Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Coordenação de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em
Matemática em Rede Nacional

Modelagem como Alternativa Metodológica para o Ensino de Matemática.

Josemir do Carmo

Jataí-Go

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Josemir do Carmo				
E-mail:	josemir_carmo@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Municipal da Educação de Quirinóplois-GO				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior e		Sigla:	CAPES	
País: Brasil	UF:GO		CNPJ:	914.612.941.34	
Título:	Modelagem como Alternativa Metodológica para o Ensino de Matemática				
Palavras-chave:	Modelagem Matemática, Ensino e Aprendizagem de Matemática, Formação de Professores e Avaliação				
Título em outra língua:	Modeling as an Alternative Methodology for Teaching Mathematics				
Palavras-chave em outra língua:	Mathematical Modelling, Teaching and Learning of Mathematics, Teacher's Training, Evaluation.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	25/07/2014				
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT				
Orientador (a):	Prof. Me. Adriana Oliveira Dias				
E-mail:	Adriana_o_dias@yahoo.com.br				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Josemir do Carmo

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 25 / 07 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Josemir do Carmo

Modelagem como Alternativa Metodológica para o Ensino de Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico e Modelagem Matemática

Orientadora: Prof. Ms. Adriana de Oliveira Dias

Jataí-Go

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
BSCAJ/UFG

C287 Carmo, Josemir do.
Modelagem como Alternativa Metodológica para o Ensino de Matemática [manuscrito] / Josemir do Carmo. - 2014.
66 f.: il., figs, tabs.

Orientadora: Meª. Adriana Oliveira Dias.
Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras e tabelas.
1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Modelos Matemáticos. 3. Professores - Formação.

CDU: 510.67(817.3)

Josemir do Carmo

Modelagem como alternativa metodológica para o ensino de matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 25 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Presidente da Banca
Coordenação PROFMAT-CAJ/UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro-IFG/Goiânia

Profª. Drª. Luciana Aparecida Elias
Membro - Coordenação do PROFMAT-CAJ/UFG

Josemir do Carmo graduou-se em Ciências - Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - Campus Quirinópolis-Go, especializou-se em “Matemática e Estatística” pela FESURV – Universidade de Rio Verde, Goiás e em Psicopedagogia Institucional pela Faculdade Católica de Uberlândia Minas Gerais. É professor há dez anos, sendo que neste período atuou como professor do Ensino Fundamental, Médio e Técnico. Atua, hoje, também pela UNIUBE (Universidade de Uberaba) em cursos a distância: Engenharia Elétrica, Engenharia Civil e Engenharia de Produção na escola Paula Pasquali em Quirinópolis-Go. É concursado desde 2007 pela Secretaria de Educação do Município de Quirinópolis – GO.

Dedico este trabalho a Deus, à família, aos amigos e aos colegas de trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem, muitas vezes, recorri, invoquei e recebi os dons da coragem, da persistência, do ânimo e da força para realização deste curso;

Aos meus pais Deon e Neuza pelo apoio, estímulo e compreensão recebida durante a realização deste trabalho que, sem dúvida, se constituiram esteio de sustentação na empreitada;

Às minhas irmãs Fabiana, Keila e Michele pelos incentivos recebidos;

À minha eterna namorada, Rosilene, pelo apoio e tolerância;

Aos professores que aceitaram trabalhar neste mestrado e deram suas valiosas contribuições;

À minha orientadora, professora Adriana Oliveira Dias, pela caminhada na realização deste trabalho. Pela paciência, boa vontade, disponibilidade e pelas revisões que contribuíram de forma significativa;

À CAPES pelo suporte financeiro durante o período de estudo.

RESUMO

Neste trabalho buscou-se apresentar os múltiplos aspectos favorecidos pela Modelagem Matemática: uma alternativa metodológica para o ensino, principalmente, na Educação Básica, na tentativa de aproximar a realidade dos alunos à sala de aula e assim contribuir para motivação dos mesmos no estudo da matemática. Para isto são mostrados os encaminhamentos metodológicos e estabelecem-se algumas etapas para o trabalho com a modelagem em sala de aula.

Apresentam-se também alguns exemplos de problemas, construção e discussão de modelos matemáticos desenvolvidos em sala de aula para a Educação Básica. São elencadas as dificuldades de intervenção encontradas pelos professores para trabalharem com modelagem e discutem-se também os processos de formação dos professores em relação à Modelagem, advogando que estas devem se apoiar reflexivamente nas experiências com Modelagem no contexto da sala de aula. Dessa forma, são propostas algumas orientações para a avaliação em Modelagem *Matemática.*

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Ensino e Aprendizagem de Matemática, Formação de Professores, Avaliação.

Abstract

This paper aims to present multiple features favored by Mathematical Modelling: a methodological alternative to teaching, mainly, in Elementary Education, in an attempt to bring the reality of the students to the classroom and this way contribute to their motivation in the study of mathematics. For this study the methodological referrals are shown and some steps to work with Modelling in the classroom are established. It also presents some examples of problems, construction and discussion of mathematical models, developed in the classroom for Elementary Education. Difficulties of intervention found by teachers to deal with the modeling are listed and also the processes of teacher's training in relation to the Modelling are discussed, advocating that they must support themselves reflexively on the experiences with Modelling in the classroom context. This way some guidelines are proposed for an evaluation in Mathematical Modelling.

Keywords: Mathematical Modelling, Teaching and Learning of Mathematics, Teacher's Training, Evaluation.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

Com o mundo tecnologicamente avançado e em constantes transformações o acesso à informação tem sido cada vez mais fácil. O impacto das novas tecnologias tem provocado mudanças na educação, e as aulas tradicionais não têm mais despertado interesse nos alunos. Diante desta situação, é evidente que há necessidade de um trabalho efetivo quanto às perspectivas metodológicas da matemática que auxiliem o professor a tornar seus alunos agentes, sujeitos ativos, críticos e reflexivos no processo de ensino e no ato de aprender.

Busca-se encontrar novas metodologias que venham estimular o aprendiz da disciplina de matemática no sentido de despertar o interesse dos mesmos. Nesse caso, viabiliza-se pela Modelagem Matemática uma estratégia de ensino para apresentar ao aluno uma aula mais inovadora e estimulante, visto a matemática ter uma perspectiva de educação-movimento.

O trabalho feito com a modelagem matemática parte em geral de problemas do cotidiano dos alunos que os possibilitam ir, além de uma aprendizagem multidisciplinar para uma maior motivação. O educando lida, em seu dia a dia, com desafios e tem a necessidade de solucionar problemas que lhe são de interesse, o que facilita o processo de construção e assimilação de conceitos das mais variadas áreas. Com essa dinâmica, o aprendiz desenvolve ações de pesquisa para aplicá-las em soluções de problemas que lhes surgem ou são propostos. Esse processo é realizado em grupo e possibilita uma orientação mais organizada do trabalho pedagógico em sala de aula.

De acordo com Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 204):

> As atividades de modelagem matemática, na sala de aula, podem ser introduzidas gradativamente, de forma que o professor possa adquirir segurança e os estudantes habituem-se à nova realidade. Essa inserção pode ser em forma de projetos extensos (duração de semanas ou meses), ou sob forma de projetos que requerem uma ou duas aulas. O importante é que

> sirva como motivação para introduzir ‘novos’ conceitos ou para aplicar conceitos já estudados.

Neste contexto, acredita-se que o ensino da Matemática no ensino básico com a utilização da Modelagem como metodologia de ensino, pode vir a ser uma aliada do aluno, incentivando-o a participar, resolver e entender os fenômenos e os problemas que ocorrem na sociedade.

A ideia central em relação à Modelagem Matemática é apoiada no sentido de ajudar alunos a diminuírem o grau de dificuldades apresentados em sala de aula, e também como um agente facilitador de aprendizagem em Matemática. Podem-se auxiliar os alunos na aquisição de conhecimentos voltados para sua cidadania na prática de um cidadão crítico, reflexivo e atuante.

Segundo Bassanezi (2011, p. 177), a Modelagem Matemática pode ser utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, sendo um caminho para tornar a matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Nesse ambiente, o aluno poderá ter oportunidade de experimentar, modelar, testar sua capacidade de organização, analisar situações e tomar decisões.

O professor, com essa dinâmica, foge à tradicionalidade, isto é, exposição de conteúdo, fazer exercício de fixação e aplicar uma prova com algoritmos diretos, o que já não responde às necessidades dos estudantes na sociedade atual.

Uma forma de melhorar o ensino da Matemática é motivar o aluno a aprender de forma prazerosa e criativa e fazer com que o estudante desenvolva a sua capacidade de reflexão.

Conforme Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 51):

> Os alunos necessitam de aprender um instrumental matemático relevante, mas entendemos que essa aprendizagem vai se dar melhor, e isso é apenas uma suposição, se os alunos encontrarem um significado para aquilo que eles estão aprendendo, ou seja, se aquilo que está sendo questionado na sala de aula faz sentido para eles enquanto pessoas que produzem uma prática social. Um aprendizado matemático crítico – e comprometido!

A Modelagem Matemática pode ser uma estratégia de ensino-aprendizagem, uma vez que com sua utilização é possível desenvolver a compreensão de situações-problemas, bem como a percepção da Matemática em situações cotidianas, dado que a maioria dos estudantes não é capaz de relacionar a importância da Matemática e questionam sua aplicabilidade em situações do dia a dia.

O objetivo deste trabalho é, pois, investigar características de modo que os alunos do ensino básico possam perceber a matemática em ambientes de aprendizagem com a utilização da Modelagem Matemática. Conscientizar mediante pesquisa bibliográfica as perspectivas que fundamentam a utilização desta metodologia no processo de ensino-básico: motivação, interação, interpretação e facilitação da aprendizagem.

Modelagem Matemática é, acima de tudo, uma perspectiva a ser explorada de atitude livre e espontânea. Na Modelagem Matemática dois pontos são fundamentais: aliar o tema a ser escolhido com a realidade do educando e aproveitar as experiências extraclasses aliadas à experiência do professor em sala de aula.

A literatura traz, além dos benefícios da Modelagem, a motivação dos alunos e do próprio professor, a facilitação da aprendizagem de modo que o conteúdo matemático passa a ter significação, deixando de ser abstrato e passa a ser concreto. O ensino adquire caráter multidisciplinar, desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo em geral, desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e capacidade de enxergar a matemática no cotidiano.

O foco da Modelagem Matemática é não apenas ensinar matemática, mas oferecer subsídios para que os alunos atuem e compreendam a sociedade e, ao mesmo tempo, desenvolvam habilidades matemáticas e saibam argumentar e interpretar modelos num sentido amplo.

Nesse aspecto, a Modelagem Matemática é muito utilizada para solucionar problemas surgidos na agricultura, na área da saúde, no meio ambiente, na indústria, no comércio e em tantos outros setores da sociedade. A criação ou modificação de modelos matemáticos feitos por profissionais especializados tentam compreender, descrever e solucionar os problemas apresentados na sociedade. Essa relação pode ser contemplada no ambiente escolar.

Conforme Biembengut e Hein (2013, p. 23), ao se trabalhar com Modelagem Matemática, na sala de aula, o professor deve conhecer o seu papel quanto às estratégias utilizadas, pois inserido nesse contexto não se pode trabalhar conteúdos de forma isolada. O docente deve, também, conhecer a Matemática e associá-la a um contexto social. Assim, esta metodologia requer do professor estudo e disponibilidade para aprender e aplicar a Matemática.

Este trabalho divide-se em três capítulos: o primeiro comenta sobre os pioneiros em usar modelagem matemática e define o conceito de modelagem como alternativa de ensino-aprendizagem bem como suas etapas.

O segundo mostra-se como a modelagem pode ser útil na resolução de problemas na sociedade. Apresentam-se os procedimentos metodológicos que o educador deve utilizar, bem como a importância do conhecimento desta metodologia no período de formação dos mesmos. Afirma-se também que a avaliação deve ser processual e contínua, sobretudo ter sempre o caráter de reorientação do método que estimula a criatividade e caracteriza a modelagem matemática.

O terceiro sugere algumas atividades como modelos de modelagem matemática para que possam ser adaptadas às práticas de ensino pelos professores que queiram trabalhar com modelagem matemática.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Muitos autores argumentam sobre a plausibilidade do uso de Modelagem Matemática no ensino, como alternativa ao chamado “método tradicional” (Bassenezi, 1990, 1994; Biembengut, 1990, 1999; Blum & Niss, 1991; Borba, Meneghetti & Hermini, 1997, 1999). O movimento de Modelagem Matemática, tanto em âmbito nacional como internacional, tomou corpo nos últimos trinta anos, contando com a importante contribuição de matemáticos aplicados que migraram para a área da Educação Matemática (Blum & Niss, 1991; Fiorentini, 1996).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCNs (1998, p. 59):

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Os parâmetros destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula.

O uso de Modelagem Matemática no Brasil começou a ser trabalhada nos anos 80 na UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), por um grupo de professores, da área de Biomatemática, coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi - IMECC. Em seus primórdios, os estudos buscavam explicações para os modelos de crescimento cancerígenos. A experiência com a modelagem foi realizada pelo professor Rodney, com turma regular de Engenharia de Alimentos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que possuía programa definido. A experiência foi muito satisfatória.

