Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Coordenação de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Sistemas Lineares: métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU

Carmencita Ferreira Silva Assis

Jataí

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Carmencita Ferreira Silva Assis					
E-mail:	Carmencita.assis@yahoo.com.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Secretaria da Educação do Estado de Goiás					
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e				Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00.889.834/0001-08	
Título:	Sistemas Lineares: métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU					
Palavras-chave:	Sistemas Lineares, Eliminação Gauss, Fatoração LU, Ensino e Aprendizagem, Problemas Cotidianos.					
Título em outra língua:	Linear Systems: methods of Gaussian Elimination and LU Factorization					
Palavras-chave em outra língua:	Linear Systems, Gaussian Elimination, LU Factorization, Teaching and Learning, Everyday Problems.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	20/03/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT					
Orientador (a):	Prof. Dra. Graciele P. Silveira					
E-mail:	gracimat@gmail.com					
Co-orientador(a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Carmencita Ferreira Silva Assis
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 20/03/2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período

Carmencita Ferreira Silva Assis

Sistemas Lineares: métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação de Matemática da Regional Jataí da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Profa. Dra. Graciele P. Silveira

Jataí

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

A848s Assis, Carmencita Ferreira Silva.
Sistemas Lineares: métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU [manuscrito] / Carmencita Ferreira Silva Assis. - 2014.
64 f.

Orientadora: Profª. Drª. Graciele Paraguaia Silveira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Coordenação de Matemática, 2014.
Bibliografia.

1. Sistemas Lineares. 2. Eliminação Gauss. 3. Fatoração LU. I. Silveira, Graciele Paraguaia. II. Universidade Federal de Goiás. III. Título.

CDD 515.252

Carmencita Ferreira Silva Assis

Sistemas Lineares: Métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 20 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira
Coordenação de Matemática-CAJ/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia
Membro-IFG/Jataí

Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva
Membro - Coordenação de Matemática-CAJ/UFG

Carmencita Ferreira Silva Assis graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, durante a graduação não foi bolsista , especialista em Ciências Físicas Biológicas pela Universidade Federal de Goiás, atualmente cursando o Programa de Mestrado em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, pela Coordenação de Matemática da Regional Jataí da Universidade Federal de Goiás, durante o mestrado foi bolsista pela CAPES e professora da rede Federal do Instituto Federal de Goiás - campus Jataí.

Dedico este trabalho a meu esposo Teófilo e aos meus filhos Matheus e Laura.

Agradecimentos

Agradeço:

- Primeiramente a Deus.

- À SBM por propiciar aos professores de Matemática da Educação Básica brasileira acesso a um programa de mestrado tão abrangente e eficiente quanto o PROFMAT.

- À UFG, na pessoa da coordenadora Profa. Luciana Aparecida Elias e de todos os Professores que acreditaram, aceitaram e participaram deste desafio de aprimorar os Professores da Educação Básica, dando significativa contribuição para a realização deste trabalho.

- E, de maneira especial, a minha orientadora, Graciele P. Silveira, pela educação, pela paciência, pelo conhecimento transmitido e pela confiança depositada na realização deste trabalho.

- À agência financiadora Capes pelo apoio dado ao longo do curso.

- Se me esqueci de algumas pessoas que, de certa forma, contribuíram para que este momento fosse alcançado, peço desculpas e agradeço a todos.

Muito obrigado!

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar técnicas de resolução de sistemas de equações lineares, em sua formulação tradicional, onde se buscou explorar as referências usualmente utilizadas em cursos de álgebra linear e cálculo numérico, enfocando os métodos diretos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU. Resoluções de problemas consolidados na literatura são realizadas, com a finalidade de ilustrar o funcionamento e aplicação de tais métodos em problemas reais, destacando assim a possibilidade de inserção dos mesmos no Ensino Médio. Os conteúdos foram tratados e expostos de modo que exemplifiquem a diversidade de áreas que abrangem os sistemas lineares, tais como engenharia, economia e biologia, mostrando os ganhos que podem ser alcançados pelos alunos, se tiverem contato com os métodos o quanto antes. Ao final sugere-se a utilização de recursos computacionais nas aulas de matemática, uma vez que a redução do tempo empregado na manipulação algébrica permitirá que o professor possa aprofundar os conceitos e abordar sistemas de maior porte, que ampliem a perspectiva de resolução, além de motivar o aluno no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Eliminação Gauss, Fatoração LU, Ensino e Aprendizagem, Problemas Cotidianos.

Abstract

This work aims to present techniques for solving systems of linear equations, in its traditional formulation, where it sought to explore the references commonly used in courses in linear algebra and numerical computation, focusing on the direct methods of Gauss elimination and LU factorization. Troubleshooters established in the literature are conducted, in order to illustrate the operation and application of such methods to real problems, thus highlighting the possibility of inserting them in high school. The contents were treated and exposed so that exemplify the diversity of areas including linear systems, such as engineering, economics and biology, showing the gains that can be achieved by students if they have contact with the methods as soon as possible. At the end we suggest the use of computational resources in math classes, since the reduction of time spent in algebraic manipulation will allow the teacher to deepen the concepts and to address larger systems, to enhance the resolution perspective, and motivate the student in the learning process.

Keywords: Linear Systems, Gaussian Elimination, LU Factorization, Teaching and Learning, Everyday Problems.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho é uma das exigências para obtenção do título de mestre do Progrma de Mestrado em Matemática - PROFMAT, oferecido pela Coordenação de Matemática da Regional Jataí da Universidade Federal de Goiás. O tema escolhido foi o estudo de técnicas de resolução de sistemas lineares, aplicadas em problemas contextualizados.

Como professora da rede estadual de ensino por mais de 25 anos, pude constatar a grande dificuldade dos alunos em resolver problemas.

O ensino de Sistemas Lineares, de uma forma geral, tem seu início ainda no Ensino Fundamental (7º ano, antiga 6º série). Os principais autores dos livros textos adotados nesse nível, procuram privilegiar os Métodos da Adição e da Substituição, alguns ainda procuram diversificar apresentando além dos métodos citados, um outro método chamado Método da Comparação. No Ensino Médio, o Teorema de Cramer é o preferido pelos autores, pois este traz em seu conceito básico a ideia de resolução por meio de determinantes.

Em se tratando de Ensino Médio esta dificuldade é maior, pois os professores abandonam a abordagem de problemas na exemplificação de conteúdos e na aplicação de exercícios de fixação; é muito raro encontrar um livro de matemática do Ensino Médio, até mesmo do Ensino Fundamental, que utiliza a resolução de problemas na abordagem dos temas.

A modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, vem ao encontro da nova visão de Educação Matemática, que valoriza não apenas adquirir conhecimentos, mas o desenvolvimento de capacidades, atitudes e valores, relacionando a Matemática com o mundo real.

Segundo Bassanezi(2002)[11], o uso da modelagem conduz para o ensino de conteúdos matemáticos conectados com outras formas de conhecimento.

Os conteúdos matemáticos da Educação Básica devem ter conexões com o meio social dos alunos, para utilizá-los na sua vida cotidiana.

Segundo D'Ambrósio(1998) [12] devemos contemplar os nossos alunos com problemas significativos ao invés de situações artificiais e repetitivas.

Nessa perspectiva, a elaboração deste trabalho teve como principais objetivos:

- Revisar conceitos básicos de matrizes e sistemas lineares;

- Apresentar os métodos diretos Eliminação de Gauss e Fatoração LU, para resolução de sistemas lineares;

- Aplicar os métodos na resolução de problemas cotidianos;
- Discutir formas como o professor do Ensino Médio pode adotar a abordagem proposta.

Resolver os sistemas lineares pelo Método de Eliminação de Gauss cria como possibilidade um novo caminho a partir de uma nova perspectiva, partindo do princípio que ele delineia novos procedimentos de cálculo para obtenção dos resultados, diferentes daqueles exaustivamente utilizados pelos livros textos do Ensino Médio. Isto pode trazer como consequência, uma ampliação significativa dos seus conhecimentos sobre o assunto.

