempo, a classe das Cadeias de Markov é rico suficiente para servir em diversas aplicações [36].

Muitos fenômenos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados, pelo menos em uma primeira aproximação, como se os fenômenos passassem a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um estado para o seguinte, ocorre segundo uma certa probabilidade. No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo é denominado de Processo de Markov e uma sequência de estados envolvida nesse processo é denominada de Cadeias de Markov[8].

As Cadeias de Markov envolvem uma matriz, denominada matriz de transição, cujos elementos são as probabilidades de transição de um estado para outro. Para resolver um problema usando as Cadeias de Markov o diagrama de transição (ver Figura 5) tem o objetivo de facilitar na obtenção da matriz de transição.

O diagrama de transição é uma representação gráfica das Cadeias de Markov. Neste diagrama são visualizados os estados, representados por círculos, e as probabilidades de transição entre os estados. A Figura 5 mostra um diagrama de transição com 3 estados.

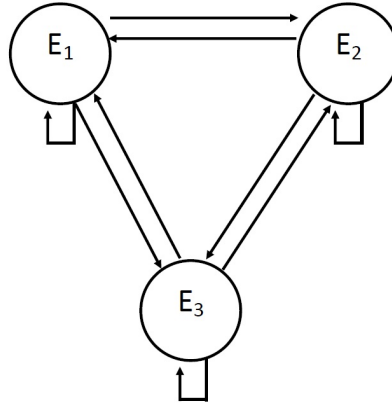


Figura 5: Diagrama de Transição com 3 estados.
 Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

As Cadeias de Markov são métodos matemáticos em que podemos simular o passo seguinte de um processo conhecendo apenas o estágio anterior. Em geral, o seu uso recai em um problema que envolve matrizes e sistemas lineares.

A gama de aplicações dos modelos que envolvem as Cadeias de Markov é verdadeiramente grande. Elas incluem praticamente qualquer sistema dinâmico cuja evolução ao longo do tempo envolve incerteza, desde que o estado do sistema seja adequadamente definido.

Primeiramente consideremos as Cadeias de Markov em que as mudanças de estado em determinados instantes de tempo n seja denotado por X_n e que pertença a um conjunto S de estados possíveis, chamado espaço de estado.

Vamos supor que $S = \{1, \dots, M\}$, para algum inteiro positivo m . As Cadeias de Markov são descritas em termos das probabilidades de transição p_{ij} .

Matematicamente,

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in S.$$

O pressuposto fundamental dos processos de Markov é que as probabilidades de transição p_{ij} são aplicadas sempre que voltar ao estado inicial, não importa o que aconteceu no passado. Portanto a probabilidade de ocorrer X_{n+1} depende somente de X_n .

De acordo com [16] um modelo de Cadeias de Markov é especificado por meio da identificação:

- (a) conjunto de estados $S = \{1, \dots, M\}$.
- (b) conjunto de transições possíveis, ou seja, os pares (i, j) , para que $p_{ij} > 0$.
- (c) os valores numéricos desses p_{ij} são positivos.

As Cadeias de Markov especificadas são uma sequência de variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2, \dots , que tomam valores em S e que satisfaz

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{ij}$$

para todo n , todos os estados $i, j \in S$ e todas as possíveis sequências i_0, \dots, i_{n-1} de estados de anteriores.

Todos os elementos de um modelo de Cadeias de Markov podem ser escritos como uma matriz de probabilidade, que é simplesmente uma matriz bidimensional cujo elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna é p_{ij} .

Assim,

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}.$$

Com a finalidade de agilizar o entendimento dos processos é de grande valia utilizar grafos para expor o modelo da probabilidade de transição. A Figura 6 apresenta um exemplo de grafo, cujos nós $\{1, 2, 3, 4\}$ são os estados e os arcos (setas) são as possíveis transições.

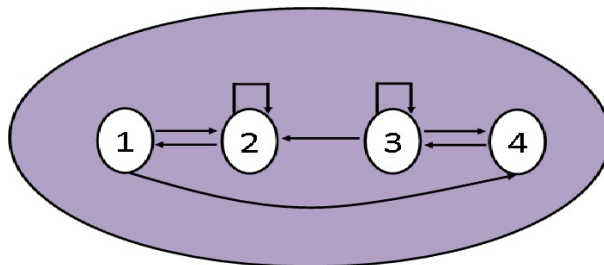


Figura 6: Grafo de transição de probabilidade.
Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

Muitos problemas que envolvem as Cadeias de Markov exigem o cálculo de probabilidade em algum momento futuro condicionado ao estado atual. Esta probabilidade de transição de n -passos é definida por

$$r_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

ou seja, $r_{ij}(n)$ é a probabilidade de que após n períodos de tempo o estado seja j , dado que o estado atual é i .

Isto pode ser calculado usando a recursão, conhecida como a equação **Chapman-Kolmogorov**.

Teorema 3.1. *As probabilidades de transição de n -passos podem ser obtidos pela fórmula recursiva*

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1)p_{kj}$$

para $n > 1$, e todo i, j começado com

$$r_{ij}(1) = p_{ij}.$$

Demonstração:

Seja

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^m P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_0 = i),$$

então

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1)p_{kj},$$

como

$$r_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i),$$

conclui-se que

$$r_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1)p_{kj}.$$

Em particular, alguns estados após serem visitados uma vez estão determinados a

serem revisitados mais uma vez, enquanto que para alguns outros estados este pode não ser o caso. O mecanismo pelo qual isto ocorre pode ser classificado quanto a frequência nas visitas à longo prazo.

Dizemos que i é estado recorrente se para todo j que é acessível a partir de i ter i acessível a partir de j . Assim, o estado recorrente pode ser visitado um número infinito de vezes.

Um estado é chamado de transitório se não é recorrente, assim ele é visitado um número finito de vezes.

Para Dimitri [16],

- As Cadeias de Markov podem ser decomposta em uma ou mais classes recorrentes e possivelmente alguns estados transitórios.
- Um estado recorrente é acessível a partir de todos os estados em sua classe, mas não é acessível a partir de estados recorrentes.
- Um estado transitório não é acessível a partir de qualquer estado recorrente.
- Pelo menos um possível estado recorrente é acessível a partir de um determinado estado transitório.

A Figura 7 apresenta um exemplo de decomposição das Cadeias de Markov. A decomposição fornece uma ferramenta conceitual potencial para raciocinar sobre as Cadeias de Markov e visualizar a evolução do seu estado. Observa-se que uma vez que o estado começa em recorrente, ele permanece recorrente e uma vez que todos os estados são acessíveis a partir de outro, eles serão visitados um número infinito de vezes.

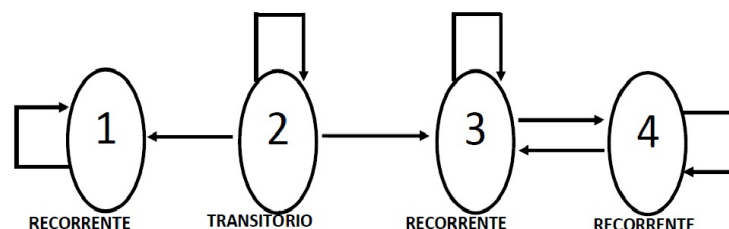


Figura 7: Grafo de decomposição das Cadeias de Markov.
Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

Uma classe recorrente é de especial interesse e se relaciona com a presença ou ausência de um determinado padrão periódico. Em particular, uma classe de repetição é dito ser periódica se seus estados podem ser agrupadas em subconjuntos disjuntos, para que todas as transições de um subconjunto possam ser levados ao próximo subconjunto.

