UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Proposta Didática para o Ensino da Trigonometria no Ensino Fundamental

Anderson Rangel Batista Siqueira

Maceió, Dezembro de 2014.

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ANDERSON RANGEL BATISTA SIQUEIRA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

MACEIÓ
2014

ANDERSON RANGEL BATISTA SIQUEIRA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de mestrado profissional em matemática – PROFMAT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

MACEIÓ
2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Maria Helena Mendes Lessa

S618u Siqueira, Anderson Rangel Batista.
Uma proposta didática para o ensino da trigonometria no ensino fundamental / Anderson Rangel Batista Siqueira. – Maceió, 2014.
80 f.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 66.
Apêndices: f. 67-80

1. Trigonometria. 2. Razão – Aritmética. 3. Proporção – Aritmética. 4. Teorema de Pitágoras. I. Título.

CDU: 514.116.2

AUTOR: ANDERSON RANGEL BATISTA SIQUEIRA

Uma proposta didática para o ensino da trigonometria no ensino fundamental

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de Dezembro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Gregório Manoel da Silva Neto

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto (Orientador - UFAL)

Banca Examinadora:

Viviane Oliveira

Profa. Ma. Viviane de Oliveira Santos (UFAL)

Vicente Francisco de Souza Neto

Prof. Dr. Vicente Francisco de Souza Neto (UNICAP)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me concebido essa valiosa oportunidade.

A minha avó, Maria Irene, que sempre me incentivou nos estudos.

A minha Mãe, Valderez Batista Siqueira, que dedicou uma vida a mim e ao meu irmão.

Ao meu Pai, José Henrique Alves Siqueira, que sempre acreditou em mim.

Ao meu irmão, Anderlan Henrique Batista Siqueira, que é fundamental em minha vida.

Aos meus Tios e Tias que sempre se fizeram presentes em minha jornada educacional.

Aos meus queridos alunos.

Ao professor Gregório, que orientou e conduziu com seriedade e dedicação este trabalho e, sobretudo, com muita competência.

A todos os professores do programa de mestrado (PROFMAT), e a todos aqueles que fizeram parte da minha caminhada escolar.

A todos os colegas de curso com quem compartilhei valiosas discussões.

Ouse sonhar

Ouse sonhar... pois, só os sonhadores veem o amanhã. Ouse fazer um desejo, porque desejar abre caminhos para a esperança e ela é o que nos mantém vivos. Ouse buscar as coisas que ninguém mais pode ver. Não tenha medo de ver o que os outros não podem. Acredite em seu coração e em sua própria bondade, pois, ao fazê-lo, outros acreditarão nisso também. Acredite na magia... a vida é cheia dela, mas, acima de tudo, acredite em si mesmo... ...porque dentro de você reside toda a magia... da esperança, do amor e dos sonhos de amanhã...

(Autor desconhecido)

RESUMO

O presente trabalho visa propor e, de alguma forma, contribuir para o aprimoramento do ensino da Trigonometria no ensino fundamental, segundo uma pesquisa realizada com alguns professores que atuam no 9° ano do ensino básico de escolas públicas e particulares do estado de Alagoas. Diante disso, foi elaborada uma sequência de aulas para esses alunos divididas em quatro partes. O tema foi escolhido e desenvolvido com a intenção de diminuir a grande dificuldade encontrada pelos alunos para a compreensão do conteúdo e possibilitar uma melhor aplicabilidade nos problemas, sobretudo por entendermos que a compreensão de alguns conceitos, pode capacitar o estudante a realizar operações aritméticas, algébricas e geométricas à medida que são apresentados. Propomos o ensino da Trigonometria através da resolução de problemas, em especial a construção de um desenho que facilite a visualização e a interpretação da questão chegando até sua solução, pois dessa forma, entendemos que os alunos possam desenvolver suas próprias técnicas de resolução.

Palavras-chaves: Trigonometria. Razão. Proporção. Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

The purpose of this work is propound, in some way, contribute to Trigonometry' teaching improvement in elementary school, according to survey conducted with some teachers who work in the 9th year about basic education that happens in public and private schools in Alagoas State state. For this, it was drawn up a classes sequence for these students divided into four parts. The theme was chosen and developed with intention of reducing a great difficulty found by students in a content's comprehension, and enable a better applicability in problems, mainly because we believe that the understanding by some concepts, you can enable the student to perform arithmetic operations, algebra and geometry to extent that are presented. We propose the teaching Trigonometry through the resolution of problems, in particular the design's construction that facilitates the subject's visualization and interpretation coming to your solution, because in this way, we believe that students can develop their own resolutio's skills.

Key-Words: Trigonometry. Ratio. Proportion. Pythagorean Theorem.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

CONTEXTO HISTÓRICO

A palavra Trigonometria é composta por três radicais cujo significado é tri=três, gonos=ângulos e metron=medir, de onde nos sugere que Trigonometria signifique medida dos triângulos. No início, a Trigonometria era considerada a parte da matemática que tinha como objetivo calcular as medidas dos lados e ângulos do triângulo o que levou esta a ser posta como uma extensão da Geometria.

Segundo Pitombeira (2013), Hiparco (190 a.E.C-125 a.E.C) com seus estudos sobre Astronomia, emprega pela primeira vez as relações entre os lados e ângulos de um triângulo, por volta de 140 a.E.C, o que levou a ser considerado o precursor da Trigonometria.

A Astronomia deu um grande impulso para o desenvolvimento da Trigonometria, mas existem estudos rudimentares que nos mostram que os Babilônios a usavam para resolver problemas práticos de navegação, agrimensura e astronomia, em especial aos egípcios e gregos, pois tiveram uma grande parcela de contribuição para a sua evolução.

Ainda Pitombeira (2013), o Almagesto é o mais antigo documento conhecido que trata da Trigonometria e foi escrito por Ptolomeu (125 a.E.C), que, baseado nos trabalhos de Hiparco, apresenta um verdadeiro tratado de Trigonometria retilínea e esférica.

Vale lembrar que importantes trabalhos Hindus no final do século VIII foram traduzidos para o árabe mostrando o quanto aquele povo estava familiarizado com a matemática e que foram responsáveis por grandes descobertas.

Já no século XV, Purback, um matemático nascido na Baviera, constrói a primeira tábua trigonométrica com a introdução dos conceitos de seno e tangente onde procura restabelecer a obra de Ptolomeu, mas Triangulis ou Tratado dos Triângulos, escrito pelo alemão Johan Müller, chamado de Regiomontanus, e que foi discípulo de Purback é o primeiro tratado de Trigonometria escrito de maneira sistemática.

Hoje em dia, o uso da Trigonometria vai além dos estudos dos elementos dos triângulos (lados e ângulos) e suas aplicações se estendem a vários campos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Diante disso, muitos conceitos da Trigonometria que dificilmente lembram a sua origem podem ser encontrados na Engenharia Civil, Topografia, Música, Eletricidade e dentre outros.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho investiga o ensino de trigonometria e como estes conceitos devem ser abordados no ensino fundamental. Vale lembrar que o estudo aqui desenvolvido é uma proposta de como o conteúdo pode ser ensinado por alguns professores, visto que parte dos mestres percebem algum tipo de dificuldade na aprendizagem de seus alunos.

O tema foi escolhido pela relação de ensino-aprendizagem que o estudo da Trigonometria proporciona para o desenvolvimento de competências e habilidades que o aluno pode adquirir, desde que seja abordado de maneira prática, fazendo o uso de problemas que envolvem medições, principalmente para calcular distâncias inacessíveis.

O objetivo dessa proposta é diminuir os problemas existentes na apreensão do assunto, tornando o estudante capaz de ir além do esperado, interpretando, aplicando e resolvendo de maneira correta os problemas assim apresentados, fazendo uso dos conceitos ao qual aprendeu e por si só desenvolver técnicas de resolução dos exercícios.

O texto foi dividido em duas partes, a primeira delas trata-se da pesquisa feita com um grupo de professores onde nos sugere as dificuldades na aprendizagem dos conceitos trigonométricos. Já a segunda, nos remete a possíveis soluções para as barreiras encontradas na anterior e estas foram divididas em aulas para facilitar e dinamizar o ensino.

Na aula 1, tratamos da razão e proporção, porque o seu entendimento é fundamental para o aprendizado da trigonometria, visto que boa parte dos estudantes não conseguem entender tais conceitos bem como sua aplicabilidade.

Na aula 2, analisamos a definição de semelhança de triângulos, reconhecendo todos os casos, apreciando o teorema fundamental da semelhança, pois a absorção do conteúdo e sua aplicação são considerados pré-requisitos para o estudo da Trigonometria.

Na aula 3, estudamos a trigonometria do triângulo retângulo e para isso passamos pela sua definição, conhecemos os seus elementos, chegando ao teorema de Pitágoras onde damos ênfase à sua importância e aplicação e, a partir daí, apresentamos as razões trigonométricas, suas relações e os ângulos notáveis.

Já na aula 4, discutimos a trigonometria para triângulos acutângulos e obtusângulos, onde apresentamos algumas aplicações. Estas aparecem como uma extensão dos conceitos trigonométricos, visto que, nas aulas anteriores, ficamos limitados com o estudo nos triângulos retângulos e necessitando fugir desse limite apresentamos a lei dos senos e dos cossenos.

Vale a notação que a metodologia utilizada se deu dentro dos parâmetros da pesquisa bibliográfica e qualitativa realizada com um grupo de docentes que faziam parte do mestrado profissional de matemática em rede nacional (PROFMAT), na Universidade Federal de Alagoas (UFAL), culminando com minha experiência de aproximadamente 9 anos de sala de aula lecionando nas mais variadas séries do ensino fundamental e médio tanto na rede pública quanto na rede privada de ensino do Estado de Alagoas.

2 A PESQUISA

2.1 O Problema

Nós professores percebemos a grande dificuldade que os alunos do ensino fundamental tem em aprender os conteúdos de matemática e, de maneira especial, a Trigonometria. Essa falta de compreensão pode ser atribuída a diversos fatores, dentre os quais podemos citar: a dificuldade que os estudantes têm em conceitualizar os objetos matemáticos que se apresentam de forma muito abstrata e a assimilação de assuntos que são pré-requisitos para o estudo da Trigonometria. Em relação aos conteúdos de Trigonometria, geralmente os alunos encontram dificuldades na compreensão de conceitos trigonométricos básicos. Consequentemente torna-se necessário investigar o que faz com que os alunos manifestem esta falta de compreensão e se o problema está na aprendizagem dos alunos ou na forma de como são apresentados os conceitos aos mesmos. Com base nessas reflexões, surge a pergunta: qual a natureza das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Trigonometria no ensino fundamental? E quais as possíveis soluções para isso? Baseado nessas questões, o professor deverá construir de forma coerente uma sequência de aulas que vise facilitar o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes. A fim de buscar respostas para essas perguntas, foi realizada uma pesquisa qualitativa, com a aplicação de um questionário com 8 perguntas destinados a 10 professores que atuam no ensino fundamental de escolas públicas e particulares do estado de Alagoas.

2.2 Metodologia

De um grupo de docentes que faziam parte das turmas de 2011 e 2012 do PROFMAT(Mestrado Profissional em Matemática) na Universidade Federal de Alagoas selecionamos 10 professores para responder às perguntas. Aplicamos um questionário sobre o ensino da Trigonometria no ensino fundamental para tentar descobrir as possíveis dificuldades enfrentadas para abordar seus conceitos e facilitar o entendimento do conteúdo.

Ao analisar o material que teve base na prática docente desses mestres e em leituras realizadas, levantamos hipóteses das principais barreiras que poderiam aparecer no processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria no ensino fundamental, e a partir daí, foi construído uma sequência de aulas visando facilitar o processo ensino-aprendizagem do assunto.

2.3 Análise das entrevistas

Todos os 10 professores entrevistados são licenciados em matemática e terminaram seus cursos de graduação entre 1990 e 2010. O tempo de docência de um destes professores era de 21 anos e os demais possuíam até 12 anos de experiência.

Durante este tempo todos os entrevistados ensinaram ou ensinam trigonometria no ensino fundamental tanto em escolas particulares quanto na rede pública. Esses docentes ao responderem as perguntas, fizeram relatos das dificuldades e falaram que muitos alunos não conseguem entender inicialmente o conteúdo por não terem uma base dos assuntos considerados essenciais para o estudo das razões trigonométricas e que usaram os mais variados tipos de metodologia para fazer com que os estudantes entendam os conceitos.

Os professores em quase sua totalidade colocaram a trigonometria do triângulo retângulo como sendo um dos assuntos de maior importância para o currículo do ensino fundamental, pois permite fazer aplicações interessantes e, em especial, calcular distâncias inacessíveis estabelecendo uma conexão com sua história e suas grandes obras.

Outras dificuldades relatadas pelos professores foram que muitos alunos não conhecem as operações básicas, como também não estão familiarizados com a resolução de problemas, o que torna difícil a assimilação do assunto, além de confundirem esses conteúdos com os elementos do triângulo retângulo: catetos e hipotenusa.

Antes de iniciar o estudo das razões trigonométricas, boa parte dos professores começa por fazer uma sondagem para verificar possíveis dificuldades em alguns conteúdos que são considerados como pré-requisitos para apreensão dos conceitos da Trigonometria e os mais citados foram: Razão, Proporção e Semelhança de Triângulos e a maioria dos docentes por uma questão de experiência já revisam estes conceitos como forma de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem.

Ao falar da metodologia para ensinar trigonometria, cerca de 90% dos pesquisados respondeu que utilizam a sequência dos livros didáticos, assim como fazem uso de softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra.

Alguns professores relataram que esporadicamente, conversavam informalmente com algum colega a respeito da didática empregada por este para abordar os conceitos trigonométricos no ensino fundamental, ocasionando a troca de informações e a absorção das mais variadas ideias e recursos metodológicos.

Pensando numa sequência de aulas ideal para abordar a Trigonometria no ensino fundamental, a maioria dos entrevistados disseram fazer uma revisão dos conceitos de Razão, Proporção e Semelhança de Triângulos para só a partir daí, começarem o estudo da Trigonometria. Falar de sua história, conhecer o Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras até chegar nas Razões Trigonométricas e finalizar com a apresentação da lei dos senos e cossenos é um importante caminho para se atenuar supostas dificuldades encontradas quando do contato destes alunos com o conteúdo.

O questionário consistiu das seguintes perguntas:

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da Trigonometria no ensino fundamental?

2) Em suas aulas você fala sobre a história da Trigonometria e algumas de suas aplicações?

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis assimilação do conteúdo?

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da Trigonometria do triângulo retângulo?

5) Você já conversou com outro professor a respeito das dificuldades de assimilação de algum conceito de Trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?

6) Como você aborda os conceitos da Trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da Trigonometria no ensino fundamental?

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a Trigonometria do triângulo retângulo?

2.4 Objetivos

A partir da análise das entrevistas construímos uma sequência de aulas que poderiam auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria do ensino fundamental, objetivamos:

1 - Identificar os conceitos de razão e proporção interpretando e aplicando de maneira correta nas resoluções dos problemas;

2 - Identificar os triângulos semelhantes e saber que neles os lados homólogos são proporcionais;

3 - Aplicar o teorema fundamental da semelhança de triângulos;

4 - Reconhecer a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo;

5 - Deduzir e aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar medidas desconhecidas dos lados de um triângulo retângulo;

6 - Aplicar o teorema de Pitágoras no cálculo da medida da diagonal de um quadrado e no cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero;

7 - Conceituar, identificar e calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo;

8 - Aplicar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas;

9 - Aplicar a lei dos senos e cossenos num triângulo qualquer;

10 - Resolver problemas utilizando as leis dos senos e dos cossenos.

3 AULA 1 - RAZÃO E PROPORÇÃO

Usamos razões e proporções em vários momentos no dia-a-dia e na maioria das vezes não percebemos tal uso, por exemplo, quando comparamos quantidades ou entre medidas de grandezas, esses conceitos são fundamentais para o entendimento da Trigonometria.

Neste primeiro momento, o professor deverá lembrar suas definições e mostrar algumas aplicações para que o aluno obtenha uma visão ampla e diversificada do assunto.

3.1 Razão

3.1.1 Conceituação

A comparação entre dois números ou entre duas grandezas através de um quociente(divisão) é o que chamamos de Razão. Esta é uma teorização importante para um docente que deseje uma diminuição de dificuldades frente à aprendizagem de seus alunos. Diante disso:

Definição 3.1.1. *Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, então a razão de a para b é dado por:*

$$a \div b \text{ ou } \frac{a}{b}.$$

Podemos ler a razão de uma das formas:

I. razão de a para b;

II. a está para b;

III. a para b.

Exemplo 3.1.1.

- *a razão de* 250 *para* 50 *é* $\frac{250}{50}$ *(a qual é igual a* 5*);*

- *a razão de* 60 *para* 360 *é* $\frac{60}{360}$ *(a qual é igual a* $\frac{1}{6}$*);*

- *a razão de* 45 *para* 30 *é* $\frac{45}{30}$ *(a qual é igual a* $1,5$*).*

Daí, o exemplo acima permite ao professor mostrar as diferentes respostas obtidas no cálculo, chamando atenção do aluno quanto aos números inteiros, racionais e decimais, sendo possível utilizar o cálculo mental a fim de desenvolver e sistematizar conceitos matemáticos e técnicas aritméticas.

Com isso, o docente poderá propor atividades aos alunos que envolvam o cálculo mental desde as mais simples às complexas, o que, consequentemente poderá favorecer uma verbalização com rapidez e resultados.

Vejamos agora algumas aplicações de razão, onde teremos diferentes interpretações a depender da pergunta que o problema pede.

3.1.2 Aplicações do conceito de Razão

Mostrar a aplicação dos conceitos matemáticos faz com que os alunos tenham a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados, contextualizando, entendendo e aplicando o que aprenderam. Diante disso, exemplificamos:

1. **Coleção de Discos.**

   Observe as coleções de discos de Diego, Daniele e Danilo. Quanto a coleção de Diego é maior que a de Daniele e a de Danilo?