A praticidade do método de Eliminação de Gauss está na técnica utilizada, pois ele só depende exclusivamente de um prévio conhecimento sobre matrizes e operações elementares. A economia de cálculos que se utiliza para obter os resultados, também é um fator motivador para os discentes que tem contato pela primeira vez com os sistemas lineares.

É fato que, os métodos empregados atualmente para resolver e discutir sistemas lineares do tipo $AX = B$ com m equações e n incógnitas, produzem um trabalho muito grande para o estudante. Se pensarmos, por exemplo, no Teorema de Cramer para resolver e discutir um sistema de 5 equações a 5 incógnitas, vamos verificar o quão são necessárias diversas operações para encontrar a solução por esse método. Por outro lado, apresenta-se o Escalonamento de Gauss, que sem dúvida, na prática é muito mais simples, pois a ideia básica é a de utilizar as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

O método direto de Eliminação de Gauss para solução e discussão de sistemas lineares é um algoritmo poderoso para resolver e analisar qualquer sistema linear, independente do número de equações e números de incógnitas, fácil e rápido de resolver.

O Dispositivo Prático de Gauss e a fatoração LU que é uma simples consequência do método de eliminação de Gauss, apresentado como tema desse artigo, difere completamente (em sua forma) daqueles métodos conhecidos nos livros textos do ensino básico, tem sua fundamentação teórica na disciplina de Cálculo Numérico, e aparece nesse contexto como mais uma possibilidade, num cenário onde a tradição e o pragmatismo dos métodos tradicionais ainda imperam.

A clássica Regra de Cramer, ensinada no Ensino Médio, é um método direto. Entretanto, pode-se mostrar que o número máximo de operações aritméticas envolvidas na resolução de um sistema $n \times n$ por este método é $(n+1)(n!n-1)+n$. Assim, segundo [2] um computador que efetua uma operação aritmética em 10^{-8} segundos gastaria cerca de 36 dias para resolver um sistema de ordem $n = 15$. A complexidade exponencial desse algoritmo inviabiliza sua utilização em casos práticos.

Desta forma, o estudo de métodos mais eficientes é necessário, pois em geral, os problemas práticos exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte, isto é, sistemas que envolvem um grande número de equações e variáveis.

Apresentaremos, a seguir, métodos mais eficientes, cuja complexidade é polinomial, para resolver sistemas lineares. Antes, porém, introduziremos uma base teórica necessária para a compreensão de tais métodos.

Os Sistemas lineares são de grande importância para a descrição e resolução de problemas que surgem nas mais diversas áreas da ciência e engenharia, a saber: geometria, redes elétricas, hidráulicas, de tráfego, distribuição de calor, química, economia, programação linear, estatística, jogos, entre outras.

No decorrer do curso de Mestrado Profissional - PROFMAT - tivemos contato com a Álgebra Linear e ficou clara a necessidade de se entender a resolução de sistemas lineares. Diante disso e conhecendo as dificuldades de interpretação de problemas por parte dos alunos, estamos propondo um estudo criterioso das técnicas de resolução de sistemas lineares através dos métodos de Eliminação de Gauss e Fatoração LU.

Este trabalho divide-se em três seções distribuídas:

Na Seção 2, apresentaremos os principais conceitos de matrizes e sistemas lineares, importantes pré-requisitos para entendimento dos métodos propostos.

Na Seção 3, a demonstração de resolução de um sistema de equações através dos métodos de Eliminação de Gauss e na seção 4 a Fatoração LU, exemplificando-os com problemas do dia a dia.

Finalizamos o trabalho com as considerações finais, enfatizando que é possível aplicar os métodos, de Gauss e Fatoração LU, durante a abordagem de sistemas lineares no Ensino Médio.

2 Principais conceitos de Matrizes e Sistemas Lineares

Nesta seção iremos retratar os principais conceitos de matrizes que nos respaldará nos conceitos que ora serão apresentados de sistemas lineares.

2.1 Matrizes

O desenvolvimento das matrizes ocorreu a partir do século XIX, apesar de ter representações de números semelhantes às matrizes modernas desde a Era Cristã, co- matemáticos como Arthur Cayley, Augustin-Louis Cauchy e William Rowan Hamilton [17].

Recentemente, com as planilhas eletrônicas de computador, podem ser feitos cálculos antes realizados à mão, de maneira cansativa e lenta. Essas planilhas, em geral, são formadas por tabelas que armazenam os dados utilizados no problema.

2.1.1 Conceituando Matriz

As matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela com linhas e colunas, utilizadas na organização de dados e informações. Nos assuntos ligados à álgebra, as matrizes são responsáveis pela solução de sistemas lineares. Elas podem ser construídas com m linhas e n colunas, observe:

$A = [6 \quad -32]_{1\times 2}$ Matriz linha (possui uma linha);

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{Matriz retangular (possui 3 linhas e 2 colunas).}$$

Em termos gerais: uma matriz $m \times n$, com m e n números naturais não nulos, é toda tabela composta por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

2.1.2 Representando Matrizes

Uma matriz é, em geral, representada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto $A, B, C, \ldots Z$, enquanto os seus termos são representados pela mesma letra, desta vez minúscula, acompanhada de dois índices $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots,\ a_{mn}$, onde o primeiro representa a linha e o segundo a coluna em que o elemento está localizado

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chamemos esta matriz de A, e sua ordem é $m \times n$, ou seja, m linhas e n colunas. Nela podemos observar o elemento a_{ij}, onde i representa a linha e j a coluna. Tomemos como exemplo o elemento a_{21} neste caso o $i = 2$ e $j = 1$. O elemento está localizado na 2ª linha e na 1ª coluna. Ainda podemos chamar esta matriz de $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

2.2 Tipos de Matrizes

Existem vários tipos de matrizes nos quais, neste texto, destacam-se as seguintes matrizes: Quadradas; Triangular; Diagonal; Identidade; Nula; Linha e Coluna.

2.2.1 Matriz Quadrada

Dizemos que uma matriz A de ordem $m \times n$ é quadrada, quando $m = n$. Isso significa que o número de linhas será igual ao número de colunas.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ Matriz Quadrada 2×2;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \\ 9 & 12 & -6 \end{bmatrix} \text{ Matriz Quadrada } 3 \times 3.$$

2.2.2 Matriz Triangular

Uma matriz de ordem n (quadrada) é triangular quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos (iguais à zero). São chamadas de Matrizes Triangulares Superiores aquelas cujos os elementos abaixo da diagonal principal são zeros e Matrizes Triangulares Inferiores aquelas cujos os elementos acima da diagonal principal são zeros.

Exemplos:

1) Matriz Triangular de 3ª ordem que corresponde a uma matriz triagular superior

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Matriz Triangular de 2ª ordem que corresponde a uma matriz triagular inferior

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Matriz Diagonal

Enquanto que na matriz triangular os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos, a matriz, de ordem n (quadrada), diagonal é aquela em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ Matriz Diagonal de 3ª ordem}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ Matriz Diagonal de 2ª ordem}$$

2.2.4 Matriz Identidade

Matriz identidade é uma matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos acima e abaixo desta diagonal são nulos (iguais a zero). Podemos representar esta matriz por I_n.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz Identidade de ordem 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz Identidade de ordem 3}$$

2.2.5 Matriz Nula

Numa matriz nula, todos os elementos são iguais à zero. Podemos representar uma matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$; caso ela seja quadrada, indica-se por 0_n.

Exemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Matriz nula de ordem 2}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Matriz nula de ordem 3}$$

2.2.6 Matriz Linha

É toda matriz que possui apenas uma linha. Numa matriz linha $m \times n$, $m = 1$.

Exemplos:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \text{Matriz Linha } 1 \times 3$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 \end{bmatrix} \text{Matriz Linha } 1 \times 4$$

2.2.7 Matriz Coluna

É toda matriz que possui apenas uma coluna. Numa matriz coluna $m \times n$, n = 1.