Em se tratando de educação brasileira, a Modelagem Matemática iniciou-se com os cursos de especialização para professores, no ano de 1983, na (FAFIG), Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava, hoje, atual (UNICENTRO), Universidade Estadual do Centro – Oeste, com o início do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UNESP – Campus de Rio Claro. A Modelagem ganhou adeptos, pois a grande preocupação era em encontrar formas alternativas para o ensino de Matemática que trabalhassem ou que tivessem a preocupação de partir de situações vivenciadas pelo aluno do ensino de 1º e 2º graus, atualmente, Ensino Fundamental e Médio.

Nesse contexto a Modelagem Matemática surge como uma metodologia que pode auxiliar no ensino e aprendizagem dos alunos de todo o Ensino Básico. A maneira como essa metodologia é trabalhada permite ao professor estabelecer uma relação da matemática com o cotidiano do aluno. Esse fato torna o estudo mais significativo e motivador, além de trazer elementos que relacionam outras áreas do conhecimento. Permite-se assim que o aluno tenha uma visão ampla do problema em seus vários aspectos, desenvolvendo no mesmo um senso reflexivo-crítico o que exige dele uma postura atuante na sociedade.

Para Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 21):

> Modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ ou produzidos e integrados.

No Brasil, Modelagem está ligada à noção de trabalho de projeto. Trata-se em dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para investigação por meio da matemática, contando com o acompanhamento do educador. (Bassenezi, 1990, 1994; Biembengut, 1990, 1999; Borba, Meneghetti & Hermini, 1997, 1999).

Para se iniciar um trabalho baseado na modelagem, precisa-se definir o tema da situação-problema que será abordado. Uma vez escolhida, o próximo passo é extrair as informações que o problema traz. Se não há uma ideia central, pode-se iniciar com a contagem, mensuração e a partir daí construir tabelas de dados ou gráficos para se ter uma melhor visualização do problema. A resolução de um problema em geral, quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Segundo Biembengut e Hein (2003, p. 12), um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático.

Na ciência, a noção de modelo é fundamental, pois em relação à matemática, por exemplo, dada sua arquitetura, é possível a elaboração de modelos matemáticos, dando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno em estudo.

Um modelo pode ser formulado com a utilização de expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, entre outros.

Quando se propõe um modelo, ele é, muitas vezes, formulado a partir de aproximações que nem sempre condizem com a realidade. Ainda assim, um modelo matemático retrata, mesmo que de maneira simplificada, o aspecto da situação pesquisada.

Biembengut e Hein (2003, p. 12), afirmam:

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para elaborar um modelo, além de conhecimentos de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

O processo de modelagem em geral não é algo fácil de ser assimilado, não há uma fórmula pronta de como conceber a modelagem de um problema. Cada situação traz elementos diferenciados, assim só se aprende a modelar a partir da prática de construção de vários modelos.

Para Biembengut (2013, p. 11), a ideia de modelagem suscita a imagem de escultor que trabalha com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material: argila, técnica, intuição e criatividade faz seu modelo que, na certa, representa alguma coisa, seja real ou imaginária.

A complexidade da elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático de quem o modela. Pode-se ir de uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas o que pode tornar o modelo delimitado a esses conceitos.

Assim, quanto maior o conhecimento matemático, maiores as chances de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada.

A Modelagem Matemática é vista como uma arte, pois ao se formular, resolver e elaborar expressões, a ideia é que as mesmas valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias.

Biembengut e Hein (2005, p. 13), argumentam que, genericamente, pode-se dizer que a matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.

1.1 Escolhas dos temas

Para desenvolver o conteúdo programático de um período letivo (semana, bimestre, semestre) utiliza-se de um tema a ser transformado em um modelo matemático. Este deve ser abrangente o suficiente para desenvolver o conteúdo programático e, ao mesmo tempo, ser interessante para não abalar o estado motivacional dos alunos.

Segundo Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 49):

> A escolha de um tema para ser desenvolvido em Modelagem Matemática parte do interesse do grupo ou dos grupos de estudantes envolvidos. Esses temas são inicialmente colocados pelos estudantes, segundo o interesse que manifestam, pela curiosidade ou mesmo para a resolução de uma situação-problema.

Faz-se dessa forma um levantamento de possíveis situações de estudo que devem ser, preferencialmente, abrangentes para propiciar questionamentos em várias direções. Os temas podem estar incluídos em várias atividades: indústria, comércio, agricultura, pecuária, saúde, brincadeiras infantis, jogos diversos, temas atuais como inflação, caderneta de poupança, corrupção, terremotos, desabamentos, habitação e outros.

Se o tema escolhido, por exemplo, for vinho pode-se pensar em problemas relativos à vinicultura, fabricação, distribuição, efeitos do álcool no organismo humano, construção de tonéis, entre outros. Se for abelha, poderão surgir problemas de dinâmica populacional, dispersão de colmeias, forma dos alvéolos, comercialização do mel, comunicação dos insetos, interação com plantações e outros.

Quando o tema escolhido for desconhecido ou “novo”, o professor deve, antes de tudo, procurar temas correlacionados e buscar uma analogia entre os fenômenos ou, pelo menos, entre as tendências de seus valores.

O professor pode escolher o tema ou propor aos alunos que o escolham. A escolha pelos alunos tem vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que os alunos se sentem participantes do processo e, dessa forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva. Em contrapartida as desvantagens podem surgir se o tema não for adequado para desenvolver o programa ou, ainda, muito complexo, exigindo do professor um tempo de que não dispõe para aprender e para ensinar.

Seja qual for a forma adotada, cabe ao professor inteirar-se do tema escolhido. Este deve estar em sintonia com o conhecimento e a expectativa dos alunos e preparar, previamente, a condução do processo de forma que desenvolva no mínimo o conteúdo programático. É claro que a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará sobre a execução de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia e mais. É possível no início de um trabalho com modelagem, o professor ter preferência pelo trabalho com um único tema. A razão determinante dessa escolha é a insegurança de trabalhar vários temas.

De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 50):

> Considerando o cenário externo, também temos de adotar uma estratégica pedagógica para trabalhar com os diversos temas que podem aparecer dentro de uma mesma sala de aula. Às vezes, aparecem três, quatro ou cinco temas diferentes numa mesma sala. Para resolver esse impasse, adota-se o consenso entre os próprios alunos. Não devemos, nesses casos, fazer uma votação, pois corre o risco de alienar aquele grupo cujo tema acabou, ‘perdendo’ no voto; e os alunos desse grupo podem se desestimular no momento de fazer, efetivamente, o trabalho. Esse momento exige uma reflexão sobre os contextos e os problemas do ambiente social, cultural e educacional que os alunos trazem para o ambiente escolar.

Com a experiência e a segurança adquirida, é possível o professor trabalhar quatro ou cinco temas. Tanto no caso em que haja apenas um tema escolhido como quando os temas são diversificados, os alunos devem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos do tema comum ao grupo. Assim, o levantamento de problemas deve ser feito em grupos já definidos. O professor não deve propor diretamente os problemas, mas deve atuar como monitor em cada grupo, sugerindo situações que devem ser incorporadas pelos alunos.

O fato de o professor aceitar diversos temas para o trabalho em classe, é muito positivo por várias razões: por um lado, possibilita um maior interesse, dado a diversidade de temas. Por outro lado, manifesta-se a flexibilidade do processo, dados os diferentes caminhos que os vários grupos tomam. Além disso, possibilita ao professor colocar sua experiência, abertura e disponibilidade. Isso tudo favorece o estreitamento do vínculo professor/aluno que se consolidam durante as atividades.

O trabalho com a modelagem nas escolas tem-se desenvolvido em pequenos grupos de três a quatro elementos. Este é o número ideal para que se realize a interação entre os seus membros. Outro fato é que o trabalho em grupo aprofunda a relação afetiva com o professor. Essa relação é fundamental em qualquer empreendimento. Na escola, ele toma uma dimensão maior, pois possibilita um clima de confiança e respeito mútuo. A experiência tem mostrado que grupos de seis a oito elementos se tornam improdutivos, e aquilo que poderia se constituir em "ganho", acaba se tornando "perda".

O professor principiante nesta prática deverá tomar alguns cuidados. É aconselhável, de início, trabalhar com apenas um tema de cada vez. Deve-se em conjunto com a classe escolher o tema de maior relevância e, em seguida, desenvolver os demais temas, procurando sempre aquele que seja mais significativo para os alunos.

1.2 Coletas de dados (inteiração)

Uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas: entrevista com um especialista do assunto, por meio de dados experimentais obtidos com especialistas da área, pesquisa bibliográfica, utilização de dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas, pesquisas na internet e por meio de experiências de campos programadas pelos próprios alunos.

De acordo com Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 49):

> O conhecimento sobre o tema e a busca de informações no local onde está o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituírem em uma das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem, são uma das etapas importantes na formação de um estudante mais crítico, mais atento. Entendemos, pois, que para conhecer de forma mais ampla, mais detalhada

> algum objeto ou alguma situação, é necessário se organizar, saber o que e como enunciar questões que produzam respostas às questões.

Quando se efetua uma coleta de dados sobre o tema escolhido, muitas vezes, o resultado obtido é bastante inesperado e interessante e acaba-se por coletar ou selecionar informações de outras situações que não pertencem ao tema inicial. Em termos de ensino-aprendizagem de matemática esta situação é bastante favorável, pois proporciona direcionamentos alternativos para desenvolver a aprendizagem de algum conteúdo.

Para Biembengut e Henin (2013, p. 24), esta fase da modelagem é a interação. Uma vez delineada a situação que se pretende estudar, deve ser feito um estudo para reconhecimento da situação-problema e familiarização. A situação-problema torna-se cada vez mais clara à medida que se vai interagindo com os dados.

Dessa forma, a inteiração conduz à formulação do problema e à definição de metas para sua resolução. Essa formulação é orientada pela falta de compreensão, de entendimento da situação. Todavia, ao mesmo tempo, essa formulação também requer que alguns aspectos já sejam conhecidos e é, justamente, esta a função da inteiração: tornar alguns aspectos conhecidos.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012 p. 15):

> O termo interação remete ao ato de ‘inteirar-se’, ‘informar-se sobre’, ‘tornar-se ciente de’. Em termos da atividade de Modelagem Matemática, essa etapa representa um primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos.

A escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito constituem, assim, o foco central nessa fase. Ainda que seja uma etapa inicial, a inteiração pode-se estender durante o desenvolvimento da atividade, ao considerar que a necessidade de novas informações pode surgir no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Os dados coletados devem ser organizados em tabelas que podem favorecer uma análise mais eficiente e, em seguida, serem utilizadas para a construção dos gráficos ou curvas de tendências.

A contribuição de um matemático nesta fase, muitas vezes, pode ser fundamental e direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos. A adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade dos dados obtidos. Novas técnicas de pesquisa empírica exercem pressão sobre foco de interesse da teoria e permitem uma melhor seleção das variáveis envolvidas no fenômeno.

1.3 Análise de dados e formulação de modelos (matematização)

Buscar um modelo matemático que expressa a relação entre as variáveis é, efetivamente, o que se convencionou chamar de modelagem matemática. Em geral esses modelos são dados pela solução de sistemas variacionais. Dessa forma, é sempre conveniente entender como é a variação das variáveis envolvidas no fenômeno analisado.

Para Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 16):

> A situação-problema identificada e estruturada na fase de inteiração, de modo geral, apresenta-se em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática, e assim gera-se a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). Essa linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido. A busca e elaboração de uma representação matemática são medidas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características.

Esta fase da modelagem matemática pode ser denominada de "matematização", considerando os processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e de simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012 p. 15):

> Esta etapa, a mais complexa e 'desafiante', em geral subdivide-se em formulação do problema e resolução. É aqui que se dá a 'tradução' da situação-problema para a linguagem matemática. Intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos indispensáveis neste processo.

Nessa fase o professor deve selecionar e formular perguntas a fim de levar os alunos a proporem respostas. As respostas certamente apontarão caminhos para se chegarem às metas propostas. Criar um clima de liberdade e estimular a participação, a descontração e a criatividade individual permitirá obter resultados satisfatórios em relação ao aprendizado de matemática.

Para fazer a abstração dos dados coletados deve-se estabelecer uma seleção das variáveis, ou seja, identificar as informações relevantes e eliminar as não relevantes para decidir quais os fatores a serem perseguidos. É necessário também formular hipóteses por meio das observações dos fatos, fazer comparações com outros estudos, deduções lógicas, analogia de casos singulares e simplificações de informações para se chegar a um modelo matemático.

Um modelo matemático tem por finalidade descrever situações, permitir análises dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre a situação-problema a ser investigada e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo. Assim o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente.

De acordo com Bassanezi (2011, p. 27-30), a etapa de matematização consiste em abstração que é o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos. O objetivo principal deste momento do processo de modelar é chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, equações algébricas, gráficos, representações, programa computacional que levem à dedução de uma solução.

