UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

UM RELATO SOBRE A INTRODUÇÃO ÀS SOMAS DE RIEMANN NA EDUCAÇÃO BÁSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALEX CATUZZO LOPES

Santa Maria, RS, Brasil

2014

UM RELATO SOBRE A INTRODUÇÃO ÀS SOMAS DE RIEMANN NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ALEX CATUZZO LOPES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração: Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Dra. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Catuzzo Lopes, Alex
Um Relato Sobre a Introdução às Somas de Riemann na Educação Básica / Alex Catuzzo Lopes.-2014.
109 p.; 30cm

Orientador: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Revisão do Cálculo de Área de Quadriláteros e Triângulos 2. Método de Arquimedes no Cálculo da Área do Circulo 3. Método de Riemann no Cálculo da Área de Regiões Curvilineas I. de Fátima Maciel Cardoso Brum, Valéria II. Titulo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

UM RELATO SOBRE A INTRODUÇÃO DAS SOMAS DE RIEMANN NA EDUCAÇÃO BÁSICA

elaborado por
Alex Catuzzo Lopes

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

Valendes
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra.
(Presidente/ Orientadora)

Lineia Schütz
Lineia Schütz, Dra. (UFRGS)

Maria Inês Martins Copetti, Dra. (UFSM)

Lidiane Buligon
Lidiane Buligon, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 28 de Agosto de 2014.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares que sempre me incentivaram. Dedico especialmente aos meus pais Vespúcio e Beatriz, meu irmão Alessandro, à minha esposa Nadia e minha filha Isabella. Essa conquista é de vocês.
Amo muito vocês!

AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Valéria Cardoso Brum, pela orientação, por todas as dicas, sugestões e ideias, por apontar sempre o norte e deixando sempre o caminho livre para que eu pudesse construir o presente trabalho.

À diretora da Escola Estadual de Ensino Médio Irmão Guerini, Professora Neiva Spadari, por abrir as portas da escola e à professora Debora Gerzson por ter cedido uma de suas turmas para o desenvolvimento do trabalho.

Aos alunos da turma de terceiro ano que me acolheram e, não mediram esforços, durante todo o desenvolvimento do trabalho, foram sempre assíduos, participativos e dedicados, o meu muito obrigado.

À coordenadora local do mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Professora Dra. Carmen Matias, por encarar o desafio de trazer o PROFMAT para Santa Maria.

Aos professores do curso de mestrado profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), pela dedicação, sugestões, dicas e, momentos e reflexão e, pelo conhecimento matemático aprofundado.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro, fundamental para a realização do curso.

Aos colegas do mestrado da turma de 2012 da UFSM, pela troca de experiência, pelo convívio e, pelos momentos de estudo. Todos foram fundamentais e contribuiram para o enriquecimento de minhas práticas docentes.

Aos colegas, Cristine, Gustavo e Leila, pelos grupos de estudo nos finais de semana, fundamentais para o meu aprendizado, e por nossos momentos de reflexões nas viagens, a partir do segundo semestre de 2012.

Aos meus dois amores, minha filha Isabella, que naqueles momentos de estudo e cansaço mental, pedia a atenção para brincar, e, com isso limpar a mente, do papai, tranquilizando-o no retorno dos estudos. À minha esposa Nadia, pela compreensão, apoio, entendimento, e por assumir, muitas vezes integralmente, nossa filha, nosso maior tesouro. À vocês o meu amor e carinho. Amo vocês.

Às professoras Elizane Pruner e Vera Rodolfo, revisoras do meu *Abstract* e a Professora Andreia Souza pela revisão Ortográfica.

Aos meus pais Vepúcio e Beatriz e ao meu irmão Alessandro pelo incentivo constante e por sempre acreditar na minha capacidade.

Acima de tudo, agradeço a DEUS, pela proteção, por guiar e sempre nortear o meu caminho. Essa conquista se deve à luz e bençãos por Ele derramadas.

"A geometria faz com que possamos adqurir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida."

Jacques Bernoulli

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat)
Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

UM RELATO SOBRE A INTRODUÇÃO ÀS SOMAS DE RIEMANN NA EDUCAÇÃO BÁSICA

AUTOR: ALEX CATUZZO LOPES
ORIENTADORA: VALÉRIA DE FÁTIMA MACIEL CARDOSO BRUM
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 28 de Agosto de 2014.

O presente trabalho apresenta de modo intuitivo, por meio de cálculo de área de três figuras geométricas planas, uma introdução ao Cálculo Integral. São aplicados conceitos geométricos usuais no ensino médio tendo em vista que o trabalho é aplicado em uma turma de terceiro ano. Nesta etapa dos estudos os alunos estão familiarizados com conceitos específicos, como o cálculo de área de quadriláteros e triângulos, por exemplo. O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo são apresentados argumentos, por meio de revisão na literatura, com o propósito de responder à pergunta, de certo modo intrigante: Cálculo Integral no Ensino Médio? Busca-se nesses argumentos justificar o uso de dois métodos - o método de Arquimedes (utilizado para determinar a área do círculo)e o método de Riemann (utilizado para determinar a área de três regiões curvilíneas, o círculo, a elipse e a região entre a curva descrita por uma função polinomial e o eixo OX)-. Nesses dois métodos, são introduzidos, implicitamente, conceitos de limites e integral definida. Na descrição do trabalho de aplicação são relatadas situações exemplos, com a transcrição de comentários. Além disso, são apresentadas resoluções de atividades avaliativas desenvolvidas pelos alunos. No terceiro capítulo, o autor destaca reflexões relativas ao trabalho aplicado, apresenta algumas considerações e suas conclusões acerca do trabalho desenvolvido.

Palavras - chave: Ensino, Geometria, Cálculo Integral, Área

ABSTRACT

Master's Dissertation
Professional Master's degree in Mational network Mathematics(ProfMat)
Santa Maria Federal University - UFSM

A REPORT ON THE INTRODUCTION TO THE RIEMANN SUMS IN BASIC EDUCATION

AUTHOR: ALEX CATUZZO LOPES
ADVISOR: VALÉRIA DE FÁTIMA MACIEL CARDOSO BRUM
Place and date of presentation: Santa Maria, 28 of August, 2014.

The present study describes, by calculation of area of geometric plane figures, an application of the Integral Calculus, intuitively. Usual geometric concepts are applied in high school, considering that the work is applied to a class of third year. At this stage of the studies, students are habituated with specific concepts such as calculating the area of quadrilaterals and triangles, for example. The work is divided into three chapters. Arguments are presented through literature review in the first chapter, in order to answer the question, somewhat intriguing: Integral Calculus in high school?. We seek, in these arguments, justify the use of two methods - the Archimedes method (used to determine the area of a circle), and the method of Riemann (used to determine the area of three curvilinear regions, circle, ellipse, the area between the curve described by a polynomial function and the OX axis). In these two methods are implicitly introduced concepts of limits and definite integral. In chapter two is described the application work. In it are related examples with the transcription of comments, observations and questions of the students. Furthermore, resolutions of evaluative activities by students are presented. In the fourth chapter the author highlights reflections on the applied work, presents some considerations and conclusions about the developed work.

Key words: Teaching, Geometry, Integral Calculus, Area

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

Introdução

A matemática revela-se como uma das ciências exatas realmente menos atraente pela maioria da população. Para se constatar essa afirmação, basta perguntar em qualquer sala de aula, a partir do ensino fundamental, qual a disciplina, de todas as que compõem o currículo escolar, que os alunos menos se interessam. Logo se ouvirá como resposta: "Matemática!"

Mas qual o motivo desta escolha? Por que os alunos apontam a matemática como o "bicho papão"de todas as disciplinas? Ora, porque a maioria dos alunos e a grande parte dos professores de matemática não a conhecem com toda a sua beleza, harmonia e singularidade.

O universo matemático é tão amplo que, quanto mais se estuda e conhece, mais se percebe o quão profundo e cheio de significados é esse universo e o quanto existe de desconhecido para ser investigado, estudado e descoberto.

O ensino e aprendizagem de matemática, desde as séries iniciais, até o ensino superior, é foco de inúmeros estudos. Muitos estudiosos, em especial, na área de matemática e educação matemática, destacam que a maioria dos alunos que apresentou dificuldades durante sua vida escolar não tinha compreensão da maioria dos conceitos matemáticos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio — PCNEM —, Brasil,(1999, p. 207)

> Os objetivos do Ensino Médio, em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida comtemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e uma visão de mundo. Para a área de Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.

Contrapondo com esses objetivos, Almouloud (2014, p.68), afirma que esses conhecimentos práticos e contextualizados

> têm sido objetos de polêmicas e equívocos na problematização de situações que têm significado para os estudantes. Muitas vezes, alguns autores de livros didáticos e professores propõem situações de ensino que envolvem somente o cotidiano e aspectos utilitários. Isso torna pobre a ideia de contexto e de contextualização e pode até conduzir ao enfraquecimento dos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Além disso, deve-se acrescentar que os professores de matemática, em sua maioria, não recebem uma formação adequada e direcionada à educação básica. Segundo Lima (2007, p.165): "O professor de Matemática [...] tem, na maioria das vezes, uma formação pouco satisfatória. Na faculdade, salvo algumas exceções, nunca estudou a matéria que vai ensinar pois ela não é considerada assunto de nível universitário".

Nessa perspectiva, ao introduzir um assunto novo, relacionado ao ensino de geometria, por exemplo, ao invés de iniciar com uma situação-problema instigando o aluno a construir sua resposta, o professor segue à risca os roteiros descritos nos livros didáticos.

Para Lockhart (2014, p.52)

> O livro didático apresenta um conjunto de definições, teoremas e provas, que o professor copia na lousa, que os alunos copiam no caderno. Eles têm então de imitar esse modelo durante os exercícios. Aqueles que se adaptam rapidamente ao modelo são os 'bons' alunos.

A situação acima citada ocorre em todos os níveis de ensino. Nesse sentido, deveria-se repensar o currículo, pondo em prática o que está descrito nos PCNEM (1999a). Segundo os PCNEM, "pretende-se promover competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos.[...]".

De acordo com o que foi mencionado, no início da introdução sobre os PCNEM, a intenção é instigar o aluno por meio de situações problemas, a fim de que ele construa conceitos e, a partir destes, tenha conhecimento necessário e suficiente para formalizar suas ideias por meio de linguagem matemática adequada.

Nessa perspectiva, essas considerações vão ao encontro das ideias descritas por Almouloud (2014a). Segundo ele:

> Para que realmente haja ensino e aprendizagem, é necessário que o saber seja um objeto importante e essencial para as interações entre o educador e a classe, e que esse saber seja uma aposta importante para a escola.[...]
> As situações têm de ser concedidas para permitir aos alunos agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo novos conhecimentos.[...]
> [...] Saber matemática é também identificar noções e teoremas como elementos de um *corpus* cientificamente e socialmente reconhecido. É ainda formular definições, enunciados e teoremas desse *corpus* e demonstrá-los.
> [...]Ensinar Matemática, por um professor, é criar condições favoráveis à produção de conhecimento pelos estudantes.

Nesse sentido, muitos conceitos podem ser inseridos por meio de situações-problemas, as quais podem ser traduzidas por meio de modelos matemáticos. Modelos estes que somente irão despertar no aluno o gosto pelo ensino-aprendizagem da matemática a partir da elaboração e construção desses conceitos.

Ao referir-se aos modelos matemáticos, deve-se levar em consideração a importância que a modelagem matemática tem na resolução de problemas. A construção de modelos permite ao aluno sintetizar uma situação problema e, generalizá-la a tal ponto que quando surgirem situações semelhantes, essa descoberta possa se aplicar sem que, para isso, ele precise criar um novo modelo.

Com relação à modelagem, Bassanezi (2013, p.16) afirma que:

> A *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.
> As vantagens do emprego da modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos [...]. A modelagem pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas da pesquisa.

A partir desta reflexão, busca-se empregar no ensino de matemática tais ferramentas de tal forma que dêem ao aluno subsídios necessários para a real compreensão dos conteúdos que, a ele, são ensinados.

A opção pelo ensino de Geometria, como trabalho de aplicação, deu-se por uma escolha particular do professor. Muitos são os fatores que podem ser elencados para justificar tal escolha, o principal é que: o ensino de geometria desde muito tempo vem sendo deixado de lado, em detrimento a outros tópicos de matemática. Não que estes não sejam importantes, cada um tem seu grau de importância e, são complementares.

O fato é que deixou-se de lado a construção prática, focada nas construções geométricas, e suas diversas aplicações, para trabalhar conceitos cada vez mais abstratos e distantes do aluno. Criou-se, também, um abismo cada vez maior na formação do professor, conforme já mencionado por Lima, na página 15 da presente introdução. Desta forma, delimitou-se o conteúdo focado no ensino de geometria, restringindo-o ao cálculo de área.

O trabalho aplicado na turma foi dividido em três partes distintas, das quais, a primeira parte descreve uma revisão do cálculo de área de quadriláteros (quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losângo) e triângulos. Na segunda parte, foram desenvolvidas atividades relacionadas ao cálculo de área, com a aplicação do método de Arquimedes, que consiste na inscrição e circunscrição de polígonos regulares no círculo. Na terceira parte, foram desenvolvidas atividades relacionadas à aplicação do método de Riemann, caracterizado pela inscrição e circunscrição de retângulos, com uma das dimensões apresentando a mesma medida em todos os retângulos.

A escolha destes dois métodos é devida a importância que eles têm para o cálculo no ensino superior, e, por considerar que o aluno de ensino médio está familiarizado com o cálculo de área de figuras geométricas planas, nesta etapa dos estudos.

A aplicação dos dois métodos, tanto de Arquimedes, quanto o método de Riemann, permitem ao aluno construir, mesmo que intuitivamente, conceitos de matemática avançada, como o cálculo de Limite e Integral. Vale salientar que todos os tópicos desenvolvidos foram descritos com o auxílio do software geogebra, ferramenta indispensável, atualmente, na sala de aula.