Assim, em uma classe de repetição periódica nós nos movemos com a sequência de subconjuntos em ordem, em seguida acabamos no mesmo subconjunto. Veja na Figura 8, a classe recorrente 4 e 5 é periódica, assim como a classe 1. As classes 2 e 3 são aperiódicas.

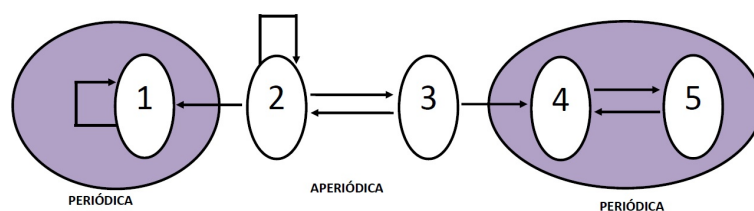


Figura 8: Grafo de classe de periodicidade das Cadeias de Markov.
Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

Nos estudos que envolvem as Cadeias de Markov o interesse é o estado de ocupação a longo prazo, ou seja, nas probabilidades de transição $r_{ij}(n)$ quando n é muito grande. Assim, $r_{ij}(n)$ pode convergir para valores de estado estacionário que são independentes do estado inicial. Porém depende-se do número de estados de repetição.

No entanto, o número de estados de repetição não restringe o processo das Cadeias de Markov, e com isso pode-se limitar a atenção para as cadeias que envolvem uma única classe recorrente e algumas transitórias, pois uma vez que o estado entra em uma classe recorrente, ele vai ficar dentro dessa classe.

Portanto, para cada estado j , as probabilidades de transição $r_{ij}(n)$ se aproxima de um valor limite, que é independente de i . Este valor limite, é denotado por π_j , onde

$$\pi_j \approx P(X_n = j),$$

quando n é grande, e chama-se probabilidade de **estado estacionário de j**.

Desde que as probabilidades de estado estacionário π_j tenha soma igual a 1, eles formam uma probabilidade de distribuição no espaço de estado, a chamada **distribuição estacionária da cadeia**.

Assim, se

$$P(X_0 = j) = \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

então

$$P(X_1 = j) = \sum_{k=1}^m P(X_0 = k)p_{kj} = \sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj} = \pi_j.$$

Logo, as equações

$$\pi_j = \sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

são chamadas **equações de equilíbrio**, que são consequências do teorema de Chapman-Kolmogorov.

Uma vez que a convergência de $r_{ij}(n)$ para algum π_{ij} é dada como certa, podemos considerar a equação

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^m r_{ik}(n-1)p_{kj}.$$

Tomando o limite em ambos os lados com $n \rightarrow \infty$, obtemos as equações de equilíbrio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{ij}(n) = \pi_j, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots$$

Porém, algo peculiar também pode acontecer aqui, que não é possível se o número de estados é finito. Os limites π_j podem não ter soma igual a 1, de modo que (π_1, π_2, \dots) não podem ser uma distribuição de probabilidades.

Todavia, pode-se enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Teorema de Convergência de Estado Estacionário*

Considere que

- *cada estado é acessível a partir de todos os outros Estados*
- *o conjunto de todos os estados é aperiódico, no sentido de que não existe $d > 1$, de tal que os estados podem ser agrupados em $d > 1$ subconjuntos disjuntos S_1, \dots, S_d de modo que todas as transições de um subconjunto levam ao próximo subconjunto.*

De acordo com as premissas, de acessibilidade e aperiodicidade anteriores só há duas possibilidades:

- O $r_{ij}(n)$ converge para uma distribuição de probabilidade do estado estacionário (π_1, π_2, \dots) . Neste caso, os π_j resolve as equações de equilíbrio única, juntamente com a equação de normalização $\pi_1 + \pi_2 + \dots = 1$. Além disso, π_j tem uma interpretação de frequência esperada:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{ij}(n)}{n},$$

onde $v_{ij}(n)$ é o número esperado de visitas ao estado j dentro das n primeiras transições, a partir do estado i .

- Toda a $r_{ij}(n)$ converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$ e as equações de equilíbrio não têm solução, que não seja $\pi_j = 0$ para todo j .

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada no livro Álgebra Linear Aplicada de Ben Noble [35].

Um modelo matemático em que se usa as Cadeias de Markov será descrito como exemplo. Este modelo foi desenvolvido pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e apresentado em forma de vídeo⁵.

Que a força esteja com você

Dois Trainees têm a missão de mostrar ao chefe que a reabertura de uma usina hidrelétrica é sustentável. Para isso, eles criam um modelo matemático que envolve operações entre matrizes e vetores. O processo conhecido como Cadeias de Markov foi utilizado, para otimizar os resultados e simular situações que envolvem três usinas hidrelétricas.

O problema apresenta o termo sustentabilidade⁶, termo adotado na Agenda 21 que foi criada na conferência Eco 92 no Rio de Janeiro em 1992, que tratou da importância do comprometimento de todos os países com o estudo de soluções para problemas sócio-ambientais.

Segundo o Relatório Brundtland 1987, “NOSSO FUTURO COMUM”, Sustentabilidade é suprir as necessidades da geração presente sem afetar a habilidade das gerações futuras de suprir a sua. Está relacionada com a continuidade dos aspectos econômicos, sociais, culturais, e ambientais da sociedade humana.

⁵Este vídeo está disponível em: www.m3.ime.unicamp.br.

⁶Conceito relacionado com aspectos econômicos, sociais, culturais e ambientais.

Portanto, para que haja sustentabilidade é necessário que seja ecologicamente correto, economicamente viável, socialmente justo e culturalmente aceito por toda a comunidade, fornecendo o melhor para as pessoas e para o meio ambiente, tanto agora como para o futuro.

O problema apresenta três usinas hidrelétricas em funcionamento e uma quarta usina que está desativada com a possibilidade de ser reativada. Todas as usinas possuem a mesma capacidade de produção. Pretende-se descobrir se a reativação da quarta usina é uma decisão sustentável.

Os Trainees concluem que a reativação é sustentável, uma vez que não haverá impacto ambiental já que a usina está construída, logo é economicamente viável e ecologicamente correto, será culturalmente aceita e socialmente justa, pois haverá oferta de emprego para a população.

A usina 4 não pode ser reativada de uma única vez, ela deve ser reativada aos poucos e diminuir a produção nas outras três usinas na mesma proporção para que não haja choque no sistema.

Para isso os Trainees usam as Cadeias de Markov para realizarem simulações a fim de encontrar a melhor maneira de realizar a transferência da produção das três usinas para a quarta usina.

Uma primeira situação propõe que sejam transferidos 15% da energia da usina 1 para a usina 4, 5% da usina 1 para a usina 2 e 5% da usina 1 para a usina 3. Em seguida transferir 15% da energia da usina 2 para a usina 4, 5% da usina 2 para a usina 3 e por fim transferir 15% da energia da usina 3 para a usina 4. O procedimento será realizado por dois meses consecutivos.