   - *Diego tem* 240 *discos;*
   - *Daniele tem* 120 *discos;*
   - *Danilo tem* 40 *discos.*

     Observe:
   - O número de discos de Diego é o dobro do número de discos de Daniele, porque: $\dfrac{240}{120} = 2$.
   - O número de discos de Diego é seis vezes o número de discos de Danilo, porque: $\dfrac{240}{40} = 6$.

2. **Consumo de Combustível.**

   Em termos relativos, qual dos automóveis gasta mais em combustível para ir de Maceió a Recife? Sabendo que o carro amarelo consumiu R\$ 90,00 *de combustível para fazer a viagem e o carro preto consumiu R\$* 60,00.

   Solução:

   Pelo quociente, temos:

$$\frac{amarelo}{preto} = \frac{90}{60} = 1,5.$$

O carro amarelo consome uma vez e meia $(1,5)$ o que consome o carro preto.

3. **Doações Mensais.**

   O Sr. Lúcio tem uma renda mensal de R\$ $3000,00$ *e doa todo mês R\$* $250,00$ *para as obras assistenciais de sua igreja, por outro lado, o Sr. Joaquim recebe um salário de R\$* $4200,00$ *e contribui mensalmente com R\$* $300,00$ *para a creche do seu bairro. Qual dos dois é mais generoso?*

   Solução:

   A comparação pode ser feita de dois modos:

   - Em termos absolutos a contribuição do Sr. Joaquim é maior;
   - Em termos relativos, o Sr. Lúcio doa todo mês $\frac{250}{3000} = \frac{1}{12}$ do seu salário, enquanto que o Sr. Joaquim contribui com $\frac{300}{4200} = \frac{1}{14}$ de sua renda. Como $\frac{1}{12} > \frac{1}{14}$, a contribuição do Sr. Lúcio é relativamente maior. Ele é mais generoso.

4. **Aplicações Financeiras**

   Vagner vendeu sua casa e aplicou R\$ $1600,00$ *numa caderneta de poupança que, ao final de um ano, rendeu R\$* $192,00$ *. No mesmo período, ele aplicou R\$* $1000,00$ *num fundo de investimentos que rendeu R\$* $160,00$ *. Qual das duas aplicações teve maior rentabilidade?*

   Solução:

   Em termos absolutos, o rendimento da caderneta foi maior.
   Em termos relativos, a rentabilidade da caderneta foi de $\frac{192}{1600} = \frac{12}{100} = 12\%$ e a do fundo foi de $\frac{160}{1000} = \frac{16}{100} = 16\%$; portanto, a rentabilidade do fundo foi maior.

   Esses problemas nos mostram o quanto estamos fazendo comparações entre quantidades ou entre medidas de grandezas e que, na maioria das vezes, o estudante não consegue identificar.

   Nas duas primeiras aplicações ficam evidente a resposta e muitos alunos conseguem responder pelo cálculo mental, já nas duas últimas, a comparação pode ser feita de duas maneiras, a depender do ponto de vista. O professor através dessas atividades pode ir mais além e sugerir que os alunos pesquisem outras situações e apresentem na sala para os colegas.

A seguir, veremos algumas razões essenciais no cotidiano e seu conhecimento é primordial para o público em geral.

3.1.3 Razões Especiais

1. **Densidade de um Corpo**

   A densidade de um corpo é definida como sendo a razão entre a massa do corpo e o seu volume, ou seja:

$$densidade = \frac{massa\ do\ corpo}{volume\ do\ corpo}.$$

   Exemplo 3.1.2. *Uma pedra tem* $3kg$ *de massa e seu volume é de* $300cm^3$*. Qual é a densidade dessa pedra?*

   Solução: De acordo com os dados do exemplo, temos:

$$densidade = \frac{3kg}{300cm^3} = \frac{3000g}{300cm^3} = 10g/cm^3.$$

   Logo, a densidade da pedra é de 10 g/cm^3.

2. **Densidade Demográfica**

   A densidade demográfica expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado de uma determinada região e é usada para saber quanto uma região é populosa. Daí a densidade demográfica ser definida como a razão entre o número de habitantes e a área ocupada pela região.

$$densidade\ demográfica = \frac{número\ de\ habitantes}{área}.$$

   Exemplo 3.1.3. *De acordo com o censo demográfico do ano 2000, a região Nordeste tem uma população de* 47742000 *habitantes e possui uma área aproximada de* 1560000 km^2*. Determine sua densidade demográfica.*

   Solução: De acordo com os dados do exemplo, temos:

$$densidade\ demográfica = \frac{47742000}{1560000} = 30,6\ hab/km^2.$$

Logo, a densidade demográfica da região Nordeste era de aproximadamente $30,6\ hab/km^2$.

3. **Escala**

Costuma-se representar certos objetos (móveis, automóveis e etc.) com um desenho e este pode estar ampliado ou reduzido, bem como fazer a planta de uma casa, maquete de um prédio ou mapa e para isso usamos uma determinada escala.

Denomina-se *Escala* de um desenho a razão entre a medida do desenho e a correspondente medida real, ambos na mesma unidade.

$$escala = \frac{medida\ do\ desenho}{medida\ real}.$$

Exemplo 3.1.4. *Em um mapa, a distância entre duas cidades é de* $4\ cm$. *Sabendo-se que a distância real entre as cidades é de* $48\ km$, *qual a escala utilizada no mapa?*

Solução: De acordo com os dados do exemplo, temos:

comprimento no desenho: $4\ cm$;

comprimento real: $48\ km = (48 \cdot 100000)\ cm = 4800000\ cm$.

$$escala = \frac{4}{4800000} = \frac{1}{1200000}.$$

A escala utilizada foi de $\frac{1}{1200000}$ ou $1 : 1200000$.

A escala de $1 : 1200000$ significa que $1\ cm$ no desenho corresponde a $1200000 cm$ no tamanho real, ou seja, a $12\ km$ no real.

4. **Velocidade Média**

A velocidade média de um veículo é a razão entre a distância total percorrida pelo veículo e o tempo total gasto para percorrê-la.

$$velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ gasto}.$$

Exemplo 3.1.5. *Uma motocicleta percorreu* $375\ km$ *em* 5 *horas. Qual foi a velocidade média dessa motocicleta nesse percurso?*

Solução: De acordo com os dados do exemplo, temos:

$$velocidade\ média = \frac{distância}{tempo} = \frac{375}{5} = 75\ km/h.$$

Portanto, a velocidade média foi de 75 km/h.

Essas razões são de grande valia para o estudo que segue, pois são aplicáveis a diversos problemas do cotidiano.

3.2 Proporção

3.2.1 Conceituação

Boa parte dos alunos não conseguem identificar a Proporção como uma igualdade entre duas razões, não sendo possível reconhecer nela seus elementos, tornando extremamente difícil entender o seu significado.

Veremos agora uma noção desse conceito, compreendendo o seu significado com exercícios que ajudam o discente na apreensão do mesmo.

Definição 3.2.1. *Chamamos de* Proporção *a uma igualdade entre duas razões, ou seja, dados os números a, b, c e d, todos diferentes de zero, eles nessa ordem formam uma proporção se, e somente se, a razão $a \div b$ for igual à razão $c \div d$, isto é:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Lê-se: a está para b assim como c está para d.
Escrevendo na forma $a \div b = c \div d$, denominamos os termos a e d de *extremos* e os termos b e c de *meios*.

Exemplo 3.2.1. *A razão de* 20 *para* 10 *é igual a 2* ($\frac{20}{10} = 2$) *e a razão de* 30 *para* 15 *também é 2* ($\frac{30}{15} = 2$).

Solução: Como as duas razões são iguais elas representam uma proporção $\frac{20}{10} = \frac{30}{15}$.

Lê-se esta proporção como: 20 está para 10 assim como 30 está para 15, onde 10 e 30 são os meios e 20 e 15 os extremos.

Exemplo 3.2.2. *Verifique se os números* 6, 9, 12 *e* 16, *nessa ordem formam uma proporção.*

Solução: A razão do 1° para o 2°: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ a razão do 3° para o 4°: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Observando que a razão do primeiro para o segundo não é igual a razão do terceiro para o quarto, concluímos neste caso que não é uma proporção.

Os exemplos anteriores nos mostram de maneira simples que as condições impostas pela definição satisfazem a resolução e a aprendizagem.

O professor objetivando lembrar aos estudantes a regra usada por eles nas mais variadas situações, mostrando sua utilidade e praticidade para solucionar inúmeras atividades, deverá começar por identificar seus elementos e aplicar a condição imposta pela propriedade.

3.2.2 Propriedade Fundamental das Proporções

Qualquer que seja a proporção, temos que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Exemplo 3.2.3. *Usando a propriedade fundamental, verifique se os números* 4, 7, 12 *e* 21, *formam nessa ordem uma proporção.*

Solução: Pela propriedade fundamental, temos:

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}\ .$$

Fazendo o produto dos meios pelos extremos, segue-se:

$$4 \cdot 21 = 84.$$

$$7 \cdot 12 = 84.$$

Logo, os números $4, 7, 12$ e 21 nessa ordem formam uma proporção.

Exemplo 3.2.4. *Sabendo que os números* 9, 13, 36 *e* x, *formam, nessa ordem uma proporção, determine o valor de* x.

Solução: Pela propriedade fundamental, temos:

$$\frac{9}{13} = \frac{36}{x};$$

$$9 \cdot x = 13 \cdot 36;$$

$$9x = 468;$$

$$x = \frac{468}{9};$$

$$x = 52.$$

Logo, o valor de x é 52.

Exemplo 3.2.5. *Sabe-se que, numa escola, para cada* 7 *meninos estudam* 9 *meninas. Se na escola há* 119 *meninos, quantos alunos estudam nessa escola?*

Solução: Seja de 7 para 9 a razão da quantidade de meninas em relação a de meninos. Usando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{7}{9} = \frac{119}{x};$$

$$7 \cdot x = 9 \cdot 11;.$$

$$7x = 1071;$$

$$x = \frac{1071}{9};$$

$$x = 153.$$

Assim, o número de meninas é de 153.

Logo, o número de alunos que estudam na escola é dado pela soma do número de meninos com o número de meninas: $119 + 153 = 272$.

Exemplo 3.2.6. *A razão entre a altura de um bastão fixado verticalmente no chão e a sua sombra, em determinada hora do dia, é de* 5 *para* 3*. Se a sombra mede* 72 *cm, qual é a altura do bastão?*

Solução: Temos que a razão entre a altura e sua sombra é de $\frac{5}{3}$, aplicando a definição de proporção e usando a propriedade fundamental, tem-se:

$$\frac{5}{3} = \frac{h}{72};$$

$$3 \cdot h = 5 \cdot 72;$$

$$3h = 360;$$

$$h = \frac{360}{3};$$

$$h = 120.$$

Portanto, a altura do bastão é de 120 cm.

O aluno através desses exemplos, revê o conceito de proporção aplicando a propriedade para solucionar problemas, podendo utilizar estratégias não convencionais e convencionais, como no caso do cálculo mental, percebendo multiplicações ou divisões sucessivas.

3.2.3 Outras Propriedades das Proporções

Veremos agora duas propriedades das proporções que são muito utilizadas pelos alunos na resolução de problemas.

Propriedade 1:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \text{ ou } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Propriedade 2:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}.$$

Exemplo 3.2.7. *Determine a e b na proporção* $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, *sabendo-se que* $a + b = 35$.

Solução: Aplicando a propriedade 1, temos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4}.$$

Sabendo que $a + b = 35$, segue:

$$\frac{35}{b} = \frac{7}{4}.$$

Pela propriedade fundamental, tem-se:

$$7 \cdot b = 35 \cdot 4;$$

$$7\,b = 140;$$

$$b = \frac{140}{7};$$

$$b = 20.$$

Daí, se $b = 20 \Longrightarrow a + b = 35 \Longrightarrow a + 20 = 35 \Longrightarrow a = 35 - 20 \Longrightarrow a = 15$. Logo, $a = 15$ e $b = 20$.

Exemplo 3.2.8. *A diferença entre dois números é* 40*. Sabendo-se que eles são proporcionais aos números* 4 *e* 3*, determinar esses números.*

Solução: Sejam x e y os números tais que $x > y$.

Sabendo que $x - y = 40$ e que $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, vamos calcular os valores de x e y.

Aplicando a propriedade 1, temos:

$$\frac{x - y}{y} = \frac{4 - 3}{3}.$$

Sendo $x - y = 40$, segue:

$$\frac{40}{y} = \frac{1}{3}.$$

Pela propriedade fundamental, tem-se:

$$y \cdot 1 = 40 \cdot 3.$$

$$y = 120.$$

Daí, se $y = 120 \Longrightarrow x - y = 40 \Longrightarrow x - 120 = 40 \Longrightarrow x = 40 + 120 \Longrightarrow x = 160$. Portanto, $x = 160$ e $y = 120$ são os dois números.

Exemplo 3.2.9. *A razão entre as massas de alumínio e de oxigênio na substância óxido de alumínio é igual a* $\frac{7}{8}$*. Calcule as massas de alumínio e oxigênio necessárias para formar* 51 g *de óxido de alumínio.*

Solução: Sejam a e o as massas de alumínio e oxigênio, respectivamente. Pelos dados do problema, temos:

$$\frac{a}{o} = \frac{7}{8} \text{ e } a + o = 51.$$

Utilizando a propriedade 1, tem-se:

$$\frac{a + o}{o} = \frac{7 + 8}{8};$$

$$\frac{51}{o} = \frac{15}{8};$$

$$15\,o = 51 \cdot 8;$$

$$15o = 408;$$

$$o = \frac{408}{15};$$

$$o = 27,2.$$

Sendo $a + o = 51 \Rightarrow a = 51 - o \Rightarrow a = 51 - 27,2 \Rightarrow a = 23,8.$

Logo, as massas de alumínio e oxigênio são de $23,8$ g e $27,2$ g.

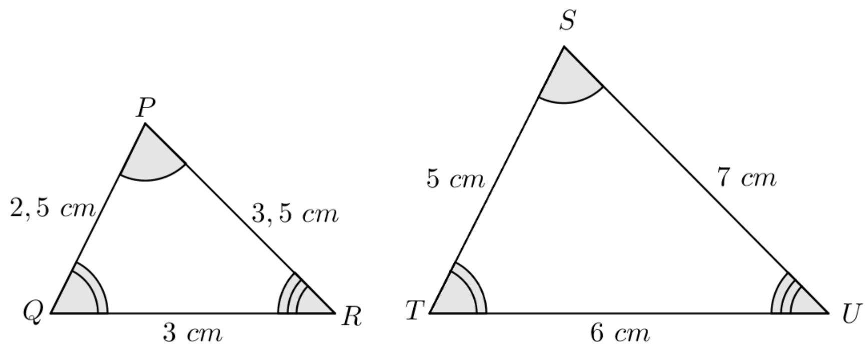
Essas propriedades facilitam a resolução de muitos problemas a depender dos dados que temos na questão, daí vemos sua importância. O aluno tendo a capacidade de reconhecer e aplicá-las estrategicamente terá a possibilidade de ampliar seu conhecimento e melhorar os procedimentos.

4 AULA 2 - SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo iremos abordar a semelhança de triângulos, os casos de semelhança e o teorema fundamental da semelhança de triângulos, objetivando fazer com que o aluno saiba identificar triângulos semelhantes, aplicar o teorema fundamental da semelhança e utilizar as propriedades na resolução de problema.

Vamos observar os triângulos PQR e STU.

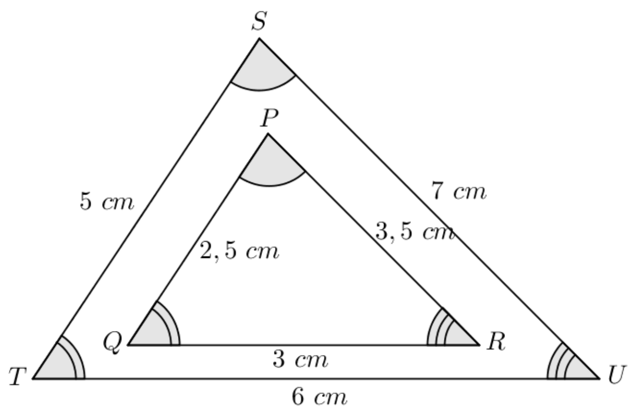
Figura 1 – Representação da semelhança de dois triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Note que os triângulos tem a mesma forma, sendo assim, vamos colocar o triângulo menor (PQR) dentro do triângulo maior(STU) de modo que seus lados fiquem paralelos.

Figura 2 – Comparação de dois triângulos com os lados paralelos.



Fonte: Autor, 2014.

Note que, se dois triângulos possuem formas iguais, seus ângulos são necessariamente congruentes:

$$\widehat{P} \equiv \widehat{S}; \quad \widehat{Q} \equiv \widehat{T}; \quad \widehat{R} \equiv \widehat{U}.$$

Agora, vamos calcular as razões entre seus lados correspondentes:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{ST}} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2} \quad \frac{\overline{PR}}{\overline{SU}} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2} \quad \frac{\overline{QR}}{\overline{TU}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Como as razões são todas iguais, temos que seus lados homólogos são proporcionais.

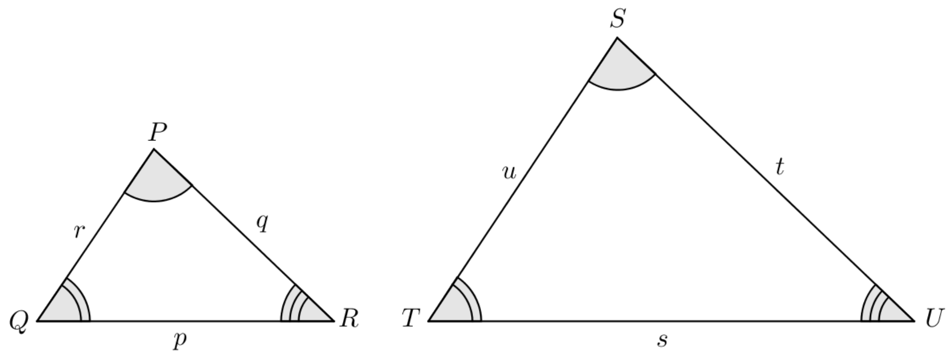
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{SU}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{TU}}.$$

Diante do exposto, podemos estabelecer o seguinte:

Definição 4.0.2. *Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem seus ângulos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.*

Matematicamente, escrevemos:

Figura 3 – Representação da definição da semelhança de triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Notação: ∼(semelhante).