Exemplos:

$$G = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{Matriz Coluna } 4 \times 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 7 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Matriz Coluna } 5 \times 1$$

2.2.8 Operações elementares

Seja A uma matriz $m \times n$ (m linhas e n colunas), ou seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$. Conforme a Definição 1 (Seção 3.1), as operações elementares que podem ser realizadas sobre as linhas de uma matriz são as seguintes:

1. Troca da linha i com linha j: $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. Multiplicção da linha i por α diferente de zero: $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
3. Adição de um múltiplo escalar da linha j à linha i: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$;
4. Adição de múltiplos escalares em ambas as linhas: $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$.

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_1 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 16 & 44 \end{array}\right].$$

2.3 Sistemas Lineares: Notações e Definições

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistema de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadros de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação - que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século III a.C. [1].

2.3.1 Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ onde $a_1, a_2, \ldots$, são números reais chamados de coeficientes da equação e b pode ser qualquer número real, sendo chamado de termo independente da equação.

Exemplo : $4x_1 + 7x_2 - x_3 = 10$.

Observações:

1. uma equação linear homogênea é quando o termo independente for nulo;
2. toda equação linear tem o expoente de todas as incógnitas unitários;
3. uma equação linear não apresenta termo misto $x_1x_2, x_1x_3, \ldots$.

2.3.2 Solução de uma equação linear

Uma sequência ordenada ou n-upla de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ se, e somente se, a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

2.3.3 Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares (ou sistema linear) é uma coleção de duas ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Considere S um conjunto de m equações lineares e n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m \end{cases} \tag{1}$$

sendo:
$a_{ij} \in \mathbb{R}; \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq j \leq n;$
$b_i \in \mathbb{R}, \quad i + 1, \quad \ldots, m.$

O sistema linear (1) é dito sistema linear m por n e se indica $m \times n$.

Exemplos:

$$S_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

2.3.4 Matrizes associadas a um sistema

Consideremos o sistema linear (1), associa-se a esse sistema duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema:

a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

de ordem $m \times n$, é chamada matriz dos coeficientes ou matriz associada ao sistema.

A matriz

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

de ordem m por $(n+1)$, é chamada de matriz completa, ou matriz aumentada ou ainda matriz ampliada do sistema.

Exemplos:

Considerando o sitema do exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz dos coeficientes}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \text{ Matriz completa, aumentada ou ampliada}$$

2.3.5 Representação matricial de um sistema

Dado um sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m \end{cases} \tag{2}$$

considera-se as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

e

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Então o sistema linear S pode ser representado da seguinte forma:

$$Ax = b.$$

Teorema 1. *[3]*

Um sistema linear com equações e variáveis admite solução se e somente se o posto da matriz ampliada (P_A) é igual ao posto (P_C) da matriz dos coeficientes. Assim,
a) Se $P_C = P_A = n$, o sistema é possível determinado;
b) Se $P_A = P_C < n$, o sistema é possível indeterminado;
c) Se $P_A \neq P_C$, o sistema é impossível.

2.3.6 Métodos diretos de resolução de um sistema linear

Como um sistema linear requer como solução uma sequência ordenada como o modelo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ de n variáveis ocorre quando esta solução é também solução de cada uma das equações do sistema.

O conjunto de todas as soluções possíveis é chamado **conjunto solução do sistema**. Com relação ao número de soluções de um sistema linear pode ser classificado em: (a) compatível e determinado: quando houver uma única solução; (b) compatível e indeterminado: quando houver uma infinidade de soluções; (c) inexistente: quando o sistema não admite solução.

Existem vários métodos para resolução de um sistema, este trabalho propõe o estudo dos métodos diretos Eliminação de Gauss e Fatoração LU que veremos a seguir.

3 Estudo do Método de Eliminação de Gauss: Resolução de um Sistema Linear

Esta seção consiste em apresentar os conceitos básicos dos métodos diretos de resolução de um sistema linear: método de Eliminação de Gauss e a resolução de problemas cotidianos como exemplos.

3.1 O Método de Eliminação de Gauss para Sistemas Lineares

Uma versão preliminar da eliminação de Gauss apareceu pela primeira vez no livro chinês "Nove Capítulo de Artes Matemática" , em torno de 200 a.C. Até então o poder do método não tinha sido reconhecido. Mas no ano de 1801 Carl Friedich Gauss utilizou o método para calcular a órbita do asteróide Ceres com pouquíssimas informações (anotações do astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi) quem batizou o asteróide com o nome ao observá-lo pela primeira vez [1].

O trabalho de Gauss causou sensação quando Ceres reapareceu na constelação de virgem, local aproximado indicado por seus cálculos. Mais tarde o método foi popularizado quando Willian Jordan (engenheiro alemão) em l888 publicou no seu livro de geodésica intitulado "Handbuch der Vermessungskund".

Um dos métodos mais eficientes para resolver sistemas lineares e achar a inversa de uma matriz é o método de Eliminação de Gauss. Este método para resolução de sistemas lineares é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve.

Ele consiste em fazer operações elementares sobre as equações do sistema onde irá reduzi-lo após passos a um sistema triangular superior, que é equivalente ao sistema dado. Este sistema é resolvido por substituições retroativas.

Definição 1. *Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se eles possuem as mesmas soluções. As soluções de um sistema linear não são alteradas se permutarmos duas linhas quaisquer, ou se multiplicarmos a i-ésima linha por k_1 e adicioná-la com a j-ésima linha multiplicada por outra constante k_2 . Essas transformações efetuadas sobre um sistema linear são conhecidas por operações elementares [3].*

Veremos agora os passos para aplicar o método de Eliminação de Gauss.

Dado um sistema linear com equações e variáveis, temos os seguintes passos:

1. Obter a matriz ampliada do sistema linear;

2. Escalonar a matriz ampliada usando operações elementares, isto é, transformar essa matriz em uma matriz triangular superior em que os elementos $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Observação 1: Os coeficientes de uma matriz ampliada a_{ij}, b_j, b_{ij} são todos números reais e a matriz é chamada de matriz dos coeficientes.

Observação 2: Nesta esta etapa, apresentamos o símbolo $\leftarrow$ que significa "recebe". Por exemplo, para representar que "a segunda linha recebe a primeira linha adicionada da segunda" escrevemos: $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$. É importante observar que L_2 no lado direito dessa expressão refere-se a matriz ampliada na etapa anterior; já o L_2 à esquerda é a segunda linha "renovada". Após um número finito de passos, a matriz ampliada está escalonada. Usaremos também o símbolo $\sim$ para significar "equivalente a".

3.2 Resolução de sistemas lineares

O texto apresentado nesta Subseção segue-se como exposto na referência [2]. Sendo assim, seja $Ax = b$ um sistema linear, onde A: matriz $n \times n$, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. . \tag{3}$$

Da última equação, temos:

$$x_n = b_n/a_{nn}.$$

x_{n-1} pode então ser obtido da última equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} .$$

E assim sucessivamente obtém-se $x_{n-2}, \ldots, x_2$ e finalmente x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots a_{1n}x_n}{a_{11}} .$$

3.3 Descrição do método de Eliminação de Gauss

Conforme dissemos anteriormente, o método consiste em transformar o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior. Para modificar adequadamente o sistema linear dado de forma a obter um sistema equivalente, faremos uso do teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 2. *Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma sequência de operações elementares escolhidas entre:*

i *Trocar duas equações;*

ii *Multiplicar uma equação por uma constante não nula;*

iii *Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;*

Obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.

Segue-se como exposto na referência [2], o texto apresentado abaixo. Sendo assim, descrevemos a seguir como o método de Eliminação de Gauss usa este teorema para triangularizar a matriz A.

Vamos supor que det(A) $\neq 0$. A eliminação é efetuada por colunas e chamaremos de etapa k do processo a fase em que se elimina a variável x_k das equações $k+1, k+2, ..., n$. Usaremos a notação $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final da k-ésima etapa, bem como $b_i^{(k)}$ será o i-ésimo elemento do vetor constante no final da etapa k. Considerado que det(A)$\neq$ 0, é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (i):

Seja $A^{(0)}|b^{(0)} = A|b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$

onde
$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i \quad$ e $\quad a_{11} \neq 0.$

Etapa 1

A eliminação da variável x_i das equações $i = 2, \ldots, n$ é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1}. Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é $m_{i1}^{(0)} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \ldots, n$.