Com a situação descrita, obtém-se a Tabela 3. Esta tabela mostra a quantidade de energia transferida das usinas.

Tabela 3: Quantidade de energia transferida entre as usinas.

	Usina 1	Usina 2	Usina 3	Usina 4
Usina 1		0%	0%	0%
Usina 2	5%		0%	0%
Usina 3	5%	5%		0%
Usina 4	15%	15%	15%	

A diagonal mostra a quantidade de energia que permaneceu na própria usina.

Para viabilizar o entendimento, a Tabela 4 foi escrita na forma de matrizes e os valores passados para números decimais

Tabela 4: Quantidade de energia transferida entre as usinas e a quantidade que permaneceu.

	Usina 1	Usina 2	Usina 3	Usina 4
Usina 1	75%	0%	0%	0%
Usina 2	5%	80%	0%	0%
Usina 3	5%	5%	85%	0%
Usina 4	15%	15%	15%	100%

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,05 & 0,85 & 0 \\ 0,15 & 0,15 & 0,15 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

A matriz (2) é o vetor cujos valores são as quantidades de energia gerada inicialmente por cada usina. Como as usinas 1,2 e 3 estavam com 100% da capacidade e a 4 não estava em funcionamento, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Portanto, para saber a situação futura, aplica-se o produto da matriz (1) pela matriz vetor (2) que representa a situação inicial, ou seja

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,05 & 0,85 & 0 \\ 0,15 & 0,15 & 0,15 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,85 \\ 0,95 \\ 0,45 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

A matriz (3) é o resultado obtido para 1 mês. Como pretende-se obter o resultado para 2 meses seguidos, faz-se o produto da matriz (3) pela matriz (1)

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,05 & 0,85 & 0 \\ 0,15 & 0,15 & 0,15 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,85 \\ 0,95 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5625 \\ 0,7175 \\ 0,8875 \\ 0,8325 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Este último resultado, matriz (4), corresponde exatamente à produção de cada usina após 2 meses, ou seja, a usina 1 estaria com 56,25% da produção, a usina 2 estaria com 71,75% da produção, a usina 3 estaria com 88,75% da produção e a a usina 4 estaria com 83,25% da produção.

Este resultado foi encontrado na simulação exibida pelos Trainees. Partindo das matrizes obtidas, pode-se realizar várias simulações a fim de se alcançar o melhor resultado possível. Esta é uma das finalidade das Cadeias de Markov.

Portanto, pretende-se mostrar como esse método pode auxiliar no estudo do processo de controle biológico da planta aquática, indicando de forma sistemática como é possível realizar tal feito.

Após a abordagem dos conceitos matemáticos sobre a modelagem matemática, as Cadeias de Markov e os aspectos biológicos importantes da sobre a macrófita aquática *Eichhornia azurea* e o inseto *Thrypticus* sp., na próxima seção serão apresentadas as simulações de cenários envolvendo lagoas infestadas pela planta, onde serão mostrados passo a passo os procedimentos adotados para modelar o problema que simule hipoteticamente, o controle biológico da planta.

4 Modelagem e Simulações de Cenários

Tendo em vista que o estudo do controle biológico das plantas aquáticas é essencial para a qualidade de vida e preservação do meio ambiente e de posse dos dados levantados, pretende-se elaborar modelos matemáticos para otimizar, hipoteticamente, o número de insetos predadores à ser inserido em cada represa.

As Cadeias de Markov de ordem 1 serão utilizadas em simulações de situações envolvendo as plantas e os insetos, onde será considerado apenas um ciclo de vida de tais insetos.

O ciclo completo dos insetos pode levar semanas, meses ou mesmo anos. Contudo, é habitual usar uma única geração, como a unidade básica de tempo ao tentar gravar um modelo para o crescimento da população de insetos. Vários estágios do ciclo de vida podem ser representado escrevendo várias equações de diferenças [28].

4.1 Modelagem 1

Segundo o biólogo e professor da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dr. Gustavo H. C. Vieira, a infestação de lagos por macrófitas aquáticas depende de vários fatores, como o nível de claridade, nutrientes na água, abundância de predadores, etc., porém muitas vezes se considera tal infestação quando a área ocupada pelas macrófitas atinge 70% da área do lago.

Portanto, vamos supor que os lagos estão com 100% de sua área ocupada por macrófitas aquáticas e modelaremos situações que estude o controle de 30% dessas plantas, obtendo uma taxa menor ou igual a 70%.

Partindo da situação problema, para escrevê-la em equações matemáticas o primeiro passo é determinar quais são as grandezas conhecidas e desconhecidas envolvidas, para que possamos relacioná-las de alguma forma.

Considere o cenário em que três represas estão interligadas por córregos, com taxas de fluxos de água entre elas. Denotemos as represas por R_1 , R_2 e R_3 e a partir das taxas obtemos a matriz que as representa. Em seguida, escrevemos o vetor que representa o número de insetos existentes inicialmente em cada lagoa e usamos o produto de matrizes para obter as equações necessárias.

Os cálculos são efetuados para analisar o que acontece com o número de insetos em cada represa, após vários ciclos de transferência de insetos.

Para cada represa, será considerado o número de insetos predadores já existente e o número de insetos que desloca de um lago para outro através do fluxo da água.

Suponha que as represas estão interligadas por córregos, a represa R_1 deságua nas represas R_2 e R_3 a uma taxa de x e y , respectivamente, a represa R_2 deságua na represa R_3 a uma taxa de z e a represa R_3 deságua para o meio exterior EXT a uma taxa de w , conforme a Figura 9.

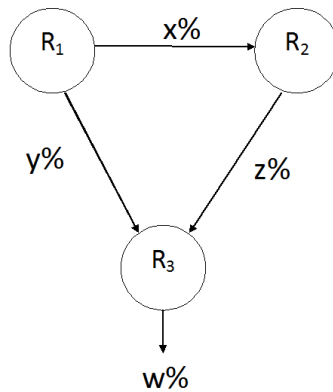


Figura 9: Representação das lagoas e fluxo de água 1.
Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

De acordo com isso, construímos a Tabela 5 apresentando as taxas de insetos que cada represa transfere para a outra juntamente com a planta que se desloca nas correntezas da água.

Tabela 5: Taxa de insetos transferido entre as represas.

	R_1	R_2	R_3	EXT
R_1	$100-y-x$	0	0	0
R_2	y	$100-z$	0	0
R_3	x	z	$100-w$	0
EXT	0	0	w	100

A partir dos dados contidos na Tabela 5 pode-se aplicar o princípio das Cadeias de Markov e obter o número de insetos em cada represa após um ciclo. Cada ciclo corresponde ao tempo necessário para que a taxa de transferência de insetos se efetue completamente, ou seja, as taxas de x , y , z e w passem de uma lagoa para a outra. Para isso considere o número inicial do insetos nas represas R_1 , R_2 e R_3 como sendo

a , b e c respectivamente e o do meio exterior como sendo d , logo obtemos as seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} \frac{100-y-x}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{100} & \frac{100-z}{100} & 0 & 0 \\ \frac{x}{100} & \frac{z}{100} & \frac{100-w}{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w}{100} & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Aplicando o produto das matrizes (5) e (6), segue que

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{100}(100-y-x) \\ \frac{a}{100}y + \frac{b}{100}(100-z) \\ \frac{a}{100}x + \frac{b}{100}z + \frac{c}{100}(100-w) \\ \frac{c}{100}w + d \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Assim, é possível calcular o número de insetos em cada represa após qualquer quantidade de ciclo, bastando aplicar novamente o produto da matriz (7) lograda no processo anterior pela matriz (5) inicial.