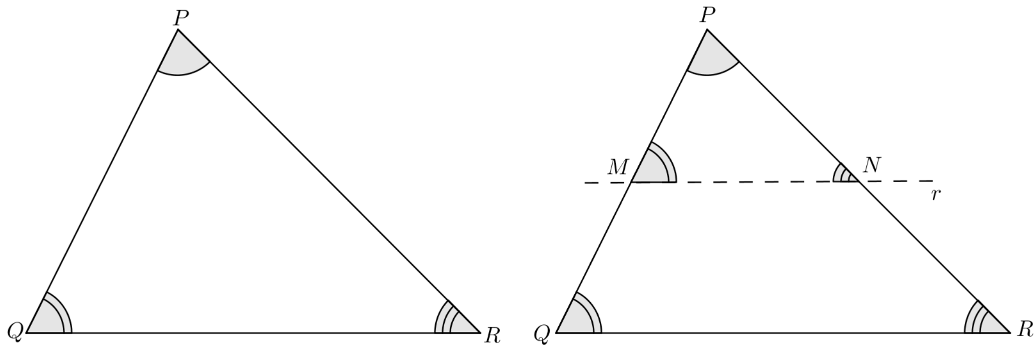
$$\triangle PQR \sim \triangle STU \Leftrightarrow \widehat{P} \equiv \widehat{S}\,;\, \widehat{Q} \equiv \widehat{T}\,;\, \widehat{R} \equiv \widehat{U} \text{ e } \frac{p}{s} = \frac{r}{u} = \frac{q}{t}.$$

4.1 Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

Teorema 4.1.1. *Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.*

Considerando o triângulo PQR abaixo, traçamos uma reta r, paralela ao lado $\overline{QR}$ e que encontra o lado $\overline{PQ}$ no ponto M e o lado $\overline{PR}$ no ponto N.

Figura 4 – Representação do teorema fundamental da semelhança de triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Como $r \mathbin{//} \overline{QR}$, temos:

$$\widehat{Q} \equiv \widehat{M} \text{ (ângulos correspondentes);}$$

$$\widehat{R} \equiv \widehat{N} \text{ (ângulos correspondentes);}$$

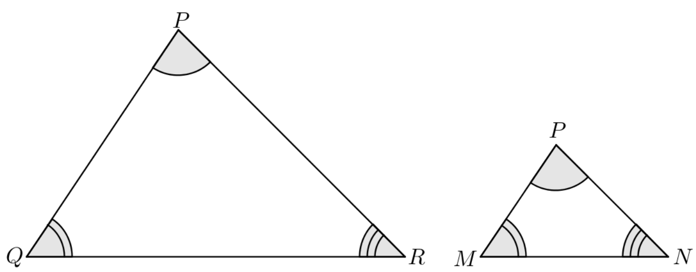
$$\widehat{P} \equiv \widehat{P} \text{ (ângulo comum).}$$

Daí,

$$\triangle\, PQR \sim \triangle\, PMN.$$

Analisando os triângulos PQR e PMN separadamente, temos:

Figura 5 – Comparação dos triângulos para o teorema fundamental da semelhança de triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

Como os triângulos são semelhantes, seus lados homólogos são proporcionais, ou seja:

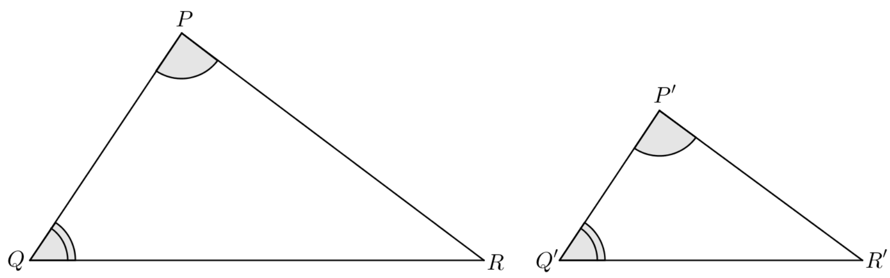
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{MN}}.$$

4.2 Casos de Semelhança

Caso 1: critério **AA** (Ângulo, Ângulo).

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Figura 6 – Caso de semelhança, critério AA (Ângulo, Ângulo).



Fonte: Autor, 2014.

Temos que:

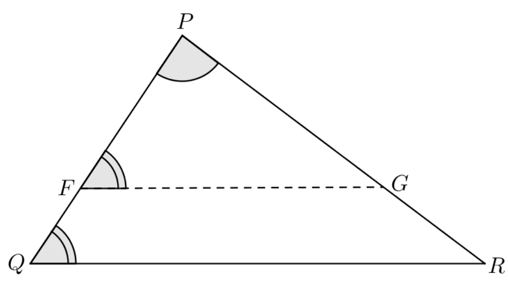
$$\widehat{P} \equiv \widehat{P'} \text{ e } \widehat{Q} \equiv \widehat{Q'}.$$

Se $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$, então, $\triangle\, PQR \equiv \triangle\, P'Q'R'$, e daí, $\triangle\, PQR \sim \triangle\, P'Q'R'$.

Supondo que os triângulos não sejam congruentes e que $\overline{PQ} > \overline{P'Q'}$.

Tomemos um ponto F em $\overline{PQ}$, de modo que $\overline{PF} \equiv \overline{P'Q'}$ e por F vamos traçar $\overline{FG} \parallel \overline{QR}$.

Figura 7 – Demonstração do critério AA (Ângulo, Ângulo).



Fonte: Autor, 2014.

Pelo caso de congruência **ALA**, os triângulos PFG e $P'Q'R'$ são congruentes:

$$\triangle\, PFG \equiv \triangle\, P'Q'R'.$$

Pelo teorema fundamental, os triângulos PFG e PQR são semelhantes:

$$\triangle\, PFG \sim \triangle\, PQR.$$

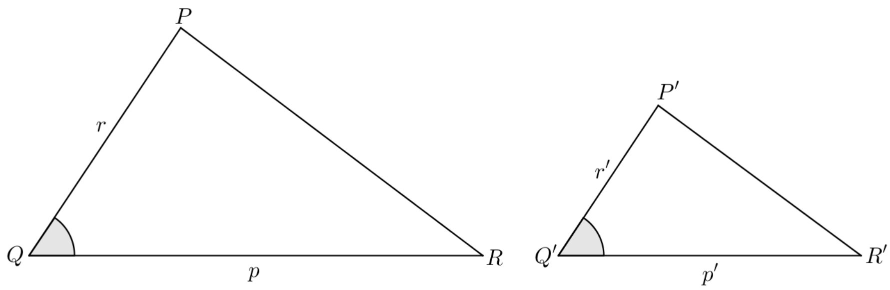
Então, os triângulos PQR e $P'Q'R'$ também são semelhantes.

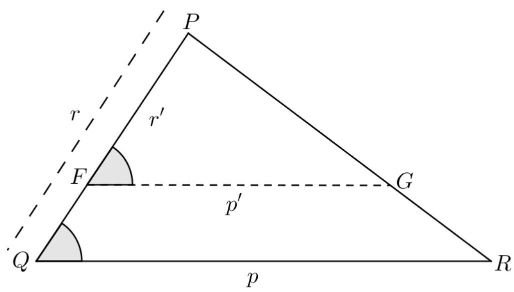
$$\triangle\, PQR \sim \triangle\, P'Q'R'.$$

Caso 2: Critério **LAL** (Lado, Ângulo, Lado).

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo compreendido entre eles congruente.

Figura 8 – Caso de semelhança, critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).





Fonte: Autor, 2014.

Note que:

Pelo caso de congruência **LAL**: $\triangle\, PFG \equiv \triangle\, P'Q'R'$;

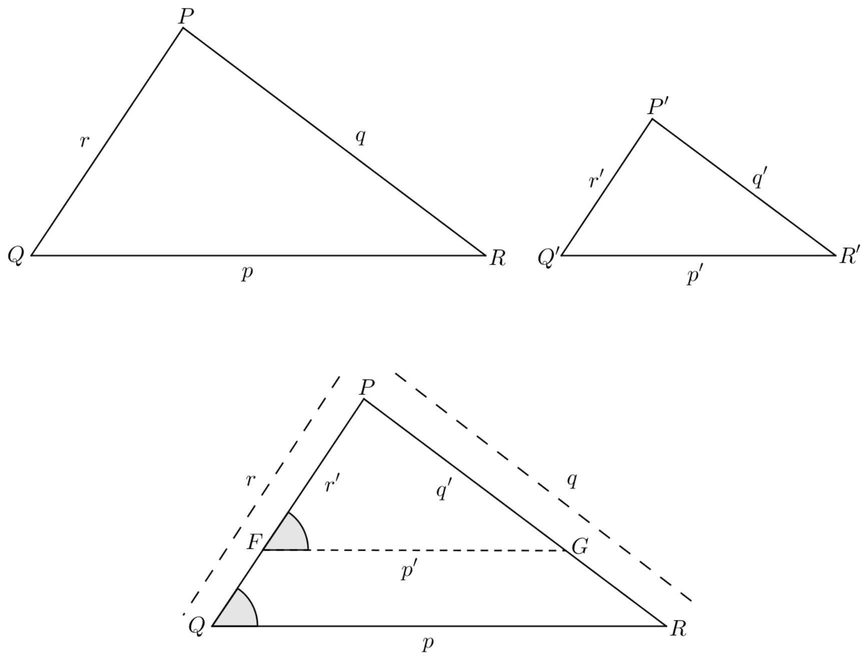
Pelo teorema fundamental: $\triangle\, PFG \sim \triangle\, PQR$;

Então, $\triangle\, PQR \sim \triangle\, P'Q'R'$.

Caso 3: Critério **LLL** (Lado, Lado, Lado).

Se os dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Figura 9 – Caso de semelhança, critério LLL (Lado, Lado, Lado).



Fonte: Autor, 2014.

Note que:

Pelo caso de congruência **LLL**: $\triangle\ PFG \equiv \triangle\ P'Q'R'$;

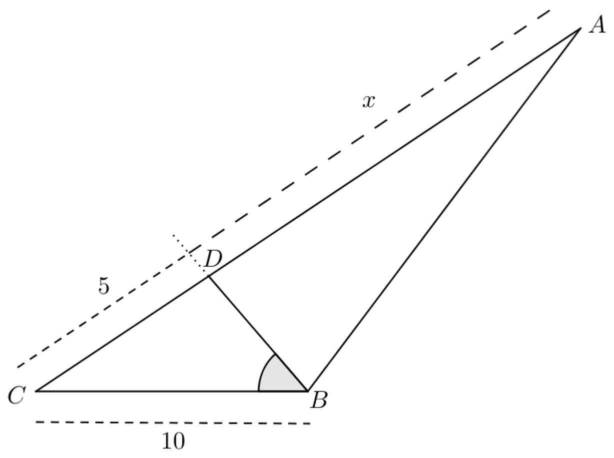
Pelo teorema fundamental: $\triangle\ PFG \sim \triangle\ PQR$;

Então, $\triangle\ PQR \sim \triangle\ P'Q'R'$.

Os exemplos que seguem proporcionam ao individuo reconhecer triângulos semelhantes e aplicar as propriedades de semelhança na resolução de problemas. O docente ao resolver as atividades poderá orientar os alunos a justificar a decisão de que dois triângulos são ou não semelhantes entre si, fazendo uso dos casos de semelhança.

Exemplo 4.2.1. *(Unir-RO) Na figura tem-se* $D\widehat{A}B \equiv D\widehat{B}C$. *A medida x é:*

Figura 10 – Exemplo 4.2.1, caso semelhança.



Fonte: Adaptada de Dante, 2004.

Solução: Analisando o desenho, tem-se:

$$\widehat{C}(\text{ângulo comum aos triângulos } ABC \text{ e } BCD).$$
$$D\widehat{A}B \equiv D\widehat{B}C.$$

Donde, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ pelo critério AA(ângulo, ângulo). Segue que,

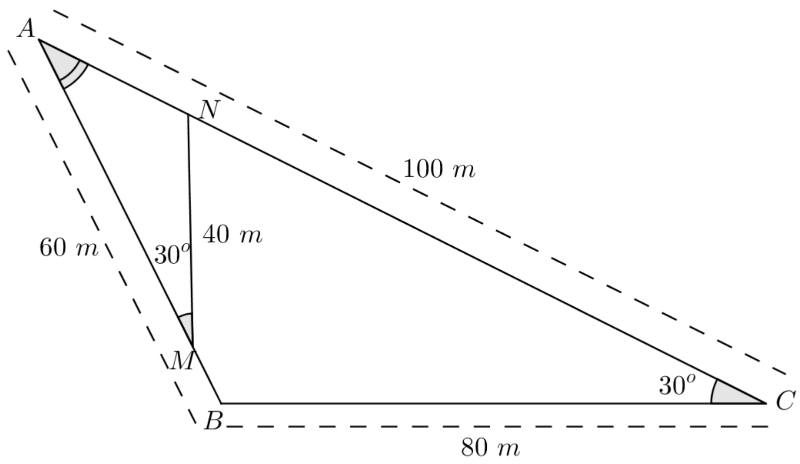
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\
\frac{10}{5} &= \frac{5 + x}{10}.
\end{aligned}$$

Usando a propriedade fundamental da proporção, temos:

$$\begin{aligned}
100 &= 5(5 + x) \\
100 &= 25 + 5x \\
100 - 25 &= 5x \\
75 &= 5x \\
x &= \frac{75}{5} \\
x &= 15.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.2. *Mostre que os triângulos ABC e AMN são semelhantes e calcule o perímetro do triângulo AMN.*

Figura 11 – Exemplo 4.2.2, caso semelhança.



Fonte: Adaptada de Iezzi, 2005.

Solução: Pela figura, temos que:

$$\widehat{A} \text{ (ângulo comum aos triângulos } ABC \text{ e } AMN);$$

$$\widehat{M} \equiv \widehat{C} = 30^o.$$

Usando o critério AA(ângulo, ângulo), concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle AMN$.
De posse da semelhança entre os triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AN}}{60} = \frac{40}{60} = \frac{\overline{AM}}{100} \Rightarrow \frac{\overline{AN}}{60} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AM}}{100}.$$

Segue que

$$\frac{\overline{AN}}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AN} = 30\ m$$

e

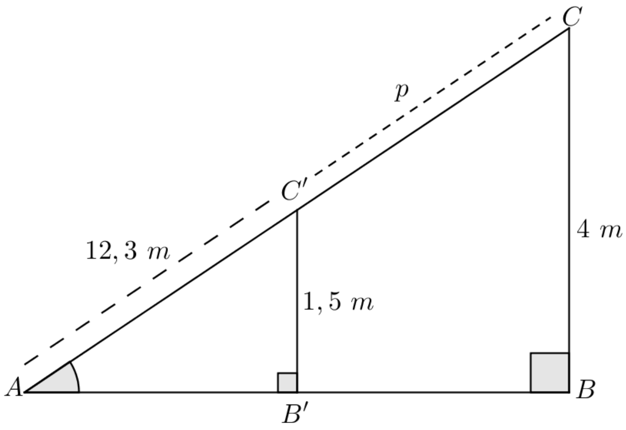
$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{AM}}{100} \Rightarrow \overline{AM} = 50\ m.$$

Logo, seu perímetro corresponde $\overline{AN} + \overline{AM} + \overline{MN} = 30 + 50 + 40 = 120\ m$.

Exemplo 4.2.3. *(Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem* $4\ m$ *de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar* $12,3\ m$ *sobre a rampa, está a* $1,5\ m$ *de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.*

Solução: Observando a ilustração, temos que os triângulos ABC e $AB'C'$ são semelhantes, pois $\widehat{A}$(ângulo comum) e $B \equiv B'$(ângulo reto).

Figura 12 – Exemplo 4.2.3, caso semelhança.



Fonte: Adaptada de Giovanni Júnior, 2009.

Daí,

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} & = & \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \\
\dfrac{4}{1,5} & = & \dfrac{12,3\ +\ p}{12,3}
\end{array}
$$

Aplicando a propriedade fundamental da proporção, temos:

$$
\begin{array}{rcl}
1,5.(12,3+p) & = & 4.12,3 \\
18,45+1,5p & = & 49,2 \\
1,5p & = & 49,2-18,45 \\
1,5p & = & 30,75 \\
p & = & \dfrac{30,75}{1,5} \\
p & = & 20,5.
\end{array}
$$

Portanto, a pessoa deve caminhar $20,5\ m$.

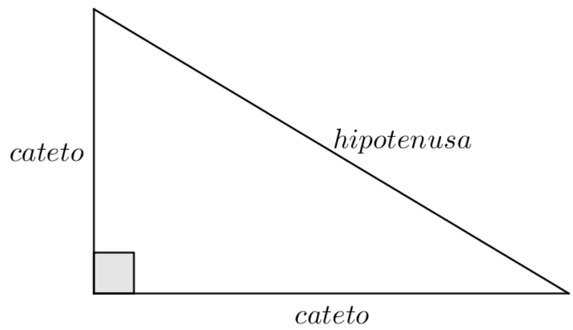
5 AULA 3 - A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo, estudaremos os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo interno agudo de um triângulo retângulo, bem como identificar e calcular essas razões trigonométricas, aplicando-as para resolver problemas envolvendo medidas desconhecidas.