Como forma de acompanhar e medir o grau de compreensão dos alunos, foram aplicadas atividades avaliativas, após o desenvolvimento de cada tópico, desde a revisão, até a aplicação do método de Riemann. É importante destacar que, as atividades avaliativas representam parte da avaliação dos alunos. Deve-se levar em conta a participação dos alunos, seja ela por meio de questionamentos, por contribuições durante o desenvolvimento das atividades ou por participação ativa na construção dos conteúdos desenvolvidos. Cabe ressaltar que, apesar de muitos alunos não participarem com ponderações no grande grupo, eles contribuem em pequenos grupos e, isso deve ser levado em consideração.

Por fim, são apresentadas, no último capítulo, algumas considerações acerca do trabalho desenvolvido. Em última análise, afirma-se que o trabalho que será descrito, no capítulo 3 pode ser aplicado em uma turma regular, desde que seja respeitado o tempo de cada aluno. Pode-se, ainda, acrescentar que os conceitos de limite e cálculo integral podem ser inseridos, sem prejuízo ao aluno, porém de modo intuitivo, por meio de construções geométricas.

Capítulo 1

Cálculo Integral no Ensino Médio?

A resposta mais conveniente e imediata para esta pergunta, seria: "É impossível!"Realmente aplicar conceitos de cálculo integral no ensino médio é o mesmo que ensinar o teorema de Pitágoras a uma criança que está sendo alfabetizada, ou ainda, exigir desta que faça a análise sintática de uma oração em uma aula de Língua Portuguesa, por exemplo.

Um estudante de graduação, na área de ciências exatas, após ter estudado cálculo integral, consegue relacionar e destacar inúmeras aplicações deste tópico tão importante. Dentre elas, pode-se mencionar, por exemplo, o cálculo de área entre curvas, o volume de sólidos, fluxo sanguíneo, aplicações à economia, biologia.

Stewart (2008, p. 9) resume:

> *Sir* Isaac Newton inventou sua versão do cálculo a fim de explicar o movimento dos planetas em torno do sol. Hoje o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo de saída do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas.

De fato, esse entendimento é possível após o estudante ter frequentado um curso de cálculo diferencial e integral e, além disso, ter obtido um bom aproveitamento. Como é possível perceber, são inúmeras as aplicações. Nesse sentido, um aluno de ensino médio, possivelmente, não teria o conhecimento necessário para entender o cálculo integral, muito menos, para aplicá-lo.

Analisando o estudo envolvido no cálculo de integrais, percebe-se, ainda na introdução dos conceitos, o uso de formas geométricas como método para determinar áreas.

Para Anton (2000, p. 378-9), "o primeiro avanço real, além do nível elementar no cálculo de áreas, foi feito pelo matemático grego Arquimedes, que arquitetou uma técnica engenhosa [...] chamada método da exaustão."O autor ainda complementa:

> No século XVII, vários matemáticos descobriram como obter áreas mais facilmente usando limites. [...] O maior avanço em relação a um método geral para o cálculo de área foi feito independentemente por Newton e Leibniz, os quais descobriram que as áreas poderiam ser obtidas revertendo o processo de diferenciação.

De acordo com o autor, antes das descobertas de Newton e Leibiniz, muitas foram as tentativas para se obter a área de regiões com formatos curvilíneos, sendo atribuído a Arquimedes os principais avanços para o cálculo de área de regiões como espirais, quadratura da parábola e área do círculo, dentre muitas outras contibuições relacionadas à física e a mecânica.

Segundo o mesmo autor, determinar a área de regiões que apresentavam formatos conhecidos, como retângulos, quadrados, triângulos, polígonos quaisquer, portanto, regiões com os lados retos, era fácil, bastava para isso usar fórmulas padronizadas. Mais uma vez pode-se afirmar que são necessários conhecimentos prévios para que um estudante secundarista consiga resolver situações-problemas envolvendo o cálculo integral.

No século XIX, Riemann descreve um método de cálculo, baseado na descoberta de Newton e Leibiniz. Boyer (2012, p.392) afirma que:

> A definição atual de integral sobre um intervalo em termos de somas superiores e inferiores é geralmente conhecida como integral de Riemann, em honra do homem que deu condições necessárias e suficientes para que uma função limitada seja integrável.

Nesta mesma linha de raciocínio, Rooney (2012, p.162)acrescenta: "Riemann refinou o método para calcular uma integral, sugerindo comparar dois conjuntos de finas fatias, um de fatias inscritas e outro de fatias circunscritas."

Restringindo o cálculo de área, para a região delimitada por um círculo, tanto o método de Arquimedes, quanto o método de Riemann, utilizam formas geométricas conhecidas para o cálculo de área deste tipo de região. Enquanto Arquimedes utilizou polígonos regulares para a obtenção da área, Riemann fez uso de retângulos, nos quais uma das dimensões, a base, por exemplo, apresentava a mesma medida em todos os retângulos.

A área de polígonos regulares e, de retângulos, pode ser determinada por um aluno de ensino médio, sem maiores restrições. Admite-se que, nesta etapa de estudos, o aluno já possua conhecimento suficiente e necessário para determinar a área de polígonos regulares e, de retângulos, uma vez que, aplicam-se razões trigonométricas, no triângulo retângulo, para a obtenção da área de polígonos regulares e, estas relações são estudadas no ensino médio.

Nesse sentido, pode-se afirmar que é possível introduzir, no ensino médio, o cálculo integral através do cálculo de área de regiões curvilíneas, por meio da aplicação da área de polígonos regulares, com o método de Arquimedes ou, por meio da área de retângulos, com o método de Riemann, sendo que neste último método, uma das dimensões é igual em todos os retângulos.

1.1 Por que escolher Geometria plana como projeto de aplicação?

O ensino de geometria está presente no dia a dia do ser humano, por associação, classificação e comparação de diferentes formas geométricas. A criança inicia, de modo informal, a construção de conceitos associados à geometria. Mais tarde, nos primeiros anos da vida escolar, a criança é introduzida ao ensino formal, no qual ela passa a ter esse primeiro contato instrutivo, com a introdução de formas geométricas, como blocos lógicos e material dourado.

O aluno adquire um conhecimento superficial em matemática, nas séries iniciais, pois o ensino de matemática torna-se cada vez mais distante do ideal. Devido à formação precária dedicada aos futuros professores das séries iniciais, cria-se um abismo cada vez maior na formação do aluno. Além disso, a formação dos professores que atuam nas séries seguintes não é diferente.

Tendo sua formação precária, na escola, Lima (2002, p. 156) destaca que:

> "[...] quando o jovem entra na faculdade, não teve uma boa formação na escola, logo não conhece bem a matemática que vai ensinar."Ao entrar na faculdade, sem uma boa base em matemática, esses futuros professores estudam disciplinas relacionadas ao ensino superior, como o "Cálculo, Variáveis complexas, Equações Diferenciais"dentre outras não sendo preparados para disciplinas da educação básica como "Geometria no espaço e análise Combinatória", por exemplo.

O mesmo autor observa que esse fato ainda é mais grave quando trata-se do ensino de geometria. Segundo Lima (2002, p. 150), "Nossa imitação da Matemática Moderna resultou em abandono da Geometria e dos cálculos numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desligado da realidade."

Apesar de constar nos programas de ensino, o ensino de geometria é deixado para o final do ano letivo e, na maioria das vezes, não se ensina, devido ao tempo dedicado aos demais conteúdos.

Como forma de introduzir conceitos de matemática avançada na educação básica, especificamente no ensino médio, tenta-se, embora superficialmente, descrever um pouco destes conceitos, direcionando-os ao ensino de geometria por meio do cálculo de regiões com formatos curvilíneos.

Nesse sentido, busca-se: introduzir conceitos de matemática avançada, por meio do cálculo de área, apontar as inúmeras aplicações que o estudo de geometria proporciona, orientar o aluno na construção e identificação de diferentes formas geométricas, proporcionar ao aluno a construção geométrica e aritmética de conceitos e entes matemáticos que a eles são aplicados por meio de fórmulas prontas, despertar no aluno a criatividade e a vontade de aprender geometria, criar, com o aluno, modelos geométricos, estabelecendo conexões com a realidade, propor situações-problemas com enfoque geométrico.

Pretende-se, a partir destes objetivos, fornecer subsídios ao aluno, a fim de que ele possa construir modelos, necessários e suficientes, para o entendimento da matemática desenvolvida nos tópicos aqui apresentados.

1.2 Modelagem Matemática

Ao propor a criação de modelos matemáticos, busca-se despertar no aluno maior interesse pelo assunto envolvendo o cálculo de área e, implicitamente a introdução do cálculo integral. Desta forma, conforme explica Bassanezi (2013, p. 36)

> No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, tem sido defendida por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática. [...] a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional.

Nessa mesma linha de raciocínio, Almeida (2013, p.13) afirma que

> um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro estudo.

Tais modelos matemáticos servem para traduzir, por meio de uma simbologia apropriada, diversos tipos de fenômenos, físicos ou não. Esses modelos apresentam-se com o propósito de descrever determinado fenômemo e, talvez, permitir que se façam predições sobre comportamentos futuros.

Vindo de encontro a essa perspectiva, Anton (2000, p. 61) acrescenta: "Os modelos podem ser expressos em termos de gráficos, de tabelas, de equações, variando desde o mais simples ao extremamente complicado."

Alguns exemplos de fenômenos do mundo real que podem ser traduzidos por meio de um modelo matemático são mencionados por Stewart (2008, p. 25). Segundo ele, são exemplos de fenômenos: "o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes."

Admite-se, então, que a partir da modelagem matemática, muitos fenômenos, sejam eles físicos ou químicos, podem ser descritos, e, assim, interpretados. O uso de modelos matemáticos, portanto, tem um papel fundamental na construção do conhecimento, pois permite ao indivíduo, sua real interpretação.

Desta forma, no trabalho de aplicação, dividido em três estapas, busca-se construir o conhecimento mediante o uso de modelos matemáticos. A partir da primeira construção, a medida que o assunto é aprofundado e que novos elementos surgem, outros modelos são construídos, embasados nos anteriores.

Na primeira etapa, introduz-se uma revisão, envolvendo o cálculo de área de figuras geométricas planas. Nessa etapa, são apresentados diferentes figuras, dentre quadriláteros e triângulos. Para cada nova figura, deve-se construir um novo modelo matemático. Em cada caso deve-se criar um modelo particular e, em seguida, generalizar para aquela figura.

De modo análogo, por meio de modelos, estende-se essa construção, às etapas dois e três, tanto na aplicação do método de Arquimedes, com a construção da área do círculo, quanto na aplicação do método de Riemann, com construção da área do círculo, da elipse e, de regiões descritas por meio de funções polinomiais.

Busca-se, com isso, construir com o aluno, por meio do uso de modelos matemáticos, conceitos impostos na maioria das vezes. Além disso, pretende -se direcionar tais modelos de tal forma que permitam introduzir conceitos de matemática avançada, no caso específico, a introdução do cálculo integral, por meio do cálculo de área.

Capítulo 2

A aplicação do trabalho

2.1 O primeiro contato com os alunos

O projeto foi aplicado na Escola Estadual de Ensino Médio Irmão Guerini, localizada no Bairro de Ana Rech, em Caxias do Sul. A opção por aplicar o projeto nesta escola se deve ao fato de o professor ter feito parte do quadro docente da escola, no período compreendido entre os anos de 2003 e 2012. A turma escolhida iniciou o ano letivo com 41 alunos matriculados, dos quais 36 frequentaram a maioria das aulas, foram assíduos e participaram do projeto.

No primeiro contato, os alunos realizaram uma auto-avaliação, na disciplina de matemática, mais especificamente, em alguns tópicos de geometria, conhecimento de algum software matemático e as expectativas do projeto.

Nesse estudo são apresentados, a partir do próximo tópico, relatos, contribuições e questionamentos dos alunos. Com o intuito de facilitar o entendimento e, com isso, informar todos os relatos de um mesmo aluno, cada aluno foi identificado por meio de um dos seguintes códigos: A_1 até A_{36}. Tais códigos foram atribuídos a cada aluno, a medida que se manifestaram, não seguindo a ordem da chamada oficial da turma, a fim de evitar a identificação dos mesmos.

Além disso, será usado o código A_n, que servirá para destacar a participação de um grupo de alunos, quando a maioria manifestar a mesma opinião, o código Pr. para identificar as falas do professor e, também serão usados os códigos $A_{x_1}...A_{x_n}$ para organizar as respostas dos alunos nos questionários Inicial e Final.

2.2 Questionário 1 (Inicial)

A primeira questão apresentada aos alunos diz respeito ao aprendizado em matemática. Dentre todos os alunos, 02 alunos classificaram o seu conhecimento como muito bom, justificando:

A_{x_1} _ O meu aprendizado é baseado em muito sucesso, esforço e dedicação.

A maioria, 26 alunos, classifica-se com um bom conhecimento em matemática. Algumas justificativas desses alunos foram:

A_{x_2} _ Bom, pois não lembro de todo o conteúdo;

A_{x_3} _ Consigo resolver problemas matemáticos e procuro prestar atenção para melhorar a aprendizagem;

A_{x_4} _ Porque aprendo com facilidade mas tenho algumas dificuldades em determinados assuntos;

A_{x_5} _ Tenho um bom entendimento nas explicações, questiono;

A_{x_6} _ Não sou um grande "amante"da matéria mas tento resolver os problemas dados;

A_{x_7} _ Pois possuo uma certa dificuldade para compreender cálculos matemáticos;

A_{x_8} _ Consigo aprender bem as matérias, somente tenho dificuldades com alguma matéria em que faltei algum dia a aula e assim me dificultei um pouco;

A_{x_9} _ Pois eu tenho uma facilidade de compreender fórmulas.

Outros 07 alunos avaliaram o seu conhecimento em matemática como regular, eis algumas justificaticas:

$A_{x_{10}}$ _ Tenho algumas dificuldades para aprender a matéria, mas me dedico ao máximo;

$A_{x_{11}}$ _ Tenho algumas dificuldades em memorizar algumas fórmulas de contas;

$A_{x_{12}}$ _ Nunca gostei de matemática e isso reflete no meu aprendizado nessa matéria.