Outra maneira de obter este resultado é a aplicação da equações de diferenças.

Usando os mesmos dados anteriores, e considerando N_1 , N_2 , N_3 os números de insetos em cada represa após um ciclo e t_1 , t_2 e t_3 os números de insetos inicialmete, temos:

$$N_1 = t_1 - yt_1 - xt_1$$

$$N_2 = t_2 + yt_1 - zt_2$$

$$N_3 = t_3 + xt_1 + zt_2 - wt_3$$

$$EXT = wt_3.$$

Portanto, é possível usar estas equações para encontrar o número de insetos em cada represa após o primeiro ciclo de transferência. Para mais de 1 ciclo tais equações tornam-se inviáveis, já que passam a depender de resultados anteriores.

4.2 Modelagem 2

De acordo com a pesquisa realizada [45], foi encontrado em uma área de $6,25m^2$ o número de 42 *Thrypticus* sp., ou seja, o inseto predador da planta na fase larval.

Consideremos as represas R_1 , R_2 e R_3 dispostas de acordo coma a Figura 10 e com áreas iguais a $625m^2$, $312,5m^2$ e $200m^2$, respectivamente. Então, nas três represas tem-se uma quantidade de aproximadamente, 4200, 2100 e 1344, insetos já inseridos no meio em questão e zero insetos no meio exterior. Portanto, obtemos as matrizes (8) e (9).

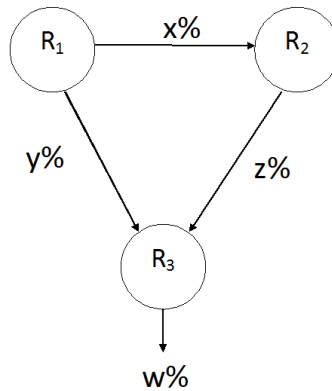


Figura 10: Representação das lagoas e fluxo de água 2.
Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

$$\begin{pmatrix} \frac{100-y-x}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{100} & \frac{100-z}{100} & 0 & 0 \\ \frac{x}{100} & \frac{z}{100} & \frac{100-w}{100} & 0 \\ & 0 & \frac{w}{100} & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 4200 \\ 2100 \\ 1344 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Aplicando o produto das matrizes (8) e (9), resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{4200}{100}(100-y-x) \\ \frac{4200}{100}y + \frac{2100}{100}(100-z) \\ \frac{4200}{100}x + \frac{2100}{100}z + \frac{1344}{100}(100-w) \\ \frac{1344}{100}w + 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Logo, podemos obter o número de insetos em cada represa após qualquer quantidade de ciclos, bastando aplicar novamente o produto desta matriz obtida no processo anterior pela matriz inicial.

Outra maneira de encontrarmos este resultado é a aplicação da modelagem por equações de diferenças.

Utilizando os mesmos dados anteriores, e considerando N_1 , N_2 , N_3 os números de insetos em cada represa após o primeiro ciclo e 4200, 2100, 1344 e 0 os números de insetos inicialmente presentes em cada represa, tendo em vista que foram encontrados em $6,25m^2$ uma quantidade de 42 *Thrypticus* sp. e estamos supondo as represas R_1 , R_2 e R_3 com áreas iguais a $625m^2$, $312,5m^2$ e $200m^2$, respectivamente, temos:

$$N_1 = 4200 - 4200y - 4200x$$

$$N_2 = 2100 + 4200y - 2100z$$

$$N_3 = 1344 + 4200x + 2100z - 1344w$$

$$EXT = 1344w.$$

Analogamente ao processo anterior, pode-se usar estas equações para prever o número de insetos em cada represa após o primeiro ciclo de transferência. Como as equações ainda dependem de resultados anteriores para prosseguir em mais ciclos, elas continuam inviáveis devido a complexidade que passam a ter.

4.3 Simulação 1

Consideremos agora que os fluxos entre as represas sejam de R_1 para R_2 igual a 5%, de R_1 para R_3 igual a 10%, de R_2 para R_3 igual a 15% e de R_3 para o meio externo igual a 10% como apresenta a Figura 11. Então, aplicando novamente o procedimento, temos:

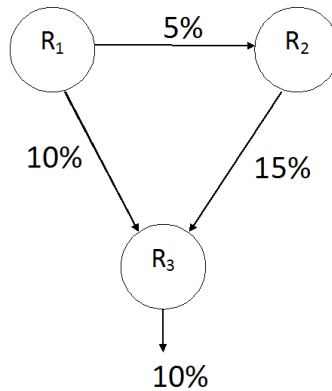


Figura 11: Representação das lagoas e fluxo de água 3.

Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

$$\begin{pmatrix} \frac{100-5-10}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{100} & \frac{100-15}{100} & 0 & 0 \\ \frac{10}{100} & \frac{15}{100} & \frac{100-10}{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{100} & \frac{100}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{85}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{100} & \frac{85}{100} & 0 & 0 \\ \frac{10}{100} & \frac{15}{100} & \frac{90}{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{100} & \frac{100}{100} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 4200 \\ 2100 \\ 1344 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Aplicando o produto das matrizes (11) e (12), resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{4200}{100}(85) \\ \frac{4200}{100}(5) + \frac{2100}{100}(85) \\ \frac{4200}{100}(10) + \frac{2100}{100}(15) + \frac{1344}{100}(90) \\ \frac{1344}{100}(10) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

que corresponde aos seguinte resultados

$$\begin{pmatrix} 3570 \\ 210 + 1785 \\ 420 + 315 + 1210 \\ 134 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3570 \\ 1995 \\ 1945 \\ 134 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ou seja, temos a represa R_1 com 3570 insetos, R_2 com 1995 insetos, R_3 com 1945 insetos e para o meio exterior seriam liberados 134 insetos.

Assim, partindo da matriz (14) podemos estimar o número de insetos presentes em cada represa após qualquer quantidade de ciclos, bastando para isso aplicar novamente o produto da matriz (14) obtida no processo anterior pela matriz (11) inicial.

Outra maneira de obter este resultado é a aplicação da modelagem de equações de diferenças.

Novamente utilizando os dados anteriores, e considerando N_1 , N_2 , N_3 os números de insetos em cada represa após o primeiro ciclo e 4200, 2100, 1344 e 0 os números de insetos inicialmente em cada represa, temos:

$$N_1 = 4200 - (5\%.4200) - (10\%.4200) = 3570$$

$$N_2 = 2100 + (5\%.4200) - (15\%.2100) = 1995$$

$$N_3 = 1344 + (10\%.4200) + (15\%.2100) - (10\%.1344) = 1945$$

$$EXT = 134.$$

Aplicando os dados nas equações, encontra-se o número de insetos em cada represa após o primeiro ciclo de transferência, ou seja, temos a represa R_1 com 3570 insetos, R_2 com 1995 insetos, R_3 com 1945 insetos e para o meio exterior seriam liberados 134 insetos.