1.4 Validação (modelo)

A questão formulada que permite a resolução da situação-problema e, de outras semelhantes, pode ser considerada um modelo matemático. Para avaliar o modelo matemático quanto à sua validade e sua importância devem-se analisar os resultados obtidos, o que se denomina validação. A validação de um modelo é um processo de aceitação ou rejeição do mesmo. E esta análise é feita por meio de vários fatores, sendo importante o confronto dos dados reais com os valores do modelo. Um bom modelo deve servir para explicar os resultados e tem capacidade de previsão de novas situações.

Segundo Bassanezi (2011, p. 27-30):

> A formulação inicial de um modelo simples é fundamental para se entender melhor o problema e diagnosticar quais características do fenômeno devem ser consideradas no modelo. Entretanto, nem sempre um primeiro enfoque do problema ou um modelo simplista conduz a bons resultados sendo necessário sua reformulação que, geralmente, é obtida com modificações nas variáveis ou nas leis de formação previamente estabelecidas. Ainda, no processo de modelagem, a escolha do instrumental matemático é fundamental principalmente em se tratando de promover o conhecimento matemático.

Para o estudo no ensino básico, um modelo simples, mesmo que não reproduza perfeitamente os dados experimentais, pode ser útil para o ensino-aprendizagem. Um modelo matemático é bom quando cumpre algum objetivo e quando o usuário o considera para este fim. O uso de gráficos das soluções e a construção de tabelas de dados modelados em confronto com os dados experimentais podem facilitar a validação de um modelo matemático ou sugerir modificações nos mesmos.

De acordo com Bassanezi (2011, p. 30), validação é o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos juntamente com a sua hipótese que lhes são atribuídas devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação. Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originam. Um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas.

Um padrão nunca é definitivo, pois é sempre uma aproximação da realidade. A aceitação ou não de um modelo depende mais de seus objetivos e interesses. Uma boa fórmula matemática é aquela que atende as necessidades do usuário que executou a modelagem, e possui a qualidade de ser simples e expressar razoavelmente a situação analisada. Se uma expressão matemática é insuficiente para certo problema, é preciso tentar novos caminhos e melhorar.

Para Primon (2008, p. 07), alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando estes são obtidos pelas simplificações e considerações idealizadas da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas. Nenhum padrão deve ser considerado definitivo, pode sempre ser melhorado e um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novas expressões matemáticas. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

Uma boa fórmula matemática permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, como participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. A aplicabilidade de um modelo depende do contexto em que ele é desenvolvido. Assim um padrão pode ser bom para o engenheiro e não para o matemático e vice-versa. Um modelo parcial pode atender às necessidades imediatas de um pesquisador mesmo que não atenda todas as variáveis que influenciam a diversidade do fenômeno estudado.

Assim a modelagem aproxima teoria e prática, motiva o profissional a buscar o entendimento da realidade que o rodeia e adquirir meios para agir sobre ela e transformá-la. A modelagem possui multidisciplinaridade e permite o envolvimento de vários campos como a Física, Química e Biologia.

No ensino básico, os professores de matemática podem usar a modelagem como metodologia de ensino, em que o aluno tem a oportunidade de criar o próprio conhecimento. O professor de matemática para ensinar bem precisa buscar alternativas de ensino-aprendizagem que facilitem a compreensão e utilização dos conhecimentos obtidos.

O desafio em modelagem matemática é encontrar os modelos simples que representam as principais características do fenômeno em estudo. A modelagem matemática, dessa forma, ajuda a evitar ou reduzir a necessidade de custos altos em experimentos ou, até mesmo, simular experimentos impossíveis de serem realizados na prática.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM

A Modelagem Matemática estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos. É empregada em diversos campos, como a física, química, biologia, economia e engenharias, isto é, a Modelagem Matemática consiste em descrever um fenômeno por meio da utilização de conhecimentos matemáticos. A Modelagem pode ser entendida como uma oportunidade para os alunos sugerirem situações cujos procedimentos matemáticos não estejam pré-fixados como conteúdos. Ações estas que abrem possibilidades de direcionamento do estudo em sala de aula.

Segundo Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 123):

> A modelagem matemática é uma das atividades científicas e pedagógicas que favorecem, revelando seu caráter interdisciplinar, o diálogo entre a matemática e outras áreas do conhecimento, e podem estimular um ensino mais significativo da própria matemática pela sua visão crítica.

Nesse tocante, o conteúdo a ser trabalhado, ou a escolha dele, dependerá muito das instigações da própria aula, bem como das várias ideias e possibilidades advindas durante o processo de ensino-aprendizagem. O conteúdo a ser ministrado em sala de aula, ainda não está pré-estabelecido, mas ele será apresentado por meio das várias ideias discutidas durante a aula. Esta natureza “aberta” que se sustenta para as atividades de Modelagem impossibilita garantir a presença de um modelo matemático propriamente dito na abordagem dos alunos. Somente a análise dos caminhos seguidos na resolução pode falar sobre sua ocorrência.

O objetivo desse tipo de trabalho é estabelecer condições para que os alunos construam ou aprendam a construir padrões matemáticos, reforçando o processo de aprendizado e a utilização de seus conhecimentos. Não obstante, os próprios alunos escolhem, tanto o tema, como a direção que ganhará o estudo na introdução desse mesmo tema. Cabe ao professor a promoção da ideia de autonomia de aprendizagem do aluno, assim ele passa a ser um facilitador e não mais mero espectador do processo de ensino-aprendizagem. Espera-se com isso, incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, lidar com temas de interesse na aplicabilidade do conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 30):

> A proposta de modelagem na Educação Matemática é que a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesse dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos de matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimento bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento.

Destarte, a modelagem estimula os alunos a investigarem situações de outras áreas que não sejam a matemática. Abre-se se assim um espaço de aprendizagem que os alunos são convidados a indagar e/ou investigar por meio de estudos matemáticos, situações oriundas de outras áreas que trabalham a aplicabilidade real. O método de aprendizagem de Modelagem baseado na indagação e investigação diferencia-se da forma que processa o ensino tradicional, visto que este destaca o professor como centralizador do aprendizado. Assim o papel deste método de ensino é o de estabelecer vínculos com as várias outras áreas de ensino e o cotidiano.

Existe uma relativa distância entre a maneira de o ensino tradicional enfocar problemas de outras áreas e a modelagem. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 27): "Mover-se de um paradigma em que exposições do professor seguem-se de exercícios ou do enfrentamento de situações, de modo geral, idealizadas, representa um desafio para professores e alunos". Situação esta que envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente/discente e adota outros campos do conhecimento. Do ponto de vista curricular, não é de se esperar que esta mudança ocorra instantaneamente, mas sim, de forma gradual e contínua.

De acordo com os PCNs (1998, p. 40):

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas

> sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.

Há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a necessidade do conhecimento matemático e de habilidades em utilizá-lo. É preciso ir além das simples resoluções de questões, muitas vezes, sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria quanto da natureza prática do problema a ser estudado.

O uso da modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse pela utilização de tópicos matemáticos que ele ainda desconhece e, ao mesmo tempo, fomentar no aluno o ensejo pela arte de modelar. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações/problemas por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e senso crítico.

A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na construção de seu próprio modelo. As atividades, assim, evidenciam aspectos realísticos, contextuais, sociocríticos, epistemológicos, cognitivos e educacionais, e pode valer como método de ensino-aprendizagem da matemática em qualquer nível escolar, desde as séries iniciais até um curso de pós-graduação. Os objetivos são para aproximar outra área qualquer do conhecimento e a matemática. Enfatiza-se a importância desta para a formação do aluno ao despertar interesse pela própria matemática e sua aplicabilidade. Procedimentos estes que podem melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos, e desenvolver a habilidade para a resolução de problemas e estimular a criatividade.

Nesse sentido, o desenvolvimento da modelagem nas aulas de matemática, especialmente na educação básica, pode favorecer a ativação de aspectos motivacionais e relações com a vida fora da escola ou com aplicações da matemática. Com a realização de trabalhos cooperativos/grupos, desenvolve-se o conhecimento crítico e reflexivo, o que leva ao uso de diferentes registros de representação e uma aprendizagem mais significativa.

Uma proposta de modelagem na educação, é que a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesse dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos matemáticos na escola. Desse modo, contribui para a construção de conhecimentos e, também serve como mostra de aplicações do conteúdo matemático nas diversas áreas do conhecimento.

Para a implementação do projeto de Modelagem Matemática, sugere-se que o professor faça, inicialmente, um diagnóstico da formação dos alunos, levando em consideração sua realidade socioeconômica, o tempo disponível para a realização de trabalhos extraclasse e o conhecimento prévio que possuem. Com base nesse diagnóstico, planeja-se implementar a modelação, isto é, desenvolver o conteúdo programático, orientar os alunos na realização de seus modelos matemáticos e como avaliar o processo.

No que se refere ao tempo de duração para trabalhar uma atividade de Modelagem Matemática deve-se ter a percepção da complexidade do projeto a ser desenvolvido, como afirmam Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 26):

> Reconhecendo a multiplicidade de encaminhamentos que podem se configurar para a incorporação de atividades de Modelagem de Matemática nas aulas, é possível também considerar que não há uma definição, a *priori*, sobre a duração de uma atividade de modelagem. Neste sentido, projetos prolongados que podem se estender por semanas, situações que podem ser investigadas em aulas, ou mesmo situações problemas cuja solução é encontrada em uma única aula podem se constituir como atividades de Modelagem Matemática. A caracterização da atividade reside muito mais nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos alunos do que em delimitações de tempo e de espaço de realização da atividade.

É fundamental para que haja êxito no desenvolvimento do projeto que o professor oriente e acompanhe os alunos durante o decorrer do trabalho. Traça-se um planejamento sobre a inteiração com o assunto e a forma na qual o trabalho será encaminhado. Para isso, o educador deve considerar o número de aulas condizentes com a disciplina e planejar um número total de horas-aulas destinadas, somente, para a orientação do trabalho, bem como, em quais dias do período letivo o processo será realizado. Ao se ter enfoque e tempo adequados, o professor permitirá ao aluno adquirir conhecimento matemático, e como aplicar esse conhecimento no trabalho. Desenvolve-se assim no discente certa habilidade para traçar modelos a partir do que vem sendo trabalhado em sala.

A inserção da Modelagem Matemática no currículo escolar, principalmente pelo professor iniciante, deve acontecer paulatinamente. O educador pode desenvolver atividades de modelagem extracurricular, e na medida em que se sentir confortável passa a combinar esse modelo de ensino no decurso das aulas. Devem-se invocar, frequentemente, aspectos de aplicação dos conteúdos. Faz-se aí uso da modelagem como forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. Neste contexto, dá-se a integração do projeto pleno no currículo, tomando as situações-problemas como ponto de partida; e a matemática, a ferramenta necessária para resolvê-los.

2.1 O papel do professor ao trabalhar com Modelagem Matemática

O professor ao trabalhar com Modelagem Matemática na sala de aula deve conhecer seu papel quanto às estratégias utilizadas, bem como o sequenciamento e ritmo das práticas pedagógicas. Perceber os momentos em que ele deve intervir, "quais" perguntas fazer aos alunos, e "como" fazê-las na apresentação do tema e informações coletadas. O profissional deve estabelecer meios para estimular a participação dos alunos, retomar conteúdos matemáticos anteriormente trabalhados, e também, abordar novos conteúdos e lidar com diferentes respostas dos alunos e com situações inesperadas.

De acordo com Oliveira e Barbosa (2011, p. 267-268):

> A presença da modelagem na escola representa desafios para os professores, pois as aulas de Matemática apresentam uma dinâmica diferente, já que acontecerão diversos caminhos propostos pelos alunos para a resolução do problema. Com isso, não há previsibilidade do que ocorrerá nas aulas na utilização deste ambiente de aprendizagem movendo os professores para uma zona de risco.

Inserido neste ambiente o professor não deve trabalhar conteúdos de forma isolada. Ele precisa, também, conhecer a matemática e correlacioná-la ao meio social. Esta estratégia exige dele, estudo e disponibilidade para aprender e trabalhar a matemática. O trabalho do docente conforme afirma Brousseau (1936, p.49): "consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como uma resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor." O papel do professor, dessa forma, no ambiente de modelagem deve ser de mediador, sem centralizar o processo de ensino e aprendizagem em si mesmo.

Para Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 177):

> Com a experiência de Modelagem, o professor passa a ver a matemática, aprendizagem e o ensino de outra maneira, ressignificando e refazendo seus saberes, adotando novos referenciais que o leva a investir em novas formas de se relacionar com o conhecimento e com o aluno em sala de aula.

O professor deve proporcionar um clima de liberdade para seus alunos no trabalho com a Modelagem Matemática. Seu papel, no método de modelagem, assume características diferentes da postura tradicional de ensino. Nesta proposta, o educador tem o papel de mediador da relação ensino-aprendizagem, isto é, de orientador do trabalho, como sanar as dúvidas, e inserir novos pontos de vista com relação ao problema tratado e outros aspectos que permitam aos alunos pensar sobre o assunto.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 24):

> No que se refere ao papel do professor em aulas mediadas por atividades de Modelagem Matemática, a questão de ordem deve ser: professor é orientador! Essa indicação tem uma dupla interpretação: a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que 'vale tudo'; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar não é despir-se da autoridade de professor.