5.1 O Triângulo Retângulo

Um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto (90^o). O lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa* e os lados que formam o ângulo reto são chamados de *catetos*.

Figura 13 – Elementos do triângulo retângulo.



Fonte: Autor, 2014.

A identificação dos elementos do triângulo retângulo pelos alunos é essencial para o estudo do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas, por isso é fundamental que o professor durante as atividades esteja sempre os revisando.

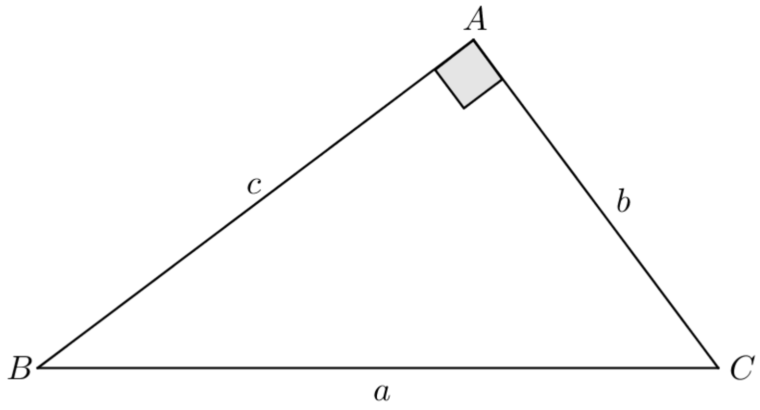
5.2 O Teorema de Pitágoras

Existem diversas aplicações do teorema de Pitágoras e o aluno poderá fazer uso deste fato a qualquer momento, sendo assim, sua dedução e aplicação é fundamental no processo de ensino-aprendizagem de alguns conteúdos, pois auxilia na compreensão e na solução de vários exercícios.

O professor poderá comentar em sala sobre sua história e até mesmo pedir que os alunos façam uma pesquisa sobre sua vida e obra.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Figura 14 – Teorema de Pitágoras.

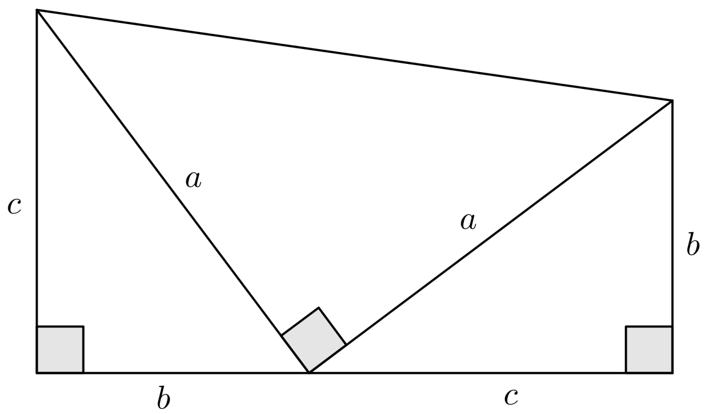


Fonte: Autor, 2014.

$$a^2 \;=\; b^2 \;+\; c^2$$

Demonstração. Analisando a figura 15 notamos que a soma das áreas dos três triângulos é igual a área do trapézio:

Figura 15 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

$$\begin{aligned}
\frac{b.c}{2}+\frac{b.c}{2}+\frac{a^2}{2} &= \frac{(b+c)}{2}\,.\,(b+c)\\
\frac{2bc+a^2}{2} &= \frac{(b+c)^2}{2}\\
2bc+a^2 &= (b+c)^2\\
2bc+a^2 &= b^2+2bc+c^2\\
a^2 &= b^2+c^2.
\end{aligned}$$

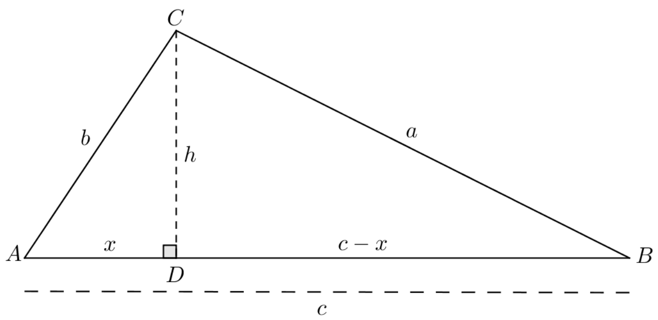
□

Teorema 5.2.2. *(Recíproca do teorema de Pitágoras) Se um triângulo ABC de lados a, b e c satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$, então $\triangle ABC$ é retângulo.*

Demonstração. Consideremos então um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

1° Caso: $\widehat{A} < 90^o$.
Supondo que $b \leqslant c$. Assim o ponto D, projeção de C sobre AB cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.

Figura 16 – Demonstração do primeiro caso da recíproca do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$ e sendo o triângulo BDC retângulo, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-x)^2 \\ a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

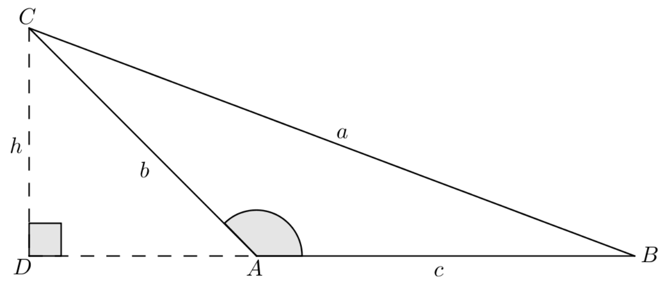
ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$.

2° Caso: $\widehat{A} > 90^o$.
Agora, o ponto D cai fora do lado AB.
Efetuando os mesmos cálculos do caso anterior nos levam a $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$.
Daí, podemos afirmar que em um triângulo ABC, de lados a, b e c, se:

$$\begin{aligned} &\widehat{A} = 90^o \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2; \\ &\widehat{A} < 90^o \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2; \\ &\widehat{A} > 90^o \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2. \end{aligned}$$

□

Figura 17 – Demonstração do segundo caso da recíproca do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

5.3 Interpretação geométrica do teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

5.4 Aplicações do teorema de Pitágoras

Nos exemplos a seguir, iremos ver como se usa o teorema de Pitágoras para encontrar medidas desconhecidas dos lados de um triângulo retângulo.

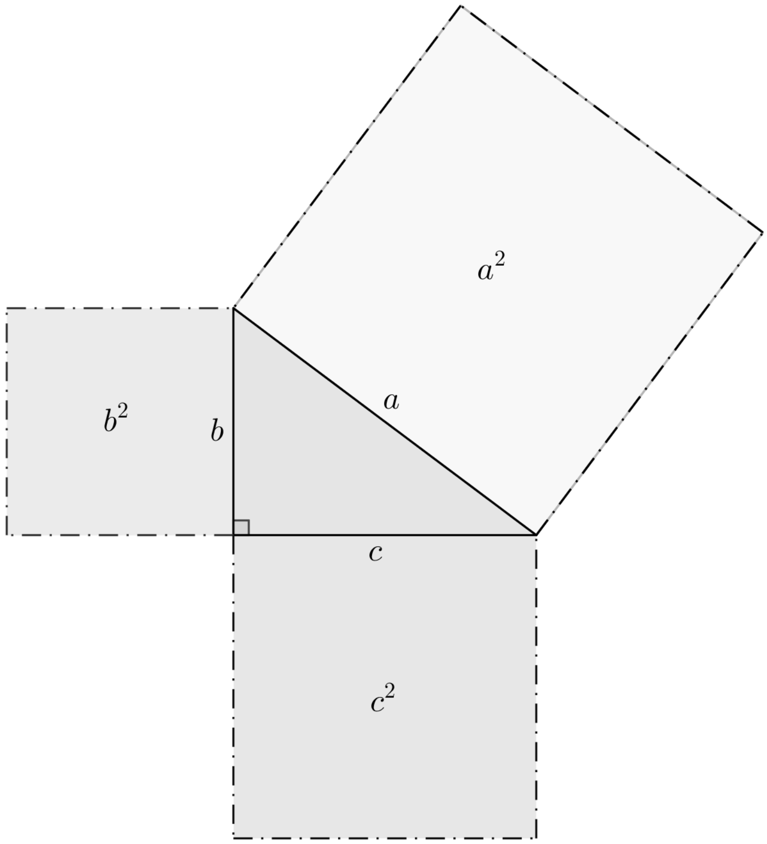
Exemplo 5.4.1. *Seja ABC um triângulo retângulo em A, sabendo que* $\overline{AB} = 16\ cm$*,* $\overline{AC} = 12\ cm$*, calcule o lado* $\overline{BC}$*.*

Solução: Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$\begin{aligned}
(\overline{BC})^2 &= (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 \\
\overline{BC})^2 &= (12)^2 + (16)^2 \\
(\overline{BC})^2 &= 144 + 256 \\
(\overline{BC})^2 &= 400 \\
(\overline{BC}) &= \sqrt{400} \\
\overline{BC} &= 20
\end{aligned}$$

Logo, o lado $\overline{BC}$ é igual a 20 cm.

Figura 18 – Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

Exemplo 5.4.2. *Quantos metros de fio são necessários para ligar os fios de um poste de* 8 *m de altura até uma caixa de luz que está ao lado da casa e a* 6 *m da base do poste?*

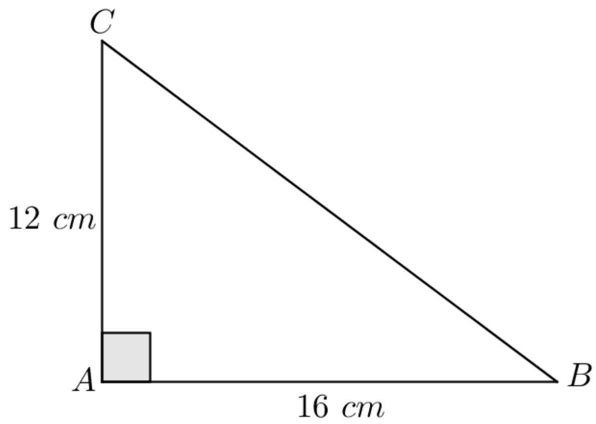
Solução: Chamando de c o comprimento do fio e usando o teorema de Pitágoras para calculá-lo, tem-se:

$$\begin{aligned} c^2 &= 8^2 + 6^2 \\ c^2 &= 64 + 36 \\ c^2 &= 100 \\ c &= \sqrt{100} \\ c &= 10. \end{aligned}$$

Portanto, o tamanho do fio para ligar do poste até a caixa de luz é de 10 m.

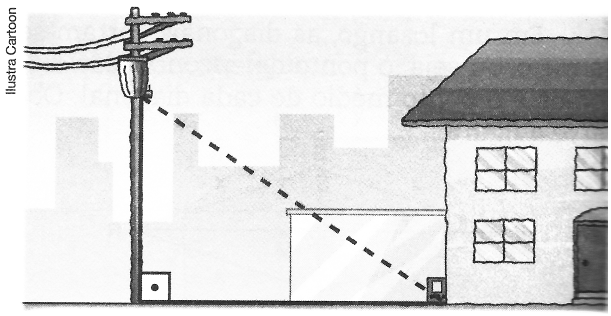
Exemplo 5.4.3. *Uma torre de telefonia celular de* 45 *m de altura vai ser sustentada por quatro cabos de mesmo comprimento. Os cabos serão presos na torre a* 25 *m de altura e os quatro ganchos no solo para prender os cabos estarão a* 6 *m da base da torre. Quantos metros de cabo, aproximadamente, serão necessários para a sustentação da torre?*

Figura 19 – Exemplo 5.4.1, aplicação do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 20 – Exemplo 5.4.2, aplicação do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução: Seja d o tamanho do cabo e aplicado o teorema de Pitágoras, temos:

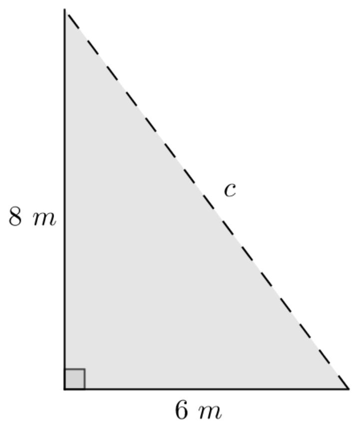
$$\begin{aligned} d^2 &= (25)^2 + 6^2 \\ d^2 &= 625 + 36 \\ d^2 &= 661 \\ d &= \sqrt{661} \\ d &\cong 25,71. \end{aligned}$$

Sendo assim, o cabo deve medir aproximadamente $25,71\ m$ e serão necessários $102,84\ m$.

Estes problemas objetivaram apresentar aos alunos exemplos de aplicações do teorema de Pitágoras para determinar as medidas desconhecidas de um triângulo retângulo, além de usar os conhecimentos desse assunto para resolver as situações problemas mencionadas.

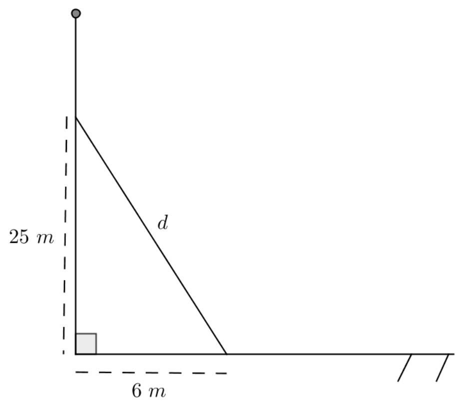
Temos agora duas aplicações do teorema de Pitágoras que nos dão as me-

Figura 21 – Interpretação geométrica do exemplo 5.4.2, aplicação do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 22 – Interpretação geométrica do exemplo 5.4.3, aplicação do Teorema de Pitágoras.



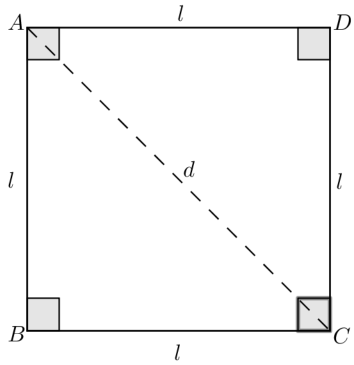
Fonte: Autor, 2014.

didas da diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero em função dos seus lados. Estas são especiais já que podem ser usadas em várias situações, dentre elas, calcular os valores dos ângulos 30^o, 45^o e 60^o que iremos ver mais adiante.

Diagonal do quadrado

Considere o quadrado ABCD, onde l é a medida de seu lado e d a medida de sua diagonal.

Figura 23 – Diagonal do quadrado.



Fonte: Autor, 2014.

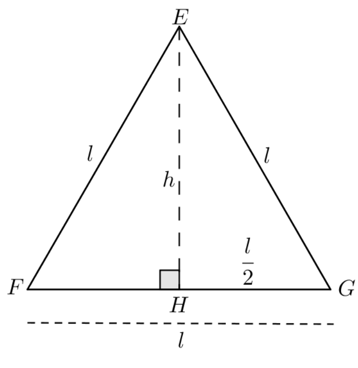
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2 + l^2 \\ d^2 &= 2l^2 \\ d &= l\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Altura do triângulo equilátero

Sendo EFG um triângulo equilátero, em que l é a medida do lado e h é a medida da altura.

Figura 24 – Altura do triângulo equilátero.



Fonte: Autor, 2014.

Sabemos da geometria que a altura e a mediana de um triângulo equilátero coincidem; logo o ponto H é ponto médio do lado $\overline{FG}$.

No triângulo retângulo EHG ($\widehat{H}$ é reto), de acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{2})^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - (\frac{l^2}{4})$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3l^2}}{\sqrt{4}}\ (l > 0) \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

5.5 Razões Trigonométricas

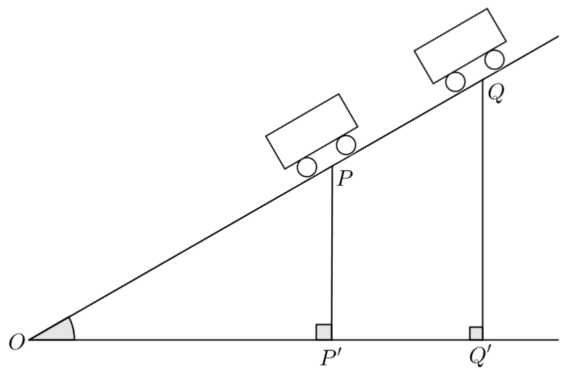
5.5.1 Conceituação

Desde a antiguidade o uso das relações trigonométricas para resolver problemas tem ganhado destaque, pelas soluções de questões que tratam do cálculo de distâncias inacessíveis e determinar as medidas dos elementos do triângulo retângulo. Iniciamos seu estudo explorando a seguinte situação:

Em um terreno plano e horizontal há uma rampa reta e plana. Imagine um carrinho descendo por essa rampa. Afirmamos que, para qualquer posição do carrinho, a razão entre a altura em que ele está, em relação ao terreno e a distância que falta para terminar a rampa é constante.

De fato, isto pode ser explicado considerando duas posições quaisquer, P e Q do carrinho sobre a rampa, conforme a figura abaixo.

Figura 25 – Conceituação das Razões trigonométricas.



Fonte: Autor, 2014.

Como os triângulos OPP' e OQQ' são semelhantes (critério AA), a razão entre os lados correspondentes é constante, portanto:

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{QQ'}{OQ}.$$

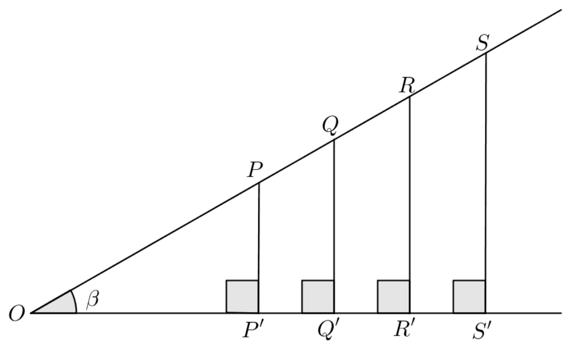
De maneira análoga, temos:

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} \text{ e } \frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'}.$$

Como consequência do conceito de semelhança de triângulos, concluímos que em qualquer triângulo retângulo com um ângulo interno agudo de medida β, as razões entre os lados correspondentes são iguais.