Os resultados são iguais aos encontrados quando utilizamos as matrizes, porém para atingir os dados para mais ciclo, elas continuam inviáveis devido a demora na realização dos cálculos. Portanto, usar as matrizes e conseqüentemente o processo das Cadeias de Markov tornam os cálculos mais rápidos e com maior facilidade.

Como o que queremos é conseguir uma maneira de estimar o número de insetos em cada represa para que haja um controle biológico da planta aquática, vamos fazer mais uma suposição. Baseado na pesquisa do autor em 2002 e 2003, sabe-se que em 5212g de pecíolos da macrófita aquática foram encontrados 42 indivíduos do inseto *Thrypticus* sp., portanto temos uma taxa de 0,8% insetos para cada grama de pecíolo.

O número de insetos encontrados nos pecíolos, cuja taxa é de 0,8% insetos para cada grama de pecíolo não mantém controlada a quantidade de plantas nas lagoas, pois se tal fato ocorresse não teríamos o problema de infestação. Durante as pesquisas não encontramos autores que relatem sobre a quantidade de massa da planta ingerida pelo inseto durante sua fase larval e portanto vamos supor que este valor seja 2g.

Aplicaremos o processo das Cadeias de Markov para estimar o número de insetos que precisam ser inseridos na represa 1 de modo que esses insetos cheguem às represas 2 e 3 através do fluxo de água.

De acordo com os dados das modelagens 1 e 2, as represas possuem uma quantidade inicial de insetos predadores já conhecida. A área de cada represa e a massa de pecíolos da macrófita foram quantificadas no modelo.

Logo, verifica-se que a represa 3 possui área de $200m^2$ e que em $6,25m^2$ obtivemos 5212g de pecíolos da macrófita aquática, então a represa 3 possui uma massa aproximada de 167kg de pecíolos da planta aquática. Como foi mencionado anteriormente, o

controle biológico deve ocorrer quando a área ocupada pela planta é maior que 70% da área da represa, então consideramos apenas uma massa de 50,1Kg que corresponde a 30% da área da represa. De modo análogo a represa 2 tem área de $312,5m^2$ e portanto 261kg de pecíolos, onde serão considerados para o controle apenas 78,3kg e a represa 1 tem área de $625m^2$ e contudo 522kg de pecíolos, onde serão considerados 156,6kg.

Supondo um consumo de 2g de pecíolo pelo inseto durante a fase larval, então para que haja um controle deve se ter um número de insetos que remova 30% das macrófitas, ou seja, deve-se obter na represa 3 uma quantidade de 25.000 insetos, na represa 2 um total de 39.000 e na represa 1 uma soma de 78.000 insetos.

Para estimar a quantidade de insetos que devem ser inseridos na represa 1, para que transcorridos vários ciclos, chegue a quantidade necessária na represa 3, outras simulações serão feitas usando as matrizes encontradas anteriormente.

4.4 Simulação 2

Considere os dados da simulação 1 e que inserimos 74.000 insetos na lagoa 1. Logo, teremos após o primeiro ciclo o número de insetos de acordo com a matriz (15)

$$\begin{pmatrix} \frac{78.200}{100}(85) \\ \frac{78.200}{100}(5) + \frac{2.100}{100}(85) \\ \frac{78.200}{100}(10) + \frac{2.100}{100}(15) + \frac{1.344}{100}(90) \\ \frac{1.344}{100}(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66.470 \\ 5.695 \\ 9.345 \\ 134 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Veja que após o primeiro ciclo ainda não atingimos a quantidade necessária para que haja o controle biológico da planta nas represas 2 e 3, ou seja, teríamos que atingir na represa 3 uma quantidade de 25.000 insetos, na represa 2 um total de 39.000. Assim passemos para o segundo ciclo

$$\begin{pmatrix} \frac{66.470}{100}(85) \\ \frac{66.470}{100}(5) + \frac{5.695}{100}(85) \\ \frac{66.470}{100}(10) + \frac{5.695}{100}(15) + \frac{9.345}{100}(90) \\ \frac{9.345}{100}(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56.500 \\ 8.164 \\ 15.911 \\ 1.069 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

A quantidade esperada ainda não foi atingida. Podemos repetir o procedimento várias vezes. No ciclo 5, matriz (17), o número de insetos na represa 3 atingiu o esperado, 25.000 insetos.

$$\begin{pmatrix} 40.821 \\ 10.701 \\ 25.343 \\ 4.779 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

A Figura 12 mostra um gráfico com a quantidade de insetos em cada lagoa após 50 ciclos. Logo pode-se verificar, nesta situação hipotética, que não haverá superpopulação de *Thrypticus* sp. nas lagoas, tendo em vista que eles serão eliminados para o meio externo, e conseqüentemente, morrerão por escassez de alimento.

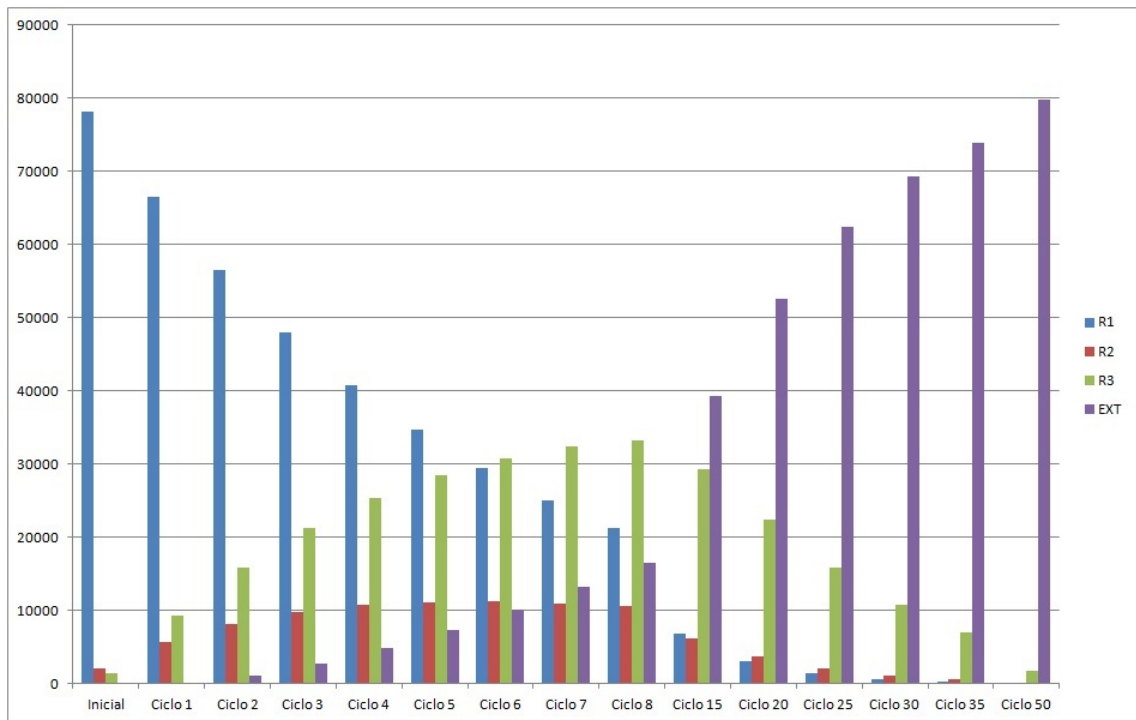


Figura 12: Quantidades de insetos por lagoa após 50 ciclos.
Fonte: Gráfico construído pelo Autor.