O docente reconhece que o ambiente de modelagem requer outras formas de interação entre ele e os alunos, de maneira que viabilize a participação ativa destes, nas atividades propostas, o que altera a classificação e o controle em sua prática pedagógica.

O contato mais próximo com os discentes por meio dos grupos favorece um vínculo mais estreito entre educador e educandos e, também possibilita, em muitos aspectos, as relações entre os próprios alunos. Segundo Biembengut e Hein (2013, p. 21): "manter um clima de liberdade, estimulando a participação, a descontração e a criatividade individual, permitirá obter resultados satisfatórios em relação ao aprendizado em matemática".

Vezes e vezes, o professor poderá sentir-se "impotente" ante algumas situações que ocorrem com o trabalho, envolvendo a modelagem matemática. É esse o momento, em que ele deverá buscar auxílio de outras pessoas, aquelas que o auxiliarão no tocante a superar a dificuldade encontrada. Um exemplo dessa situação ocorre quando, no trabalho, se propõe determinar os custos de uma casa a partir da maquete.

O professor não tem a necessidade de saber tudo a respeito de construção civil, assim, a fala de um técnico, ou de um engenheiro, é de suma importância. Muitas vezes, pais de alunos podem entender de construção por serem pedreiros, e/ou mestres de obra, ou terem uma atividade de alguma forma ligada ao assunto e prestar as informações necessárias para a sequência do projeto. Poderão, portanto, ser resolvidas questões como: qual a quantidade de pedra brita, areia e cimento, necessários para preparar um metro cúbico de concreto? Esta pergunta poderia ser feita, caso o professor não tivesse conhecimento a uma pessoa da área para que fosse respondida.

No trabalho com a modelagem, às vezes, há uma necessidade de o professor recorrer aos pais de alunos para a resolução de algumas questões referentes ao projeto. Considera-se esse momento extremamente positivo. Por um lado, os pais podem conhecer e se inteirarem daquilo que é realizado na escola, por outro, é também uma forma de participação mais efetiva destes nos assuntos da escola. Deixam de ser membros passivos, para participarem não apenas de reuniões, as que tratam de arrecadações para a escola ou para entrega de boletins de seus filhos ou, ainda, na cientificação de alguma irregularidade para participarem ativamente do processo de aprendizagem de seus filhos. Nos cursos noturnos, como EJA (Educação de Jovens e Adultos), bem como o ensino regular, o professor deve incentivar a participação dos alunos em trabalhos que envolvam a modelagem, pois a maioria dos alunos já tem alguma atividade, seja no comércio, indústria, na construção ou na agricultura.

Ao trabalhar com os temas, pode acontecer que a solução de um problema proposto necessite de conteúdos não previstos para aquela série. Neste caso, o professor deve favorecer o trabalho com o conteúdo para não gerar o desinteresse do grupo. Em algumas oportunidades, o conhecimento deverá ser construído de modo a resolver dentro do nível e compreensão dos alunos os problemas propostos.

Cabe, ainda, ao professor, fazer a interação entre os problemas estudados, seja a partir de um único tema, seja a partir de vários temas e o objeto de estudo. Pode acontecer que o problema de um grupo não desperte o interesse do outro. Uma exposição, ou apresentação final do trabalho de cada um dos grupos pode favorecer a disseminação de todos os assuntos tratados e pode enfatizar a um problema levantado por um grupo qualquer que, naquele momento, não havia sido percebido pelos demais.

Para Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 26):

> Em muitas situações, ao se envolver com atividades de modelagem, os alunos deparam-se com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-los, emergindo assim a necessidade de construir tal conhecimento por meio desta atividade. Logo, em atividades de modelagem, os alunos tanto podem ressignificar conceitos já construídos quanto construir outros diante da necessidade de seu uso.

Não obstante, cabe ao professor, o papel de estar atento para chamar a atenção aos conteúdos que surgem a partir do desenvolvimento do processo desencadeado pelo método da modelagem. A cada momento o professor pode chamar a atenção dos grupos para a funcionalidade matemática que está em uso, mesmo nas menores ações realizadas pelos alunos. Muitos conteúdos podem surgir em momentos diferentes daqueles que surgem no ensino tradicional.

Dessa forma, propor um problema para o aluno é despertar o seu desejo, seu interesse, seduzi-lo pela situação e, provocar nele a necessidade de chegar a uma resposta. O objetivo é ajudar o aluno a refletir, raciocinar para fazer modelagem. Tais ações dizem respeito à seleção, sequência, ritmo e critérios da comunicação na implementação da modelagem nas aulas. O professor deve ainda proporcionar aos alunos condições tanto para adquirir e desenvolver um conhecimento, quanto para desvinculá-lo do contexto em que está inserido. Torna-se esse conhecimento em um conhecimento estável, significativo que possa ser utilizado pelo aluno em outros momentos.

Desta maneira, a avaliação da aprendizagem significativa é do domínio dos conceitos que o aluno desenvolveu em atividade de Modelagem Matemática. Estas dependem da colocação de questões claras, indicadas pelo professor, e que venham possibilitar ao estudante a aplicabilidade dos conhecimentos anteriores e solucionar novos problemas.

Os professores devem mudar as ações planejadas para implementar a modelagem em suas aulas, e solicitar a produção de atividades originais pelo educando para trabalhar problemas provenientes de situações do dia a dia. Eles devem organizar o “que”, e “como” falar na apresentação do tema e do problema, bem como sua resolução. O planejamento pode ser alterado conforme as necessidades e/ou respostas dos alunos, sendo necessárias outras ações de intervenção que exigem uma recontextualização pedagógica do professor.

Alguns estudos, como o de Barbosa (1999), indicam que os professores possuem cautela quanto ao uso da Modelagem no ensino. Num levantamento exploratório, constata-se certo estado de tensão dos professores perante a modelagem. Ao mesmo tempo em que eles sustentam dificuldades na implementação, defendem esta abordagem. Ao se referir às vantagens, os professores assinalam que a modelagem contribui na compreensão dos conceitos matemáticos, desenvolvem habilidades de pesquisa, com o contexto sociocultural e, finalmente, viabilizam a interdisciplinaridade e a flexão do currículo.

2.2 Cursos de formação continuada em Modelagem Matemática para professores

A formação de professores em modelagem tem apresentado a ideia de habilidades e ações para que os profissionais da educação possam ter experiências múltiplas, como aluno e como professor neste ambiente de aprendizagem. É preciso que os programas de formação de educadores preparem para a prática pedagógica em modelagem nas ações de formação de modo contínuo. Discutam com estes profissionais a dimensão do planejamento das ações em sala de aula, e a dimensão da abordagem alcançada no trabalho com os alunos na recontextualização da modelagem nas práticas pedagógicas dos docentes.

De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 66):

> Na perspectiva da Modelagem, faz-se necessária uma formação em que o foco central seja fazer com que o professor perceba que as regras e convenções estabelecidas daquilo que denominamos de ‘Matemática’ ganhe significado nas aplicações que fazemos delas no contexto em que tais regras estão sendo aplicadas, e não somente na transmissão de conteúdos já sedimentados – descontextualizados.

Como implicação, é importante que os programas de formação discutam as inseguranças, as preocupações, bem como as tensões que são identificadas nos discursos dos professores durante a realização de alguma mudança de prática para que os apoiem na implementação de suas práticas pedagógicas.

A literatura tem documentado que professores se mostram cautelosos em utilizar o sistema de modelagem nas aulas pelos seguintes motivos: a organização da escola e a relação com o ambiente social que o professor desenvolve suas atividades. Trabalho este que se constituí pelas expectativas dos outros atores (pais, alunos, superiores, outros professores), pelos guias curriculares, pelo esquema curricular, pelo livro didático adotado, pelo sistema de avaliação da escola e pela própria estrutura da escola, além da falta de recursos financeiros tanto da parte dos alunos quanto da escola.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 66):

> Os professores deverão ser preparados para que eles, junto com os seus alunos, atuem como pesquisadores de sua vivência cotidiana e, a partir delas, possam buscar os sentidos que são produzidos nas regras e convenções que fazemos para entender e compreender tal vivência. Eles deverão ser formados a buscar os problemas para pesquisar, os quais deverão vir de situações reais.

Outra dificuldade é que os professores sentem algum receio de que não sabem responder as perguntas de seus alunos. Esta insegurança faz com que prefiram se ausentar da tarefa de intervenção quando trabalham modelagem. Entre uma abordagem e outra, existe uma considerável diferença, e os educadores, muitas vezes, não se sentem seguros para desenvolver modelagem em suas aulas.

A tarefa da formação é, portanto, oferecer aos profissionais da educação matemática a possibilidade de ajudar a lidar com estas dificuldades: a falta de clareza em como organizar e conduzir o ambiente de modelagem nas aulas, a programação curricular e a insegurança em relação aos conteúdos matemáticos de que o professor precisa para facilitar solução de novas situações-problemas.

Não tem sido fácil para os professores a tarefa de realizar mudanças de práticas em suas aulas. As condições da escola, suas rotinas são construídas e legitimadas socialmente e interferem na maneira como a prática pedagógica é realizada.

Em um estudo realizado por Kitchen e Williams (1993), os professores afirmaram que sentiam receio de que não soubessem responder as perguntas que surgem. Os professores tendem a perceber a modelagem como algo “fora” das possibilidades dos seus contextos escolares. Esta percepção é apoiada, devido ao desconhecimento da prática sobre a organização curricular, as estratégias didáticas, a compatibilização com os programas, o envolvimento dos alunos e o papel do docente.

Já para Bassanezi (2011, p. 205), trabalhar com modelagem matemática em cursos de formação para professores, visa não só ampliar o conhecimento matemático destes, mas, sobretudo desenvolver sua forma de pensamento e ação. É a produção do saber aliado à abstração e formalização interligadas a fenômenos e processos empíricos encarados como situações-problemas.

Assim, a modelagem matemática como processo de ensino-aprendizagem em programas de capacitação ou especialização, pressupõe um plano de curso com os seguintes objetivos: dar condições aos professores para mudanças no conceito de prática educativa, desenvolver motivações para ações inovadoras que despertem a criatividade e, também, valorizar o conhecimento matemático no contexto global e seu poder de atuação em situações particularizadas.

Pretende-se, então, valorizar os recursos humanos disponíveis, explorar e desenvolver o talento dos cursistas-educadores para que se sintam capazes de contribuir para a comunidade em que trabalham. Ao se ter em mente a interdisciplinaridade, é possível conectar a matemática às outras ciências para que sirvam como instrumento de compreensão e de possíveis modificações da realidade.

Por essa razão, é importante inter-relacionar fatores experimentais e teóricos, isto é, não perder de vista a própria essência da "atitude matemática". É preciso levar em conta também as realidades específicas de cada região bem como o interesse dos estudantes ao objetivar uma maior motivação e participação efetiva destes na comunidade. Aproximar o meio de que fazem parte como cidadãos, numa relação professores-alunos para pesquisa-ação dos problemas regionais.

2.3 Avaliação em Modelagem Matemática

A carência na literatura de pesquisas que abordam a avaliação de atividades de modelagem matemática e, principalmente, da aprendizagem do aluno nestas, impulsionou-se à busca por referências. Estas têm por finalidade nortear caminhos que conduzam à elaboração de parâmetros para a avaliação da aprendizagem significativa do aluno em atividades de modelagem matemática em sala de aula.

Conforme os PCNs (1997, p. 55):

> A avaliação não se restringe ao julgamento sobre sucessos ou fracassos do aluno, é compreendida como um conjunto de atuações que tem a função de alimentar, sustentar e orientar a intervenção pedagógica. Acontece contínua e sistematicamente por meio da interpretação qualitativa do conhecimento construído pelo aluno. Possibilita conhecer o quanto ele se aproxima ou não da expectativa de aprendizagem que o professor tem em determinados momentos da escolaridade, em função da intervenção pedagógica realizada.

Ainda neste contexto, Barbosa (2001, p.18), afirma que com relação à avaliação de um projeto de modelagem matemática, pode ser feita, uma avaliação por meio de relatórios, analisando o grau de desenvolvimento do aluno bem como o seu processo de evolução, ou seja, o que ele realmente aprendeu mediante modelagem matemática.

Para Biembengut e Hein (2013, p. 27-28), o professor pode adotar uma teoria de avaliação que levem em conta dois aspectos principais: avaliação como fator de redirecionamento do trabalho do professor e avaliar para verificar o grau de aprendizado do aluno. Neste último caso, pode-se analisar sob os seguintes aspectos: subjetivo (a observação do professor) e objetivos (provas, exercícios, trabalhos realizados).