Observe alguns desses triângulos:

Figura 26 – Consequência do conceito das razões trigonométricas por semelhança de triângulos.



Fonte: Autor, 2014.

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{QQ'}{OQ} = \frac{RR'}{OR} = \frac{SS'}{OS} = k_1$$

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{OR'}{OR} = \frac{OS'}{OS} = k_2$$

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{QQ'}{OQ'} = \frac{RR'}{OR'} = \frac{SS'}{OS'} = k_3$$

As razões trigonométricas k_1, k_2 e k_3 são chamadas respectivamente de: do ângulo β ($sen\ \beta$), cosseno do ângulo β ($cos\ \beta$) e tangente do ângulo β ($tg\ \beta$)e dependem apenas do ângulo β, não dependendo do triângulo retângulo escolhido.

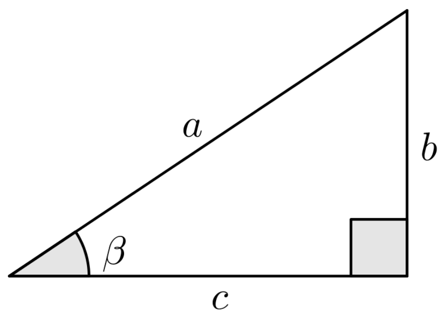
Resumindo, temos:

$$\begin{aligned} sen\ \beta &= \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa} = \frac{b}{a}; \\ cos\ \beta &= \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa} = \frac{c}{a}; \\ tg\ \beta &= \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{catetoadjacente\ a\ \beta} = \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

5.5.2 Ângulos notáveis

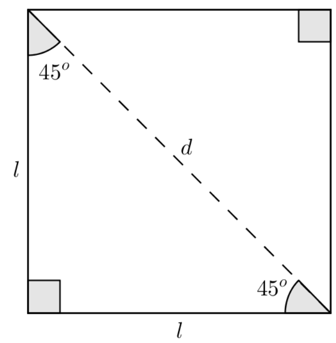
Podemos encontrar facilmente a medida do seno, co-seno e tangente de alguns ângulos e por isso chamamos o valor destes de ângulos notáveis.

Figura 27 – Resumo das definições de seno, cosseno e tangente.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 28 – Seno, cosseno e tangente de 45°.



Fonte: Autor, 2014.

Seno, cosseno e tangente de 45^o

Consideremos um quadrado de lado l. Traçando a sua diagonal, vemos um triângulo retângulo. Observe que os ângulos agudos valem 45^o, pois ...

Calculando sua diagonal usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2 \cdot l^2} \Rightarrow d = l\sqrt{2};$$

$$sen\ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow sen\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow sen\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

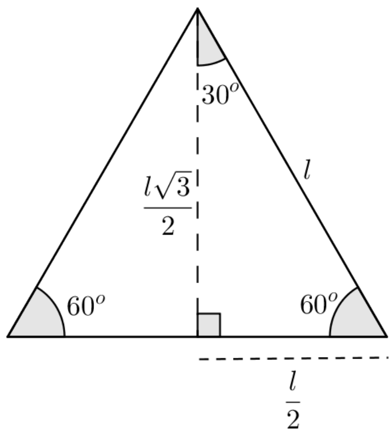
$$cos\ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow cos\ 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg\ 45^o = \frac{l}{l} \Rightarrow tg\ 45^o = 1.$$

Seno, cosseno e tangente de 30^o **e de** 60^o

Considere um triângulo equilátero de lado l, onde seus ângulos medem 60^o, sabendo que a altura do triângulo equilátero mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ e coincide com a bissetriz e a mediana, temos:

Figura 29 – Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°.



Fonte: Autor, 2014.

Ângulo de 30^o:

$$\begin{aligned} sen\ 30^o &= \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow sen\ 30^o = \frac{1}{2}; \\ cos\ 30^o &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ tg\ 30^o &= \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Ângulo de 60^o:

$$\begin{aligned} sen\ 60^o &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow sen\ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ cos\ 60^o &= \frac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow cos\ 60^o = \frac{1}{2}; \\ tg\ 60^o &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow tg\ 60^o = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Com os valores encontrados, podemos construir uma tabela com o seno,

Tabela 1 – Ângulos notáveis.

	x		
	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autor, 2014.

cosseno e a tangente desses ângulos:

Com estas deduções o aluno passa a conhecer os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 30^o, 45^o e 60^o, aplicando-os na resolução de problemas.

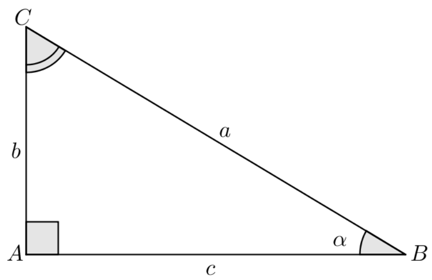
5.5.3 Ângulos complementares

Se α é a medida de um ângulo agudo, então:

$$sen\ \alpha\ =\ cos\ (90^o\ -\ \alpha)\ \text{e}\ cos\ \alpha\ =\ sen\ (90^o\ -\ \alpha)$$

Analisando a figura 30, temos que α é um ângulo agudo. Observe que o ângulo $\widehat{C}$ é o complementar de $\widehat{B}\ =\ \alpha$, pois:

Figura 30 – Ângulos complementares



Fonte: Autor, 2014.

$$\alpha\ +\ \widehat{C}\ =\ 90^o \Rightarrow \widehat{C}\ =\ (90^o\ -\ \alpha)$$

Diante disso:

$$sen\ \alpha\ =\ \frac{b}{a}\ \text{e}\ cos\ (90^o\ -\ \alpha)\ =\ \frac{b}{a},$$

O que implicam:

$$sen\ \alpha\ =\ cos\ (90^o\ - \alpha).$$

Analogamente,

$$cos\ \alpha\ =\ \frac{c}{a}\ \text{e}\ sen\ (90^o\ -\ \alpha)\ =\ \frac{c}{a},$$

Portanto:

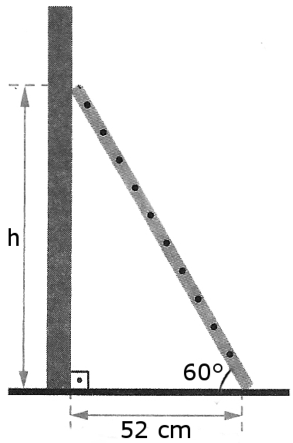
$$cos\ \alpha\ =\ sen\ (90^o\ -\ \alpha).$$

Donde: *Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.*

Segue alguns exemplos para colocar em prática o que vimos anteriormente, fazendo com que os alunos utilizem os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, aplicando-os para resolver problemas usando os valores aproximados dos ângulos apresentados na tabela.

Exemplo 5.5.1. *Gustavo encostou uma escada numa parede de sua casa de tal modo que o topo da escada ficou a uma certa altura h em relação ao chão. O ângulo compreendido entre o chão e a escada, medido por ele, foi de* 60^o *e a distância entre a base da parede e a base da escada que ele também mediu foi de* $52\ cm$*, calcule o valor de h. (Faça:* $\sqrt{3}\ \cong\ 1,73$*.)*

Figura 31 – Exemplo 5.5.1, ângulos notáveis.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução: Observando a figura, percebemos que aparecem os catetos oposto e adjacente ao ângulo e por isso, vamos usar a relação tangente. Logo

$$\begin{aligned} tg\ 60^o &= \frac{h}{52} \\ \sqrt{3} &= \frac{h}{52} \\ h &= 52 \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

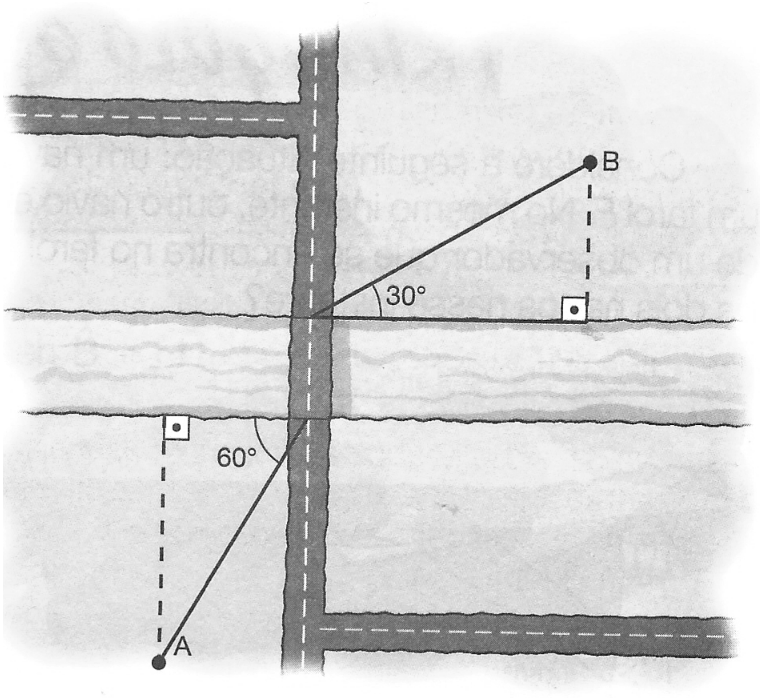
Substituindo $\sqrt{3} = 1,73$ tem-se:

$$\begin{aligned} h &= 52 \cdot 1,73 \\ h &= 89,96. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de h é de $89,96\ cm$.

Exemplo 5.5.2. *Deseja-se construir uma estrada ligando as cidades A e B, separadas por um rio de margens paralelas, como nos mostra o esquema abaixo:*

Figura 32 – Exemplo 5.5.2, ângulos notáveis.

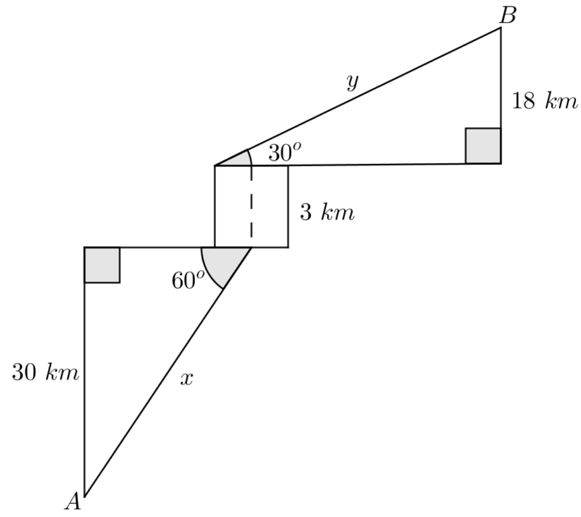


Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Sabe-se que a cidade A está distante 30 *km da margem do rio, a B está a* 18 *km da margem do rio, e a ponte tem* 3 *km de extensão. Qual a distância de A a B, pela estrada, em quilômetros? (Use:* $\sqrt{3} \cong 1,7$.*)*

Solução: Sejam x e y as distâncias das cidades A e B em relação à estrada, respectivamente.

Figura 33 – Modelo geométrico exemplo 5.5.2, ângulos notáveis.



Fonte: Autor, 2014.

Usando a relação *seno*, para calcular x e y, temos:

$$sen\ 60^o = \frac{30}{x} \qquad sen\ 30^o = \frac{18}{y}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{x} \qquad \frac{1}{2} = \frac{18}{y}$$
$$x = \frac{60}{\sqrt{3}} \qquad y = 36\ km$$
$$x = 20 \cdot \sqrt{3}$$
$$x = 20 \cdot 1{,}7$$
$$x = 34\ km.$$

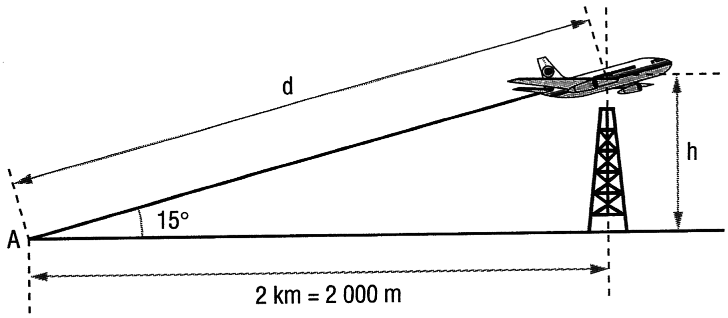
Logo, a distância entre as cidades A e B é de $x + y + 3 = 34 + 36 + 3 = 73\ km.$

No anexo 1, segue uma tabela com valores aproximados do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1^o a 90^o e esta irá auxiliar na resolução dos problemas.

Os exemplos a seguir mostram as mais variadas situações cotidianas das aplicações trigonométricas, onde podemos usar várias medidas de ângulos e seus valores aproximados de seno, cosseno e tangente. Lembrando que o professor deverá chamar atenção dos alunos para analisar os problemas apresentados, procurando rever os conceitos trigonométricos e aplicá-los para resolver as questões.

Exemplo 5.5.3. *Um avião levanta voo em A e sobe fazendo um ângulo de* 15^o *com a horizontal. A que altura estará e qual a distância percorrida quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto de partida?(Considere:* $sen\ 15^o \cong 0,26$*,* $cos\ 15^o \cong 0,97$ *e* $tg\ 15^o \cong 0,27$*).*

Figura 34 – Exemplo 5.5.3, razões trigonométricas.



Fonte: Dante, 2004.

Solução: *Cálculo da altura h.*

Analisando a figura, percebemos que vamos usar a relação tangente, pois trata-se do ângulo dado e os catetos do triângulo retângulo. Assim,

$$tg\ 15^o = \frac{h}{2000}.$$

Pela propriedade fundamental da proporção, temos:

$$h = tg\ 15^o \cdot 2000$$

Substituindo, $tg\ 15^o \cong 0,27$, tem-se:

$$h = 0,27 \cdot 2000$$

$$h = 540\ m.$$

Cálculo da distância d.

Observando a figura usaremos a relação cosseno, pois trata-se do ângulo, o cateto adjacente e queremos encontrar a hipotenusa. Daí,

$$cos\ 15^o = \frac{2000}{d}.$$

Pela propriedade fundamental da proporção, tem-se:

$$d = \frac{2000}{cos\ 15^o}.$$

Substituindo $cos\ 15^o \cong 0,97$.

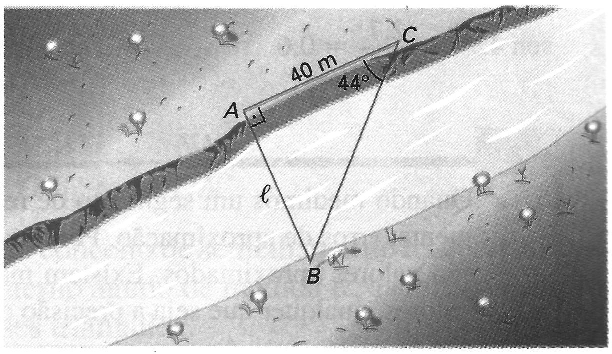
$$d = \frac{2000}{0,97},$$

$$d \cong 2062 \; m.$$

Logo, a altura e a distância aproximada percorrida pelo avião respectivamente é de 540 m e 2062 m.

Exemplo 5.5.4. *Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme a figura 35). A seguir, desloca-se* 40 m *perpendicularmente à reta* $\overline{AB}$ *até o ponto C e mede o ângulo* $A\overline{C}B$, *obtendo* 44^o. *Use: sen* $44^o \cong 0,69$, *cos* $44^o \cong 0,71$ *e tg* $44^o \cong 0,96$, *calcule a largura do rio.*

Figura 35 – Exemplo 5.5.4, razões trigonométricas.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução: Analisando o triângulo ABC, utilizaremos a relação tangente, pois é dado o ângulo de medida 44^o, o cateto adjacente a ele e queremos calcular a medida da largura l do rio que é o cateto oposto ao ângulo. Daí,

$$tg\; 44^o = \frac{l}{40}\,.$$

Pela propriedade fundamental da proporção, temos:

$$l = tg\; 44^o \cdot 40\,.$$

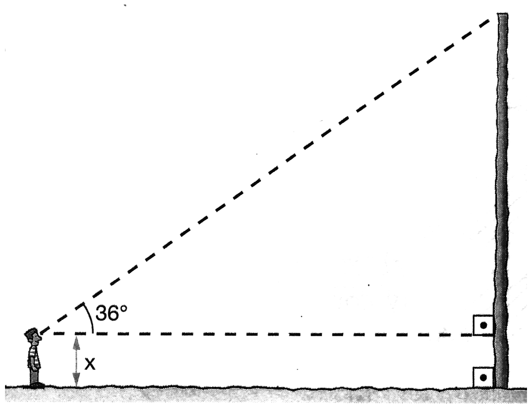
Substituindo $tg\; 44^o \cong 0,96$, temos:

$$l = 0,96 \cdot 40$$
$$l = 38,4 \; m.$$

Portanto, a largura do rio é de $38,4$ m.