No entanto, adicionar 74.000 insetos na represa 1 não será suficiente para que haja o controle biológico na represa 2, mas será na represa 3. Portanto, é necessário aumentar o número de insetos na represa 1 ou inserir na represa 2.

Contudo, implementando outras simulações, percebe-se que uma opção seria inserir 74.000 insetos na represa 1 e no ciclo 6 inserir 28.000 na represa 2, assim obtém-se o controle nas 3 lagoas.

Pode-se fazer várias simulações alterando o fluxo entre as lagoas, a quantidade de insetos, o tamanho das lagoas e suas respectivas posições de deságuas, entre outras situações.

Utilizar as equações de diferenças obtidas nas simulações anteriores não é viável neste caso, devido a quantidade de ciclos necessários e à extensão das equações.

Na próxima seção apresentaremos outra simulação envolvendo os insetos e as plantas, alterando as áreas das lagoas, taxas de fluxo de águas entre elas, entre outros.

4.5 Simulação 3

As hipóteses consideradas no processo de modelagem basearam-se em dados reais, coletados no município de Coxim-MS. Partindo destes dados e juntamente com outras hipóteses que estão listadas a seguir, temos:

1. As represas R_1 , R_2 e R_3 têm áreas de $150m^2$, $250m^2$ e $80m^2$, respectivamente;
2. As taxas de fluxo de deságua são de 6% de R_1 para R_2 , 4% de R_2 para R_3 , 3% de R_1 para R_3 e 5% de R_3 para o meio *EXT*;
3. Em cada $6,25m^2$ obtemos 42 insetos predadores e 5212g de pecíolos de planta aquática;
4. Cada larva é capaz de se alimentar com 2g de pecíolo da planta aquática;
5. A taxa em que se considera a infestação é maior que 70% da área da represa;
6. As represas R_1 , R_2 e R_3 estão infestadas de planta aquática com taxas de 85%, 90% e 100%, respectivamente.

Logo, organizando os dados das represas R_1 , R_2 e R_3 tem-se a Tabela 6, onde I_0 é a quantidade de insetos contidos inicialmente, M_p é a massa de pecíolo na lagoa, i corresponde a taxa a ser combatida, M_c é a massa a ser combatida e I_n é a quantidade de insetos necessários.

Tabela 6: Dados para simulação.

Represas	I_0	M_p (kg)	i (%)	M_c (kg)	I_n
R_1	1008	125	15	18,75	9.375
R_2	1680	208,5	20	41,7	20.850
R_3	538	66,7	30	20	10.000

A Figura 13 representa o diagrama de transição desta situação hipotética.

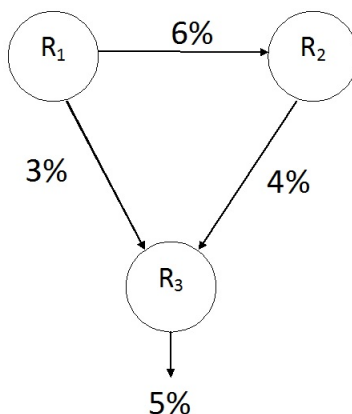


Figura 13: Representação das lagoas e taxa de fluxo de água na simulação 3.

Fonte: Figura elaborada pelo Autor.

A Tabela 7 apresenta as taxas de insetos transferidos entre as represas R_1 , R_2 e R_3 na simulação 3.

Tabela 7: Taxa de insetos transferido entre as represas na simulação 3.

	R_1	R_2	R_3	EXT
R_1	100-6-3	0	0	0
R_2	6	100-4	0	0
R_3	3	4	100-5	0
EXT	0	0	5	100

A matriz (18) é composta pelas taxas de transferência de insetos entre as represas na simulação 3 e a matriz (19) representa o número de insetos contidos inicialmente nas represas

$$\begin{pmatrix} \frac{91}{100} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{100} & \frac{96}{100} & 0 & 0 \\ \frac{3}{100} & \frac{4}{100} & \frac{95}{100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{100} & \frac{100}{100} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 1008 \\ 1680 \\ 538 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Adicionando 8367 insetos na represa R_1 e aplicando o produto das matrizes (19) e (18), obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{9375}{100}(91) \\ \frac{9375}{100}(6) + \frac{1680}{100}(96) \\ \frac{9375}{100}(3) + \frac{1680}{100}(4) + \frac{538}{100}(95) \\ \frac{538}{100}(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8531 \\ 2175 \\ 860 \\ 27 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Isto é, após 1 ciclo, temos a represa R_1 com 8531 insetos, R_2 com 2175 insetos, R_3 com 860 insetos e para o meio exterior seriam liberados 27 insetos.

Nestas condições a represa 2 atinge o número máximo de insetos no ciclo 3 com a quantidade de 2297. Esta quantidade não é suficiente para que tenhamos um controle biológico na represa 2, deve-se inserir insetos nesta represa para completar a quantidade necessária. Portanto, pode-se inserir 18.500 insetos no ciclo 3 para a obtenção do controle nesta represa.

Com isso, passaremos a ter a quantidade necessária para o controle na represa 2 e prosseguindo com os ciclos, obtém-se a quantidade necessária na represa 3 no ciclo 6.

A Figura 14 mostra a situação, referente ao número de insetos em cada represa após vários ciclos.