Os elementos $m_{i1}^{(0)} = \dfrac{a_{(i1)^{(0)}}}{a_{(11)^{(0)}}}$, $\quad i = 2, \cdots, n$ são os *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é denominado *pivô* (primeiro elemento não nulo de cada linha) nesta da 1ª etapa.

Ao final desta etapa tem-se a matriz:

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}^{(0)}$ para $j = 1, \ldots, n$

$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$

e
$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}$ $i = 2, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$

$b_1^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)}$ $i = 2, \ldots, n$

Etapa 2

Deve-se ter pelo menos um elemento $a_{i2} \neq 0$, para $i = 2, \dots, n$, caso contrário, $det(A^{(1)}) = 0$, o que implica que $det(A) = 0$: mas $det(A) \neq 0$, por hipótese. Então, é sempre possível reescrever a matriz $A^{(1)}$, sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô $a_{22}^{(1)}$, seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ i = 3, \dots, n.$$

A variável x_2 é eliminada das equações $i = 3, \dots, n$ da seguinte forma: da equação i subtraímos a segunda equação multiplicada por m_{i2}.

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)}|b^{(2)}$:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

onde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$ para $\quad i = 2, \dots, n \quad$ e $\quad j = i+1, \dots, n$

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)} \quad$ para $\quad i = 3, \dots, n.$

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa $(n-1)$ e a matriz, ao final desta etapa, será:

$$A^{(n-1)}|b^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

e o sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

3.4 Estratégias de pivoteamento

Para não se ter pivô nulo o que tornaria o trabalho impossível ou próximo de zero o que pode conduzir a resultados totalmente imprecisos, devemos utilizar uma estratégia denominada de pivoteamento, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal [2].

3.5 Estratégia de pivoteamento parcial

Esta estratégia consiste em:

i) No início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes $a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = k, k+1, \ldots, n$.

ii) Trocar as linhas k e i se for necessário.

3.6 Estratégia de pivoteamento completo

Nesta estratégia, no início da etapa k é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que atuam no processo de eliminação: $\max |a_{ij}^{(k-1)}| = |a_{rs}^{(k-1)}|$ então pivô $= a_{rs}^{(k-1)}$ qualquer que seja i, $j \geq k$.

A primeira vista, o dispositivo prático de Gauss não parece prático, mas com alguns exercícios propostos é possível resolvê-lo assim que os valores dos coeficientes do sistema são discriminados na tabela, dispensando o registro de cada um dos determinantes de segunda ordem que aparecem no dispositivo, economizando tempo na resolução do sistema dado. Nos próximos exemplos usaremos esse artifício, a fim de mostrar sua praticidade. Vamos também dispensar os métodos que são utilizados exaustivamente pelos livros textos, no intuito de focar as discussões sobre a ideia do método de Gauss.

Provavelmente um dos problemas mais importantes na matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa [14].

Usando métodos eficientes, muitas vezes é possível reduzir um problema sofisticado a um único sistema de equações lineares.

A seguir trabalharemos com exemplos de problemas que recaem em um sistema de equação linear. Propomos maneiras para que o professor possa introduzir o contéudo resolução de sistemas lineares. Iniciamos com um problema simples que envolve três incógnitas, passaremos para um relativo a história da matemática e os dois últimos são aplicações em física e biologia.

Exemplos:

Exemplo 1. *Um funcionário recém - contratado por uma empresa recebeu a seguinte tabela contendo as quantidades de três tipos de produtos A, B e C, recebidos ou devolvidos em três lojas da empresa, acompanhadas dos respectivos valores que cada loja deveria remeter à matriz pela transação.*

	Quantidade			Valor da transação (em mil R$)
Tipo	A	B	C	Total
Loja 1	3	4	-1	8
Loja 2	4	5	2	20
Loja 3	1	-2	3	6

Ajude o funcionário a calcular o valor unitário de cada tipo de produto.

O professor junto aos alunos pode definir que o produto A seja x_1, o produto B seja x_2 e o produto C seja x_3. Uma abordagem para o problema é obter equações para cada produto separadamente.Então, escrevendo o sistema com os dados correspondentes acima, temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

A seguir o professor juntamente com os alunos começa a resolver o problema de acordo com o método de Eliminação de Gauss, descrito na aula.

Etapa 1

Sejam as equações **1**, **2** e **3** respectivamente: $3x_1+4x_2-x_3 = 8$, $4x_1+5x_2+2x_3 = 20$ e $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$.

O objetivo é eliminar x_1 das equações **2** e **3**

Para facilitar o entendimento do processo, de agora em diante usaremos a notação L_i para indicar o vetor linha formado pelos elementos da linha i da matriz $A^{(k)}|b^{(k)}$. Assim, nesta etapa, $L_1 \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

Colocando então os valores definidos no sistema em forma de linhas e colunas na matriz ampliada, segue que:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{3}$

$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{3}$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & 28/3 \\ 0 & -10/3 & 10/3 & 10/3 \end{array}\right]$$

Após realizar as operações indicadas acima nas linhas **2** e **3** passemos para próxima etapa.

Etapa 2

Eliminar a variável x_2 da equação **3**

Pivô: $a_{22}^{(1)} = -1/3$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-10/3}{-1/3} = 10$$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

Então:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & 28/3 \\ 0 & 0 & -10/3 & -270/3 \end{array}\right].$$

Assim, ao executar as operações necessárias na linha **3**, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & -x_3 & = & 8 \\ & & -\frac{1}{3}x_2 & +\frac{10}{3}x_3 & = & \frac{28}{3} \\ & & & -\frac{90}{3}x_3 & = & -\frac{270}{3} \end{cases} \tag{4}$$

Logo obtemos um sistema linear equivalente ao primeiro, recaindo então na resolução de simples equações do primeiro grau e operações algébricas ao substituir uma das variáveis pelo seu valor numérico.

Resolvendo, temos:

$$-\frac{90}{3}x_3 = -\frac{270}{3}$$
$$\Rightarrow -90x_3 = -270$$

$$\Rightarrow x_3 = 3$$

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_3 = \frac{28}{3}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}.3 = \frac{28}{3}$$
$$\Rightarrow -x_2 + 30 = 28$$
$$\Rightarrow -x_2 = 28 - 30$$
$$\Rightarrow -x_2 = -2$$
$$\Rightarrow x_2 = 2$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8$$
$$\Rightarrow 3x_1 + 4.2 - 3 = 8$$
$$\Rightarrow 3x_1 + 8 - 3 = 8$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 8 - 8 + 3$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 3$$
$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Logo, o produto Tipo A tem valor de 1 mil reais, o Tipo B tem valor de 2 mil reais e o Tipo C tem valor de 3 mil reais.

O professor ao terminar de resolver este exemplo com os alunos, pode propor grupos de alunos (no máximo três) que troquem os valores do vetor b, criando assim um novo exercício semelhante ao primeiro, para resolvê-lo e expor aos colegas as devidas respostas, ainda podendo este pedir para que troquem os problemas entre os grupos.

O segundo exemplo tem por objetivo mostrar a utilização dos sistemas lineares no começo dos séculos, fazendo assim o professor um elo entre a evolução do homem e a evolução da matemática.

Exemplo 2. *Problema proposto pelo manuscrito no livro chinês "Nove Capítulos de Arte Matemática" publicado entre 200 a.C. e 100 a.C. durante a dinastia de Han: Existem três tipos de milho, dos quais três montes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro totalizam 39 medidas. Dois montes do primeiro, três do segundo e um do terceiro totalizam 34 medidas. Finalmente, um monte do primeiro, dois do segundo e três do terceiro totalizam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um monte de cada um dos tipos?*

O professor e os alunos podem definir que o milho Tipo **1** seja x_1, o milho Tipo **2** seja x_2 e o milho Tipo **3** seja x_3. Uma abordagem para o problema é escrever os dados correspondentes acima, temos um sistema linear de três equações e três incógnitas.