Exemplo 5.5.5. *Caio está distante* 40 m *da base de um obelisco de* $30,4$ m *de altura. Os olhos de Caio estão a x metros do plano horizontal. Observando o esquema, calcule o valor de x. (Considere: sen* $36^o \cong 0,58$; *cos* $36^o \cong 0,80$ *e tg* $36^o \cong 0,72$*).*

Figura 36 – Exemplo 5.5.5, razões trigonométricas.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução: Observando a figura aplicaremos a relação tangente, pois temos o ângulo que mede 36^o e os catetos adjacente e oposto. Assim,

$$tg\ 36^o = \frac{30,4 - x}{40}.$$

Aplicando a propriedade fundamental da proporção, temos:

$$30,4 - x = 40 \cdot tg\ 36^o.$$

Substituindo $tg\ 36^o \cong 0,72$, tem-se:

$$\begin{aligned} 30,4 - x &= 40 \cdot 0,72 \\ 30,4 - x &= 28,8 \\ x &= 30,4 - 28,8 \\ x &= 1,6\ m. \end{aligned}$$

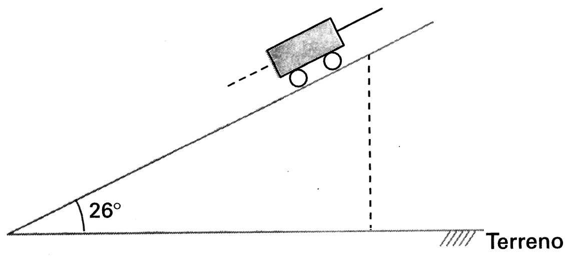
Logo, os olhos de Caio estão a $1,6\ m$ do plano horizontal.

Exemplo 5.5.6. *Um carrinho desce uma rampa plana que forma um ângulo de 26^o com o terreno plano e horizontal. Dados: sen $26^o \cong 0,43$; cos $26^o \cong 0,89$ e tg $26^o \cong 0,48$.*

Responda as seguintes questões:
a) *Quando o carrinho estiver a 2 m de altura em relação ao terreno, que distância percorrerá até final da descida?*

Solução: Usaremos a relação seno, pois temos o ângulo de medida 26^o, o cateto oposto a ele e queremos encontrar a distância que corresponde a medida da hipotenusa. Daí,

Figura 37 – Exemplo 5.5.6, razões trigonométricas.



Fonte: Dante, 2004.

$$sen\ 26^o = \frac{2}{d}$$

$$d = \frac{2}{sen\ 26^o}$$

Substituindo $sen\ 26^o \cong 0,43$, segue:

$$d = \frac{2}{0,43}.$$

$$d \cong 4,65\ m.$$

Portanto, o carrinho percorrerá uma distância aproximada de $4,65\ m$.

b) *Quando o carrinho percorrer* 4 *m da rampa, quais serão os seus deslocamentos horizontal e vertical, em metros?*

Solução: Sejam v e d os deslocamentos vertical e horizontal respectivamente.

Cálculo do deslocamento vertical.
Aplicando a relação seno, temos:

$$\begin{aligned} sen\ 26^o &= \frac{v}{4} \\ v &= 4 \cdot sen\ 26^o. \end{aligned}$$

Substituindo $sen\ 26^o \cong 0,43$, segue:

$$\begin{aligned} v &= 4 \cdot 0,43 \\ v &= 1,72\ m. \end{aligned}$$

Cálculo do deslocamento horizontal.

Usando a relação cosseno, tem-se:

$$\begin{aligned} cos\ 26^o &= \frac{h}{4} \\ h &= 4 \cdot cos\ 26^o. \end{aligned}$$

Substituindo $cos\ 26^o \cong 0,89$, temos:

$$\begin{aligned} h &= 4 \cdot 0,89 \\ h &= 3,56\ m. \end{aligned}$$

Logo, os deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente foram de $1,72\ m$ e $3,56\ m$.

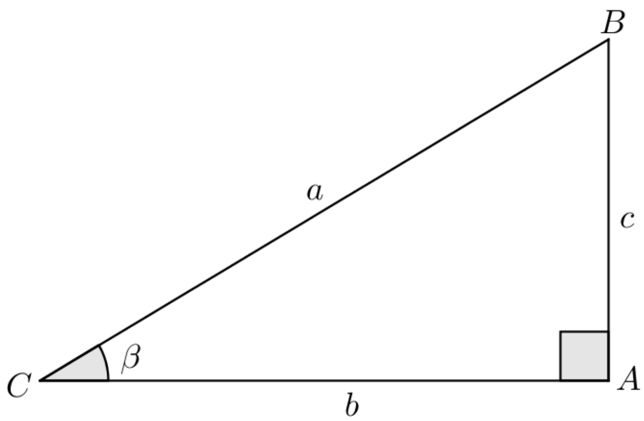
Após explorar estes conceitos e ver sua aplicabilidade nos exemplos, os alunos deverão saber identificar essas razões e calculá-las a fim de resolver problemas.

5.6 Relações entre as Razões Trigonométricas

As relações entre as razões trigonométricas são essenciais na resolução de exercícios cujas informações apresentadas no problema apareçam de forma implícita, utilizando-as para descobrir outros dados importantes para a solução.

Considere o triângulo ABC, retângulo em A.

Figura 38 – Relações entre as razões trigonométricas.



Fonte: Autor, 2014.

Calculando a razão entre o seno β e o cosseno β, tem-se:

$$\frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = tg\ \beta.$$

Portanto:

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}.$$

Sendo β um ângulo agudo.
Temos que,

$$sen\ \beta = \frac{c}{a}, \text{ então } c = a \cdot sen\ \beta.$$

$$cos\ \beta = \frac{b}{a}, \text{ então } b = a \cdot cos\ \beta.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow (a \cdot cos\ \beta)^2 + (a \cdot sen\ \beta)^2 = a^2;$$

$$a^2 \cdot (sen\ \beta)^2 + a^2 \cdot (cos\ \beta)^2 = a^2 \Rightarrow a^2\ ((sen^2\ \beta) + (cos^2\ \beta)) = a^2;$$

Logo:

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1,$$

esta relação é chamada equação fundamental da trigonometria.

Exemplo 5.6.1. *Se* $sen\ \alpha = \frac{12}{13}$, *com* α *agudo, calcule* $cos\ \alpha$ *e a* $tg\ \alpha$.

Solução: Usando a equação fundamental, temos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$(\frac{12}{13})^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{144}{169} + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$cos^2\alpha = \frac{169 - 144}{169}$$

$$cos^2\alpha = \frac{25}{169}$$

$$cos\ \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{5}{13}.$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{12}{5}$$

6 AULA 4 - EXTENSÃO DA TRIGONOMETRIA PARA TRIÂNGULOS QUAISQUER

Cabe ao professor comentar que nem sempre vai existir triângulos retângulos afim de aplicar as razões trigonométricas já estudadas, embora tenhamos definido e utilizado para os ângulos agudos. Vejamos que tais definições também se aplicam a outros tipos de ângulos.

6.1 Ângulos suplementares

Definição 6.1.1. *Senos de dois ângulos suplementares.*
Os valores dos seno de dois ângulos suplementares coincidem, ou seja,

$$sen\ (180^o - x) = sen\ x$$

onde x é a medida de um ângulo de um triângulo.

Por exemplo, sendo $x = 30^o$, temos:

$$sen\ 30^o = \frac{1}{2} \text{ e } sen\ (180^o - 30^o) = sen\ 120^o = \frac{1}{2}.$$

Definição 6.1.2. *Cossenos de dois ângulos suplementares.*
Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, isto é,

$$cos\ (180^o - x) = -\,cos\ x$$

onde x é a medida de um ângulo de um triângulo.

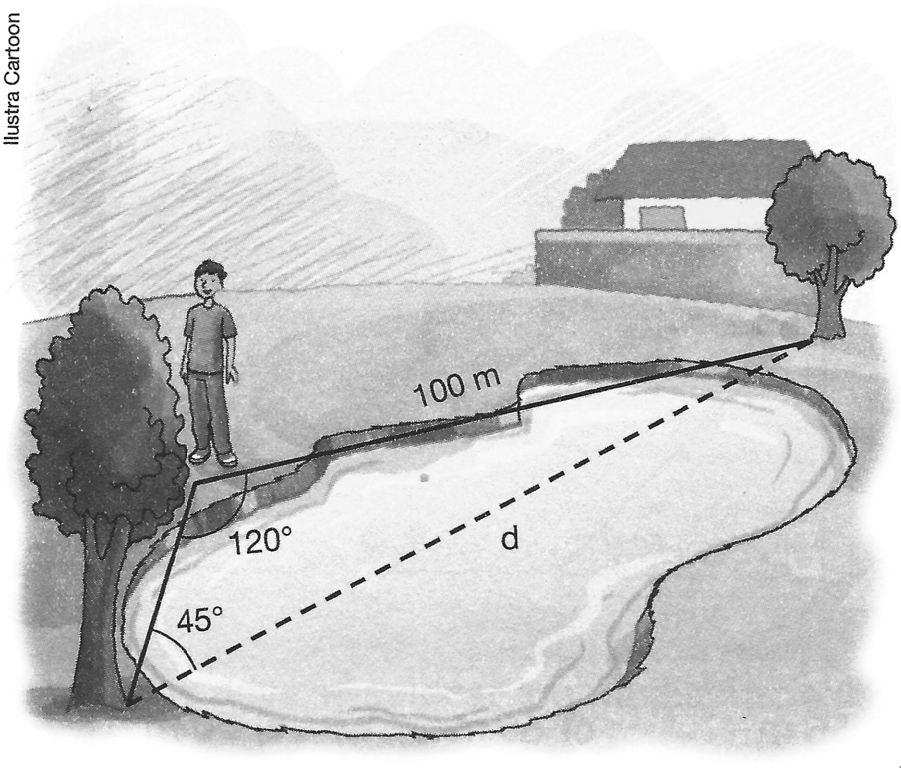
Por exemplo, sendo $x = 45^o$, temos:

$$cos\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } cos\ (180^o - 45^o) = cos\ 135^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Considere a seguinte situação: Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é 120^o, e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45^o. Sabendo que uma das árvores está a 100 metros do observador, determine a distância d entre as árvores.

Pela figura, temos que o triângulo formado não é retângulo e, por isso não é possível aplicar as relações já conhecidas. Estudaremos agora outras relações onde podemos utilizá-las em triângulos acutângulo ou obtusângulo.

Figura 39 – Introdução a lei dos senos e cossenos.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

6.2 Lei dos Cossenos

Teorema 6.2.1. *Sendo um triângulo ABC qualquer, de lados opostos aos ângulos internos* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *e* $\widehat{C}$, *com medidas respectivamente a, b e c, valem as relações:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cos\,\widehat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot cos\,\widehat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\,\widehat{C}\,. \end{aligned}$$

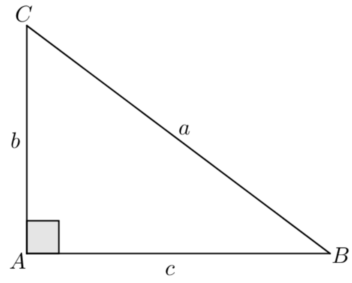
Com o objetivo de calcular a medida de um lado do triângulo, quando se conhecem a medida dos outros dois lados e o ângulo formado entre eles, é que usamos a lei dos cossenos e esta pode ser interpretada de três formas a depender da medida do ângulo.

Demonstração.

1. $\widehat{A}$ **é Reto.**

   Nesse caso, o $\triangle ABC$ é reto e vale o teorema de Pitágoras:

Figura 40 – Demonstração da lei dos cossenos quando o ângulo é reto.



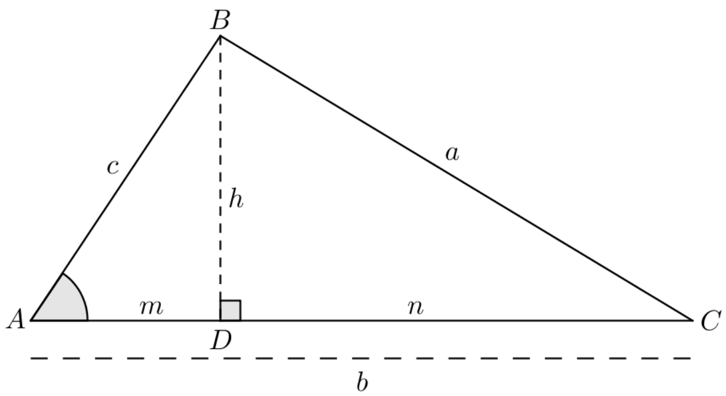
Fonte: Autor, 2014.

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

2. $\widehat{A}$ **é Agudo.**

   O triângulo ABC tem o ângulo $\widehat{A}$ agudo.

Figura 41 – Demonstração da lei dos cossenos quando o ângulo é agudo.



Fonte: Autor, 2014.

No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2. \text{ (I)}$$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2. \text{ (II)}$$

Temos também:

$$n = b - m. \text{ (III)}$$

Substituindo (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

Mas, no triângulo BAD: $cos\widehat{A} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot cos\widehat{A}.$

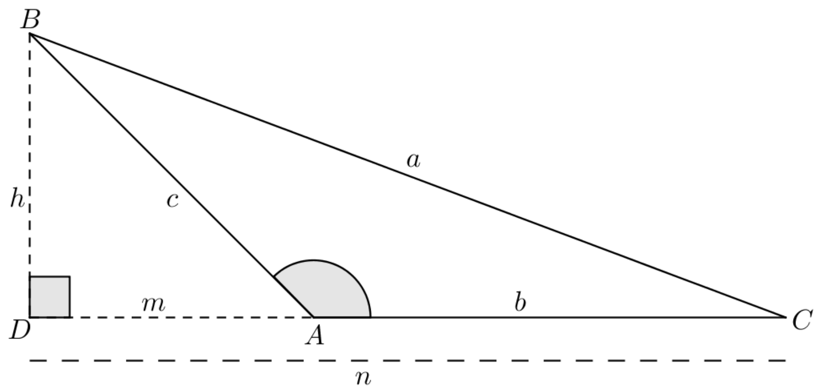
Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\widehat{A}.$$

3. $\widehat{A}$ **é Obtuso.**

ABC é um triângulo com $\widehat{A}$ obtuso.

Figura 42 – Demonstração da lei dos cossenos quando o ângulo é obtuso.



Fonte: Autor, 2014.

No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2. \text{ (I)}$$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2. \text{ (II)}$$

Temos também:

$$n = b + m. \text{ (III)}$$

Substituindo (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b+m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

Mas, no $\triangle BAD$, temos $cos(180-\widehat{A}) = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot cos(180-\widehat{A})$.

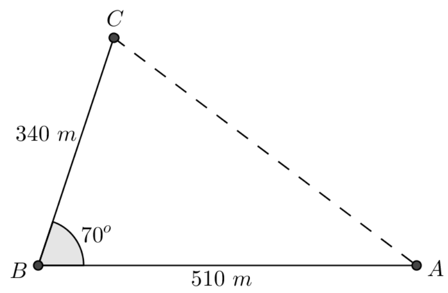
Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot cos(180-\widehat{A}).$$

$\square$

Exemplo 6.2.1. *Para ir de um ponto A a um ponto B, um automóvel percorre uma rua de* 510 *m. Para ir de B a C, o mesmo veículo percorre uma rua de* 340 *m. As ruas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ formam um ângulo de 70^o. Em linha reta, qual é a distância de A até C? Considere: $cos\ 70^o \cong 0,34202$.*

Figura 43 – Exemplo 6.2.1, lei dos cossenos.



Fonte: Iezzi, 2005.

Solução: Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned}(\overline{AC})^2 &= (340)^2 + (510)^2 - 2 \cdot 340 \cdot 510\, cos\ 70^o \\ (\overline{AC})^2 &= 115600 + 260100 - 346800\, cos\ 70^o.\end{aligned}$$

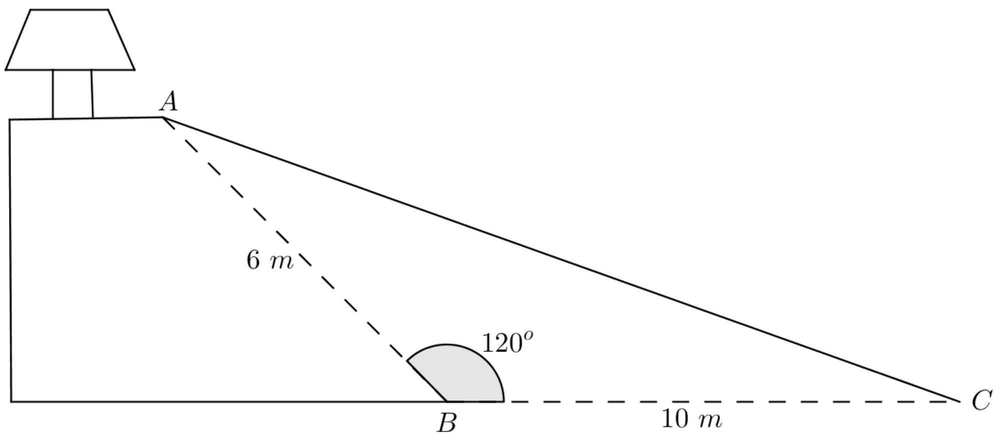
Substituindo $cos\ 70^o \cong 0,34202$, tem-se:

$$\begin{aligned}(\overline{AC})^2 &= 375700 - 118612,53 \\ (\overline{AC})^2 &= 257087,464 \\ \overline{AC} &= \sqrt{257087,464} \\ \overline{AC} &\cong 507,04\ m.\end{aligned}$$

Daí, a distância de A até C é de aproximadamente 507,04 metros.

Exemplo 6.2.2. *(UEPA) A figura abaixo mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta, $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos a casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de A a B é de* 6 *m, de B a C é de* 10 *m e o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 120^o. Qual deve ser o valor do comprimento da rampa em metros?*

Figura 44 – Exemplo 6.2.2, lei dos cossenos.



Fonte: Adaptada de Dante, 2004.

Solução: Chamando o comprimento $\overline{AC}$ da rampa de c e usando a lei dos cossenos, temos:

$$c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot cos\ 120^o.$$

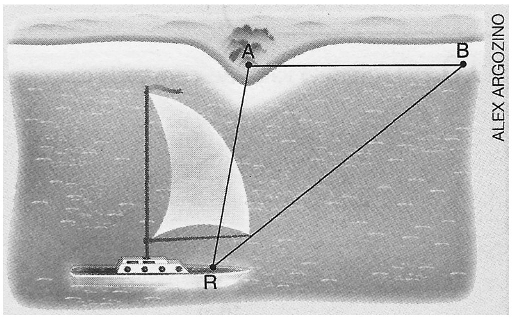
Sabendo que $cos\ 120^o = -\, cos\ 60^o = -\dfrac{1}{2}$, segue:

$$\begin{aligned}
c^2 &= 36 + 100 - 120 \cdot (-\frac{1}{2}) \\
c^2 &= 136 + 60 \\
c^2 &= 196 \\
c &= \sqrt{196} \\
c &= 14\ m.
\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da rampa é de 14 metros.