Quanto ao aspecto subjetivo, o da observação, o professor pode avaliar o desempenho do aluno: participação, assiduidade, cumprimento das tarefas, espírito comunitário. Quanto aos aspectos objetivos sugere-se que os seguintes critérios sejam avaliados:

- Produção e reconhecimento matemático: consolidação de conhecimentos matemáticos teóricos, raciocínio lógico, operacionalização de problemas numéricos, crítica em relação a conceitos de ordem de grandezas, expressão e interpretação gráfica;
- Produção de um trabalho de modelagem em grupo: qualidades dos questionamentos, pesquisa elaborada pelos alunos, obtenção de dados sobre o problema a ser modelado, interpretação e elaboração de modelos matemáticos, discussão e decisão sobre a natureza do problema levantado, adequação da solução apresentada, validade das soluções fornecidas pelo modelo, exposição oral e escrita do trabalho;
- Extensão e aplicação do conhecimento: síntese aliada à capacidade de compreensão e expressão dos resultados matemáticos, análise e interpretação,

críticas de outros modelos utilizados. É importante também que os alunos conheçam, *a priori*, os critérios e os indicadores de avaliação adotada.

Dessa forma, o ensino, por meio da modelagem, oferece oportunidade para uma pequena reflexão sobre a avaliação, uma vez que difere da postura encontrada no ensino tradicional. Neste a avaliação tem tido, via de regra, caráter punitivo para o aluno. A preocupação tem sido simplesmente se o aluno sabe ou não responder aquilo que lhe é pedido. Se o aluno não sabe ele é punido com notas baixas e sente-se discriminado pelo professor e pelos colegas. No entanto, a maior punição ocorre quando aquelas dificuldades encontradas pelo aluno na avaliação não receberam a atenção devida no sentido de serem superadas.

O caráter punitivo da avaliação, desde as primeiras séries do ensino básico, parece ter contribuído, de forma notável, para o surgimento de alguns aspectos negativos para o ensino de todas as disciplinas, mas, especialmente, para o ensino de matemática. Dentre esses aspectos, estão o conformismo dos estudantes e a aceitação das regras, das dicas, dos atalhos, enfim, qualquer meio que conduza à resposta correta, o que não leva em consideração a compreensão, o entendimento daquilo que se está fazendo.

Na modelagem matemática, quando se proporciona ao aluno liberdade para que se faça uso de suas potencialidades, suas próprias estratégias, sua intuição, sua maneira pessoal de pensar e associar as ideias e experiências diante de uma situação-problema torna-se claro e coerente o objetivo da avaliação. Na modelagem matemática não existe o modelo "certo" ou "errado" nem modelo verdadeiro, nem falso, mas sim, o modelo "mais" ou "menos" refinado o que é diferente de estar certo ou errado. Um modelo é mais refinado quando diz respeito ao objeto de estudo, porque ele é capaz de predizer com maior exatidão, pois relaciona mais variáveis significativas do problema.

Nesta proposta apresentada, a avaliação, além das considerações anteriores, atribui significado muito especial ao desempenho do educando. A avaliação processual possui caráter contínuo e permeia todo o transcorrer das atividades. Esta maneira de avaliar permite levar em consideração vários aspectos como: iniciativa, discernimento, participação, criatividade, capacidade de interação, persistências nos objetivos propostos, além de compreensão do conteúdo matemático. Ao levar em consideração mais aspectos pertinentes aos educandos no processo de ensino, propicia-se uma análise mais completa por parte do professor na avaliação da aprendizagem. Nesta prática educativa a avaliação deverá ter sempre o caráter de reorientação do método.

A avaliação, por visar ao caráter de reorientação, parece favorecer a criatividade do processo que caracteriza a modelagem matemática. Nesse tocante, uma avaliação que mostra a baixa adequação das respostas dos alunos pode redirecionar o processo na perspectiva da busca do objetivo proposto por outro caminho ainda não trilhado. Isso garante a flexibilidade necessária para se chegar a um objetivo por meio de procedimentos diversos.

O trabalho em pequenos grupos pode favorecer a avaliação, o desempenho tanto da equipe, como de cada um dos indivíduos. A modelagem é um processo muito rico e criativo que deve ser valorizado nos múltiplos aspectos, reconhecidamente favorecidos por esta prática educativa.

3 EMBALAGENS: UM TEMA PARA MODELAGEM MATEMÁTICA

As atividades propostas neste capítulo são baseadas no livro “Modelagem Matemática no Ensino” dos autores Biembengut e Hein (2013) capítulo 2. Percebe-se a grande diversidade de atividades que podem ser elaboradas em torno de um tema central, a riqueza de informações que podem ser obtidas a partir do tema embalagens. A interdisciplinaridade surge de modo muito natural conforme vão se levantando as informações necessárias na análise do problema.

O trabalho com temas que são do cotidiano do aluno podem trazer a tona dúvidas e curiosidades que nem mesmo foram pensadas pelo professor no início da atividade. E a relevância é que todos ganham com isso, pois o professor busca os modos de direcionar o conhecimento, o aluno aprende a argumentar, pesquisar, pensar e tomar decisões, seja individualmente ou em grupo.

As formas geométricas estão presentes desde um simples dado usado em jogos, nas arquiteturas das construções, em elementos da natureza e nas embalagens.

A embalagem tem uma significativa importância para o produto, pois o protege e valoriza sua apresentação. A embalagem precisa despertar a atenção do consumidor com a sua estética, e oferecer facilidade ao manuseá-la, dar ao produto proteção da ação do transporte e do tempo, além de apresentar um custo baixo para não elevar o preço final do produto.

De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 51):

> O tema embalagem, como já foi dito, pode ser utilizado desde as séries iniciais até o ensino superior, adaptando-o à forma de abordagem e à ênfase do conteúdo de acordo com o programa de ensino. Por exemplo, nas séries iniciais o professor pode fazer uso das embalagens mais conhecidas pelos alunos (achocolatado, refrigerante, guloseimas) para iniciar com a alfabetização. Atualmente, com o tipo de propaganda existente, as crianças já conhecem muitas marcas de produtos, ou seja, já sabem ler. Além disso, manuseando-as, poderão aprender sobre formas, tamanhos, cores, interior e exterior, dentre outros. Na educação superior, em particular em Cálculo Diferencial Integral, o aluno pode fazer uso de derivadas para encontrar o ‘tamanho ótimo’ de uma embalagem.

Essa proposta de usar embalagens como tema para trabalhar com Modelagem Matemática na sala de aula é pelo fato de que os alunos possam ter contato direto com as mesmas. Ora quando vão presentear uma pessoa querida, ora atraída pela beleza de sua forma apresentadas nos comerciais e propagandas, e outras vezes, pela necessidade de transportar/armazenar um produto.

A presente proposta permite desenvolver os seguintes conteúdos: conceitos primitivos da geometria euclidiana, geometria plana e espacial; nomes e elementos dos sólidos geométricos; sistemas de medidas: linear, superfície, volume - Princípio de Cavalieri, capacidade, massa e peso; arredondamento; funções, construção de gráficos, valor de máximo e mínimo. E, ainda, despertar uma conscientização sobre o meio ambiente e a reciclagem do lixo.

Para iniciar o trabalho de modelagem matemática com o Tema Embalagem, sugere-se que o professor e alunos façam uma conversa informal sobre este. É importante comentar sobre os diversos tipos de embalagens: seja na forma, no tamanho e no material, como por exemplo: folhas de papel ou celofane, saco/sacola de pano, plástico ou papel, caixa de papelão e de metal, latas de alumínio, dentre outros.

Em seguida para realizar este trabalho o professor deve solicitar aos alunos embalagens ou objetos de diversos tamanhos e forma. O educador deve verificar se as embalagens apresentam as mais diversas formas de sólidos geométricos como: caixas de sapatos para representar prismas, lata de leite em pó que representam os cilindros, copo descartável para representar o tronco de cone, embalagens de doces para representar as pirâmides, e tronco de pirâmides. Se achar conveniente pode fazer uma visita a uma indústria de embalagens.

Figura 1: modelos de embalagens.
Fonte: elaborada por Carmo, Josemir do.

De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 35):

> Nesta primeira etapa, você pode resgatar os conceitos geométricos que os alunos já possuem e introduzir outros considerados elementares. Nomes como prisma, cilindro, cone etc. e alguns conceitos de geometria plana e espacial podem ser apresentados aos alunos mesmos que pertençam às séries iniciais. Nesse caso não é preciso definir.

O professor deve resgatar, dessa forma, os conceitos geométricos que os alunos já possuem e introduzir outros considerados elementares de acordo com o currículo em estudo. Conforme o grau de escolaridade e do programa, o professor pode trabalhar as diversas formas que as embalagens possuem, como o cilindro, o cone, o prisma, a pirâmide e a esfera que recebem nomes de sólidos geométricos e que estes se separam em corpos redondos e formas poliédricas. As caixas têm forma de um prisma e as latas de um cilindro.

Segundo Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 196):

> Nessa representação das formas geométricas para a embalagem foi possível desenvolver habilidades de construção, com o uso adequado de instrumentos de medição com questionamentos sobre a precisão dos cálculos e das medidas (arredondamentos, estimativas), com noções de proporcionalidade na comparação das formas construídas, com novas hipóteses sobre a otimização investigada.

Ao analisar o cilindro representado pela embalagem da lata de chocolate em pó, assim como o prisma representado pela embalagem de caixinha de leite, ambos possuem bases paralelas. Logo, pode-se notar que os poliedros classificam quanto às formas poliédricas em dois grupos: os prismas (embalagem de pizza) e as pirâmides (embalagem de trufas). Se observadas as principais características dos prismas, nota-se que têm as faces laterais formadas por paralelogramos e apresentam duas bases, enquanto as pirâmides possuem apenas uma única base e as faces laterais têm formas triangulares.

Quanto às embalagens pode-se observar que os conceitos primitivos da geometria euclidiana estão presentes nos elementos dos poliedros. Ao visualizar uma embalagem de uma caixinha de leite, por exemplo, o aluno pode observar que os “cantos” é o que representa a noção de ponto na geometria primitiva, assim como as “dobras” representam segmentos de retas e um “lado” da caixa representa a noção de plano.

De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 35):

> Manuseando embalagens, os alunos poderão compreender melhor a relação entre duas retas, entre reta e plano e entre planos (paralelos, perpendiculares, concorrentes); ângulo e ângulo poliédrico, propriedade dos polígonos (triângulos, quadriláteros etc.) e da circunferência e do círculo e dos sólidos geométricos.

Ao se ter como estudo as arestas de uma embalagem com forma de poliedro pode-se explorar as posições relativas entre duas retas coplanares, como: retas paralelas, ortogonais, perpendiculares e concorrentes, além de estudar as medidas dos ângulos formados entre duas retas.

Em relação às faces podem-se estudar as posições relativas entre dois planos: paralelos e secantes. É possível ainda estudar a posição relativa entre uma reta e um plano, bem como reta contida no plano e reta secante ao plano.

Pode-se calcular a distância entre dois pontos, entre um ponto e um plano, entre um ponto e uma reta, e determinar o ângulo formado entre duas retas, entre dois planos e entre reta e plano.

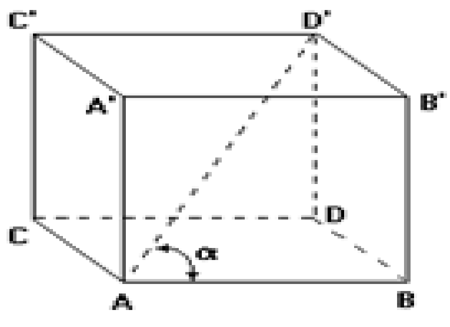

Figura 2: Paralelepípedo.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Na figura acima se observa que de acordo com Farago e Carneiro (2011, p. 53-65):

- Noção de ponto: é aquilo que de nada é parte, ou seja, é um elemento da geometria que não há como dimensionar. Os pontos são representados por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, D.
- Intuição de reta: é uma linha unidimensional, tendo apenas comprimento e são ilimitadas. As retas são representadas por uma letra minúscula do

alfabeto. Na figura tem-se que as arestas AB, AA', AC são segmentos de retas.

Conforme Barbosa (2012, p. 4) "o conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento".

De acordo com Euclides (1944, p. 4):

> Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma. Linha é o que tem comprimento sem largura. As extremidades da linha são pontos. Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades. Superfície é o que tem comprimento e largura. As extremidades da superfície são linhas. Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

- A noção de plano: é representado por duas dimensões largura e comprimento, sendo ilimitado em suas dimensões. Os planos são representados por uma letra grega minúscula. Na figura, são noções de partes de planos: AA'C'C e ABDC.

Posições relativas entre duas retas:

- Reta AB e reta A'B' são paralelas;
- Reta AA' e AB são perpendiculares;
- Reta AA' e AD' são concorrentes.

De acordo com Euclides (1944, p. 7) "Linhas paralelas, ou equidistantes são linhas retas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar". Ainda pode-se dizer que quando duas retas r e s têm exatamente um ponto P em comum são chamadas concorrentes, e se elas forem concorrentes e formar um ângulo reto estas são ditas perpendiculares. Quando duas retas r e s não possuem ponto em comum, elas podem ou não determinar um plano: se elas não determinam um plano, são ditas reversas, entretanto, se as retas r e s não possuem ponto em comum, mas determinam um plano α, elas serão ditas retas paralelas. Duas retas que tenham mais de um ponto comum são obrigatoriamente coincidentes.

Posições relativas entre planos:

- Os planos ABCD e A'B'C' D' são paralelos;
- Os planos ABCD e AB'D'C são secantes.

Quando dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta e neste caso, diz-se que os planos são secantes. Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto em comum.