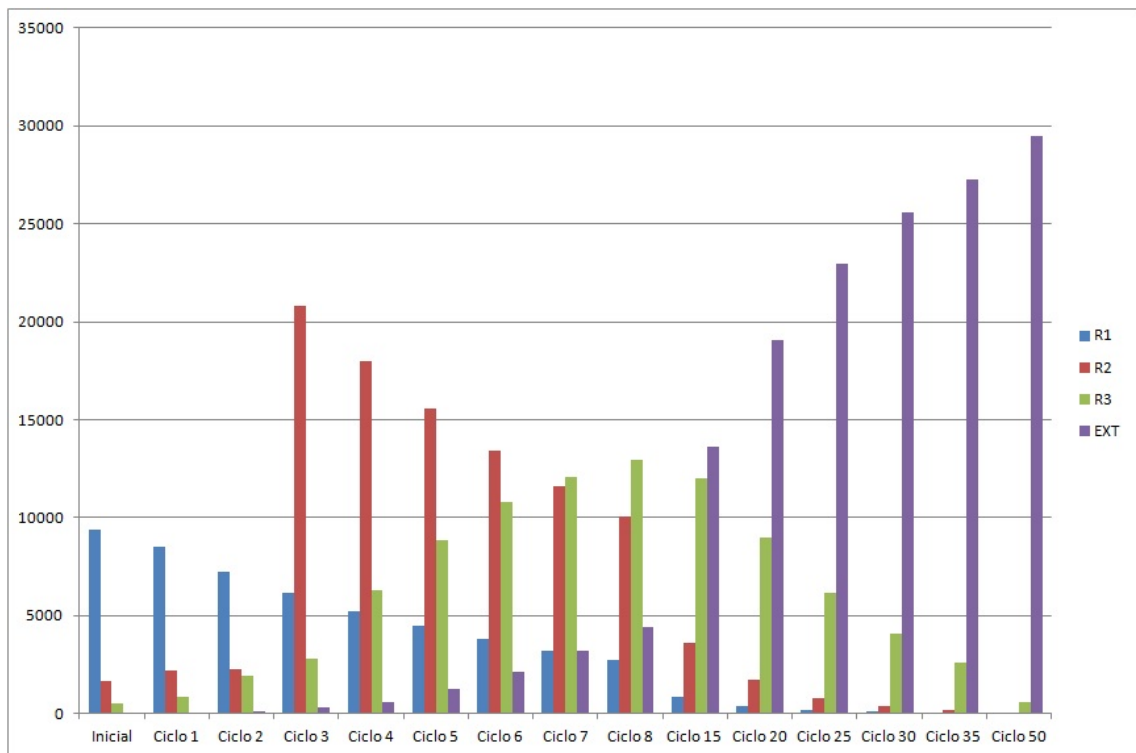


Figura 14: Quantidades de insetos por lagoa após vários ciclos.
 Fonte: Gráfico construído pelo Autor

Observando os dados no gráfico verificamos que os cálculos apontam uma tendência de eliminação total do inseto nestas lagoas, evitando assim uma infestação com o inseto. Entretanto, fazem-se necessários outros estudos mais detalhados para comprovar este fato.

5 Considerações Finais

O propósito principal deste trabalho foi mostrar como a modelagem matemática, que é um método usado por muitos pesquisadores entre as áreas de matemática e ecologia aplicada na resolução de problemas, pode ser inserida no processo de ensino e aprendizagem, por exemplo no ensino médio, permitindo que conteúdos matemáticos sejam aplicados na busca de soluções para situações reais. Para exemplificar, tratamos do estudo do controle biológico da planta aquática *Eichhornia azurea*.

Vários autores consideram as macrófitas aquáticas como de pouca importância enquanto vivas, para a cadeia alimentar aquática [29], [26], o que estaria relacionado à baixa qualidade nutricional dessas plantas, que geralmente apresentam uma alta concentração de celulose o que leva sua digestibilidade a ser muito baixa. Entretanto, verificamos que outros autores acreditam que o consumo de macrófitas aquáticas pelos insetos herbívoros seja subestimado [34].

Nos levantamentos realizados em macrófitas aquáticas *Eichhornia azurea* confirmou-se que alguns insetos predam a planta durante a fase larval, e um deles é conhecido como *Thrypticus* sp.. Existem outros insetos que vivem na planta, porém a utilizam apenas como abrigo e local de caça.

Quando há crescimento desordenado da planta aquática, uma das alternativas é o controle biológico, que deve ser realizado de modo que não prejudique o meio ambiente e os moradores que usam os lagos como fonte de vida, seja para a pesca ou para o uso da planta na fabricação de artesanatos.

A modelagem matemática é um método cada vez mais adotado, que encontra-se em grande expansão na matemática. Muitos problemas podem ser modelados e escritos na forma matemática, facilitando o entendimento e a análise de seus dados. Com a modelagem, numa situação real, é possível efetuar estudos a fim de minimizar custos operacionais, através da implementação de vários testes antes que se inicie os gastos.

As Cadeias de Markov foram o procedimento escolhido, para juntamente com a modelagem, apontar soluções para o problema proposto. Tal conceito é uma grande ferramenta nos estudos que envolvem probabilidades, sendo muito útil em diferentes áreas de estudo. A aplicação das Cadeias de Markov nas simulações produzidas permitiu-nos obter resultados coerentes e verificar que existem várias possibilidades de inserção de insetos, para combater o excesso da planta aquática. Na prática, a execução de vários testes demandaria muito tempo e dinheiro para serem analisados.

A união de problemas ambientais com a matemática constitui-se em uma maneira

de avaliar parâmetros e prever resultados, e isso pode ser abordado por professores nas escolas, inclusive como forma de chamar a atenção dos alunos para as questões ambientais e despertar atitudes.

Vale ressaltar que, para se obter resultados que possam efetivamente auxiliar os especialistas, com maior garantia de controle biológico da macrófita aquática *Eichhornia azurea*, utilizando ou não o inseto predador *Thrypticus* sp., deve-se pesquisar o tema com maior rigor e realizar outras simulações. Sugerimos alterar as áreas das lagoas, área ocupada pelas plantas aquáticas, avaliar a taxa de escoamento da água entre as lagoas, além de considerar a dinâmica vital do inseto, incorporando informações sobre nascimento, mortalidade e fatores externos que influenciam sua população.

Em trabalhos futuros, pretende-se analisar o problema usando modelo presa-predador, que é descrito por equações diferenciais.

Referências

- [1] Abreu, E.; Semidey, N. Introduction and release of the alligatorweed flea beetle *Agasicles hygrophila* in Puerto Rico. In: Aquatic Management Society Fortieth Annual Meeting, 2000, San Diego.
- [2] Bassanezi, R. C., *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo, 2011.
- [3] Begon, M.; Harper, J.L. e Townsend, C.R. Ecology: Individuals, Populations and Communities. 3ª ed. Blackwell Science Ltda. 1068p. 1996.
- [4] Beshir, M.O. e Bennett, F.D. Biological control of water hyacinth on the White Nile, Sudam. In: Proceedings VI International Symposium on Biological Control of Weeds. (Ed. E.S. Delfosse). Agriculture Canada. 491-506. 1984.
- [5] Bennett, F. D., and H. Zwölfer. 1968. Exploration for natural enemies of the Water hyacinth in northern South America and Trinidad. *Hyacinth Control J.* 7: 44-52.
- [6] Bezerra, T. P.; Silva, C. P.; Lopes, J. P. Utilização da macrófita aquática *Egeria densa* Planchon, 1849 (Hydrocharitaceae) na produção de tijolos para construção civil. *Revista Brasileira de Engenharia de Pesca*, São Luiz, v. 2, n. 1, p. 114-127, 2007.
- [7] Bickel, D. J. *Thrypticus* and an allied new genus, *Corindia* from Australia (Diptera: Dolichopodidae). *Records Australian Mus* 1986, p.135-151.
- [8] Boldrini, J.L., Costa, S.I.R., Ribeiro, V.L.S.F.F., Wetzler, H.G. *Álgebra linear*. São Paulo, Haper e Row do Brasil, 1980, 14p.
- [9] Borror, D.J.; De LONG, D.M. *Introdução ao estudo dos insetos*. São Paulo: Blücher, 1988. 653 p.
- [10] Carnwall, M. et al. Avaliação do impacto da colonização de *Egeria densa* sobre a variação dos concentrações de oxigênio dissolvido na água e sobrevivência de *Poecillia reticulata*. *Planta Daninha*, Viçosa, MG, v. 7, p. 9-13, 2001.
- [11] Carvalho, F. T.; VELINI, E. D.; MARTINS, D. Plantas aquáticas e nível de infestação das espécies presentes no reservatório de Bariri, no Rio Tiete. *Planta Daninha*, Viçosa, MG, v. 23, p. 371-374, 2005.