Exemplo 6.2.3. *Conduzindo uma pequena embarcação e dispondo de um GPS, Ricardo sabe que, num certo momento, encontra-se a* 4 *km de uma praia A e a* 6 *km de uma praia B, como mostra a figura ao lado. Além disso, conhece a medida do ângulo* $A\widehat{R}B$*, que é* 41^o*. Calcule a distância entre as praias A e B. (Use a aproximação* $cos\ 41^o \cong 0,75$*).*

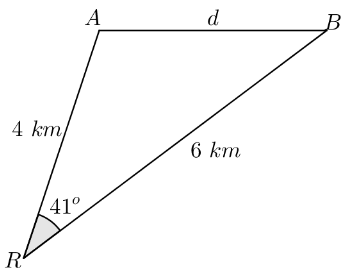
Figura 45 – Exemplo 6.2.3, lei dos cossenos.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução: Seja d a distância entre as praias A e B.

Figura 46 – Modelo geométrico exemplo 6.2.3.



Fonte: Autor, 2014.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ARB, temos

$$\begin{aligned} d^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 41^o, \\ d^2 &= 16 + 36 - 48 \cdot \cos 41^o. \end{aligned}$$

Substituindo $\cos 41^o \cong 0,75$.

$$\begin{aligned} d^2 &= 52 - 48 \cdot 0,75 \\ d^2 &= 52 - 36 \\ d^2 &= 16 \\ d &= \sqrt{16} \\ d &= 4\, km. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre as praias A e B é de 4 km.

6.3 Lei dos Senos

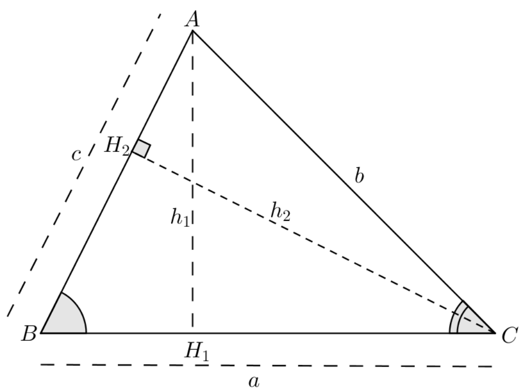
Teorema 6.3.1. *Seja um triângulo ABC qualquer, de lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ que medem respectivamente a, b e c e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ vale a seguinte relação:*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Podemos encontrar a medida de dois lados de um triângulo, conhecendo dois de seus ângulos e a medida do terceiro lado, usando a lei dos senos.

Demonstração. Considere o triângulo acutângulo ABC abaixo:

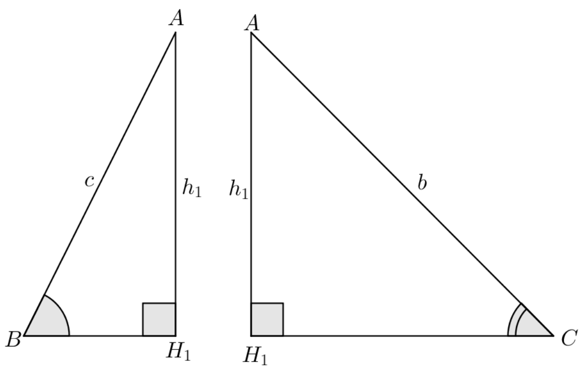
Figura 47 – Demonstração da lei dos senos.



Fonte: Autor, 2014.

Sejam os triângulos retângulos ABH_1 e ACH_1.

Figura 48 – Divisão dos triângulos para a demonstração da lei dos senos parte 1.



Fonte: Autor 2014.

Em ABH_1 , temos $sen\ \widehat{B} = \dfrac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot sen\ \widehat{B}$. (I)

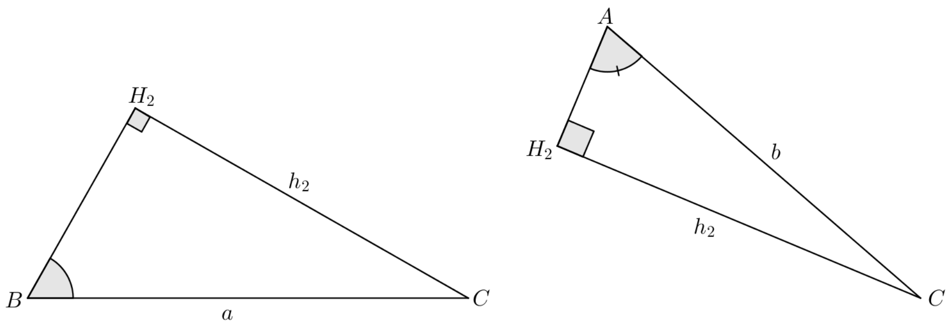
Em ACH_1 , temos $sen\,\widehat{C} = \dfrac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot sen\,\widehat{C}$. (II)

Igualando (I) e (II), podemos escrever:

$$c \cdot sen\,\widehat{B} = b \cdot sen\,\widehat{C} \Rightarrow \frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}}. \text{ (III)}$$

Analisando os triângulos retângulos BCH_2 e ACH_2:

Figura 49 – Divisão dos triângulos para a demonstração da lei dos senos parte 2.



Fonte: Autor 2014.

Em BCH_2 , temos $sen\,\widehat{B} = \dfrac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot sen\,\widehat{B}$. (IV)

Em ACH_2 , temos $sen\,\widehat{A} = \dfrac{h_2}{b} \Rightarrow h_2 = b \cdot sen\,\widehat{A}$. (V)

Comparando (IV) e (V), tem-se:

$$a \cdot sen\,\widehat{B} = b \cdot sen\,\widehat{A} \Rightarrow \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}}. \text{ (VI)}$$

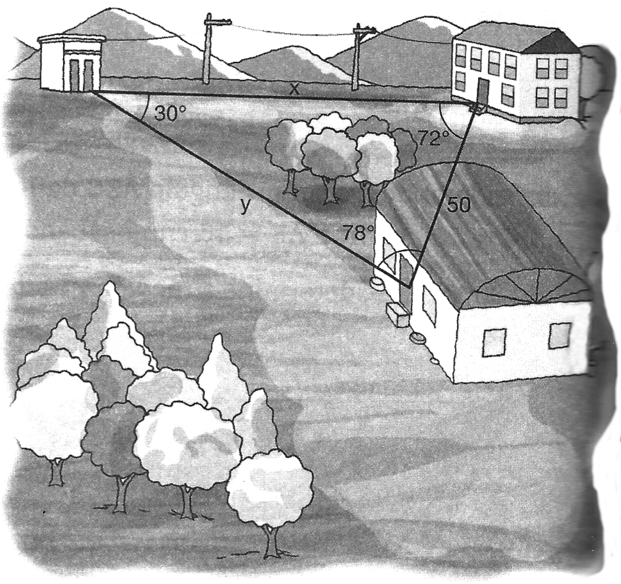
Portanto, comparando (III) e (VI), podemos escrever a igualdade entre as razões:

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}}.$$

□

Exemplo 6.3.1. *Numa fazenda, o galpão fica* 50 *m distante da casa. Considerando que x e y são, respectivamente as distâncias da casa e do galpão ao transformador de energia, conforme mostra a figura abaixo, calcule as medidas x e y indicadas. (Considere: sen* $30^o \cong \frac{1}{2}$, *sen* $78^o \cong 0,98$ *e sen* $72^o \cong 0,95$.*)*

Figura 50 – Exemplo 6.3.1, lei dos senos.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Solução:
Cálculo de x: Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{sen\ 78^o} = \frac{50}{sen\ 30^o}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$x \cdot sen\ 30^o = 50 \cdot sen\ 78^o$$

Substituindo, $sen\ 30^o \cong \frac{1}{2}$ e $sen\ 78^o \cong 0,98$.

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{1}{2} &= 50 \cdot 0,98 \\ \frac{x}{2} &= 49 \\ x &= 49 \cdot 2 \\ x &= 98\ m. \end{aligned}$$

Cálculo de y: aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{y}{sen\ 72^o} = \frac{50}{sen\ 30^o}.$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$y \cdot sen\, 30^o = 50 \cdot sen\, 72^o\,.$$

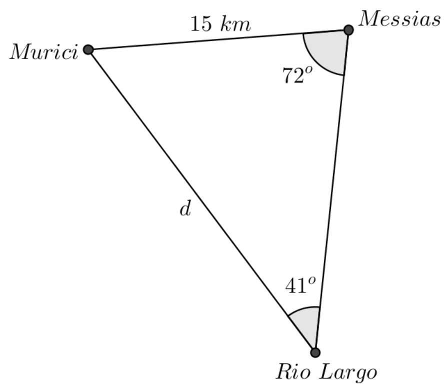
Substituindo, $sen\, 30^o = \dfrac{1}{2}$ e $sen\, 72^o \cong 0{,}95$.

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{1}{2} &= 50 \cdot 0{,}95 \\ \frac{y}{2} &= 47{,}5 \\ y &= 47{,}5 \cdot 2 \\ y &= 95\ m. \end{aligned}$$

Portanto, os valores de x e y são respectivamente 98 e 95 metros.

Exemplo 6.3.2. *Rio Largo, Murici e Messias são municípios do estado de Alagoas, localizadas conforme a figura. A partir dos dados fornecidos, determine a distância aproximada de Rio Largo a Murici. (Considere* $sen\, 72^o \cong 0{,}951$ *e* $sen\, 41^o \cong 0{,}656$*).*

Figura 51 – Exemplo 6.3.2, lei dos senos.



Fonte: Autor, 2014.

Solução: Analisando a figura e aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{d}{sen\, 72^o} = \frac{15}{sen\, 41^o}\,.$$

Pela propriedade fundamental da proporção, segue:

$$d \cdot sen\, 41^o = 15 \cdot sen\, 72^o\,.$$

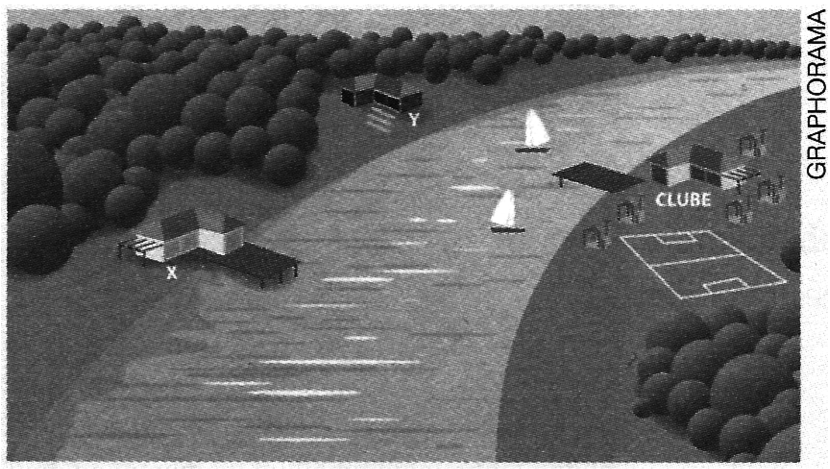
Sendo $sen\, 72^o \cong 0{,}951$ e $sen\, 41^o \cong 0{,}656$, substituindo:

$$\begin{aligned} d \cdot 0{,}656 &= 15 \cdot 0{,}951 \\ d\, 0{,}656 &= 14{,}265 \\ d &= \frac{14{,}265}{0{,}656} \\ d &= 21{,}74\ km. \end{aligned}$$

Logo, a distância aproximada de Rio Largo a Murici é de $21,74\ km$.

Exemplo 6.3.3. *Duas casas de veraneio X e Y estão situadas na mesma margem de um rio. De X avistam-se a casa Y e um clube particular na outra margem, sob um ângulo de 56^o. De Y avistam-se o clube e a casa X, sob um ângulo de 42^o.*

Figura 52 – Exemplo 6.3.3, lei dos senos.



Fonte: Giovanni Júnior, 2009.

Sabendo que a distância entre X e o clube é de 60 metros, determine:

a) a distância entre o clube e Y.

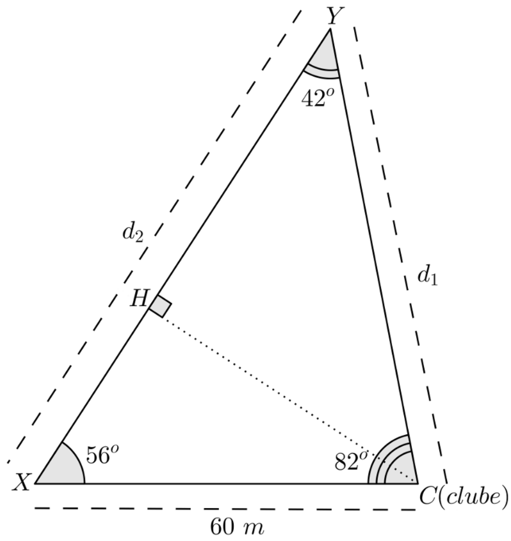
b) a distância entre as casas X e Y.

c) a largura do rio.

Admita que, nesse trecho, as margens do rio são paralelas e use as aproximações sen $42^o \cong 0,67$; *sen* $56^o \cong 0,83$ *e sen* $82^o \cong 0,99$.

Solução: Chamando d_1 a distância entre o clube e a casa Y, d_2 a distância entre as casas X e Y e l a largura do rio, construímos a seguinte figura:

Figura 53 – Modelo geométrico exemplo 6.3.3.



Fonte: Autor, 2014.

a) Analisando a figura 53 e aplicando a lei dos senos no triângulo XYC, temos:

$$\frac{60}{sen\ 42^o} = \frac{d_1}{sen\ 56^o}.$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$d_1 \cdot sen\ 42^o = 60 \cdot sen\ 56^o.$$

Substituindo $sen\ 42^o \cong 0,67$ e $sen\ 56^o \cong 0,83$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_1 \cdot 0,67 &= 60 \cdot 0,83 \\ d_1 \cdot 0,67 &= 49,8 \\ d_1 &= \frac{49,8}{0,67} \\ d_1 &\cong 74,328\ m. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre a casa Y e o clube é de aproximadamente $74,328\ m$.

b) Sabemos que o ângulo de visão entre o clube e a casa Y e o clube e a casa X é de 82^o pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e, com isso, aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{60}{sen\ 42^o} = \frac{d_2}{sen\ 82^o}.$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, tem-se:

$$d_2 \cdot sen\ 42^o = 60 \cdot sen\ 82^o.$$

Substituindo $sen\ 42^o \cong 0,67$ e $sen\ 82^o \cong 0,99$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_2 \cdot 0,67 &= 60 \cdot 0,99 \\ d_2 \cdot 0,67 &= 59,4 \\ d_2 &= \frac{59,4}{0,67} \\ d_2 &\cong 88,657\ m. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre as casas X e Y é de aproximadamente $88,657\ m$.

c) Considerando o triângulo retângulo XHC e usando a razão trigonométrica seno, tem se:

$$sen\ 56^o = \frac{l}{60}.$$

Pela propriedade fundamental das proporções:

$$l = 60 \cdot sen\ 56^o.$$

Substituindo $sen\ 56^o \cong 0,83$, tem-se:

$$\begin{aligned} l &= 0,83 \cdot 60 \\ l &= 49,8\ m. \end{aligned}$$

Assim, a largura do rio é de 49,8 metros.

Após o estudo da lei dos senos e dos cossenos o aluno deverá saber quando utilizá-las para resolver problemas que envolvam medidas num triângulo qualquer.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando optamos pela abordagem do conteúdo de Trigonometria objetivavámos, principalmente contribuir com um processo de ensino-aprendizagem que favorecesse e diminuíssem as dificuldades encontradas neste processo, sobretudo no ensino fundamental. Dar ênfase em solucionar as dificuldades encontradas pelos professores ao ensinar o conteúdo motivou a busca de respostas na pesquisa. Assim, procuramos, a partir da análise das respostas, encontrar métodos que contribuíssem para o aprimoramento das aulas, facilitando assim, a sua compreensão. Acreditamos que alguns desses objetivos foram alcançados. O conteúdo Trigonometria quando ministrado tem gerado alguns obstáculos que inferem diretamente na aprendizagem dos alunos. O objetivo deste estudo era o de justamente minimizar, através das propostas presente no corpo desta dissertação, tentar diminuir os obstáculos que impedem os alunos a entenderem de forma significativa os conceitos trigonométricos, uma vez que os estudantes sejam capazes de compreender e utilizar as relações para resolver diversos problemas. Especificamente em cada aula procurou-se dar o máximo de clareza e objetividade ao conteúdo, para que assim, tivessémos uma eficiência na exposição do assunto e, a partir daí, esses alunos possam selecionar, organizar, produzir informações relevantes e resolver situações-problemas, sabendo validar estratégias e resultados de forma menos impactante.

Esta é uma pesquisa que deixa como legado mais uma contribuição para o processo de ensino-aprendizagem da matemática que por si só tem se manifestado árdua por muito tempo. Acreditamos que este trabalho é relevante para o desenvolvimento de minhas aulas sobre Trigonometria e possivelmente irá ajudar aos professores na elaboração de métodos próprios que permitam facilitar a apreensão do assunto por parte dos discentes, principalmente pela construção de um repertório básico e prático e que tem como finalidade desenvolver habilidades necessárias ao estudante no seu dia-a-dia. A comprrensão e o aprofundamento deste tema permitiu-me conhecer melhor as dificuldades levantadas pelos docentes ao ensinar Trigonometria no ensino fundamental, permitindo desenvolver uma sequência de aulas, visando selecionar e organizar de maneira simples alguns conteúdos considerados pré-requisitos para o entendimento do mesmo.