A noção de ângulo entre reta e plano: é a medida do ângulo α formado pelo plano ABCD e a reta AD'. Conforme Barbosa (2012, p. 35): "Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas de lados do ângulo. Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso".

A noção de distância entre dois pontos: é o comprimento da diagonal AD' do paralelepípedo. Dados os pontos A e B no plano, define-se a distância entre os mesmos como o comprimento AB do segmento AB. No plano, a distância entre dois pontos é frequentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras. A distância de um ponto P a um plano α é definida como o comprimento do segmento da perpendicular traçada de P a α.

Os poliedros são sólidos geométricos limitados por um número finito de polígonos denominados faces. Cada lado desses polígonos é comum a um único lado de outro polígono. Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de faces. Assim um tetraedro possui quatro faces, um pentaedro possui cinco faces e um hexaedro possui seis faces.

No que se refere aos elementos dos poliedros pode-se identificar as faces laterais, as bases, os vértices e as arestas. Ao analisar estes elementos é possível destacar uma relação importante nos poliedros convexos entre o número de vértices, arestas e faces: a Relação de Euler (V – A + F = 2) que nos diz que a soma do número de vértices com o número de faces menos o número de arestas é igual a dois.

Na figura tem-se:

V – A + F = 2

12 – 18 + 8 = 2

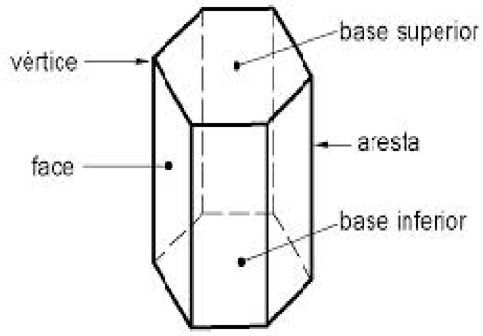

Figura 3: Prisma hexagonal.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Para construir uma embalagem precisa-se saber qual o produto (tipo, tamanho), para que tipo de consumidor (material, cor e adorno), e como será transportado. Com estas informações, inicialmente, procura-se fazer um desenho (em perspectiva e planificado) que deve conter todas as informações necessárias à sua confecção, como medidas, espécie de material dentre outros. O valor da embalagem incide no valor final do produto.

Uma preocupação é construir uma embalagem que utilize a mínima quantidade possível de material, sem perder a funcionalidade e a aparência. Para calcular a quantidade de material de uma embalagem de qualquer forma basta abrir, planificar ou supor aberta, fazendo um esboço com as devidas dimensões. A partir daí, calcula-se as áreas das figuras planas compostas (poliedros).

Para Biembengut e Hein (2013, p. 41):

> Nessa etapa, você pode introduzir as medidas de superfície - área, conceituando e justificando por que a área do retângulo é igual ao produto do comprimento de dois lados consecutivos, deixando-os deduzir, de preferência por meio de desenhos ou recortes. Como farão muitos cálculos, e considerando que nem todas as medidas são inteiras, você também pode relembrar as operações com números decimais ou ainda implementar o uso de calculadoras. O importante aqui é que o aluno tenha habilidade de resolver o problema e desenvolver a criatividade.

Para uma embalagem que possui a forma de um paralelepípedo retângulo, suponha que as medidas de comprimento, largura e altura são indicadas por a, b, e c, respectivamente. Nessas condições, pode-se expressar um modelo matemático que determina a área total deste tipo de embalagem da seguinte forma: o paralelepípedo é formado por seis faces retangulares, sendo dois retângulos com áreas a.b, dois retângulos com áreas a.c e dois retângulos com áreas b.c. Assim, chamando de S_t sua área total, tem-se:

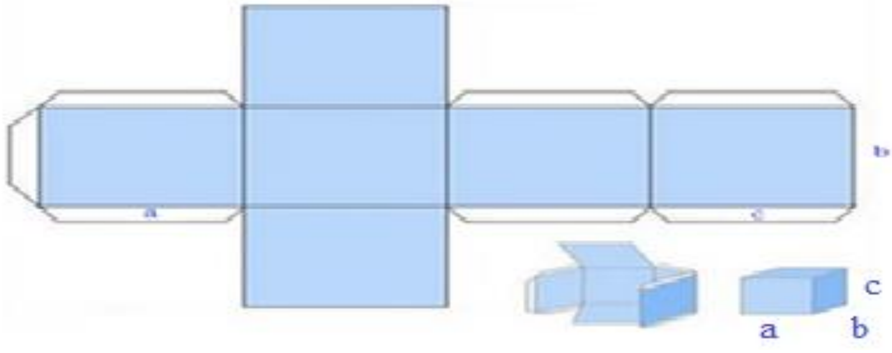

Figura 4: Planificação do paralelepípedo.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

$$S_t = 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$$

$$S_t = 2.(a.b + a.c + b.c).$$

Observação: em uma embalagem há partes (internas/externas) nas junções ou dobras, as quais não foram consideradas.

Para a embalagem que possui forma de um cilindro reto pode-se generalizar a sua área total ou quantidade de material necessário para fazer uma lata, (sem considerar junções), por um modelo matemático da seguinte maneira:

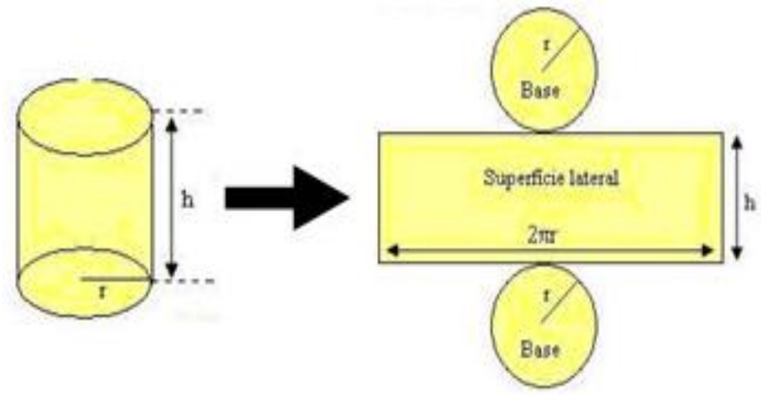

Figura 5: Planificação do cilindro.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

A área total de um cilindro, conforme a planificação é igual a soma das áreas das duas bases que é uma região circular de raio r, mais a área da superfície lateral formada por um retângulo de dimensões h, altura do cilindro, e 2.π.r equivalente o comprimento das circunferências das bases do cilindro. Assim se obtém:

$$S_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$$

$$S_t = 2.\pi.r.(r + h)$$

Sobre os estudos com embalagens na forma de cilindro, pode-se também levar os alunos a chegarem, aproximadamente, ao valor de π (3,1416...). Para se chegar a esse resultado, deve-se tomar a medida do contorno do cilindro, usando um cordão ou algo similar e, em seguida, fazer a razão dessa medida pelo diâmetro do círculo.

Recentemente, tornou-se popular a seguinte definição: π é a área do círculo de raio 1. Esta definição leva a um modelo matemático que se calcula a área de qualquer círculo. Ao usar o conceito de figuras semelhantes um cículo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1 e a razão de semelhança é a razão entre os seus raios. Sabe-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, se S é a área de um cículo de raio r, temos que

$$\frac{S}{\pi} = \left(\frac{r}{1}\right)^2$$

Logo, a área do círculo de raio r é S = $\pi . r^2$

Pode-se também encontrar um modelo matemático que calcula o comprimento de qualquer circunferência em função da medida de seu raio. A figura a seguir mostra como obter experimentalmente o comprimento de uma circunferência de raio r a partir do fato que a área do círculo correspondente é conhecida. Decompõe-se o círculo em um número par bastante grande de setores e predispõe esses setores na forma sugerida pela figura.

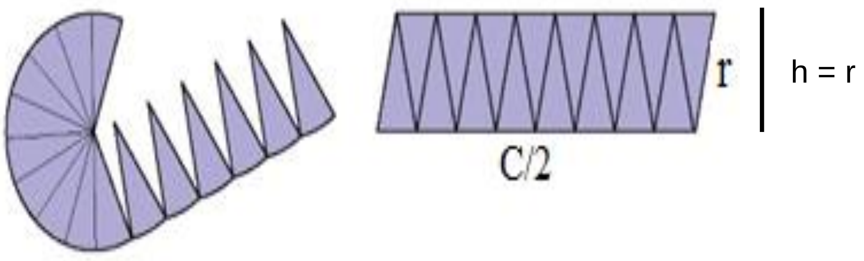

Figura 6: O círculo aberto.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Sendo C o comprimento da circunferência a figura formada pelos setores arrumados é aproximadamente um paralelogramo de base C/2 e altura r. Ao igualar as áreas tem-se:

$$\frac{C}{2} . r = \pi . r^2$$

$$\frac{C}{2} = \pi . r$$

$$C = 2 . \pi . r$$

Este resultado permite uma nova maneira de se chegar a área de um círculo, pois ao decompor o círculo em vários setores de número par e justapor uma parte sobre a outra obtém-se um paralelogramo de base igual a metade do comprimento do círculo ($\frac{2.\pi.r}{2}$) e altura igual ao raio r. Ao fazer então a área do paralelogramo S = b.h, tem-se:

$$S = \frac{2.\pi.r}{2}.\ r$$

$$S = \pi.r^2$$

Esta expressão é um modelo para calcular a medida da área de qualquer círculo em função da medida do raio.

Para a embalagem que tem forma de um cone reto de raio R e geratriz g, pode-se determinar a sua área somando a área da base do cone $S_b = \pi.R^2$ do círculo que compõe a sua base mais a área da superfície lateral que pode ser planificada e transformada em um setor circular de raio igual à geratriz *g* do cone e cujo arco tem comprimento 2.π.R.

Para calculá-la, será usada apenas uma elementar regra de três, pois a área S_l de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende. Será dito então, que a área S_l desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco 2.π.R está para o comprimento total da circunferência 2.π.g. Com isto, se conclui-se que a área lateral do cone reto vale:

$$S_l \longrightarrow \pi.g^2$$

$$2.\pi.R \longrightarrow 2.\pi.g$$

$$S_l = \frac{2.\pi^2.R.g^2}{2.\pi.g}$$

$$S_l = \pi.R.g$$

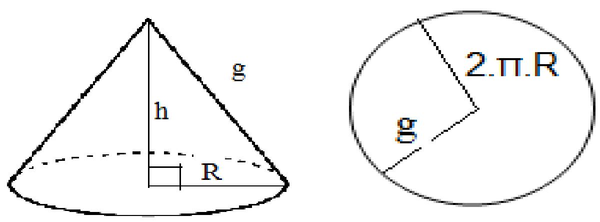

Figura 7: Cone e setor circular.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Dessa forma, o modelo matemático que generaliza a área total de um cone é:

$$S_t = S_b + S_l$$

$$S_t = \pi.R^2 + \pi.R.g$$

$$S_t = \pi.R(R + g).$$

Para as embalagens com forma de pirâmides pode-se obter a área total dessa embalagem, fazendo uma planificação desta. Assim para uma embalagem que tem forma de uma pirâmide de base quadrangular é possível calcular a área do quadrado de lado l e somar com a área da superfície lateral que é composta por quatro triângulos isósceles de base l e apótema ap.

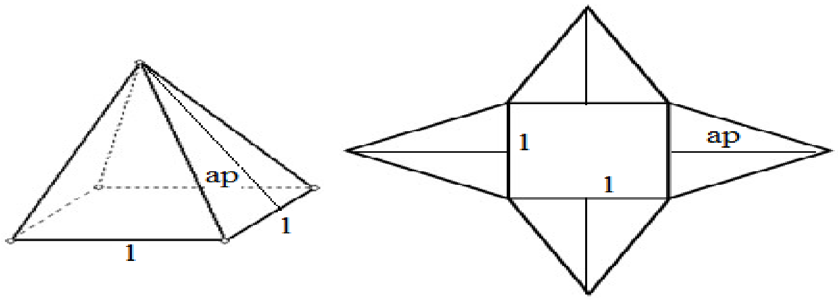

Figura 8: Planificação da pirâmide de base quadrangular.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Portanto, pode-se obter um modelo para calcular a área total S_t de uma embalagem que possui esta forma da seguinte maneira:

$$S_t = S_b + 4.S_l$$

$$S_t = l^2 + 4.\frac{l.ap}{2}$$

$$S_t = l^2 + 2.l.ap$$

Nesta etapa, o professor pode trabalhar tanto o conceito de áreas e perímetros dos polígonos quanto dos sólidos geométricos quando se justifica, por exemplo, porque a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura. E, assim deixar os alunos deduzirem de preferência por meio de desenhos, recortes, construções e planificações das embalagens. É importante que ao encontrar um modelo matemático os alunos validem o mesmo para a situação-problema real e também simulem para outras embalagens de medidas diferentes que possuem o mesmo formato.

Ao comprar um produto não só se paga por este como também por sua embalagem. Dessa forma, quanto mais cara é a embalagem mais caro fica o produto. Atualmente, ante a concorrência, o fabricante ou o comerciante, além de procurar oferecer um bom produto, com boa aparência, necessita detectar as diversas variáveis que permitem baratear o produto, em particular, a embalagem.