Seja o sistema linear correspondente aos dados do problema acima:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 34 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 39 \end{cases}$$

A seguir o professor e os alunos começam a resolver o problema de acordo com o método de Eliminação de Gauss, estudado em aula.

Etapa 1

Sejam as equações **1**, **2** e **3** respectivamente: $1x_1+2x_2+3x_3 = 26$, $2x_1+3x_2+1x_3 = 34$ e $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 39$.

Devemos eliminar a variável x_1 das equações **2** e **3**.

Nesta etapa temos, $L_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \end{bmatrix}$.

Trocando os valores das L_2 e L_3 , teremos a seguinte matriz ampliada:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{array}\right].$$

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 1$

$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$

$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right].$$

Após realizar as operações nas linhas **2** e **3**, seguimos para próxima etapa.

Etapa 2

Eliminar a variável x_2 da equação **3**.
Pivô: $a_{22}^{(1)} = -1$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

Então:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{array}\right].$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & + & 2x_2 & +3x_3 & = & 26 \\ & & -1x_2 & -5x_3 & = & -18 \\ & & & 12x_3 & = & 33 \end{array}\right. \tag{5}$$

Resolvendo, temos:

$$12x_3 = 33 \Rightarrow x_3 = 2,75$$

$$-1x_2 - 5x_3 = -18$$
$$\Rightarrow -1x_2 - 5.(2,75) = -18$$
$$\Rightarrow -x_2 - 13,75 = -18$$
$$\Rightarrow -x_2 = -18 + 13,75$$
$$\Rightarrow -x_2 = -4,25$$
$$\Rightarrow x_2 = 4,25$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26$$
$$\Rightarrow x_1 + 2.(4,25) + 3.(2,75) = 26$$
$$\Rightarrow x_1 + 8,5 + 8,25 = 26$$
$$\Rightarrow x_1 = 26 - 8,5 - 8,25$$
$$\Rightarrow x_1 = 9,25$$

Logo, o milho Tipo 1 tem de 9,25 medidas, o Tipo 2 tem 4,25 medidas e o Tipo 3 tem 2,75.

Ao terminar este exemplo o professor pode propor uma pesquisa onde os alunos poderão procurar na internet ou em outros livros exercícios relativos ao início do século que sua resolução seja através de Sistema Linear.

Exemplo 3. *Circuito elétrico com baterias indicando seu potencial elétrico. Determinar as correntes que atravessam cada segmento do circuito.*

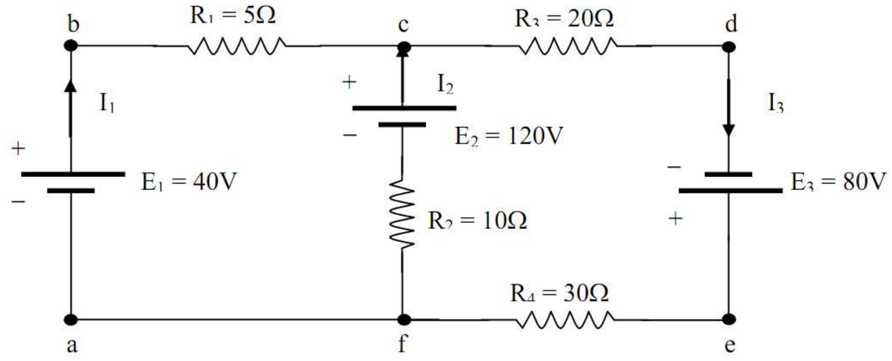

Figura 1: Circuito elétrico com baterias indicando seu potencial elétrico.

Fonte: [9]

Neste exemplo construiremos o sistema linear, que representa o circuito elétrico, seguindo a descrição apresentada na referência [9] cuja modelagem matemática advém das Leis de Kirchhoff [15].

(1) Lei de Kirchhoff das Correntes:

Atribuímos I_1 ao segmento $f \to a \to b \to \ c, I_2$ ao segmento $f \to c$, e I_3 ao segmento $c \to d \to e \to f$. Além disso, atribuímos arbitrariamente direções a essas correntes como indicadas pelas flechas Figura 1. Se a direção atribuída for correta, o valor calculado da corrente será positivo; se estiver incorreta, o valor calculado da corrente será negativo. Esse último resultado indica que a direção real da corrente é oposta à atribuída. Utilizando a lei de Kirchhoff das correntes (a soma das correntes que chegam ao nó = a soma das correntes que saem do nó) nos pontos c e f, temos:

No nó c: $I_1 + I_2 = I_3$

No nó f: $I_3 = I_1 + I_2$

As duas equações contêm a mesma informação, portanto apenas uma delas é necessária.

(2) Lei de Kirchhoff das Tensões:

A diferença de potencial medida em qualquer ciclo é nula.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado: $a \to b \to c \to f \to a$, resulta em:

$(+E_1) + (-R_1.I_1) + (-E_2) + (R_2.I_2) = 0$

$(+40V) + (-5.I_1) + (-120V) + (10.I_2) = 0$

$40 - 5I_1 - 120 + 10I_2 = 0$ (02)

$-5I_1 + 10I_2 - 80 = 0$

$-I_1 + 2I_2 - 16 = 0$

$I_1 - 2I_2 = -16$

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado $c \to d \to e \to f$, temos:

$(-R_3I_3) + (+E_3) + (-R_4I_3) + (-R_2I_2) + (+E_2) = 0$

$(-20I_3) + (80) + (-30I_3) + (-10I_2) + (120) = 0$

$-20.I_3 + 80 - 30.I_3 - 10.I_2 + 120 = 0$

$-50.I_3 - 10.I_2 + 200 = 0$ (03)

$-5.I_3 - I_2 + 20 = 0$

$-I_2 - 5.I_3 = -20$

$I_2 + 5.I_3 = 20$

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Tensões no ciclo fechado

$a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$, temos:

$(+E_1) + (-R_1.I_1) + (-R_3.I_3) + (+E_3) + (-R_4.I_3) = 0$

$40 + (-5.I_1) + (-20.I_3) + (-10.I_2) + (120) = 0$

$40 - 5.I_1 - 10.I_2 - 20.I_3 + 80 - 30.I_3 = 0$ (04)

$-5.I_1 - 50.I_3 + 120 = 0$

$-5.I_1 - 50.I_3 = -120$

$I_1 + 10.I_3 = 24$

Percebemos que a equação (04) é uma combinação linear das Equações (02)e (3), pois equação(04) = equação (02) + 2 vezes a Equação (03).

$I_1 - 2.I_2 + 2.I_2 + 10.I3 = -16 + 2.20$

$I_1 + 10.I_3 = 24$

Portanto, a equação (04) é redundante e poderá ser omitida.

Em geral, um ciclo externo maior como $a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$ não fornece informações novas se todos os seus ciclos internos, como $a \to b \to c \to f \to a$

e $c \to d \to e \to f \to c$, já tiverem sido incluídos.

As Equações (01), (02) e (03) resultam em um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

em que a matriz dos coeficientes é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e a matriz completa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right].$$

Resolvendo o sistema pelo Método de Gauss, temos:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} I_1 & +I_2 & -I_3 & = & 0 \\ I_1 & -2I_2 & & = & -16 \\ & +I_2 & +5I_3 & = & 20 \end{array}\right. \tag{6}$$

Etapa 1

Sejam as equações **1**, **2** e **3** respectivamente: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$, $I_1 - 2I_2 + = -16$ e $I_2 + 5I_3 = 20$.