Entendemos que a pesquisa não se posta como definitiva, aliás nada o é. Mas sua relevância está na proposta preterida, ou seja, deixar mais uma contribuição pedagógica que atenue certos dissabores matemáticos. O PROFMAT atua nesta perspectiva de formação: assim sendo, espera-se que a contribuição esteja posta e que abra novos olhares sobre a pesquisa realizada. O processo de formação educacional não é uma tarefa fácil, por isso que nos dedicamos a buscar meios que reduzam no ambiente escolar a não atração na disciplina matemática. Esses direcionamentos quando postos dialogam pedagogicamente para que visões e alternativas sejam criadas, sobretudo por nenhuma disciplina ser estática e não passível de mudanças. Enfim, é o que esperamos ter atingido nesse processo: contribuir para que soluções didáticas criem mudanças e posturas menos conservadoras quando protagonizamos como pilar de formação o processo de ensino-aprendizagem.

8 REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental).** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2000.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria/Números Complexos**: Coleção do Professor de Matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** 1^a **série do Ensino Médio.** São Paulo: Ática, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática, Ensino Fundamental:** 9^o **ANO.**. Ed. Renovada, São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade:** 8^a **série.** 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages; et al. **Temas e Problemas Elementares**: Coleção do Professor de Matemática. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, Manoel. **Matemática Ensino Médio:** 1^o **ANO.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de História da Matemática: Coleção PROFMAT.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

9 APÊNDICES

APÊNDICE A

Tabela 2 – Valores aproximados dos ângulos de 1^o até 90^o.

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1^o	0,017	1,000	0,017	46^o	0,719	0,695	1,036
2^o	0,035	0,999	0,035	47^o	0,731	0,682	1,072
3^o	0,052	0,999	0,052	48^o	0,743	0,669	1,111
4^o	0,070	0,998	0,070	49^o	0,755	0,656	1,150
5^o	0,087	0,996	0,087	50^o	0,766	0,643	1,192
6^o	0,105	0,995	0,105	51^o	0,777	0,629	1,235
7^o	0,122	0,993	0,123	52^o	0,788	0,616	1,280
8^o	0,139	0,990	0,141	53^o	0,799	0,602	1,327
9^o	0,156	0,988	0,158	54^o	0,809	0,588	1,376
10^o	0,174	0,985	0,176	55^o	0,819	0,574	1,428
11^o	0,191	0,982	0,194	56^o	0,829	0,559	1,483
12^o	0,208	0,978	0,213	57^o	0,839	0,545	1,540
13^o	0,225	0,974	0,231	58^o	0,848	0,530	1,600
14^o	0,242	0,970	0,249	59^o	0,857	0,515	1,664
15^o	0,259	0,966	0,268	60^o	0,866	0,500	1,732
16^o	0,276	0,961	0,287	61^o	0,875	0,485	1,804
17^o	0,292	0,956	0,306	62^o	0,883	0,469	1,881
18^o	0,309	0,951	0,325	63^o	0,891	0,454	1,963
19^o	0,326	0,946	0,344	64^o	0,899	0,438	2,050
20^o	0,342	0,940	0,364	65^o	0,906	0,423	2,145
21^o	0,358	0,934	0,384	66^o	0,914	0,407	2,246
22^o	0,375	0,927	0,404	67^o	0,921	0,391	2,356
23^o	0,391	0,921	0,424	68^o	0,927	0,375	2,475
24^o	0,407	0,914	0,445	69^o	0,934	0,358	2,605
25^o	0,423	0,906	0,466	70^o	0,940	0,342	2,747
26^o	0,438	0,899	0,488	71^o	0,946	0,326	2,904
27^o	0,454	0,891	0,510	72^o	0,951	0,309	3,078
28^o	0,469	0,883	0,532	73^o	0,956	0,292	3,271
29^o	0,485	0,875	0,554	74^o	0,961	0,276	3,487
30^o	0,500	0,866	0,577	75^o	0,966	0,259	3,732
31^o	0,515	0,857	0,601	76^o	0,970	0,242	4,011
32^o	0,530	0,848	0,625	77^o	0,974	0,225	4,331
33^o	0,545	0,839	0,649	78^o	0,978	0,208	4,705
34^o	0,559	0,829	0,675	79^o	0,982	0,191	5,145
35^o	0,574	0,819	0,700	80^o	0,985	0,174	5,671
36^o	0,588	0,809	0,727	81^o	0,988	0,156	6,314
37^o	0,602	0,799	0,754	82^o	0,990	0,139	7,115
38^o	0,616	0,788	0,781	83^o	0,993	0,122	8,144
39^o	0,629	0,777	0,810	84^o	0,995	0,105	9,514
40^o	0,643	0,766	0,839	85^o	0,996	0,087	11,430
41^o	0,656	0,755	0,869	86^o	0,998	0,070	14,301
42^o	0,669	0,743	0,900	87^o	0,999	0,052	19,081
43^o	0,682	0,731	0,933	88^o	0,999	0,035	28,636
44^o	0,695	0,719	0,966	89^o	1,000	0,017	57,290
45^o	0,707	0,707	1,000	90^o	1,000	0,000	

Fonte: Autor, 2014.

APÊNDICE B
Respostas do Questionário.

Respostas do Professor 1

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: É muito importante o estudo da trigonometria pois retrata um tema que é um alicerce para o estudo de muitos problemas do meio real.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim. Pois é forma mais natural para iniciar e desenvolver este tema.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Uma aula de campo para medir a largura do rio da cidade como meio avaliativo.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Operações básicas, proporção e teorema de Pitágoras.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim no caso do ensino público de alguns municípios percebemos que muitos alunos não conseguem nem as operações básicas e isso dificulta e muito o ensino desse assunto.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Um pouco de história da trigonometria e de sua necessidade. Fazendo a construção através de situação-problema envolvendo o universo do aluno. Foi a estratégia que mais conquistou os alunos do ensino básico.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Um pouco de história da trigonometria e de sua necessidade. Fazendo a

construção através de situação-problema envolvendo o universo do aluno.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Não conhecerem as operações básicas e as proporções.

Respostas do Professor 2

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: A trigonometria é um dos conteúdos mais importantes no ensino fundamental, pois permite calcular as medidas dos lados do triângulo retângulo e de qualquer triângulo, como também calcular distâncias inacessíveis.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim. Costumo começar a aula falando sobre a história e algumas aplicações para mostrar o aluno onde podemos usar o conteúdo.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Sempre passo listas de exercícios valendo ponto antes da prova e peço para que os alunos me entreguem, e ao fazer a correção das questões identifico os erros e comento em sala para que corrijam. Assim identifico as dificuldades de apreensão do conteúdo.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Proporção e semelhança de triângulos.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim. E muitos professores relatam das dificuldades que os alunos tem dos conteúdos considerados pré-requisitos para o estudo da trigonometria, além da interpretação de problemas.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Sempre começo o assunto com uma situação problema, mostrando para os

alunos a parte prática do conteúdo e posteriormente defino os conceitos e mostro alguns exemplos. A escolha da metodologia foi devido a experiência de sala ensinando trigonometria a mais de 7 anos.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Acho que não existe uma abordagem ideal, cabe o professor escolher a metodologia que melhor se adapte.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: A maior dificuldade é a falta de domínio dos conteúdos anteriores e a interpretação de problemas que eles não estão acostumados.

Respostas do Professor 3

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: É importante pois permite fazermos aplicações interessantes . Do ponto de vista lógico-formal ela aparece em geral , após um estudo de semelhança de triângulos. Algumas daquelas razões tem nomes especiais.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim. É sempre importante não dissociar os conteúdos do contexto histórico. As aplicações, sempre que possível procuro fazer. No caso em questão, o estudo de semelhança tem aplicações na Física. Alguns exemplos antecipam o estudo de alguns pontos da Óptica Geométrica, feita no ensino médio.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Sim e não. Essa é uma questão delicada pois não há um único modo de avaliar. Atualmente tenho poucas turmas e com isso faço um trabalho de acompanhamento praticamente individual principalmente nas monitorias. No tocante à assimilação uma coisa importante : o uso da memória. Muitos tem uma ideia completamente equivocada disso . Acham que é um simples "decorar" .Memorizar é importante mas não substitui a ação do treino nos exercícios.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?

Resposta: Como em geral é visto trigonometria no 9º ano então se o aluno dominasse razoavelmente bem os conteúdos anteriores isso seria suficiente para compreender trigonometria. A questão é bem mais geral. Compreender proporcionalidade e semelhança são fundamentais. No entanto, nos deparemos com uma série de situações em sala. Enquanto há alunos que conseguem resolver equações de forma mais ou menos satisfatória há aluno que tem dificuldade na tabuada e outros tem dificuldade na leitura, dando a impressão que sua alfabetização não foi completada.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim. Não é só trigonometria. O conceito de proporcionalidade e semelhança por exemplo.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Eu procuro seguir em geral a ordem do livro texto. É claro que no caso da ordem não ser a que eu prefiro eu procuro testar e depois avalio qual foi melhor. Mais importante do que a abordagem é se interessar verdadeiramente pelas dúvidas dos alunos e fazer com que eles façam perguntas. É claro que as perguntas deverão ser orientadas para não recair numa discussão sem objetivo. Normalmente já consigo prever muitas das perguntas que elas tem.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Não há. Quem diz é o professor e a turma.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Como já disse a dificuldade não reside na trigonometria do triângulo retângulo. É claro que há conteúdo quem aprecem mais dificuldades do que outros mas isso não é um privilégio da matemática. A meu ver a resolução de problemas de modo geral causa um desconforto seja qual for o conteúdo pois dependendo do modo como é feita a pergunta pode ter muitas soluções e discussões interessantes.

Respostas do Professor 4

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?

Resposta: No ensino fundamental no 9º ano especificamente os alunos já veem a trigonometria no triângulo retângulo. Com o nome de razões trigonométricas.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim, e acredito ser um recurso didático, para esclarecer algumas dúvidas sobre a trigonometria.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Resolução de problemas práticos em grupos e a prova escrita.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Eu poderia dizer nenhum. Mas quando você vai pesquisar a história da trigonometria descobre que tudo começou com Tales de Mileto, em seguida Pitágoras, Aristarco, Eratóstenes e outros. Então digamos que os alunos precisem saber um pouco do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim, geralmente a maioria dos alunos no ensino médio temem a trigonometria do ciclo trigonométrico e apresentam muita dificuldade na resolução de equações e inequações trigonométricas.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: A princípio peço aos alunos que pesquisem sobre a história da trigonometria, eles acabam descobrindo que a origem da trigonometria vem da astronomia e que matemáticos antigos tiveram ideias simples para resolver problemas que para a época eram bastante complicados e depois resolvo com eles problemas práticos em aulas de campo. Porque eu sempre acreditei que para se apreciar algo é preciso conhecê-lo bem.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: A descrita na resposta acima.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do

triângulo retângulo?
Resposta: Alguns alunos confundem-se com as razões seno, cosseno e tangente. Confundem-se com os cateto oposto e adjacente.

Respostas do Professor 5

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: Vejo como uma boa sugestão, até porque neste nível de ensino os alunos veem as relações trigonométricas no triângulo retângulo, então seria uma boa oportunidade de definir para eles as funções seno, cosseno e tangente no ciclo.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim, pois é de grande importância tanto a parte histórica quanto a aplicabilidade, principalmente quando podemos aplicar no cotidiano.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Sim, pois é inevitável não fazer tal uso.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Razão e proporção, ângulos e semelhança de triângulos.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Não.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Através de semelhança de triângulos, pois acredito ser a forma mas natural de tratar este tema.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Gosto da forma como é abordada atualmente, mas como dito no item 1, vejo como uma boa sugestão introduzir a definição das funções circulares.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: A falta de conhecimento dos temas pré-requisitos já citados no item 4, além da grande confusão que fazem na e da identificação dos catetos hipotenusa.

Respostas do Professor 6

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: É muito importante, pois faz com que os alunos percebam as várias aplicações da trigonometria e a partir desses novos conceitos eles identifiquem historicamente várias construções e obras através dela.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Com certeza. Acho que todo professor de Matemática antes de começar um conteúdo deve fazer um breve estudo histórico. Isso mostra que os conceitos e conteúdos matemáticos estudados em sala de aula tiveram sua passagem pela história da humanidade.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Sim. Citarei alguns exemplos: Construção de triângulos retângulos com régua e esquadro; Utilização de software matemático trigonométrico; Questionário de aplicações do Teorema de Pitágoras.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Geometria básica; Teorema de Pitágoras; Construção com régua e compasso.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Não.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Abordagem histórica e aplicações do teorema de Pitágoras. A metodologia escolhida como citado na questão 2 é a que atualmente vejo como forma de obter melhores resultados na aprendizagem dos alunos.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Fazendo uma introdução da parte histórica; Conceituando a mostrando exemplos; Aplicações de exercícios em grupo; Uso de software matemático trigonométrico; Aula de campo usando o teodolito como exemplo.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Resolução de equações do 1º e 2º graus; Distâncias e ângulos agudos ou obtusos; Construção com régua e esquadro.

Respostas do Professor 7

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: É muito importante que a trigonometria seja incluída no ensino fundamental, assim como outros conteúdos. O aluno deve ter um contato com a trigonometria, pelo menos um noção, no e ciclo trigonométrico em suas aplicações.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sempre que dá, por conta do tempo que não temos para um planejamento mais completo. É de suma importância começarmos nossas aulas com a História da Matemática, serve de incentivo e desperta a curiosidade dos alunos.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: A avaliação é contínua, sempre estamos avaliando os nossos alunos. É importante que fiquemos atentos com as perguntas dos alunos, às vezes passa despercebido.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Propriedades nos triângulos, relação entre os ângulos internos de um triângulo, classificação de ângulos e suas propriedades.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim, em alguns cursos de aperfeiçoamento. As alunos tem dificuldades de

associar as medidas dos ângulos em radianos, preferem em graus.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Falando em declive e aclive. Os alunos conseguem visualizar bem os problemas que envolvem esses conceitos.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Começar com a trigonometria no triângulo retângulo, dar os conceitos e aplicações e ver uma abordagem dos conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, uma abordagem bem simples e resumida.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Às vezes a falta de certos conteúdos, como os de geometria plana que é um pré-requisito.

Respostas do Professor 8

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: Acredito que a trigonometria seja conteúdo essencial tanto no ensino fundamental como no ensino médio. No caso específico do ensino fundamental ela já é trabalhada no 9º ano com as relação métrica no triângulo retângulo e com as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim, especialmente no ensino fundamental onde os alunos necessitam dessa maior interação com o conteúdo.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: A aprendizagem dos alunos é avaliada de acordo com os resultados obtidos em trabalhos e provas.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Noções sobre triângulos, Ângulos e Semelhança de triângulos.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Não.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Construindo uma sequência didática estruturada que vise facilitar o entendimento do conteúdo de forma mais prazerosa. Escolhi essa metodologia por ser das que eu já trabalhei, aquela que surtiu efeito mais positivo.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Seria aquela que você define os conceitos e constrói as fórmulas a partir desses conceitos.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: A falta de apropriação adequada de alguns conteúdos essenciais como a semelhança de triângulos e Ângulos.

Respostas do Professor 9

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: No ensino fundamental a partir do sexto ano os alunos estudam razão, proporção então seria interessante fazer essa conexão com a trigonometria desde cedo.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Sim.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Sim, analisando avaliação, questionamentos, debates...

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Conhecimento do triângulo retângulo, noção de ângulos e proporções.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Possivelmente, conceitos como razão, proporção, triângulo e ângulos.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Acho interessante fazer conexão entre os assuntos, então primeiro proporções, depois noções de geometria (ângulos, triângulos, semelhança de triângulos) e em seguida as razões básicas da trigonometria.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Fazer uma leve conexão entre razão, proporção e semelhança de triângulos, mostrando que tudo tá relacionado.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Noções geométricas, visão geométrica (espacial, imaginação), noções básicas sobre proporções.

Respostas do Professor 10

1) Qual a sua opinião sobre a inclusão da trigonometria no currículo do ensino fundamental?
Resposta: A trigonometria é um conteúdo importante no currículo da matemática fundamental, pois pode desenvolver várias habilidades no aluno e também serve de base para a trigonometria do ensino médio.

2) Em suas aulas você fala sobre a história da trigonometria e algumas das suas aplicações?
Resposta: Em minhas aulas sempre falo um pouco sobre a história da trigonometria, mostrando para os alunos muitas das suas aplicações.

3) Você usa alguma metodologia para avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades de assimilação do conteúdo?
Resposta: Faço perguntas para os alunos de acordo com a necessidade que aparece na questão, isto faz com que eles assimilem mais rápido e posteriormente realizo uma atividade valendo nota.

4) Em sua opinião, quais assuntos são pré-requisitos para o estudo da trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Operações com números decimais, proporção, semelhança de triângulos e a interpretação de problemas, cuja maioria dos alunos não estão acostumados.

5) Você já conversou com outro professor a respeito de dificuldades de assimilação de algum conceito de trigonometria por parte de algum aluno? Em caso afirmativo, que conceitos?
Resposta: Sim. Os conceitos trigonométricos em geral, principalmente, a identificação dos catetos oposto e adjacente que muitos alunos se confundem.

6) Como você aborda os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo? Por que você escolheu a metodologia que usa atualmente?
Resposta: Costumo sempre abordar da maneira que aparece no livro, resolvendo exemplos e exercícios em sala.

7) Em sua opinião, qual seria a abordagem ideal para o ensino da trigonometria no ensino fundamental?
Resposta: Até agora não descobri uma abordagem ideal para ensinar trigonometria, mas sigo a ordem que aparecem nos livros.

8) Em sua opinião qual a dificuldade dos alunos em aprender a trigonometria do triângulo retângulo?
Resposta: Acho que a maior dificuldade que eles tem, é a interpretação dos problemas e saber a relação trigonométrica que vai usar.