Biembengut e Hein afirmam (2013, p. 41): “Nesta etapa, você pode desenvolver conceitos de medidas de volume, capacidade e massa”. Na embalagem, uma das propostas é estabelecer um formato adequado que utilize a quantidade mínima de material e o máximo de aproveitamento ou volume. Assim, qual seria o ideal para uma embalagem de menor custo e melhor manuseio?

O volume é a medida de espaço ocupada por um sólido e capacidade é o espaço de que um corpo possui para armazenar alguma coisa. Muitas vezes, o volume de um corpo (ou recipiente) é igual a sua capacidade. Isto acontece quando a espessura das paredes do corpo é tão fina que pode ser considerada desprezível. Neste caso, a quantidade de espaço que ele ocupa é praticamente igual à quantidade de espaço que ele dispõe para armazenar alguma coisa. Habitualmente, quando são dadas as dimensões de uma caixa ou um recipiente para se determinar a sua capacidade, supõe-se que essas medidas são as dimensões internas do recipiente, ou que a espessura de suas paredes é desprezível.

Para se calcular o volume de uma embalagem que possui formato de um paralelepípedo, procede-se: o volume pode ser calculado quando se multiplicam as três medidas correspondentes à altura h, à largura a e ao comprimento b, ou seja:

Volume = altura x largura x comprimento.

Ou

V = h x (a x b). Observa-se na figura que largura x comprimento = área da base, logo:

Volume = área da base x altura,

$V = S_b \times h$.

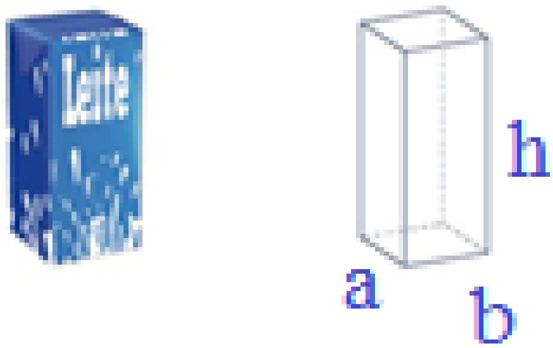

Figura 9: Paralelepípedo retângulo.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Princípio de Cavalieri: "Dados dois sólidos A e B, apoiados em um plano α e, se todo plano β paralelo ao plano α que secciona os dois sólidos determinando superfícies de áreas iguais, então esses sólidos têm o mesmo volume." Pode-se justificar este fato ao imaginar dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura. Duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, o mesmo volume. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, conclui-se que os dois sólidos têm volumes iguais. Na prática, os professores podem tomar duas resmas de papel com as mesmas quantidades de folhas e dispô-las de duas formas diferentes: uma perpendicular ao plano α e a outra com uma inclinação de um determinado ângulo.

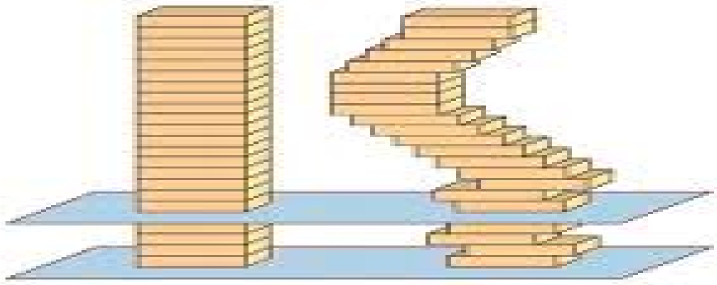

Figura 10: Os indivíduos de Cavalieri.
Fonte: Auroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html

Para calcular o volume de embalagens que têm formato de cilindro, pode-se aplicar o Princípio de Cavalieri. Como a base do cilindro é um círculo, tem-se então, que o seu volume pode ser expresso pelo seguinte modelo matemático:

$V = \pi . r^2 . h$

$V = S_b . h.$

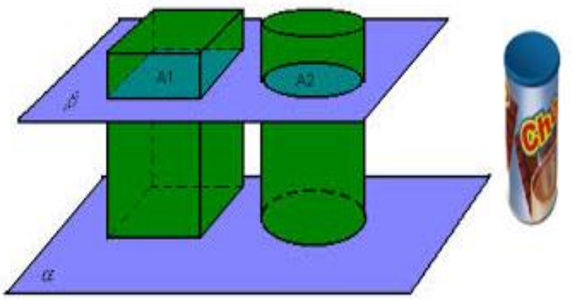

Figura 11: Dedução do Princípio de Cavalieri.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Para calcular o volume das embalagens com forma de pirâmides observa-se a figura:

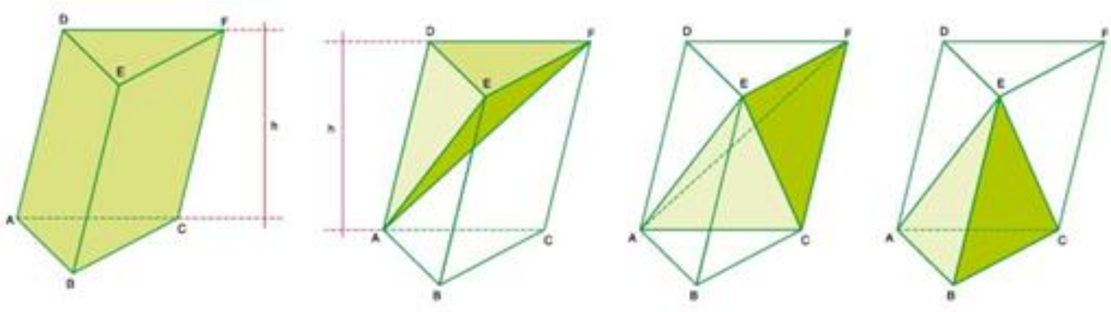

Figura 12: Tetraedro regular.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Tem-se que:

- As pirâmides ADEF e ABCE têm bases congruentes ($\Delta DEF \equiv \Delta ABC$) e alturas congruentes. Logo, os volumes dessas duas pirâmides são iguais.

- As pirâmides ADEF e ACEF têm bases congruentes (ΔAFD ≡ ΔAFC) e alturas congruentes (vértice E em relação ao plano que contêm a face ACDF que estão contidas as duas bases). Logo, os volumes dessas duas pirâmides são iguais.

Portanto,

$V_{ADEF} = V_{ACEF} = V_{ABCE}$.

Como o tetraedro regular foi decomposto em três pirâmides:

$V_{prisma} = V_{ADEF} + V_{ACEF} + V_{ABCE}$

Ou seja:

$$V_{prisma} = 3.\ V_{pirâmide}$$

Assim o volume do prisma é dado por

$$V_{prisma} = S_b.h$$

Segue que $S_b\ .\ h = 3.\ V_{pirâmide}$. Multiplicado os dois lados da igualdade por $\frac{1}{3}$ obtém-se:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\ S_b.h.$$

Dessa forma para calcular o volume das embalagens com formato de pirâmide, pode-se adotar como modelo matemático $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\ S_b.h$. Este modelo também pode ser usado para calcular o volume de embalagens com formato de cone.

Conforme Biembengut e Hein (2013, p. 45-46), nesta etapa o professor deve também apresentar os conceitos de volume e capacidades a partir de experiências, como: empilhar diversas caixas ou latas e comparar o tamanho ou o espaço que ocupam; colocar os mais diversos materiais dentro das embalagens (pedra, areia, algodão, água) para compreender capacidade e densidade.

O professor pode fazer a relação entre massa e peso, pedindo para os alunos pesarem uma caixa de sapato cheia de areia e outra cheia de palha. Nesta etapa também deve apresentar as equivalências das unidades de medidas de volume e capacidade. Deve-se então solicitar aos alunos que observem nos rótulos das embalagens usadas para armazenar líquidos e notar que algumas embalagens a unidade de medida é o mililitro (ml) e o litro (l); nas seringas, centímetros cúbicos (cc); outras como caixa d'água, em metros cúbicos (m^3). Pode-se também trabalhar a relação de que um litro corresponde a um decímetro cúbico

$$1l = 1dm^3 = 1000\ cm^3$$

$$1dm \times 1dm \times 1dm = 1\ dm^3 = 1l.$$

No comércio usam-se muitas embalagens com a forma de um prisma retangular como, por exemplo, a embalagem de leite tipo longa vida. Ao mesmo tempo são muito usadas também embalagens com o formato de um cilindro como, por exemplo, as embalagens de óleo comestível. Ao supor que uma fábrica precisa produzir embalagens na forma cilíndrica ou de paralelepípedo que possuem o mesmo volume e têm alturas iguais para acondicionar um dos seus produtos, e ainda a mesma pretende investir na apresentação e na economia do material a ser gasto, é possível mostrar que as embalagens na forma de um prisma têm área total maior que os cilindros.

Ao considerar os volumes iguais para os dois sólidos, sendo V_1 do paralelepípedo e V_2 o volume cilindro obtém-se:

$$V_1 = V_2$$

$$b.a.h = \pi.r^2.h$$

$$a.b = \pi.r^2. \quad (I)$$

Tem-se que a área total de um prisma de base retangular é:

$S_t = 2.(a.b + a.c + b.c)$. Tem-se que c = h (altura do paralelepípedo)

$S_t = 2.[a.b + h(a+b)]$. (II)

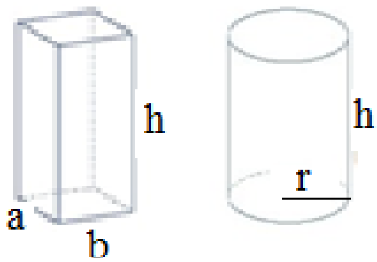

figura 13: Paralelepípedo e cilindro.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

A área total do cilindro é

$S_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$. (III)

Sendo $a.b = \pi.r^2$ em (I) então $a = \frac{\pi.r^2}{b}$ e $b = \frac{\pi r^2}{a}$ substituindo em (II) tem-se:

$$S_t = 2.\left[\pi r^2 + h\left(\frac{\pi.r^2}{b} + \frac{\pi r^2}{a}\right)\right]$$

$$S_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h.\left(\frac{r}{b} + \frac{r}{a}\right)$$

Quando $\frac{r}{b} + \frac{r}{a} > 1$, temos que

$$S_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h.\left(\frac{r}{b} + \frac{r}{a}\right) > 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h.$$

Isso ocorre quando o perímetro da base do prisma retangular é maior que o comprimento da base do cilindro. Pois

$$\frac{r}{b}+\frac{r}{a}>1\rightarrow r\frac{(a+b)}{a.b}>1\rightarrow r\frac{(a+b)}{\pi\cdot r^{2}}>1\rightarrow(a+b)>\pi\cdot r\rightarrow 2(a+b)>2\cdot\pi\cdot r$$

Conclui-se que é utilizado mais material para construir uma embalagem com formato de um prisma de base retangular do que em uma embalagem com formato de um cilindro. No exemplo da caixa de leite usa-se a embalagem no formato de um prisma retangular pela razão de estas ocuparem menos espaços dentro das caixas que são utilizadas nos transportes. Devido ao material ser um tanto flexível, essa forma permite um melhor manuseio.

Conforme o exposto acima, ao construir uma embalagem é necessário saber qual é o tipo de produto (tamanho, forma, massa, densidade, durabilidade), para “que” consumidor, a “forma” de transporte, e a partir dessas análises, definir qual é o material ideal para embalar esse produto, a forma e tamanhos ideais.

Com o tema embalagens também podemos trabalhar problemas de otimização. Por exemplo, ao dispor de uma folha de papel cartão na forma quadrada de lado 20 cm, determinar as dimensões de uma embalagem na forma de um prisma de base retangular sem tampa, para que a mesma tenha volume máximo.

Encontrando a equação que determina o volume da caixa em função da altura, tem-se:

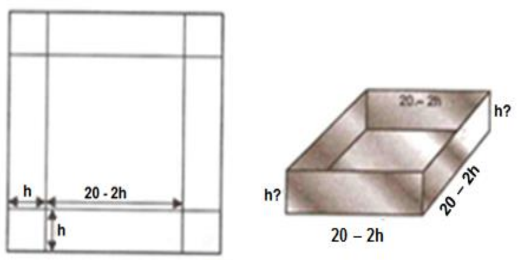

Figura 14: Construção de uma caixa.
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

$V(h) = S_b \,.\, h,\ \ 0 < h > 10$

$V(h) = l^2.\, h$

$V(h) = (20 - 2h)^2\, .h$

$V(h) = (400 - 80h + 4h^2).h$

$V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$

Ao calcular a derivada primeira,

$V'(h) = 12h^2 - 160h + 400.$

Fazendo $V'(h) = 0$

$12h^2 - 160h + 400 = 0$ onde

$h_1 = 10$ e

$h_2 = \frac{10}{3}$.

$V(10) = 4.10^3 - 80.10^2 + 400.10 = 0$

$V\left(\frac{10}{3}\right) = 4.\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 80.\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 400.\frac{10}{3} = \frac{16000}{27}$

Ao representar essa função no gráfico, pode-se obter seus pontos críticos, ou seja, os pontos de máximo e mínimo.