Outra questão, agora sobre geometria:

Sobre o ensino de Geometria, assinale, dos ítens listados abaixo, aqueles que você lembra ter estudado. A tabela 2.1 apresenta o número de alunos que tinham lembranças dos tópicos apresentados, poderiam ser assinaladas várias opções.

Conteúdos listados	Número de alunos	Conteúdos listados	Número de alunos
Ponto, Reta e Plano	30	Perímetro	19
Área	30	Volume	12
Segmento de Reta	19	Ponto Médio	00
Polígonos	10	Ângulos	27
Círculo	18	Tipos de Reta	29
Elipses	03	Hipérbole	05

Tabela 2.1: Relação de conteúdos de geometria x Quantidade de alunos

O que chama a atenção, dentre todos os itens listados, foi a não correlação entre o ponto médio de um segmento, com a média aritmética. Conceito que é frequentemente usado, pelos próprios alunos.

Ainda com base no mesmo assunto, a questão seguinte pedia para os alunos responderem quais daqueles conceitos eles ainda lembravam como resolver. A maioria destacou

Conteúdos listados	Número de alunos	Conteúdos listados	Número de alunos
Ponto, Reta e Plano	16	Perímetro	06
Área	23	Volume	06
Segmento de Reta	03	Ponto Médio	00
Polígonos	05	Ângulos	07
Círculo	03	Tipos de Reta	06
Elipses	00	Hipérbole	01
Não lembra de nenhum	12		

Tabela 2.2: Relação de alunos que ainda sabem resolver alguns dos tópicos listados

o cálculo de área, este fato pode ser percebido na Tabela 2.2. Justificaram que foi pelo fato de terem iniciado o ano letivo com a revisão de conceitos iniciais sobre área de figuras geométricas planas e uma introdução aos conceitos de geometria espacial. Justificativa confirmada pela professora titular.

Novamente, pode-se observar que não há conexão entre alguns dos tópicos relacionados na questão e a revisão do início do ano letivo como, área de polígonos, ou mesmo a medida do lado de um retângulo e/ou diagonal do mesmo, mediante o uso do teorema de Pitágoras, obtendo com isso, segmento de reta (lado do retângulo) perímetro da figura, vértices (ponto) etc..

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, a próxima questão era buscar informações com os alunos sobre quais polígonos eles sabiam calcular a área e qual foi sua forma de aprendizagem. Na Tabela 2.3 estão indicados o conteúdo e a quantidade de alunos que sabem determinar a área enquanto que a Tabela 2.4 apresenta o modo como aprenderam calcular a área pela quantidade de alunos correspondente, observe.

Conteúdo	Quantidade de alunos	Conteúdo	Quantidade de aluno
Quadrado	35	Triângulo	26
Retângulo	30	Losango	12
Trapézio	11	Paralelogramo	14
Círculo	26		

Tabela 2.3: Relação de conteúdos x Quantidade de alunos que sabem determinar a área

Essa questão expõe uma situação que, de modo geral, vem ocorrendo na maioria das escolas, com alunos seguindo "receitas"com fórmulas pré - estabelecidas, sem a devida preocupação com a construção do conhecimento. Este problema se deve, em parte, devido a redução da carga horária nas aulas de matemática, além do acúmulo de alunos nas salas de aula. Outro fator agregado é a falta de estímulos aos professores como, por exemplo, recursos audiovisuais para as salas de aula, laboratórios de informática bem equipados, laboratórios de ciências e matemática.

Forma de aprendizagem do cálculo de área	Quantidade de alunos
Por meio de fórmulas	32
Utilizando material concreto	01
Usando malha quadriculada	02
Outros	00

Tabela 2.4: Modo como aprenderam calcular a área x quantidade de alunos

Cabe ressaltar que, a escola onde o projeto foi aplicado possui, desde 2013, todas as salas de aula equipadas com computador, datashow e sistema de som, todos em perfeitas condições de uso, além de laboratório de informática equipado com computadores. No entanto, como a grande maioria das escolas de rede estadual não dispõe de um professor específico para o laboratório, que possa auxiliar o professor durante um trabalho de pesquisa.

Na sequência do questionário buscou-se saber se os alunos lembravam do teorema de Pitágoras. Observa-se aqui que os alunos haviam revisado no primeiro mês de estudos área de figuras planas, nas quais em muitos casos exigia a aplicação do teorema. Dos 36 alunos, 27 disseram lembrar, 8 disseram não lembrar do teorema e um não respondeu essa questão. A outra questão, seguindo, nesse mesmo pensamento, indaga se o teorema pode ser aplicado em Geometria, 30 alunos responderam que sim, justificando:

A_{x_1} _ Ele é utilizado para determinar alguns tipos de áreas. Ex. Trapézio, retângulo;
A_{x_2} _ Hipotenusa é igual a $c^2.c^2$;
A_{x_3} _ Para descobrir a hipotenusa e os catetos;
A_{x_4} _ Por causa que foi o que eu entendi sobre a explicação da professora;
A_{x_5} _ Dependendo da fórmula geométrica;
A_{x_6} _ $h^2 = c^2 + c^2$;
A_{x_7} _ Pode ser usado para descobrir os lados de um triângulo;

dentre muitas outras respostas. Complementando a questão, 02 alunos responderam que não, que o teorema de Pitágoras não pode ser aplicado no ensino de geometria, justificando:

A_{x_8} _ Esqueci; ou
A_{x_9} _ Não lembro, mas acho que pode sim;
outros 04 alunos não responderam essa questão.

Percebe-se, a partir das respostas apresentadas, que os alunos não tem conhecimento construído de tópicos relacionados ao ensino de geometria, mostrando em algumas das respostas, o uso de fórmulas "sem sentido". Isto é, fórmulas sem uma relação específica, ou ainda, direcionada como a resposta: "Dependendo da fórmula geométrica".

Para completar esse questionário inicial, a penúltima questão buscou saber se os alunos conheciam algum software matemático. Dos 36 alunos que participaram, 21 responderam conhecer e citaram a planilha eletrônica Excel; 14 responderam não conhecer; e 01 aluno não respondeu essa questão.

Finalizando a pesquisa inicial, a última questão buscou saber sobre as expectativas dos alunos com a aplicação do projeto (ver tabela 2.5). Percebe-se, nesta questão, que a maioria dos alunos espera uma combinação entre o uso de tecnologia, por meio de softwares matemáticos, e aulas convencionais.

Expectativas das aulas	Quantidade de alunos
O uso de softwares matemáticos	05
Aulas convencionais, usando quadro e giz	03
Uma combinação entre o uso de tecnologia e aulas convencionais	32
Outro modelo de aula, citar	00

Tabela 2.5: Expectativas com o projeto x quantidade de alunos

2.3 Construção do trabalho de aplicação

O trabalho de aplicação foi elaborado a partir de uma situação - problema, prática, que pode fazer parte do dia a dia dos alunos e, além disso, pode ser aproveitada para o desenvolvimento e construção de conceitos matemáticos significativos em sala de aula. Apresenta-se aos alunos a seguinte situação-problema:

> "Como revestir o fundo de uma piscina em forma de elipse, usando cerâmica, de tal modo que as peças utilizadas deixem o mínimo de resíduos, isto é, de tal modo que o desperdício de material seja o mínimo possível?"

A partir do questionamento desenvolve-se o trabalho de aplicação, que foi estruturado em quatro tópicos, dos quais o primeiro ilustra o uso do cálculo de área e algumas aplicações do ensino de geometria, tendo como motivação, para o início dos estudos, obras arquitetônicas da atualidade.

O último tópico apresenta algumas ferramentas do software GeoGebra, indispensáveis para a resolução de parte das atividades produzidas no material e, destinadas ao desenvolvimento do trabalho nos tópicos 2 e 3. Os itens destacados neste último tópico servem de breve suporte para que os alunos saibam manipular o software. Disponibiliza-se, além disso, o manual completo do software em arquivo digital ou, ainda, links de páginas com o arquivo para download.

Os tópicos 2 e 3 representam o foco do estudo em questão. No tópico 2 (Área de quadriláteros e triângulos) são apresentados alguns conceitos iniciais referentes à área do triângulo e a área de quadriláteros, como o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o trapézio e o losângo, estes três últimos apresentados apenas como fonte de revisão e conhecimento. Para cada forma apresentada, foram dados alguns exemplos desenvolvidos com o uso de papel quadriculado e o software GeoGebra. No final do tópico foi dada uma pequena lista contendo exercícios, que podem ser resolvidos com o uso do software GeoGebra.

O tópico 3 aborda o cálculo de área de figuras planas com contornos curvilíneos. Neste tópico são apresentadas as construções do cálculo da área do círculo por meio dos métodos de Arquimedes e Riemann, além disso, a aplicação do método de Riemann para o cálculo da área de outras curvas como a elipse e área de regiões descritas por meio de funções polinomiais.

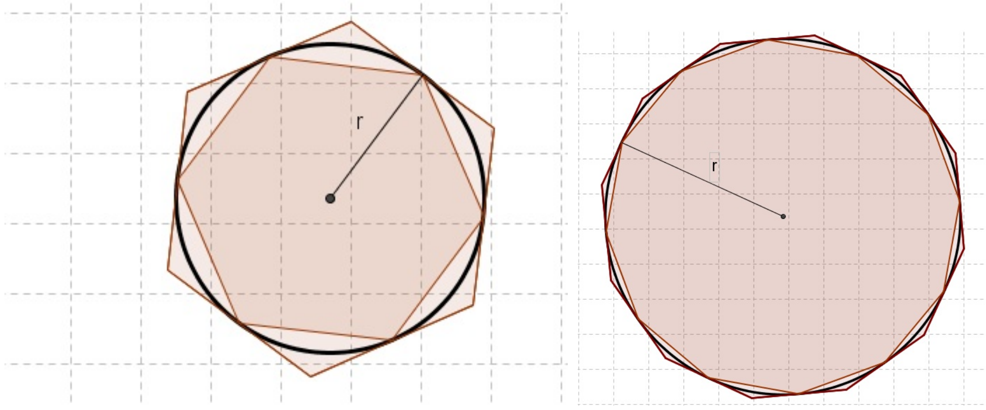


Figura 2.1: Hexágonos e dodecágonos regulares inscritos e circunscritos em cada um dos círculo de raio r, nessa ordem.

O primeiro método, o método de Arquimedes, consiste na inscrição e circunscrição de polígonos regulares em um círculo de raio unitário, cuja área resulta aproximadamente no atual número π, Arquimedes, utilizando este método, foi o primeiro matemático a determinar a área aproximada do círculo de raio unitário. A figura 2.1 ilustra este método.

O segundo método, o método de Riemann, mais abrangente, consiste em dividir o diâmetro do círculo em n intervalos iguais e, inscrever e circunscrever retângulos, com medidas da base iguais, a n-ésima parte do diâmetro cada. Além disso, o comprimento de cada retângulo corresponde à medida da corda, perpendicular ao diâmetro, que intersectam o círculo em dois pontos extremos.

Vale ressaltar que, o método de Riemann pode ser usado para determinar a área de regiões formadas a partir de inúmeras formas. Porém, são apresentadas elipses e, figuras descritas por meio de funções polinomiais, como a função quadrática ilustradas nas figura 2.2, 2.3, e 2.4, respectivamente. Áreas de figuras como estas foram apresentadas e estudadas durante a aplicação.

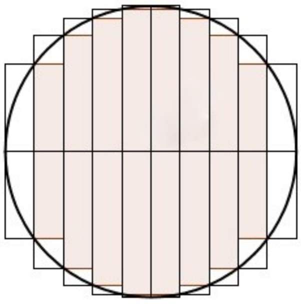


Figura 2.2: Inscrição e circunscrição de retângulos no círculo

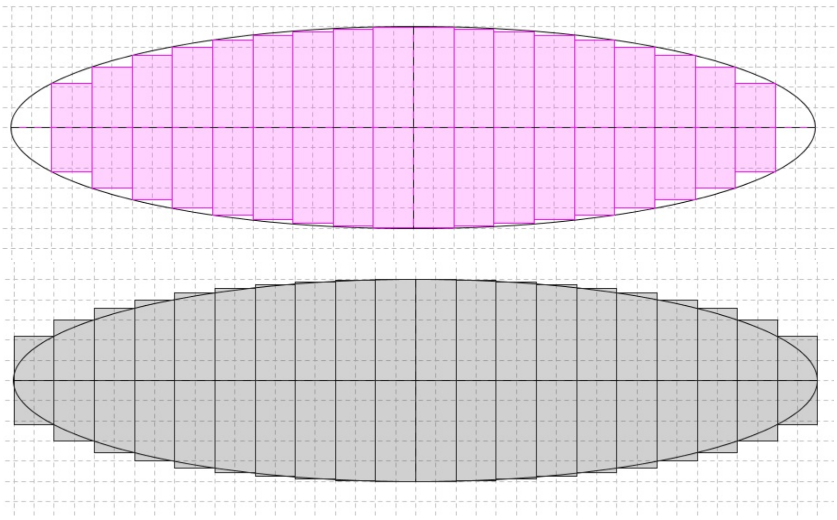


Figura 2.3: Inscrição e circunscrição de retângulos na elipse com eixo focal dividido em 20 intervalos iguais

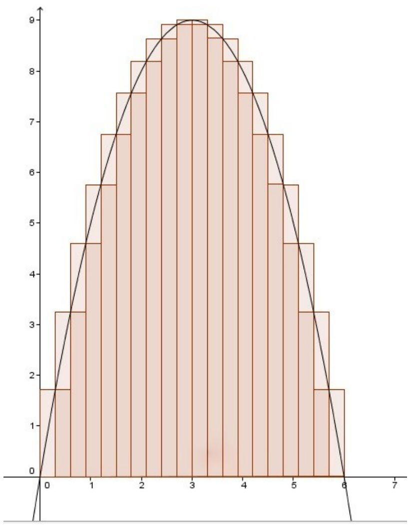


Figura 2.4: Aplicando a soma de Riemann em uma curva descrita por meio da função

Capítulo 3

A aplicação do projeto

3.1 Revisão do cálculo de área de quadriláteros e triângulos

Após o primeiro contato com a turma, o primeiro período ficou destinado à apresentação, aos objetivos do projeto e, à aplicação de questionário inicial. No segundo período, após a introdução de conceitos iniciais e da motivação para o desenvolvimento do trabalho, iniciou-se o desenvolvimento do projeto em si. Com o uso do software Geogebra foram apresentadas duas imagens: um quadrado e um retângulo, e, em seguida, as perguntas: "Que figuras são estas?Como calcular a área de cada uma delas?"