Trocar a L_2 pela L_3

Eliminar I_1 das equações **2** e **3**

Temos nesta etapa, $L_1 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 1 & -2 & 0 & -16 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
Pivô: $a_{11}^{(0)} = 1$
$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0}{1} = 0$
$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$

$L_3 \leftarrow L_1 - m_{31}L_3$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 16 \end{array}\right]$$

Etapa 2

Eliminar I_2 das equações **3**
Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1$
$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{3}{1} = 3$
$L_3 \leftarrow m_{32}L_2 - L_3$

Então:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 16 & 44 \end{array}\right].$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} I_1 & +I_2 & -I_3 & = & 0 \\ & I_2 & +5I_3 & = & 20 \\ & & 16I_3 & = & 44 \end{cases} \tag{7}$$

Resolvendo, temos:

$$16I_3 = 44 \rightarrow I_3 = 2,75$$

$$I_2 + 5I_3 = 20$$
$$\Rightarrow I_2 + 5.(2,75) = 20$$
$$\Rightarrow I_2 + 13,75 = 20$$
$$\Rightarrow I_2 = 20 - 13,75$$
$$\Rightarrow I_2 = 6,25$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$\Rightarrow I_1 + 6,25 - 2,75 = 0$$
$$\Rightarrow I_1 + 3,5 = 0$$
$$\Rightarrow I_1 = -3,5$$

Portanto, $I_1 = -3,5A$, $I_2 = 6,25A$ e $I_3 = 2,75A$.

Na referência [9], temos uma interpretação para o valor negativo de I_1. Quando o sinal da corrente elétrica é negativa, isto significa que sua direção verdadeira é oposta à atribuída na Figura 1. Portato, ao invés da corrente I_1 seguir o sentido horário, na verdade, a corrente percorre o circuito no sentido anti-horário.

Após explorar o exemplo aplicado na Física os professores destacarão a utilização da aplicação de sistemas lineares em outras áreas como no próximo exemplo (Biologia).

Exemplo 4. *Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.*

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 grama) de cada alimento, determinou-se que:

i) *O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 23 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E;*

ii) *O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E;*

iii) *O alimento III tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 5 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 2 unidades de vitamina E;*

iv) *O alimento IV tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 13 unidades de vitamina E;*

v) *O alimento V tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.*

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV, V deve-se ingerir diariamente para que se possa ter uma alimentação equilibrada?

Referência: Exercício 25, página 54, Capítulo 2 do Livro: Álgebra Linear - [3]

Para montarmos o sistema referente aos dados apresentados, sejam: x, y, z, t e w as quantidades (em grama) a serem ingeridas diariamente dos alimentos I, II, III, IV e V respectivamente.

O sistema equivalente ao problema é:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & +10y & +z & +2t & +2w & = & 170 \\ 9x & +y & +0z & +t & +w & = & 180 \\ 2x & +2y & +5z & +t & +2w & = & 140 \\ x & +y & +z & +2t & +13w & = & 180 \\ x & +y & +z & +9t & +2w & = & 350 \end{array}\right. \tag{8}$$

A matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 170 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 180 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 2 & 140 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 13 & 180 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 2 & 350 \end{array}\right]$$

Resolvendo pelo Método de Eliminação de Gauss, temos:

Etapa 1:

Eliminar x das equações **2**, **3**, **4** e **5**.

Pivô: $a_{11} = 1$

$m_{21} = 9$

$m_{31} = 2$

$m_{41} = 1$

$m_{51} = 1$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - m_{41}L_1$

$L_5 \leftarrow L_5 - m_{51}L_1$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 170 \\ 0 & -89 & -9 & -17 & -17 & -1350 \\ 0 & -18 & 3 & -3 & -2 & -200 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -9 & 0 & 7 & 0 & 180 \end{array}\right]$$

Etapa 2:

Eliminar y das equações **3**, **4** e **5**.

Pivô: $a_{22} = -89$

$m_{32} = \frac{18}{89}$

$m_{42} = \frac{9}{89}$

$m_{52} = \frac{9}{89}$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - m_{42}L_2$

$L_5 \leftarrow L_5 - m_{52}L_2$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 170 \\ 0 & -89 & -9 & -17 & -17 & -1350 \\ 0 & 0 & 429/89 & 39/89 & 128/89 & 6600/89 \\ 0 & 0 & 81/89 & 153/89 & 1132/89 & 13040/89 \\ 0 & 0 & 81/89 & 776/89 & 153/89 & 28170/89 \end{array}\right]$$

Etapa 3:

Eliminar z das equações **4** e **5**.

Pivô: $a_{33} = \frac{429}{89}$

$m_{43} = \frac{81}{429}$

$m_{53} = \frac{81}{429}$

$L_4 \leftarrow L_4 - m_{43}L_3$

$L_5 \leftarrow L_5 - m_{53}L_3$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 170 \\ 0 & -89 & -9 & -17 & -17 & -1350 \\ 0 & 0 & 429/89 & 39/89 & 128/89 & 6600/89 \\ 0 & 0 & 0 & 1602/979 & 475260/38181 & 5059560/38181 \\ 0 & 0 & 0 & 8455/979 & 55269/38181 & 11550330/38181 \end{array}\right]$$

Etapa 4:
Eliminar t da equação **5**.
Pivô: $a_{44} = \frac{1602}{979}$
$m_{54} = \frac{8455}{1602}$
$L_5 \leftarrow L_5 - m_{54}L_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 1 & 2 & 2 & 170 \\ 0 & -89 & -9 & -17 & -17 & -1350 \\ 0 & 0 & 429/89 & 39/89 & 128/89 & 6600/89 \\ 0 & 0 & 0 & 1602/979 & 475260/38181 & 5059560/38181 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3929782362/61165962 & -24274951140/61165962 \end{array}\right]$$

Então:

$$-\frac{3929782362}{61165962}w = -\frac{24274951140}{61165962}$$
$$\Rightarrow 3929782362w = 24274951140$$
$$\Rightarrow w = 6,18$$

$$\frac{1602}{979}t + \frac{475260}{38181}w = \frac{5059560}{38181}$$
$$\Rightarrow \frac{62478}{38181}t + \frac{475260}{38181}(6,18) = \frac{5059560}{38181}$$
$$\Rightarrow 62478t + 2937106,8 = 5059560$$
$$\Rightarrow 62478t = 2122453,2$$
$$\Rightarrow t = 34$$

$$\frac{429}{89}z + \frac{39}{89}t + \frac{128}{89}w = \frac{6600}{89}$$

$\Rightarrow 429z + 39(34) + 128(6,18) = 6600$
$\Rightarrow 429z + 2117,04 = 6600$
$\Rightarrow 429z = 4482,96$
$\Rightarrow z = 10,45$

$\Rightarrow -89y - 9z - 17t - 17w = -1350$
$\Rightarrow -89y - 9(10,45) - 17(34) - 17(6,18) = -1350$
$\Rightarrow -89y - 777,11 = -1350$
$\Rightarrow -89y = -572,89$
$\Rightarrow y = 6,44$

$x + 10y + z + 2t + 2w = 170$
$\Rightarrow x + 10(6,44) + 10,45 + 2(34) + 2(6,18) = 170$
$\Rightarrow x + 155,21 = 170$
$\Rightarrow x = 14,79$

Assim, para que se tenha uma alimentação diária equilibrada deve-se ingerir 14,79g do alimento I, 6,44g do alimento II, 10,45 do alimento III, 34g do alimento IV e 6,18g do alimento V.

Com estas situações-problemas podemos trabalhar em sala de aula com as outras áreas do conhecimento, ocorrendo assim a interdisciplinariedade na Escola de Educação Básica.

A importância da Matemática com a integração de situações reais na sala de aula constitui-se em um meio para acessar o mundo matemático quanto para compreender e intervir no meio social (Barbosa,1999) [13].

As situações-problemas abordadas podem contribuir para o conhecimento mais significativo da aplicabilidade em circunstâncias que ocorrem no nosso dia-a-dia e essencialmente que o cidadão (nosso aluno) se conscientize da sua parte nesse processo.

Vimos a possibilidade da utilização de problemas na resolução de sistemas pelo método direto Eliminação de Gauss, passaremos então para o estudo do método direto Fatoração LU, que é simplesmente consequência da utilização do método de Eliminação de Gauss, onde trocamos o vetor b, como sugerido na proposta do primeiro exemplo para o professor.

4 FATORAÇÃO LU

Embora as ideias tenham sido conhecidas antes, muitas vezes o crédito pela popularização da decomposição LU é atribuída ao lógico e matemático britânico Alan Turing (precursor do computador), pelo seu trabalho de 1948 nesse assunto.