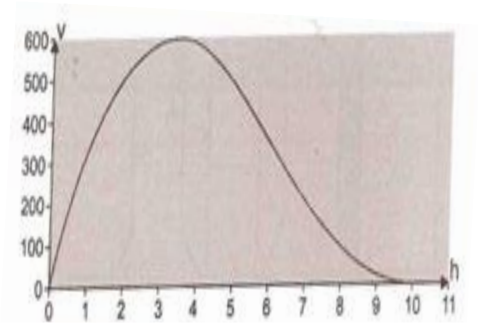

Figura 15: Gráfico da função V'(h)
Fonte: Elaborada por CARMO, Josemir do.

Pelo gráfico o ponto de máximo é h = $\frac{10}{3}$ como se está procurando a medida da altura que permita um máximo volume, a medida de h deve ser $\frac{10}{3}$ = 3.33 cm. Ao determinar o “tamanho ótimo” de uma embalagem, ou seja, as medidas ideais para que tenha um mínimo de área (gaste o mínimo de material) para um máximo volume (tenha um máximo aproveitamento), o professor deve incentivar os alunos a encontrarem modelos matemático que permitam reduzir o desperdício no momento que se faz o corte de material para as embalagens.

De acordo Biembengut e Hein (2013, p. 49), nessa etapa, o professor pode apresentar o conceito de função, função polinomial e pontos críticos de uma função. Neste exemplo ao cortar quatro quadrados de lados igual a $\frac{10}{3}$ da folha de papel-cartão é um momento para se trabalhar com valores aproximados.

Entende-se por máximos e mínimos de uma função os maiores e menores valores, respectivamente, que a função assume em seu domínio, são os chamados valores extremos da função. Estes são extremos absolutos. No entanto, são também importantes os valores extremos em uma vizinhança de um ponto. São os chamados extremos locais. Assim pode-se definir:

Uma função f: D $\longrightarrow$ R tem máximo absoluto em c se f(x) ≤ f(c) para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor f(c) é chamado valor máximo de f em D. Uma função f: D $\longrightarrow$R tem mínimo absoluto em c se f(x) ≥ f(c) para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor f(c) é chamado valor mínimo de f em D. Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados valores extremos da função.

Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto *I*, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f; e Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto *I*, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f. Pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados extremos locais (ou extremos relativos).

Para a resolução da situação problema que consiste em determinar as dimensões de uma embalagem na forma de um prisma de base retangular sem tampa, usando um papel cartão de lado 20 cm para que a mesma tenha volume máximo. Ao encontrar o modelo $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$ que determina esse volume, tem-se que o valor de h é um valor de máximo local, pois o mesmo deve estar entre zero e dez.

É importante dizer que para determinar o valore de h foi usado a derivada. Caso este conteúdo não esteja no currículo, tendo a noção de máximo e mínimo os alunos devem encontar o valor pelo método de tentativa atribuindo valores a h e observar os resultados para o volume da caixa.

Ainda se pode independente do grau de escolaridade conscientizar sobre o meio ambiente, a reciclagem do lixo e a visita às fábricas de embalagem.

Segundo Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 197-198):

> Considerando o uso de objetos da realidade (embalagens), a representação e visualização desses objetos, a exploração de questões associadas ao seu uso da realidade (vida do consumidor), a investigação sobre as diferentes formas possíveis para embalagens e a utilização de conceitos geométricos para a solução do problema (superfície e volume de sólidos geométricos). Essa abordagem aproxima-se das recomendações dos documentos oficiais, para o estudo da geometria, e permite fazer uma iniciação ao fazer modelagem e as abordagens investigativas.

O autor esclarece quanto ao uso das embalagens para a construção do conhecimento no que se refere na obtenção dos modelos. Os alunos podem construir assim representações das formas geométricas, fazerem medidas, comparações, planificações/modificações, testar, analisar, visualizar, justificar, registrar, validar e explorar situações reais, criando possibilidades para um conhecimento significativo e reflexivo.

Dessa forma a modelagem matemática como nova alternativa metodológica do ensino permite ao aluno fazer uso de situações reais/concretas no processo de um ensino-aprendizagem mais significativo, reflexivo-crítico na aquisição do conhecimento científico/pragmático. Atividades essas que possibilitam o aprendiz se sentir mais motivado/entusiasmado ao estudar matemática, uma vez que parte de sua própria aplicabilidade, tornando-se sujeito-agente de sua aprendizagem e participante de sua inteiração no contexto social.

Certamente não se deve enganar e achar que trabalhar com modelagem é fácil ou irá resolver todos os problemas de deficiência de aprendizagem da matemática, mas é mais uma alternativa aos professores e alunos, a qual exige tempo e dedicação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A prioridade deste trabalho foi mostrar novas perspectivas para o ensino de matemática mediado pela modelagem, como uma alternativa para o seu ensino. Acredita-se que a utilização de modelagem matemática como estratégia de ensino, extrapola os limites da educação convencional e torna o aluno sujeito-ativo na construção de sua aprendizagem, proporcionando um ensino prazeroso tanto para ele quanto para o professor. Ao desenvolver esta proposta em sala de aula, pode-se obter uma aprendizagem com significado voltado ao cotidiano do aluno. Atividades estas que contribuem para melhor compreensão de possíveis problemas do mundo real, e também para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de cada um dos aprendizes.

Percebe-se que a modelagem matemática pode influenciar na autodeterminação (motivação) do aluno na medida em que possibilita suas escolhas, seus fazeres e seu próprio modo de se estabelecer como sujeito produtor de campos matemáticos. Aprender matemática por intermédio do processo de modelagem possibilita ao aprendente a oportunidade também de discutir e refletir sobre as questões familiares, sociais, cotidianas e financeiras, tornando-o assim agente fundamental para as mudanças que devem ser geradas no ensino e no sistema educacional.

A Modelagem é um ambiente de aprendizagem que gera um significado sobre a matemática ao levar o estudante a perceber que modelos matemáticos fundamentam muitas de nossas decisões cotidianas quando se trabalha aspectos da realidade. Infere-se que no desenvolvimento das atividades de modelagem com os alunos pode ser de grande utilidade, porquanto se apresenta neste trabalho conteúdos do Ensino Básico que podem surgir de situações concretas e despertam no aluno o interesse e valorização da matemática. A atividade de modelagem em sala de aula é um dos caminhos para desenvolver, abordar e aplicar diversos assuntos matemáticos simultaneamente.

A Modelagem matemática não abandona, ou deixa de lado os conteúdos da disciplina, ou minimiza suas possibilidades de aprendizagem e nem reduzem os conteúdos, pelo contrário, auxilia na formação de seres mais autônomos. A modelagem não prescinde os conteúdos, resgata também aqueles que são de séries anteriores e também implementa e/ou introduz novos conteúdos com situações menos abstratas para os alunos.

Percebe-se assim que deve-se trabalhar com conceitos matemáticos na demonstração de sua aplicabilidade em situações reais. Dessa forma, a matemática não deixa de estar presente na realidade social, sendo mais chamativa e eficiente no processo do ensino-aprendizagem.

O professor não deve iniciar suas aulas diretamente com o conteúdo, mas buscar questões que podem gerar reflexão e inquietação para provocar a pesquisa, a reflexão e a discussão. O educador deve se sentir corajoso e ter a audácia de passar da zona de conforto, prática já conhecida e utilizada por ele, e adentrar em uma zona “rotulada” de zona de risco, prática que pode levar o educador a “lugares desconhecidos”.

No caso da Modelagem, o professor é constantemente colocado à prova. Pode-se sentir inseguro, visto que ele não sabe que tipo de tema poderá emergir da escolha dos alunos e nem como direcioná-lo às funções matemáticas envolvidas nesse tema, e pode também se sentir desafiado a compor nesses novos alinhamentos, até então não descobertos, uma nova etapa a ser aprendida. Essa possibilidade de aberturas, para a utilização do que é até agora desconhecido, transforma a modelagem em um atrativo para a interação do professor e seus alunos num crescer mútuo.

Entende-se que o trabalho em grupo pode trazer uma excelente contribuição para o trabalho com modelagem, pois, na medida em que o aluno interage com os colegas e com o professor, novas ideias são postas em discussão. Ao prosseguir com esse direcionamento, novos questionamentos são colocados e, na busca de respostas todos aprendem juntos.

A formação de professores em relação à modelagem deve transcender as vivências matemáticas e levá-los a terem experiências com o assunto. É necessário envolvê-los com conhecimentos associados às questões curriculares, didáticas e cognitivas da modelagem na sala de aula. Situações estas que só têm sentido na própria prática (casos de ensino, intervenções em sala de aula), em outras palavras, advoga-se que a formação de professores em relação à modelagem deve se basear em duas frentes indissociáveis: a modelagem propriamente dita e o conhecimento prático decorrente de sua abordagem na sala de aula.

Para avaliar a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos, em modelagem, o professor precisa promover diferentes situações em que seja possível discerni-las por suas propriedades intrínsecas. Assim, ao mesmo tempo, em que o educador avalia o significado atribuído aos conceitos matemáticos, os alunos têm a oportunidade de formalizar esses conceitos e reconhecer que eles podem ser utilizados em outras situações. Os resultados dessa avaliação podem ser reutilizados pelo docente em vários aspectos, ocasionando a superação de dificuldades que surgem da inserção de atividades matemáticas relativas ao projeto de modelagem em sala de aula.

A avaliação pode ser feita tanto coletiva quanto individualmente. Nessa etapa o professor deverá fazer uma análise do percurso vivenciado pelo aluno quanto ao processo de ensino-aprendizagem. Pode-se observar o que o aluno criou e até que ponto foi desenvolvida sua capacidade de solucionar situações-problemas na prática deste método. De acordo com Canen e Santos (2009, p. 27): “a avaliação da aprendizagem não deve ser confundida com controle, classificação ou punição dos alunos”. Esta é uma ferramenta que o professor deve utilizar para promover a aprendizagem. Dessa forma, aprimoramentos feitos na avaliação da aprendizagem refletirão em melhorias no desempenho dos alunos quanto ao raciocínio lógico matemático na dia a dia.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni. **Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana** (com mais exercícios). 12. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. v. 1. 223p.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?** Zetetiké, Campinas, v.7, n.11, p. 67-85, 1999. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=000127&pid=S0103-636X2012000300013000003&lng=en>. Acesso em: 23 jun. 2014.

______. **Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico.** Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2014.

______. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação.** Bolema, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_jonei_bolema.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2014.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BLUM, Werner; NISS, Mogens. **Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects -** state trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp 37–68, 1991. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00302716#page-1>. Acesso em: 29 maio 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; HERMINI, Helba Alexandra. **Estabelecendo critérios para a avaliação do uso de modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de Ciências Biológicas.** In: FAINGUELERNT, E. K.; GOTTLIEB, F. C. (Org.). *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Ed. Art Bureau, p. 95-113, 1999.

_____. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas**. São Paulo: Revista de Educação Matemática, v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação: Orientações Curriculares Nacionais. **Ensino de quinta a oitava séries. Introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2104.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação: Orientações Curriculares Nacionais. **Educação Fundamental. introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF,1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: dd mai. 2014.

BURAK, Dionísio; ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.** Curitiba: CVR, 2012.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**. Rio Claro-SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho-UNESP. Disponível em: <http://dionisioburak.com.br/documents/DissertacaoDionisio.pdf>. Acesso em: 12 Jun. 2014.

CANEN, Ana; SANTOS, Ângela Rocha dos. **Educação multicultural: teoria e prática para professores e gestores em educação**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

EUCLIDES. **Elementos de Geometria** (dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Commandino). Série Científica. Adicionados e ilustrados por Roberto Simson. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: <http://pensamentosnomadas.files.wordpress.com/2012/04/os-elementos-euclides.pdf >. Acesso em: 14 jul. 2014.

FARAGO, Jorge Luiz; LAPA, Cintia Cristina Bagatin; CARNEIRO, Lucio Nicolau dos Santos. Projeto Eco: **Matemática** - Ensino Médio - 2ª série. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2010. v. 1. 288p.

FIORENTINI, Dario. **Um estudo histórico da Educação Matemática Brasileira enquanto campo de investigação**. HEM BRaga 96. In: Programa do Congresso Internacional de História e Educação Matemática, 1996, Braga. Um estudo histórico da Educação Matemática Brasileira enquanto campo de investigação. HEM BRaga 96, 1996. v. 1. p. 29-29.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

KITCHEN, A., WILLIAMS, J. **Implementing and assessing mathematical modelling in the academic 16-19 curriculum.** In: T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.). Teaching and learning mathematics in context. Chichester: Ellis Horwood, 1993. p. 138-150

OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira; BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática e situações de tensão e as tensões na prática de Modelagem**. Revista Bolema, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=000240&pid=S0103-636X2012000300012000031&lng=en>. Acesso em: 08 jun. 2014.

PRIMON, Maria Julia Rocha. **Educação matemática e melhoria da qualidade de vida: tratando o problema da obesidade.** Artigo Científico desenvolvido através do Programa de Desenvolvimento Educacional PDE. Apucarana - PR 2008. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_maria_julia_rocha_primon.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2014.