A turma foi unânime na resposta: um quadrado e um retângulo. A grande maioria também respondeu a segunda pergunta com confiança: A área do quadrado é igual a medida do lado ao quadrado - ou lado vezes lado - e, o retângulo, é a multiplicação da base pela altura - "base vezes altura".

Uma nova pergunta surgiu: "como vocês sabem e/ou aprenderam a calcular essas áreas?", três alunos, A_1, A_2 *e* A_3, responderam de imediato: "pela fórmula da área do quadrado e do retângulo", e, em seguida, a turma concordou. Com isso, o professor iniciou a atividade como segue:

Pr. _ Vamos considerar a malha quadriculada que vocês receberam. Nela, tomamos um quadrado de lado $1u$, como unidade de medida.

O professor propôs aos alunos para construírem alguns quadrados. Um de lado $2u$, um de lado $3u$, um de lado $4u$ e, assim por diante, até um quadrado de lado $8u$. Em seguida, pediu para cada um contar o número de quadrados, de lado $1u$, que cabe em cada figura construída. O aluno A_1 interveio perguntando:

A_1 _ Professor, não é mais simples multiplicar os lados, apenas?

O professor então respondeu que sim, mas, o método usado, a contagem simples, ajudaria na interpretação e posterior construção da fórmula que viria em seguida. O mesmo procedimento foi adotado com os retângulos. Nesta atividade, os alunos construiram retângulos de dimensões: $3u$ por $5u$; $2u$ por $4u$; $5u$ por $7u$; e, $4u$ por $7u$, onde $1u$ representa o lado do quadrado com uma unidade de medida.

Nesta aula e nas aulas subsequentes, para melhor visualização e interpretação das figuras construídas, foram utilizados o software Geogebra projetado no equipamento multimídia da sala de aula e a lousa digital - disponibilizada pela escola que o professor atua pela manhã. Por considerar grande o número de alunos participantes e, principalmente, por não haver professor específico no laboratório de informática, optou-se por desenvolver todo o trabalho em sala de aula, usando a lousa digital e o software Geogebra para ilustrar, desenvolver e construir as atividades que eram reproduzidas na malha quadriculada.

O segundo encontro foi iniciado com uma revisão das atividades aplicadas no primeiro. Em seguida, o professor apresentou a imagem da Figura 3.1, seguida pelas perguntas:

Pr. _ Q.1)Que figura é essa?

Pr. _ Q.2) Como se determina a sua área?

Figura 3.1: Paralelogramo

Dois alunos, A_1 e A_2, responderam de imediato. Eles acreditavam que era o mesmo cálculo aplicado na área do retângulo, isto é, o produto de suas dimensões. Nesse momento, o professor interveio, comparando o retângulo com o paralelogramo e, ainda, questionando se eram iguais. No mesmo instante a aluna A_3 corrigiu dizendo que era o produto da base pela altura. A partir desta afirmação o professor seguiu questionando como ela sabia que era esse resultado, novamente surgiu a resposta:

A_3 _ É da fórmula!

E, o professor continuou:

Pr. _ De onde surgiu esse resultado?

Nesse momento, o silêncio tomou conta da turma, quando foi quebrado pelo aluno A_4, ao afirmar:

A_4 _ Professor, a fórmula é assim, nós aprendemos que é pela fórmula.

Nesse instante, o professor iniciou a construção da área do paralelogramo, dizendo:

Pr. _ Vamos, inicialmente, escolher um dos lados do paralelogramo como medida de base. Para facilitar, vamos considerar a linha horizontal inferior da figura 3.1. Em seguida, escolhe-se um dos vértice no lado oposto e traça-se uma reta perpendicular à base, passando pelo vértice escolhido. Observa-se, assim, um triângulo retângulo, que deve ser recortado e colado no lado oposto, como mostrado da figura 3.2, observe:

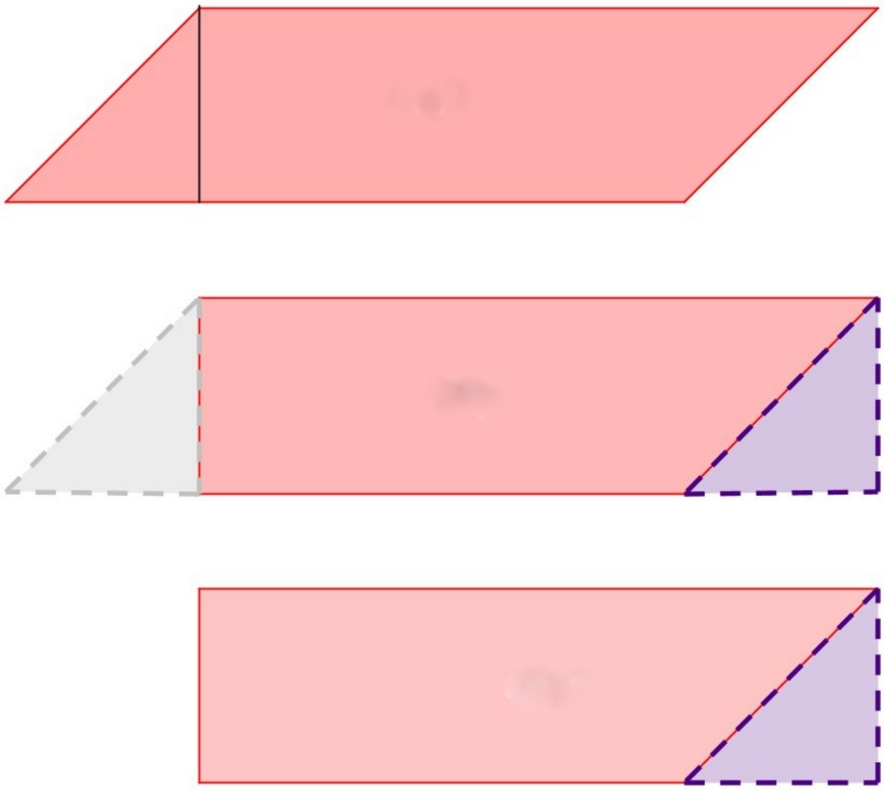


Figura 3.2: Construção do retângulo a partir do paralelogramo

A partir da ilustração apresentada no Geogebra, os alunos transcreveram, na malha quadriculada, todo o desenvolvimento construido e, em seguida, resolveram alguns exemplos sem maiores dificuldades.

Vale destacar os comentários de dois alunos, resumindo o sentimento da maioria.

A_4_ Agora eu entendi de onde vem essa fórmula e o porquê é parecida com a área do retângulo;

A_5_ Como é fácil! Porque não aprendemos assim antes?!

É importante frizar que essa construção, na maioria das vezes, é realizada em sala de aula, a diferença está no uso dos materiais, normalmente vistos com quadro negro e giz. Como foram usados recursos diferentes, a aula tornou-se mais atrativa e interessante.

Na sequência dos estudos, o professor apresentou a imagem da figura 3.3, seguida das perguntas anteriores:

Pr. _ Q.1) Que figura é essa?

Pr. _ Q.2) Como se determina a sua área?

Figura 3.3: Trapézio

Apenas o aluno A_1 respondeu com convicção: "Professor, esse é um trapézio, mas não lembro como determinar a área. É parecida com a área do paralelogramo?"

Mais que depressa a aluna A_3 disse: "Professor, espera um pouquinho, nos deixa calcular a área!"

Poucos minutos depois, a aluna A_3 indagou: "Professor, eu construí como antes, mas a figura não ficou completa, ficou faltando um pedaço, o que aconteceu?"

Então o professor acrescentou:

_ Vocês perceberam que as figuras não são semelhantes? Isto é, que o paralelogramo é diferente do trapézio?

_ O procedimento adotado para esta área é diferente, observem. Inicialmente, vamos duplicar a figura apresentada, em seguida, giramos a figura duplicada em 180° e "colamos"uma ao lado da outra, como mostra a figura 3.4. Que figura vamos construir?

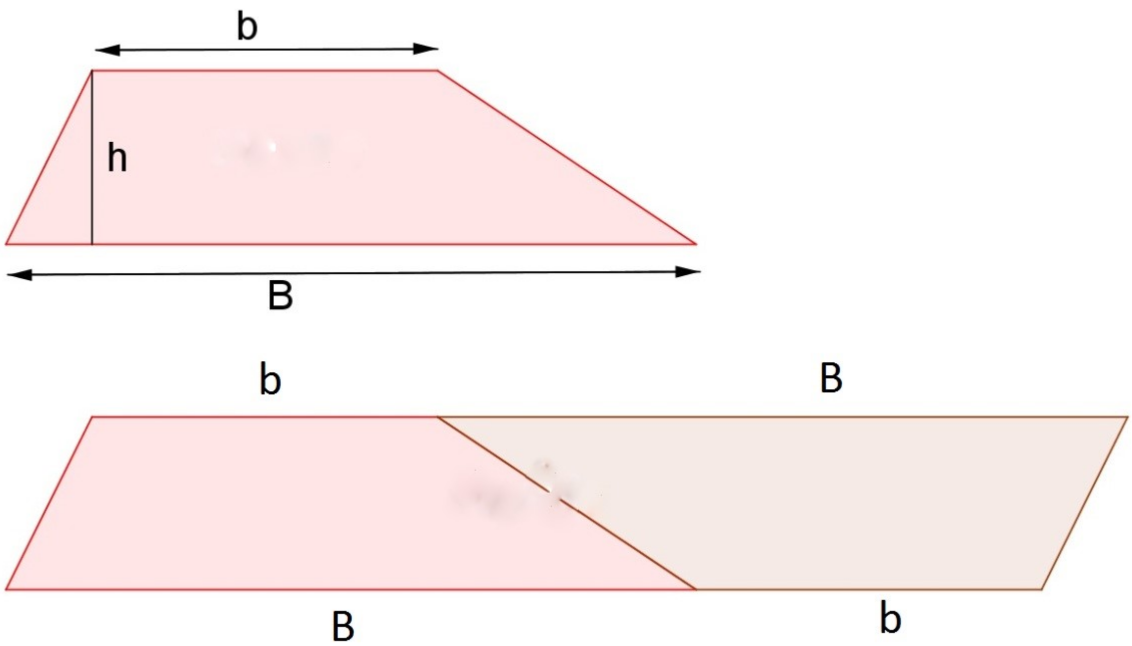


Figura 3.4: Construção da área do trapézio

Os alunos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 responderam que a figura representada é um paralelogramo e que agora sabiam como calcular a área. O professor concluiu dizendo que para determinar a área do trapézio, a figura foi duplicada, e, então, o resultado obtido deve ser dividido por dois. Depois de construído, o resultado foi generalizado para a fórmula do trapézio, por eles conhecida. Após essa construção, os alunos construíram e calcularam a área de outros trapézios, sem maiores dificuldades.

Dentre muitas das observações apresentadas pelos alunos, foram destacadas algumas, dispostas abaixo.

A_2_ Professor! Por que não aprendemos a fazer essas contas assim, construindo as figuras?

A_3_É verdade! Se fosse ensinado desse jeito ficaria bem mais fácil de aprender.

A_6_ Olha professor, eu sempre tive um pouco de dificuldade em matemática, porque eu não entendia de onde tinham vindo aquelas fórmulas, sempre diziam: "A fórmula é esta e pronto!"

A_{10}_ Vendo o senhor calcular e, mostrando as figuras no computador, fica bem mais fácil.

A_{15}_ Sor! Muitas vezes, os professores entram na sala e querem que a gente aprenda de qualquer jeito, querem "enfiar pela goela abaixo"o conteúdo, sem mostrar um desenho como o senhor está fazendo. Se fosse sempre assim, com certeza a gente aprenderia melhor.

Neste último relato, assim como em todos os outros, o aluno A_{15} externou o sentimento de muitos colegas. Nele, o aluno aponta para um fato que, muitas vezes, não é percebido pelo professor, o uso excessivo de fórmulas. Esse processo torna o cálculo mecânico, impedindo a compreensão, a construção e aprendizado dos conceitos matemáticos.

Ficam explicitados, nesses comentários, a realização e real entendimento do conteúdo pelo aluno, através da construção dos conceitos e a generalização para a construção da fórmula. Cabe ressaltar que muitos outros relatos foram apresentados, mas, de modo geral, todos convergindo para o mesmo entendimento.

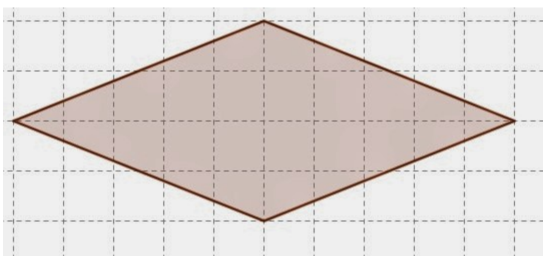


Figura 3.5: Losango apresentado aos alunos.

Na segunda metade do período, dando continuidade aos estudos, foi apresentada a figura 3.5, seguida das perguntas:

Pr. _ Q.1) Que figura é essa?

Pr. _ Q.2) Como é calculada a sua área?