Ao final dos anos 1970, a Fundação Nacional de Ciências e o Departamento de Energia dos EUA financiaram o desenvolvimento de rotinas computacionais para inverter matrizes e resolver sistemas de equações lineares. Aquela pesquisa levou a um conjunto de programas Fortran chamada LINPAC que são uma referência para muitos algoritmos computacionais de hoje. Inclusive o chamado MATLAB. As rotinas LIMPAC estão organizadas em torno de quatro fatorações de matrizes, uma das quais é a decomposição LU. C.B. Moler, J.J. Dongarra, G.W. Stewart e J.R. Brunch, os principais programadores do LINPAC, basearam muitas de suas ideias no trabalho de Jemes Boyle e Kenneth Dritz, do Laboratório Argonne (nos EUA) [1].

Em muitas situações, é desejável resolver vários sistemas lineares nos quais a matriz dos coeficientes é a mesma. Nesses casos, é indicado resolver o sistema linear $Ax = b$ por uma técnica de decomposição da matriz A. Dentre as técnicas de decomposição mais utilizadas, destacamos a decomposição LU.

Os fatores L e U podem ser construídos usando a ideia básica do método de eliminação de Gauss, pois a obtenção desses fatores por fórmulas dificulta o uso de estratégias de pivoteamento.

Fatorando a matriz A em duas matrizes triangulares L e U, sendo que o fator L é triangular inferior com diagonal unitária e seus elementos L_{ij} para $i > j$ são os multiplicadores m_{ij} obtidos no processo de eliminação de Gauss; o fator U é triangular superior e é obtida no final da fase da triangularização.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

4.1 O método da Decomposição LU

Neste tópico constará a decomposição LU, a decomposição da Matriz A em LU, aplicação à solução de sistemas lineares e exemplos resolvidos.

Este método, também conhecido como Método de Doolittle, consiste na seguinte sequência de passos:

(i) Obter a fatoração LU da matriz A;

(ii) Fazer $Ux = y$

(iii) Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$;

(iv) Obtida a solução $\bar{y}$ do sistema $Ly = b$, resolver o sistema triangular superior $Ux = \bar{y}$.

4.1.1 A Decomposição LU

Teorema 3. *Teorema da Decomposição LU [10].*

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das K primeiras linhas e colunas. Assumimos que $\det(A_k) = 0$ *para k = 1, 2, ..., n - 1. Então existe uma única matriz triangular inferior*

$$L = (l_{ij}),$$

com $I_{11} = l_{22} = ... = l_{nn} = 1$, *e uma única matriz triangular superior*

$$U = (u_{ij})$$

tal que $LU = A$. *Além disso,* $\det(A) = u_{11}.u_{22}...u_{nn}$.

Prova:

Para provar esse teorema usaremos indução sobre n. Se $n = 1$, temos que: $a_{11} = 1.u_{11}$ unicamente, e $\det(A) = u_{11}$. Assumimos que o teorema é verdadeiro para $n = k - 1$. Para $n = k$ partimos A em sub-matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix};$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{k-1} & P \\ 0 & U_{kk} \end{bmatrix}$$

Então:

$$LU = \begin{bmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}P \\ mU_{k-1} & mp + U_{kk} \end{bmatrix}.$$

Agora, pela hipótese de indução, L_{k-1} e U_{k-1} são unicamente determinados e $L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}$. Além disso, nem L_{k-1} nem U_{k-1} são singulares (ou A_{k-1} também seria singular, contrariando a hipótese). Assim $LU = A$ é equivalente a $L_{k-1}p = x$; $mU_{k-1} = y$ e $mp + u_{kk} = a_{kk}$; ou seja: $p = L_{(k-1)}^{(-1)}x$; $m = yU_{(k-1)}^{(-1)}$ e $u_{kk} = a_{kk} - mp$. Então p, m e u_{kk} são determinados univocamente nesta ordem, e L e U são determinados unicamente. Finalmente,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L).\det(U) \\ &= 1.\det(U_{k-1}).u_{kk} \\ &= u_{11}.u_{22}\dots u_{k-1,k-1}.u_{kk}. \end{aligned}$$

Completando a prova.

4.1.2 Decomposição da matriz A em LU (L:Least, U:Upper)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l.u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$l.u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$\vdots$$
$$l.u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$
$$l_{21}.u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
$$l_{31}.u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$
$$\vdots$$
$$l_{n1}.u_{11} = a_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

$$l_{21}.u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$l_{21}.u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{22} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$

$$\vdots$$

$$l_{21}.u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{22} = a_{2n} - l_{21}u_{1n}$$

$$l_{31}.u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u12}{u_{22}}$$

$$l_{41}.u_{12} + l_{42}u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u12}{u_{22}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$l_{n1}.u_{12} + l_{n2}u_{22} = a_{n2} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}u12}{u_{22}}$$

Se continuarmos calculando 3ª linha, 3ª coluna, 4ª linha, 4ª coluna, etc..., teremos as fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ij}u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} = \dfrac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ij}u_{kj})}{u_{ij}} & i > j \end{cases}.$$

Mostraremos através dos exemplos a aplicação do Teorema da Fatoração LU.

Exemplo 5. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Verificar se A satisfaz as condições da decomposição LU.

Para que A satisfaça as condições da decomposição LU devemos ter: $\det(A_1) \neq 0$ e $\det(A_2) \neq 0$. Sendo que A_1 e A_2 são os menores principais da matriz.

Temos:

$$\det(A_1) = 2 \quad e \quad \det(A_2) = -2 \quad \neq 0.$$

Logo A satisfaz as condições.

b) Decompor A em LU

$u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = 2$

$u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = 1$

$u_{13} = a_{13} \Rightarrow u_{13} = 3$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \Rightarrow l_{21} = 0$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{2}$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \Rightarrow u_{22} = -1$

$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \Rightarrow u_{23} = 1$

$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{2}$

$u_{33} = a_{33}.l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \Rightarrow u_{33} = 1$

Então:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Calcular o determinante de A

$\det(A) = u_{12}u_{22}u_{33} Rightarrow \det A = -2$

d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

d.1) $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$y_1 = 9,\ y_2 = 1$

$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 7 \Leftrightarrow y_3 = 2 \quad \therefore\ y = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d.2) $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$x_3 = 2$

$-x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \Rightarrow x_1 = 1$

Assim, a solução de:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

é

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6. *Resolver o exercício do livro [8] (resolução de sistemas lineares com LU) exercício 1.7.10 onde a matriz A tem a seguinte decomposição LU.*

Este exemplo é simples onde o professor pode explorar um sistema de equações lineares com mais de três incógnitas sendo que os alunos poderão encontrar exercícios similares em provas de Vestibulares, livros didáticos do Ensino Médio e ENEM.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então estamos resolvendo $LUx = b$, primeiro resolver $Ly = b$ e, em seguida, $Ux = y$. O primeiro problema é $Ly = b$, logo temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

que após a realização de substituições de cima para baixo, segue que:

$y_1 = 12$

$y_2 = -8 + y_2 = -8 + 12 = 4$

$y_3 = 21 - 2y_1 + y_2 = 21 - 24 + 4 = 1$

$y_4 = -26 + 3y_1 - 2y_2 + y_3 = 3(12) - 2(4) + 1 = 29$

A segunda etapa é resolver $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$x_4 = 13$

$-x_3 1 - 3x_1 = 1 - 3(13) = 1 - 39 - 38 \Rightarrow x_3 = 38$

$x_2 = x_3 - 3x_4 = 38 - 39 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$

$2x_1 = -x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 + 38 - 29 = 10 \Rightarrow x_1 = 5.$

Portanto, a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 38 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

4.1.3 Aplicação à solução de sistemas Lineares

Como vimos, a matriz U é constituída por zeros abaixo da diagonal principal e a matriz L é formada por zeros acima da diagonal principal unitária.