- [12] Cavenaghi, A. L. et al. Caracterização da qualidade da água e sedimento relacionados com a ocorrência de plantas aquáticas em cinco reservatórios da bacia do rio Tietê. *Planta Daninha*, Viçosa, MG, v. 21, p. 43-52, 2003.
- [13] Cordo, H. A., A. J. Sosa, and M. C. Hernández. 2000. The petiole mining by *Thrypticus* sp. (Diptera: Dolichopodidae), a new agent for the biological control of Water hyacinth (*Eichhornia crassipes*), pp. 315-323. In N. Spencer [ed.], *Proceedings of the X International Symposium on Biological Control of Weeds*, 14 July 1999, Montana State University, Bozeman, MT.
- [14] Cruttwell, R. E. 1973. Preliminary investigations on some insects causing minor damage to Water hyacinth, *Eichhornia crassipes*. Report of the West Indian Station, Commonwealth Institute of Biological Control, Trinidad.
- [15] B N Delone, *The St Petersburg school of number theory* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2005).
- [16] Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Massachusetts, USA, 2000.
- [17] Dyte, C.E. The occurrence of *Thrypticus smaragdinus* Gerst. (Diptera: Dolichopodidae) in Britain, with remarks on plants hosts in the genus. *The Canadian Entomologist*, 112 (2): 81-84. 1993.
- [18] Edwards, D. J. Weed preference and growth of young grass carp in New Zealand. *New Zealand Journal of Marine and Freshwater Research*, Nova Zelândia, v. 8, p. 341-350, 1974.
- [19] Fernandes Jr, D. P., et al, *Conceitos e Simulação de Cadeias de Markov*, Goiânia, GO.
- [20] Feeny, P. Plant Aparency and Chemical defense. In: *Biochemical interaction between plants and insects*. (J. Wallace, R. Mansell, eds.). (New York, London). Plenum Press. *Rec. Adv. Phytochem*, 10: 1-40. 1976.
- [21] Forattini, O. P. *Entomologia médica*. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 1962. v. 1, 666 p.

- [22] Gaevskaya, N.S. The role of higher aquatic plants in the nutrition of the animals of freshwater basins. (3 vols.) D.G.M. Miller (translator). K. h. mann (editor). 629 p. 1969.
- [23] Guimarães, G. L. Impactos do controle de macrófitas aquáticas com o herbicida 2,4 D em mesocosmos. 2004. 153 p. Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola) -Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- [24] Hans Ulrich e Rüdiger M. Schmezl. Enchytraeidae as prey of Dolichopodidae recent and in Baltic amber (Oligochaeta; Díptera). 2001.
- [25] Humphries, P. Aquatic macrophytes, macroinvertebrate associations and water levels in a lowland Tasmanian river. *Hydrobiologia*, 321, 1996 p.219-233
- [26] Hutchinson, G.E. A treatise on limnology. (vol. 3). *Limnological Botany*. Wiley-interscience. New York. 660 p. 1975.
- [27] Jacobsen, D. e Sand-Jensen, K. Herbivory of invertebrates on submerged macrophytes from danish freshwaters. *Freshwater Biology*, 28: 301-308. 1992.
- [28] Leah L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Model in Biology*. McGraw Hill, 1998.
- [29] Lodge, M.D. Herbivory on freshwater macrophytes. *Aquatic Botany*, 41: 195-224. 1991.
- [30] Mauro, J. B. N.; Guimarães, J. R. D.; Melamed, R. Aguapé agrava contaminação por mercúrio. *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, v. 25, n. 150, p. 68-71, 1999.
- [31] Merenda, Angélica Maria de Campos Machado Pitelli, Avaliação da Comunidade de Macrófitas Aquáticas no Reservatório de Aimorés, Composição química das Principais Espécies e Influências da Incorporação nas Características Químicas de um Solo Degradado, Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências Agrônômicas, Botucatu, 2011
- [32] Murray, J. D. *Mathematical Biology I. A introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [33] Neiff, J. J. e Poi de Neiff, A. Cambios estacionales em la biomassa de *Eichhornia crassipes* (Mart.) Solms y su fauna em una laguna del Chaco (Argentina). *Ecosur*, 11 (21/22): 51-60. 1984.

- [34] Newman, R.M. Herbivory and detritivory on freshwater macrophytes by invertebrates: a review. *J. N. Am. Benthol. Soc.*, 10 (2): 89-114. 1991.
- [35] Noble, Ben e Daniel, James W., *Ágebra Linear Aplicada*, Traduzido por Pitombeira, J., PHB editora, 2ed., 1986.
- [36] Norris, J. R., *Markov Chains*, University of Cambridge, First published 1997, Reprinted 1998, New York, USA.
- [37] Pedralli, G. Macrófitas aquáticas como bioindicadoras da qualidade da água: alternativas para usos múltiplos de reservatórios. In: Thomaz, S. M.; Bini, L. M. (Ed.). *Ecologia e manejo de macrófitas aquáticas: alternativas para o uso múltiplo da água*. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2003. p. 171-188.
- [38] Pieterse, A. H. e Murphy, K. J. *Aquatic Weeds. The Ecology and Management of Nuisance Aquatic Vegetation*. Oxford University Press. New York. 593 p. 1993.
- [39] Pitelli, R.A.; Pitelli, R.L.C.M. e Marcondes, D.A.S. Controle biológico de macrófitas aquáticas. In: *Workshop Ecologia e Manejo de Macrófitas Aquáticas*. Maringá, PR. 2000.
- [40] Poi de Neiff, A.; Neiff, J.J. e Bonetto, A. Enemigos naturales de *Eichhornia crassipes* en el Nordeste argentino y posibilidades de su aplicacion al control biologico. *Ecosur* 4 (8): 137-156. 1977.
- [41] Rhoades, D.F. e Cates, R.G. Toward a general Theory of Plant antiherbivore chemistry. *Recent Adv. Phytochem*, 10: 168-213. 1976.
- [42] Scriber, J.M. e Ayres, M.P. Leaf chemistry as a defense against insects. *ISI Atlas Sci. Anim. Plant. Sci.*, 1: 117-123. 1988.
- [43] SEMA. Secretaria do Meio Ambiente de Mato Grosso do Sul. 1995.
- [44] Silva, Carlos Eduardo Vitória da. *Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov*, 2013, 20p.
- [45] Silveira Jr, A.A. e Vieira, G.H.C., Abundância da Larvas de *Thrypticus* sp. (Díptera: Dolichopodidae) em Pecíolos da Macrófita Aquática *Eichhornia azurea* sw. (Kunth) (Pontederiaceae) ocorrentes no município de Coxim/MS, 2003.

- [46] Vellini, E.D. Controle de Plantas Aquáticas. In: Workshop Ecologia e Manejo de Macrófitas Aquáticas. Maringá, PR. 2000.
- [47] De Vries, G. What is Mathematical Modelling. Canada: Department of Mathematical Sciences, University of Alberta. 2001.
- [48] Youschkevitch A. A., biografia no Dicionário da biografia científica (New York 1970-1990). <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902828.html>