O aluno A_1, novamente convicto, disse que era um losango, mas não se recordava como determinar a sua área. Os demais alunos tinham dúvidas e por isso não apresentaram resposta alguma. Desta forma, o professor iniciou a construção dizendo aos alunos para traçar as suas diagonais. Além disso, acrescentou, dizendo aos alunos para observar que as diagonais são perpendiculares entre si. Em seguida, solicitou aos alunos que traçassem retas paralelas às diagonais passando pelos vértices do losango, observando, em seguida, a figura formada. A figura 3.6 ilustra a construção dos alunos, observe:

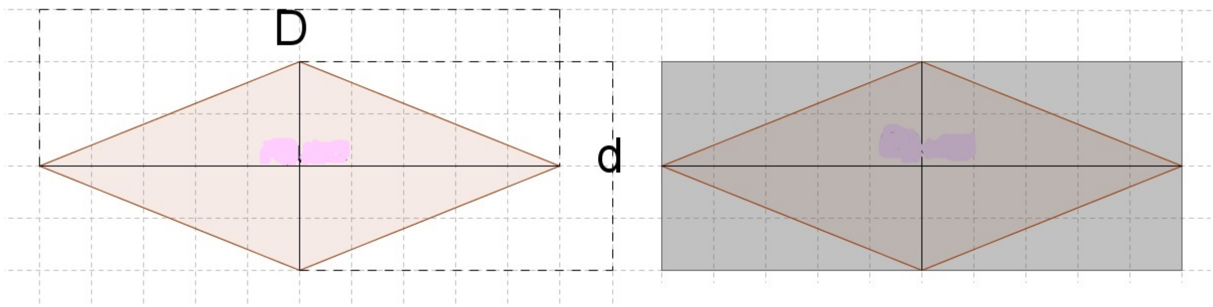


Figura 3.6: Construção do cálculo da área do losango

Construída a nova figura, quase que no mesmo instante os alunos concluíram que era obtido um retângulo e, seguindo o mesmo raciocínio do cálculo de área do trapézio perceberam que a área encontrada correspondia ao dobro da área do losango. Além disso, que a área da nova figura era obtida a partir do produto das medidas das diagonais do losango e, por isso, para determinar o resultado da área do losango, era necessária a divisão do resultado obtido por 2. Os demais alunos, ouvindo essas contribuições, conseguiram entender o racicínio dos colegas, concluindo, ainda.

A_6_ Como fica fácil para entender a fórmula quando a gente constrói ela;

A_7_ As aulas deveriam ser sempre assim, ficaria bem mais fácil de entender a matéria;

A_8_ Eu não sabia que era assim tão fácil de resolver.

Finalizando o período de aula, o professor apresentou outra imagem, mostrada na figura 3.7, conhecida por todos. Ao ser projetada na tela, foi quase unânime a resposta: "é um triângulo, a área é igual a multiplicação da base pela altura e o resultado dividido por dois". Nesse momento o professor pergunta: "Como é construída essa fórmula?"

Os alunos ficaram, por alguns instantes pensativos quando, de repente, a aluna A_3 disse: Professor! Posso usar a mesma forma de calcular a área do paralelogramo ou do trapézio?

Essa pergunta foi praticamente respondida pelo aluno A_1 ao completar: "Pela área do trapézio! Daí você duplica o triângulo e 'cola' invertido formando um retângulo".

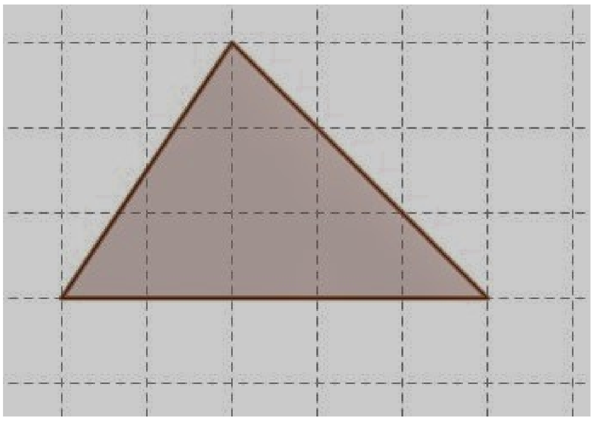


Figura 3.7: Triângulo apresentado aos alunos.

Alguns instantes depois, o aluno A_2, corrigindo o colega A_1, disse: "Forma um paralelogramo que às vezes pode ser um retângulo dependendo, do tipo de triângulo".

Contribuições como esta e outras, ainda do início do período, enriqueceram a aula e deixaram os alunos mais à vontade, abrindo o caminho para que os demais alunos também criassem coragem para perguntar e/ou participar de modo ativo nas aulas. A figura 3.8 ilustra a construção descrita pelos alunos.

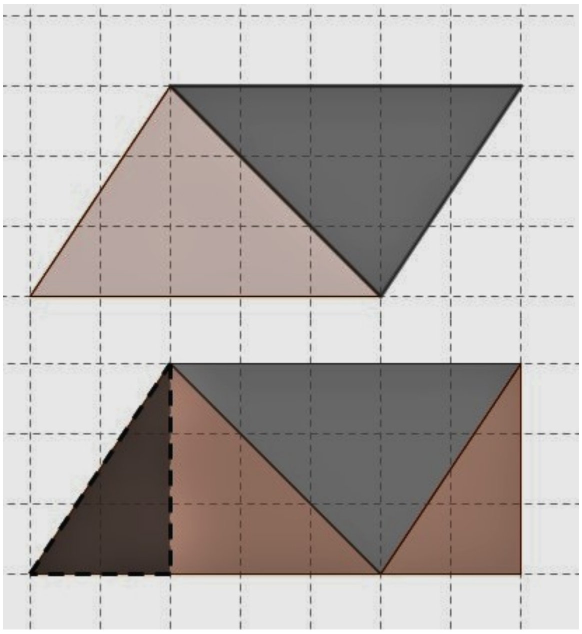


Figura 3.8: Procedimento adotado para o cálculo da área do triângulo, descrito pelos alunos

Desta revisão, surgiu o primeiro trabalho, como forma de avaliar o rendimento do aluno. O professor extraiu da lista de exercícios, contida na apostila do aluno, alguns exercícios, e propôs que os alunos resolvessem por construção. Os exercícios selecionados cobriram, praticamente todo o conteúdo trabalhado nestes primeiros encontros. Esta escolha se deve por exigir do aluno a construção do cálculo e da respectiva figura que o representa. A seguir, são apresentadas as resoluções, por meio das imagens, de alguns alunos, e a análise dos resultados obtidos.

3.1.1 Atividade avaliativa 1 e análise dos resultados

3.1.1.1 Atividade 1:

Utilizando uma malha quadriculada, construa o que se pede em cada caso (Considere cada quadrado da malha quadriculada como unidade quadrada de área).
c) Um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}u$;

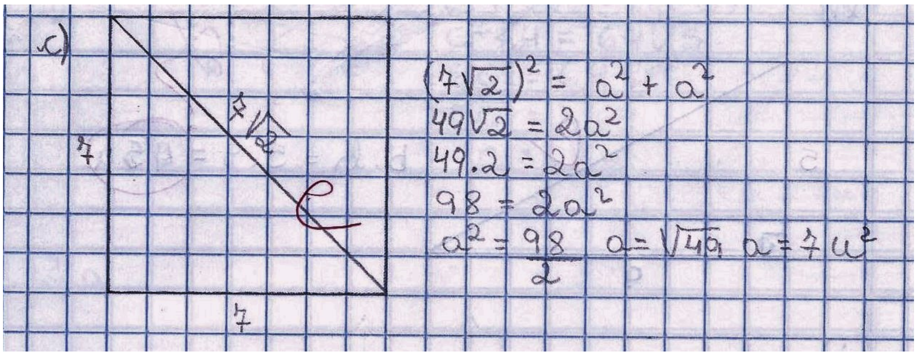


Figura 3.9: Resolução apresentada pelo aluno A_8.

f)Um retângulo cuja base mede o triplo da altura e a diagonal mede $4\sqrt{10}u$;

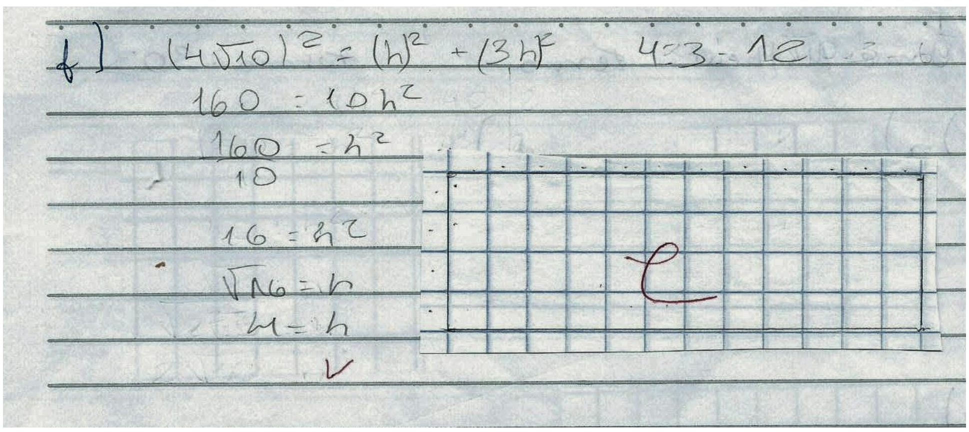


Figura 3.10: Resolução apresentada pela aluno A_{12}.

Percebe-se, em cada uma das imagens, dispostas nas Figuras 2.13 a 2.16, o cálculo apresentado pelos alunos e a imagem correspondente. Embora não tenham se preocupado em informar o que estavam calculando, ilustraram em seus cálculos e, nas construções, as medidas solicitadas, como apresentados pelos alunos A_8 e A_{10} ou, apenas com a construção das imagens, conforme os alunos A_{12} e A_1.

g) Um retângulo cuja diagonal mede $6\sqrt{5}u$ e a medida do comprimento é o dobro da medida da altura;

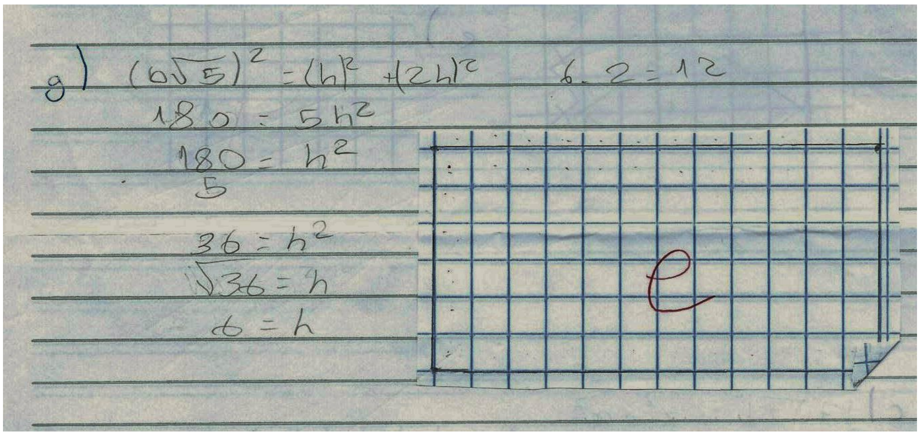


Figura 3.11: Resolução apresentada pela aluno A_1.

k) Um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $8\sqrt{5}u$ e um cateto com o dobro da medida do outro cateto.

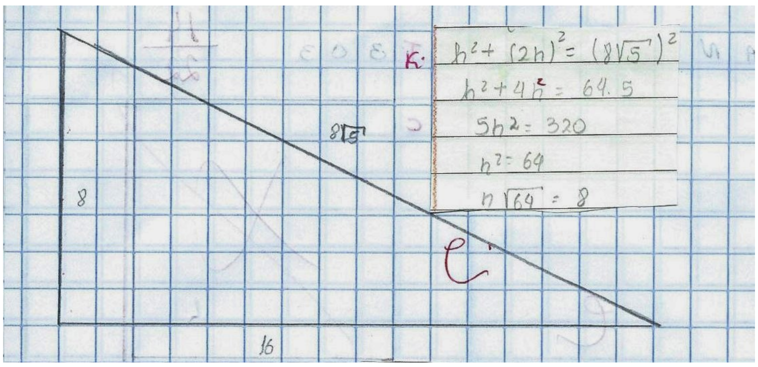


Figura 3.12: Resolução apresentada pela aluno A_{10}.

Nesta atividade, a maioria dos alunos resolveram, de modo semelhante, suas atividades e, por esse motivo, foram selecionadas apenas quatro resoluções, uma para cada item, como fonte de ilustração.

3.1.1.2 Atividade 2

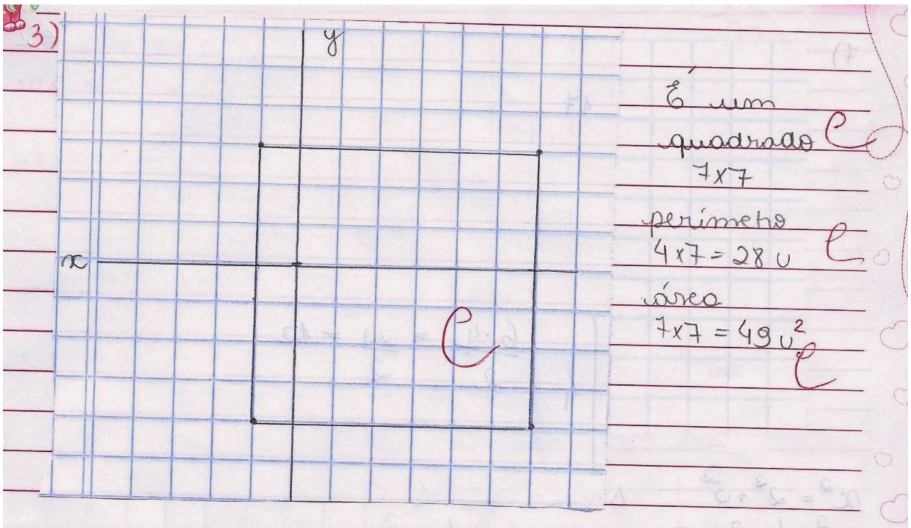
Os vértices $A = (-1, -3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (6, -3)$ e $D = (6, 4)$ são coordenadas cartesiadas de um quadrilátero. Pede-se:

a) Fixe os pontos dados no plano cartesiano XOY. (Para facilitar a compreensão, use uma malha quadriculada)

b)Que quadrilátero é esse?

c)Quais são as dimensões do quadrilátero?

d) Qual é o perímetro e qual a sua área?