Seja o sistema (com dimensão $n \times n$), $Ax = b$, determinado, onde A satizfaz às condições da decomposição LU. Então o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:

$$LUx = b.$$

Isto representa dois sistemas triangulares:

$$Ly = b$$

e

$$Ux = y$$

os quais são facilmente resolvidos. De fato: as componentes da solução intermediária y podem ser obtidas diretamente do primeiro sistema, desde que a primeira equação contém somente y_1, a segunda somente y_1 e y_2 e assim por diante; e as componentes de x podem ser obtidas semelhantemente do segundo sistema na seguinte ordem: $x_n, x_{n-1}, \ldots.., x_1$.

Para exemplificar voltaremos ao exemplo do livro chinês (2).

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 34 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 39 \end{cases}$$

Para que o exemplo seja completo usaremos a técnica do pivô sendo o maior elemento da coluna, desde a linha do pivô para baixo.

Etapa 1:

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$; então devemos permutar as linhas 1 e 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{31} = -\frac{1}{3}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 4/3 & 8/33 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{bmatrix}$$

$$m_{23} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & 12/5 \end{bmatrix}$$

(Armazenamento de LU)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{3}$, a segunda linha por $\frac{3}{5}$, e a terceira linha por $\frac{5}{12}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Somando $-\frac{1}{3}$ na primeira linha e somando $-\frac{1}{5}$ na segunda linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/5 & -5/36 \\ 0 & 3/5 & -1/12 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Somando $-\frac{2}{3}$ na primeira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/5 & -33/36 \\ 0 & 3/5 & -1/12 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Somando $-\frac{2}{3}$ na segunda linha e $-\frac{1}{3}$ na terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando $-\frac{2}{3}$ na terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/5 & -1/12 \\ 0 & 3/5 & -1/12 \\ 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & -1/3 & -1/12 \\ -5/12 & 2/3 & -1/12 \\ 1/12 & -1/3 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Logo a solução do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & -1/3 & -1/12 \\ -5/12 & 2/3 & -1/12 \\ 1/12 & -1/3 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37/4 \\ 17/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}.$$

O método mais indicado para calcular a inversa de uma matriz é o Método da Decomposição LU, uma vez que tem-se que resolver vários sistemas lineares com uma mesma matriz dos coeficientes. Por isso a praticidade em resolver um problema contextualizado proposto alterando somente o vetor b.

5 Considerações Finais

Como apresenta Chevellard (1999)[5], a organização matemática de um tema de estudo ϕ [1] , corresponde ao estudo da própria realidade matemática. Portanto, entendemos a realidade matemática do objeto Sistema de Equação Linear como a extensão de suas técnicas de resolução, soluções dos sistemas e propriedades às aplicações inerentes às diversas disciplinas.

Como a LDB (Lei de diretrizes e bases) [6] do Ensino Médio tem como finalidade: a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino Fundamental e Médio, possibilitando o prosseguimento de estudos, consideramos importante que o aluno tenha então contato com outros métodos diretos de resolução de um sistema linear para que facilite o entendimento deste, na sequência de seus estudos.

Como visto, é simples resolver sistemas lineares triangulares superiores em forma de sistemas de equações. E extremamente fácil na forma $AX = B$ (matricial) a triangular superior. As mesmas operações elementares entre equações, são válidas para linhas da

[1] Segundo o autor ϕ é qualquer parte da matemática em estudo.

matriz aumentada. Usando operações elementares sobre as linhas na matriz aumentada ou equações no sistema de equações lineares, é possível transformar um sistema linear qualquer em sistema linear triangular superior. Conforme mencionamos anteriormente, ao utilizar as operações elementares entre equações no sistema de equações lineares ou entre linhas na matriz aumentada a solução do sistema permanece a mesma.

Entendemos que, como esse processo de execução dos cálculos não envolve conteúdos avançados (à excessão da demonstração dos teoremas, mas esta parte interessa ao professor), podemos aplicar os métodos propostos no Ensino Médio. A intenção é levar o aluno a ter uma experiência nova de resolução, que facilitará nos seus estudos futuros.

Propõe-se trabalhar em forma de problematização de acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacional) [7], para que haja o desenvolvimento das competências para continuar aprendendo, de forma autônoma e crítica, em níveis mais complexos de estudos. Além disso, sugerimos a inclusão da interdisciplinaridade, mostrando a necessidade da integração da disciplina da matemática com outras disciplinas bem como o que vive no seu dia a dia. Sugere-se ainda que os alunos tenham contato com a tecnologia daí a necessidade da utilização do computador como ferramenta de apoio pedagógico.

Segundo [3] o método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve.

Uma vez que os alunos tenham aprendido os passos e os cálculos necessários exigidos pelo método de Eliminação de Gauss, sugerimos que o mesmo seja implementado em Matlab ou Octave, a fim de mostrar a eficiência do computador na obtenção das soluções de sistemas lineares.

Os softwares citados permitem que o aluno faça alterações pertinentes na matriz dos coeficientes, assim como no vetor b, além de efetuar os cálculos usando a estratégia de pivoteamento parcial.

Vale considerar sobre o uso dos programas que o código desenvolvido possui uma condição de uso (determinante tem que ser diferente de zero), realizando assim somente operações possíveis e determinadas, quanto ao seu pivoteamento é progressivo escolhendo linhas de máximo valor absoluto da coluna desejada para baixo [16].

Desta forma, o ensino da Matemática cumpre a sua função de contribuir na formação do indivíduo, tratando de assuntos e questões do dia-a-dia, com a intenção de mostrar, conhecer e até mesmo alertar.

Referências

[1] ANTON, H. & BUSBY, *R. Álgebra Linear Contemporânea.* Bookman. Porto Alegre. 2006.

[2] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais.* São Paulo: Pearson Education do Brasil. São Paulo,1996.

[3] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L. F. & WETZLER, H.G., *Álgebra Linear*: Harbra, 1980.

[4] SOUZA, Joamir Roberto de, *Novo Olhar Matemática.* - 1 ed. - São Paulo: FTD, 2010. - (Coleção novo olhar; v. 2)

[5] CHEVALLARD, Y. *El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de ló didáctico.* Recherches em Didactique des Mathématiques, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

[6] BRASIL*PCN-Ensino Médio:Matemática* `<http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/l9394_96.htmno>`. Acesso em: 07 de fev. 2014.

[7] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*, 2000. `<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>` acessado em: 08/02/2014

[8] Watkins, David S., *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley and Sons, 2nd edition 2002.

[9] Nomura, Joelma Iamac *Relações entre sistemas de equações lineares e circuitos elétricos: um enfoque interdisciplinar tratado em livros de álgebra linear aplicada* `<http://faculdadefundetec.com.br/img/revista_academica/pdf/artigo_joelma.pdf>` acessado em 08/02/2014

[10] Forsythe, G. E. & Moler, C. B., *Computer Solution of Linear Algebraic Systems.*, Prentice Hall, Inc., 1967.

[11] Bassanezi, Rodney Carlos., *Ensino-aprendizagem como Modelagem Matemática: uma nova estratégia.*, São Paulo: Contexto, 2002.

[12] D'Ambrósio, Ubiratan., *Etnomatemática.*, São Paulo: Ática, 1998.

[13] Barbosa, Jonei Cerqueira., *O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?.*, Zetetiké,v.7,n.11,p.67-85, 1999.

[14] Rehfeldt, Márcia Jussara Hepp *A aplicação de modelos matemáticos em stuações - probemas, com o uso do software LINDO* <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17255/000713767.pdf> acessado em 08/02/2014

[15] Boylestad, Robert L., *Introdução à Análise de Circuitos.*, São Paulo, PEARSON, 10ªedição.

[16] Nunes, Felipe;e outros *Aplicação do Método de Eliminaçãode Gauss em Matlab* <http://www.aedb.br/seget/artigos08/465_Eliminacao_de_Gauss[1].pdf> acessado em 08/02/2014

[17] Souza, Joamir Roberto de., *Novo olhar Matemática.*, 1 ed. ; São Paulo: FTD, 2010. (Coleção novo olhar; v. 2.)