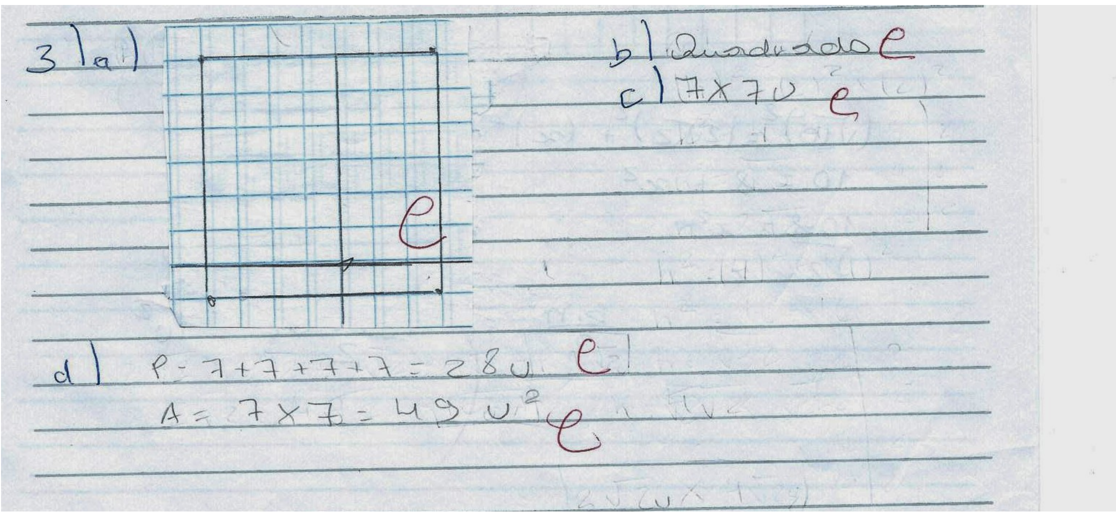


Figura 3.13: Resolução apresentada pelos alunos A_9 e A_1, respectivamente.

3.1.1.3 Atividade 3

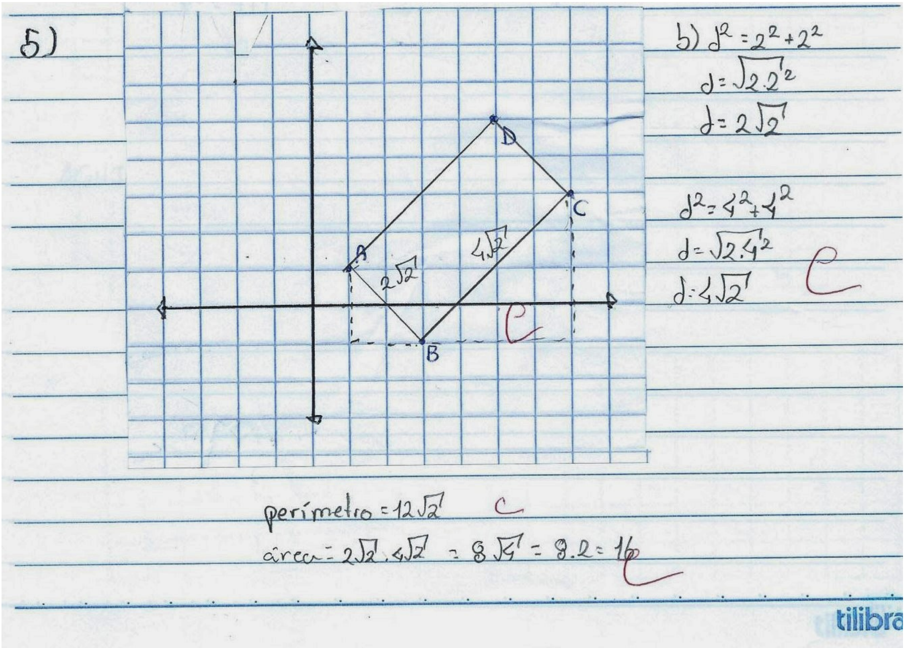
Os vértices $A = (1,1)$, $B = (3,-1)$, $C = (7,3)$ $eD = (5,5)$ são vértices de um retângulo. Pede-se:

a)Construa, no sistema de eixos coordenados, o retângulo dado, fixando, inicialmente, seus vértices(Use malha quadriculada);

b) Determine as dimensões desse retângulo;

c) Qual é o perímetro do retângulo obtido?

d) Qual é a área desse retângulo?



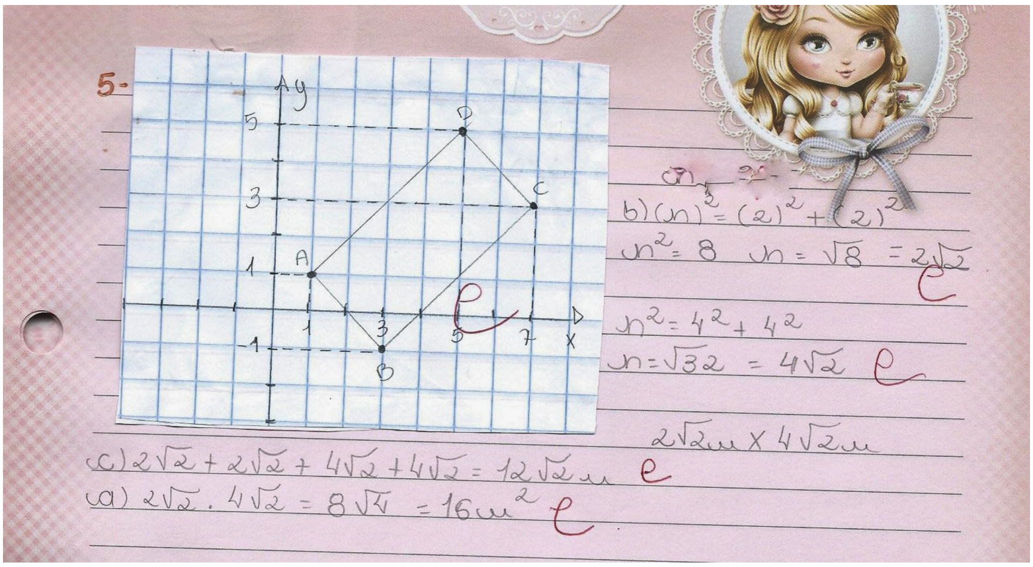
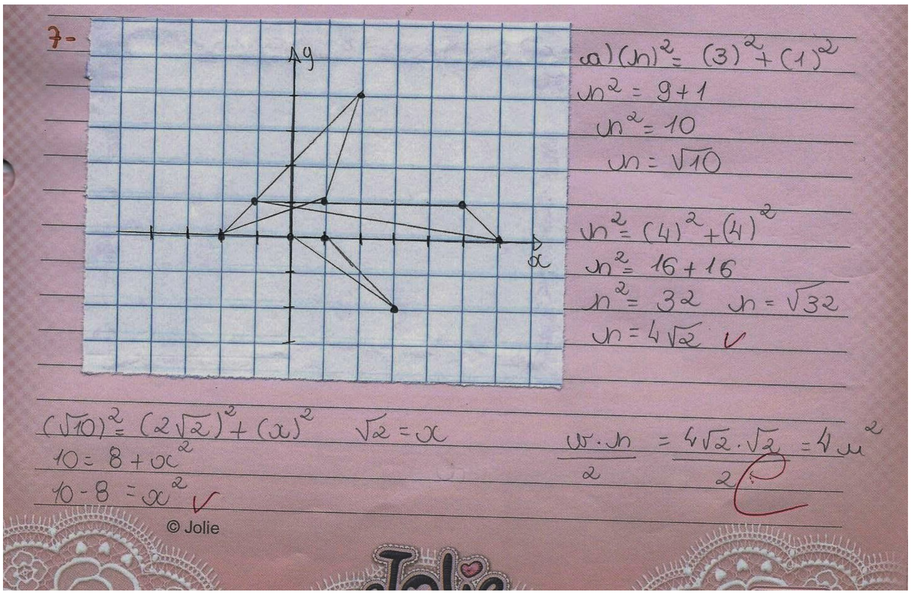


Figura 3.14: Resolução apresentada pelos alunos A_5 e A_3.

3.1.1.4 Atividade 4

Encontre a área do triângulo ABC nos seguintes casos:
a) $A = (2, 4), B = (-2, 0)$ *e* $C = (1, 1)$;



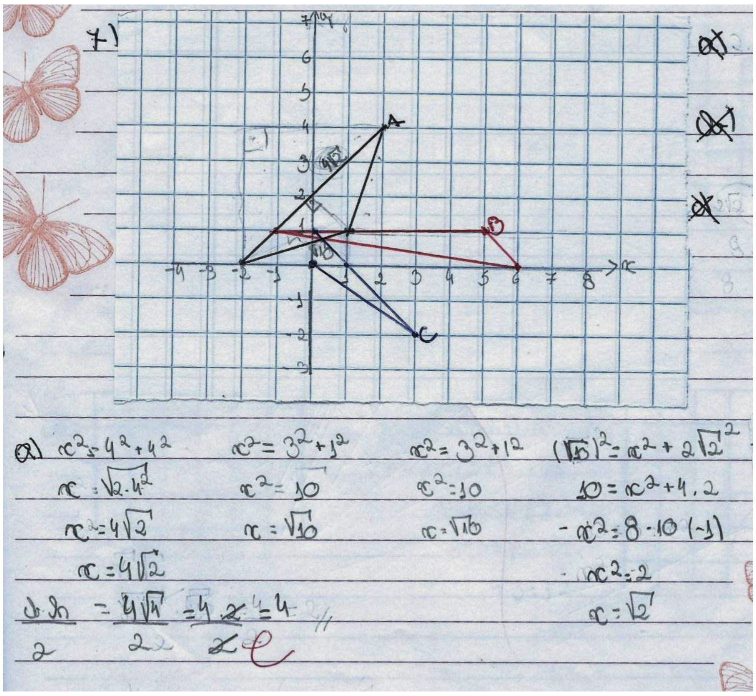


Figura 3.15: Resolução apresentada pelas alunas A_3 e A_6, respectivamente.

Percebe-se que os alunos, em sua maioria, resolvem as atividades, do seu jeito, encontrando os resultados solicitados, porém, não descrevem o que estão determinando. Ao observar o cálculo descrito pelas alunas A_3 e A_6, na figura 3.15, acima, pode-se perceber que estão sendo obtidas as medidas dos lados do triângulo em questão, mas estes não são explicitados. Além disso, a aluna A_6 usa uma mesma variável para indicar a medida dos diferentes lados do triângulo. Um leigo, ao olhar o cálculo apresentado, pode se perguntar: "o que o autor do exercício queria determinar nessa resolução?"

b) $A = (6, 0), B = (5, 1)$ e $C = (-1, 1)$;

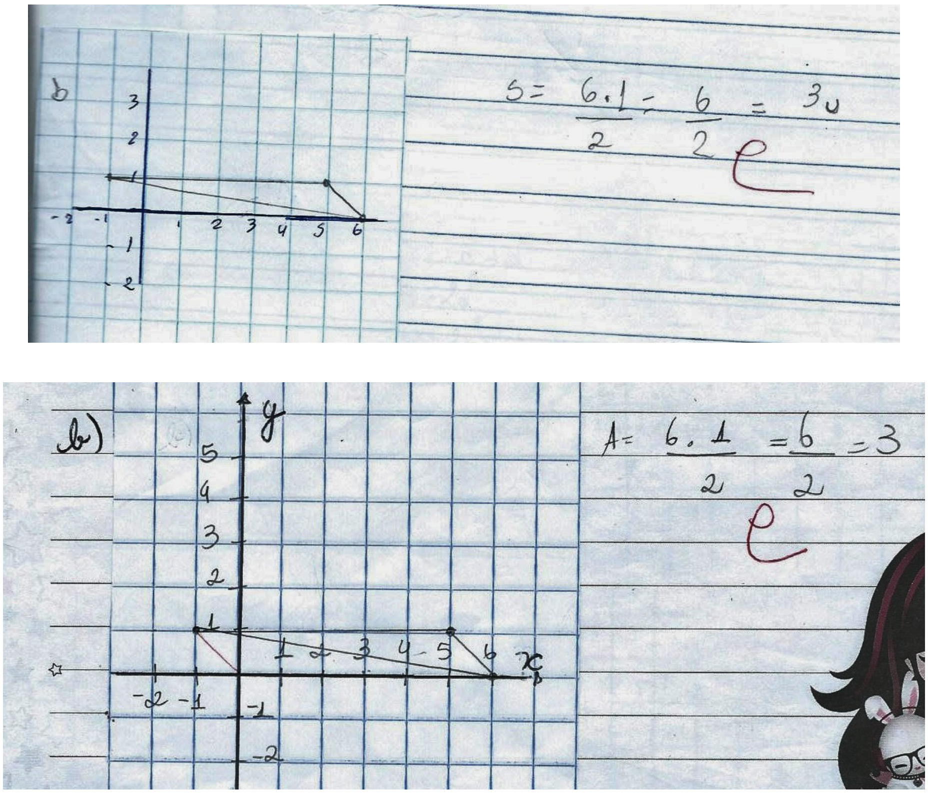
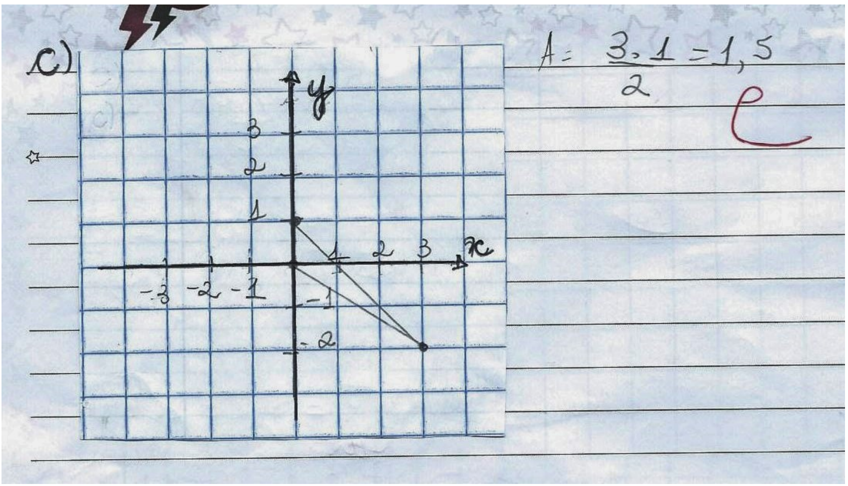


Figura 3.16: Resolução apresentada pelos alunos A_{11} e A_7.

A resolução apresentada pelos alunos, tanto no exercício $4(b)$, quanto no exercício $4(c)$, se deu de modo semelhante à resolução construída durante o desenvolvimento das atividades. Uma vez construído o triângulo e identificadas as medidas de base e altura, a medida da área é obtida diretamente.

Os alunos perceberam que as duas dimensões poderiam ser obtidas, paralelas aos eixos OX e OY, respectivamente. Com um pouquinho de atenção destacaram a medida de cada uma das dimensões e, assim, calcularam o valor da área, como é possível perceber na resolução dos alunos A_{11} e A_7, na figura 3.16 e na resolução dos alunos A_7 e A_2, na figura 3.17.

c) $A = (3, -2), B = (0, 0)$ e $C = (0, 1)$.



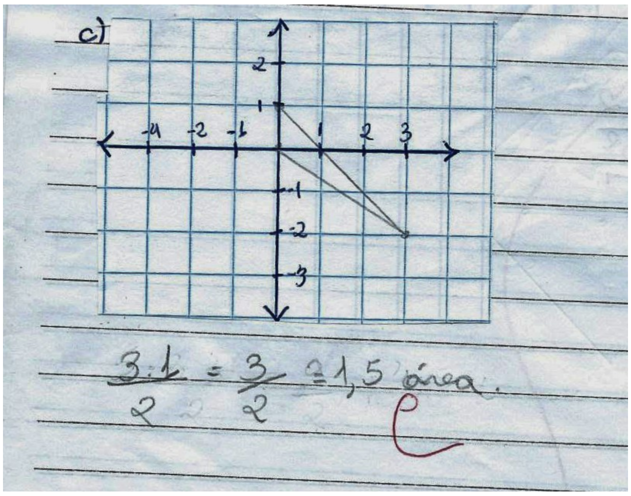


Figura 3.17: Resolução apresentada pelos alunos A_7 e A_2.

Analisando a construção dos alunos, nas Figuras 3.16 e 3.17, pode-se notar, novamente, que não há preocupação em identificar a medida dos lados dos triângulos, nem tão pouco as medidas de base e altura. O objetivo é obter o valor da área.

Em todas as resoluções percebeu-se essa despreocupação com a organização dos cálculos e resultados obtidos. É um processo mecânico que estão acostumados a efetuar. Desconstruir esse processo não é tarefa fácil e, a curto prazo, é praticamente impossível conseguir mudanças significativas. Por esta razão, o professor concentrou-se em valorizar a construção e o desenvolvimento apresentado pelos alunos, tendo em vista que todas as avaliações, aqui aplicadas, irão compor parte da avaliação trimestral dos alunos.

3.2 Área de figuras geométricas com contornos curvilíneos

3.2.1 O Método de Arquimedes

No terceiro encontro, o professor iniciou a aula, com a imagem ilustrada na Figura 3.18 e, em seguida, a pergunta: "Como é calculada a área desta figura?".

Alguns alunos se manifestaram respondendo:
$A_{n}\_\ \pi r^2$, professor!

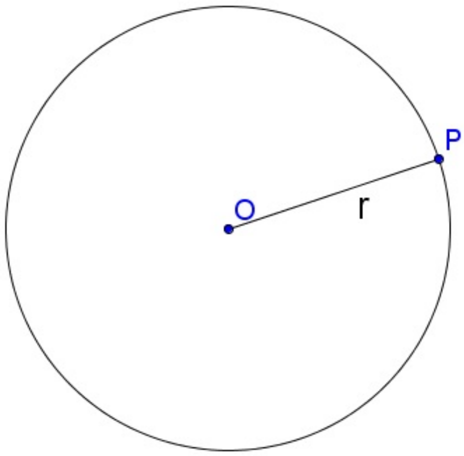


Figura 3.18: Círculo de centro O e raio $r = \overline{OP}$ onde P é o conjunto dos pontos

Então, o professor continuou: "E como ela foi construída?"

Alguns dos alunos tentaram justificar, mas não tinham argumentos para fazê-lo. Nesse instante, o professor, antes de iniciar o estudo envolvendo o método de Arquimedes, apresentou aos alunos um pequeno trecho do "esboço biográfico", como classificou Anton (2002, p. 378) em uma nota de rodapé que pode ser conferido no Anexo A.

A partir da leitura deste "esboço", o professor começou a explicar o método descrito por Arquimedes, que consiste na inscrição e circunscrição de polígonos regulares com o respectivo cálculo de área.

Usando o software Geogebra, o professor descreveu o procedimento adotado por Arquimedes, como se segue:

Pr. _ Inicialmente Arquimedes inscreveu e circunscreveu hexágonos regulares no círculo de raio unitário, determinando, desta forma, a área de cada polígono. Em seguida, inscreveu e circunscreveu dodecágonos regulares ao mesmo círculo e, do mesmo modo, determinou o valor da área, observando que estes últimos se aproximaram do círculo, como podemos observar nos círculos da Figura 3.19.

Pr. _ Arquimedes continuou inscrevendo e circunscrevendo polígonos sempre dobrando a quantidade de lados do polígono anterior até inscrever e circunscrever polígonos com 96 lados. Podemos perceber que, a medida que o número de lados aumenta, mais próxima da área do círculo é a área obtida em cada polígono.

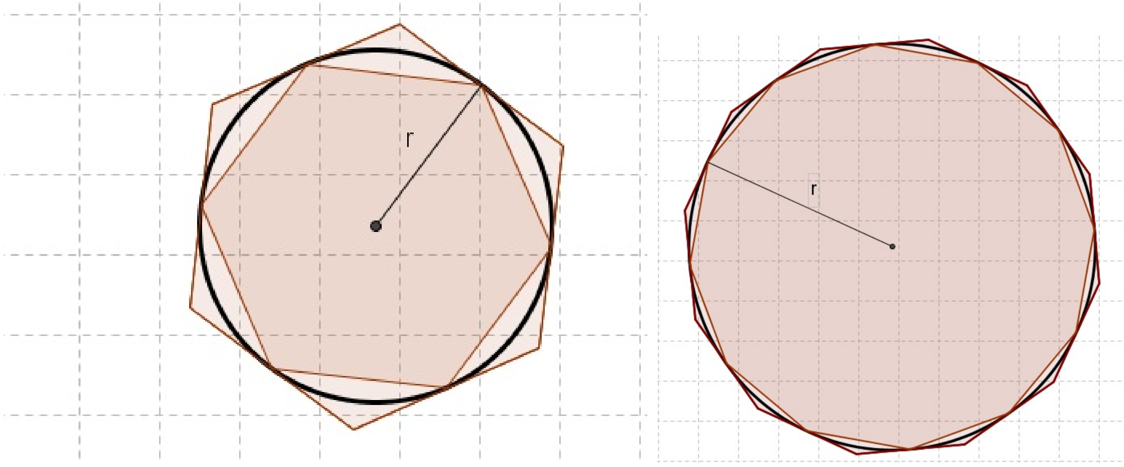


Figura 3.19: Ilustração apresentada aos alunos, com a inscrição e circunscrição de hexágonos e dodecágonos no círculo

Após esta apresentação inicial, o professor propôs aos alunos a seguinte situação:
Pr._ Vamos usar o conhecimento que temos em trigonometria para determinar a área aproximada do círculo, assim como fez Arquimedes, inscrevendo e circunscrevendo hexágonos regulares. Pode ser?!
Pr._ Mas antes faremos uma pequena revisão sobre as razões trigonométricas, estudadas no ano passado. Estão lembrados das razões trigonométricas?

A maioria dos alunos disse não lembrar-se, apenas um aluno descreveu como são obtidas as razões trigonométricas. A partir do relato deste aluno, a turma manifestou-se dizendo:
A_n_ Professor! Nós tivemos muitos problemas no ano passado. Resolvemos muitas listas de exercícios sobre: — Análise Combinatória; Matrizes; Determinantes; Sistemas — mas, trigonometria não!

A partir deste relato inicial, o professor disse aos alunos:
Pr._ Pessoal! Não é o momento para lamentar. Eu havia separado um material, envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, para usá-lo como revisão antes de iniciar a aplicação do método de Arquimedes. Pensei que não seria necessário, que ao mencionar o conteúdo de trigonometria, vocês iriam se lembrar e, com alguns comentários, poderia iniciar a aplicação do projeto.
Pr._ Façamos o seguinte, vamos usar a aula de hoje para revisar as razões trigonométricas. Preciso da colaboração de vocês para que se esforcem em resolver as atividades

que serão dadas como reforço, e que, além disso, estudem em casa. Vocês podem pesquisar na web, sugiro que pesquisem no site sómatemática, o conteúdo desta página é bem elaborado e, de fácil entendimento.

Então, o professor distribuiu o material que, inicialmente, serviria como fonte de pesquisa, um reforço no conteúdo em eventuais dúvidas, não para uma revisão, como ocorreu. Durante o restante do período, foram revisados, com a turma, os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, sendo disponibilizadas atividades. No final do período, para a turma, foi recomendada a resolução dessas atividades e, que no próximo encontro, seriam retomados os conteúdos iniciados nesta aula. Dúvidas eventuais seriam esclarecidas nas aulas subsequentes.

No quarto encontro, inicialmente, foram esclarecidas dúvidas dos alunos e, em seguida, iniciou-se o cálculo da área do hexágono inscrito e circunscrito num círculo de raio unitário ($r = 1u$). O professor convidou os alunos para reproduzirem, na malha quadriculada, um círculo, com ajuda de compasso e régua, ajudou-os a construir um hexágono inscrito no círculo.

Em seguida, unindo o centro do círculo a cada vértice do hexágono, o professor perguntou:

Pr._ Quantos triângulos estão construídos a partir do hexágono e, qual a medida do ângulo central, em cada triângulo?

Alguns dos alunos responderam que eram formados 6 triângulos e, o ângulo central "vale" $60°$. O professor acrescentou que eram todos triângulos isósceles (neste caso equilátero), desta forma, os alunos A_2 e A_3 concluiram que poderiam determinar a área do triângulo e assim a área do hexágono.

A aluna A_3 indagou: _ Mas qual é a medida da base e a altura do triângulo, professor?

Nesse instante, o professor mencionou o uso das razões trigonométricas, revisadas no encontro anterior.

E assim, descreveu:

Pr._ Vamos escolher um dos triângulos (ΔABO), pois todos os demais são iguais. A partir do ponto O, centro do círculo e vértice do triângulo, traçamos uma perpendicular em relação à base AB. Esta perpendicular intersecta o segmento AB num ponto que chamaremos de H. O segmento (OH), representa a altura do triângulo. Note que OH, divide o ângulo central em dois ângulos iguais e a base AB de medida $\overline{AB}$, do triângulo, em dois segmentos de mesma medida, ou seja, $\overline{HB} = \overline{AH}$. Vamos considerar a medida da base deste triângulo igual a $2b$, $\overline{AB} = 2b$, sendo assim, $\overline{AH} = \overline{HB} = b$. - "Para facilitar o cálculo e evitar o uso de frações!"

Pr._ Reforçando: O triângulo é isósceles (equilátero, neste caso!). Assim, teremos dois triângulos retângulos (ΔAHO e ΔBHO), com a medida do ângulo $A\hat{O}H = B\hat{O}H = 30°$

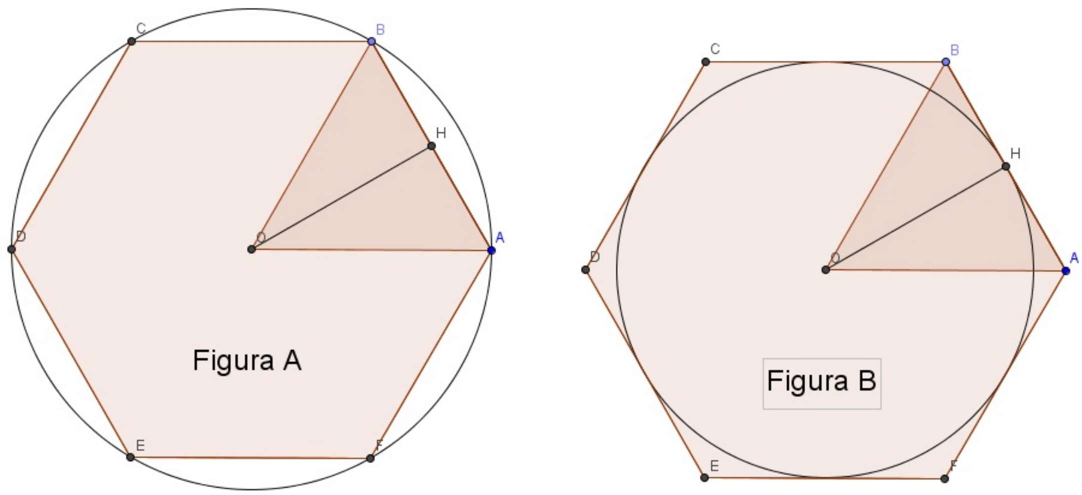


Figura 3.20: Imagem ilustrando a escolha de um triângulo para o cálculo de área dos hexágonos, inscritos e circunscritos.

lado oposto ao ângulo $\overline{AH} = \overline{HB} = b$. Além disso, o raio é unitário ($r = 1u$). Vamos determinar, inicialmente, a medida da base.
Pr._ Queremos determinar o lado oposto do ΔAHO e conhecemos a medida $\overline{AH} = 1u$. Neste caso, podemos aplicar a razão seno para o ângulo de 30°, que é obtido a partir da razão entre o cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa, ou seja, $sen(30°) = \frac{AH}{OA}$. Assim, encontramos $b = 0,5$. Logo, a base do ΔABO mede $\overline{AB} = 1$. Lembrem-se que este triângulo, é equilátero, logo, os três lados são iguais. Alguém lembrou desse fato?(Ninguém respondeu)
Pr._ Agora, vamos determinar a medida da altura do triângulo. Lembrem-se que temos a medida do raio e queremos determinar o lado adjacente. Neste caso, podemos aplicar a razão cosseno em relação ao ângulo de 30°, que é obtida a partir da razão entre o cateto adjacente ao ângulo e hipotenusa, ou seja, $cos(30°) = \frac{OH}{OA}$; ou, a razão tangente, em relação ao ângulo de 30° que é obtida a partir da razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo, isto é, $tg(30°) = \frac{HA}{OH}$ ou ainda, o teorema de Pitágoras. Aplicaremos a razão cosseno.
Pr._ Com o auxílio da calculadora, encontramos $\overline{OH} = 0,87$ com aproximação de duas casas decimais. De posse destas informações, vamos determinar a área do ΔABO.
Pr._ Sabemos que a área A do triângulo é obtida a partir da metade do produto da base pela altura. Deste modo podemos escrever: $A_{\Delta} = \frac{1.0,87}{2} = 0,43$. Como são 6 triângulos iguais no hexágono, a área do hexágono inscrito é igual a: $A_{hexágono} = 6.A_{\Delta} = 6.0,43 = 2,58$.

Vale destacar que, todas as razões, seno, cosseno e tangente, assim como o teorema de Pitágoras, foram revisados no quadro, durante a aplicação. O professor prosseguiu com

Número de lados do polígono	Área do polígono inscrito	Área do polígono circunscrito
Polígono com 6 lados	2,58	3,46
Polígono com 8 lados	2.83	3,31
Polígono com 9 lados		
Polígono com 10 lados		
Polígono com 12 lados		
Polígono com 24 lados		

Tabela 3.1: Tabela sugerida aos alunos, para registro dos resultados de área, obtidos com a inscrição e circunscrição de polígonos regulares no círculo de raio unitário ($r = 1$).

o cálculo da área, agora, para determinar a área do hexágono circunscrito. Observou que a medida da altura de cada um dos triângulos, neste caso, correspondia à medida do raio ($r = 1u$) do círculo. Destacou, também, que era necessário calcular a medida da base AB do triângulo (lado do hexágono regular).

Para este cálculo o professor usou a razão tangente em relação ao ângulo $A\hat{O}H$, obtendo, como medidas: $\overline{AH} = 0,58$ no ΔAHO e, $\overline{AB} = 1,16$, para o ΔABO, com arredondamento na segunda casa decimal. Em seguida, calculou a área do ΔABO, cujo valor aproximado obtido foi $A_{\Delta} = 0,58$. Por fim, determinou a área do hexágono circunscrito, encontrando como valor de área $A_{hexágono} = 3,46$.

O professor concluiu, dizendo:

Pr._ Esses dois resultados que acabamos de calcular, $2,58$ para o hexágono inscrito e $3,46$ para o hexágono circunscrito, são dois valores extremos e próximos de um mesmo resultado, o valor da área do círculo. Se, ao invés de usar polígonos com 6 lados forem usados polígonos com 8, 9, 10 12 ou 24 lados, o que acontecerá com o valor da área dos polígonos inscritos e circunscritos?

Após concluir este exemplo, o professor orientou os alunos para destacarem estas duas respostas, organizando-as em uma tabela, para análise posterior, podendo, assim, compará-las com os próximos resultados que seriam por eles determinados.

Na sequência dos estudos, o professor apresentou um segundo exemplo, um círculo, também de raio unitário, com um octógono inscrito e outro circunscrito. Com o auxílio do professor, os alunos encontraram, como resutado, para a área do octógono inscrito, $2,83$ e, para a área do octógono circunscrito, encontraram $3,31$. O professor disse aos alunos que os resultados obtidos neste exemplo apresentaram pequena diferença àquele resolvido na apostila que havia sido entregue no primeiro encontro.

Pr._ Esse fato ocorreu devido ao arredondamento na segunda casa decimal. O resultado depende muito da quantidade de casas decimais escolhida. Quanto maior o número de casas decimais adotadas, mais próximo do valor exato será o resultado e, consequentemente, mais preciso será o cálculo. Para efeito de cálculo, o arredondamento na segunda casa decimal garante uma boa aproximação.

Esta atividade, aplicada como complemento, serviu para fortalecer o entendimento do método de Arquimedes e, assim, aprimorar as deficiências encontradas, pelos alunos, no início desta aplicação. Os resultados obtidos foram registrados, na tabela sugerida, para análise na aula seguinte.

Convém ressaltar que os polígonos adotados, nesses exemplos, não seguiram àqueles adotados por Arquimedes, que iniciou com a inscrição e circunscrição de hexágonos, em seguida, dodecágono, e continuou inscrevendo e circunscrevendo polígonos regulares, dobrando a quantidade de lados do polígono, imediamente anterior, no cálculo seguinte. A resolução deste exemplo ocorreu de modo análogo ao reproduzido acima. Como forma de fixar os estudos, foram listados alguns exercícios, nos quais eram solicitados o cálculo de área de polígonos com 9, 10, 12 e 24 lados regulares, conforme a sugestão da tabela.

No quinto encontro foram retomadas as atividades envolvendo o método de Arquimedes. Inicialmente, o professor retomou os dois exemplos resolvidos no encontro anterior, nos quais foram inscritos e circunscritos hexágonos e octógonos no círculo, de raio unitário. Em seguida, os alunos iniciaram a resolução dos exemplos sugeridos, na aula anterior, sem maiores dificuldades. Os resultados obtidos foram dispostos e organizados na Tabela 3.1, sugerida anteriormente. Em suas resoluções, inscrevendo e circunscrevendo os polígonos com 9, 10, 12 e 24 lados, os alunos, de um modo geral, obtiveram resultados iguais, pelo menos, até a primeira casa decimal.

A tabela 3.2 apresenta os resultados da área dos polígonos inscritos e circunscritos, no círculo, com aproximação até a quarta casa decimal, fornecida pelo aluno A_1. Devido ao arredondamento adotado por cada aluno, pode-se afirmar que, até a primeira casa decimal, todos apresentaram resultados iguais, variando os resultados obtidos, a partir da segunda casa decimal.

Número de lados do polígono	Área do polígono inscrito	Área do polígono circunscrito
Polígono com 6 lados	2,5981	3,4641
Polígono com 8 lados	2.8283	3,3137
Polígono com 9 lados	2.8925	3.2757
Polígono com 10 lados	2.9389	3.2492
Polígono com 12 lados	3.0000	3.2154
Polígono com 24 lados	3.1058	3.1597

Tabela 3.2: Tabela com os resultados de área apresentadas pelos alunos

Usando os dados fornecidos pelo aluno A_1, o professor pediu para que a turma, ao analisar os resultados, descobrisse para qual valor esses resultados estavam convergindo. Alguns alunos afirmaram que era para um valor entre 3,12 e 3,14, porém não tinham muita certeza. Então, o professor sugeriu para continuarem os cálculos, aumentando o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos.

Os alunos estavam organizados em duplas, a dupla formada pelos alunos A_2 e A_3 calculou a área de um polígono com 50 lados. Para a área do polígono inscrito, encontraram $3,135$ e, para a área do polígono circunscrito, obtiveram $3,145$. Enquanto isso, a dupla formada por A_1 e A_4 calculou a área do polígono com 100 lados encontrando $3,138$ como resultado do polígono inscrito e $3,142$ para a área do polígono circunscrito.

De posse desses novos resultados, os alunos apresentaram algumas conclusões. Uma das conclusões é apresentada a seguir, descrita pelo aluno A_2. Disse ele: "Professor! Nós estávamos conversando aqui e percebemos que esses resultados estão se aproximando cada vez mais de $3,14$ e, esse número nós conhecemos como o número π, usado no cálculo da área do círculo. Esse foi o caminho adotado por Arquimedes para calcular a área do círculo?"

Ao responder essa pergunta, o professor acrescentou também: "Imaginem toda essa construção a aproximadamente 2300 anos atrás e, considerando ainda, que naquela época não existiam as facilidade que temos hoje, como a calculadora, por exemplo, que facilita e agiliza nossos cálculos".

Como parte complementar, nos estudos referentes ao método de Arquimedes, no primeiro período do sexto encontro, foi construída uma demonstração para obter a área do círculo com a inscrição e circunscrição de polígonos regulares.

Inicialmente, o professor propôs aos alunos que considerassem um polígono regular inscrito e outro circunscrito, no círculo de raio r, com n lados cada. Em seguida, construiu um triângulo, unindo o centro do círculo a dois vértices consecutivos, do polígono inscrito, formando o triângulo ΔOA_iB_i, no qual o ângulo central $\widehat{A_iOB_i}$ mede $\frac{360°}{n}$. De modo análogo, construiu um triângulo (ΔOA_jB_j) no polígono circunscrito, no círculo, com mesma medida de ângulo central.

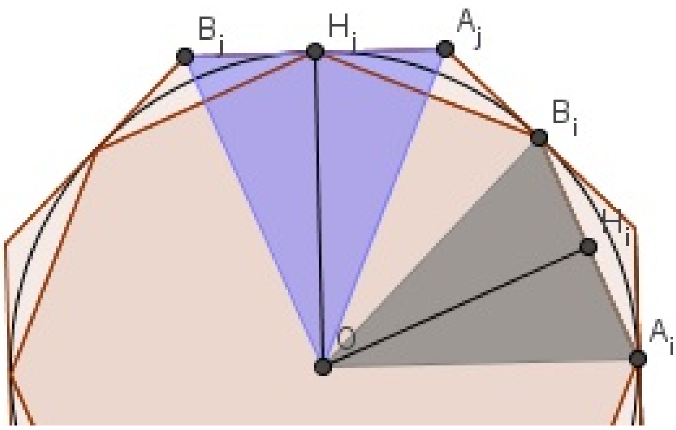


Figura 3.21: Figura ilustrando a construção do cálculo de área do polígono com n lados inscrito e circunscrito no círculo de raio r.

Usando o mesmo raciocínio adotado no cálculo de área dos exemplos da aula anterior, determinou a área dos polígonos, obtendo para área do polígono inscrito

$$A_{polígonoInscrito} = r^2.n.sen(\frac{360}{n}).cos(\frac{360}{n})$$

e, para a área do polígono circunscrito, o valor:

$$A_{polígonoCircunscrito} = r^2.n.tg(\frac{360}{n})$$

Considerando que as expressões: $n.sen(\frac{360}{n}).cos(\frac{360}{n})$ e $n.tg(\frac{360}{n})$ para um círculo de raio unitário sejam aproximadamente $\pi = 3,14$, quando $n \geq 100$; o professor sugeriu a substituição das mesmas pelo valor π. Justificou que essa igualdade é possível devido ao cálculo de limite aplicado para um n muito grande, isto é:

$$lim_{n \to \infty} n.sen(\frac{360}{n}).cos(\frac{360}{n}) = \pi$$

$$lim_{n \to \infty} n.tg(\frac{360}{n}) = \pi$$

Desta forma, concluiu para a área do polígono inscrito:

$$A_{polígono \quad inscrito} = r^2.\pi$$

e, para a área do polígono circunscrito, o valor:

$$A_{polígonoCircunscrito} = r^2.\pi$$

O professor concluiu dizendo que as duas áreas, do polígono inscrito e do polígono circunscrito, coincidiam, e, desse modo, poderia escrever a seguinte igualdade:

$$A_{polígonoInscrito} = A_{polígonoCircunscrito} = r^2.\pi$$

Ao observar os resultados obtidos, o aluno A_2 comentou dizendo que aquela expressão representava a fórmula que expressa a área do círculo. Esse comentário foi compartilhado e complementado por outros colegas. Assim, o professor escreveu a expressão final, que representa a área do círculo de raio qualquer.

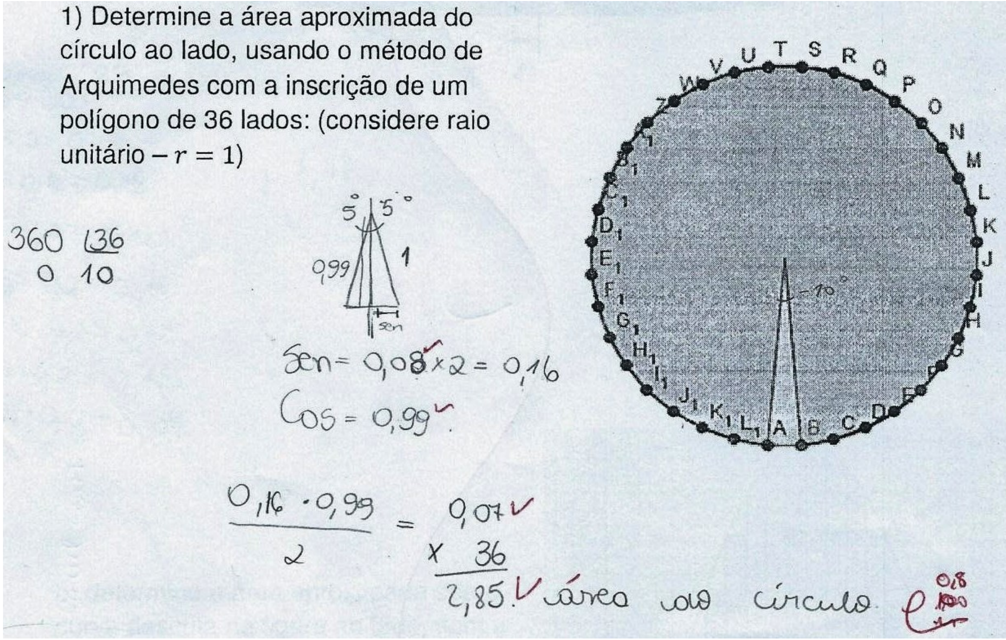
$$A_{Círculo} = \pi.r^2$$

Para finalizar este tópico, o professor aplicou a segunda atividade avaliativa, logo após a generalização do método de Arquimedes.

3.2.2 Atividade avaliativa 2 e análise dos resultados

3.2.2.1 Questão 1:

Determine a área aproximada do círculo ao lado, usando o método de Arquimedes, com a inscrição de um polígono de 36 lados: (Considere raio unitário —$r = 1$).



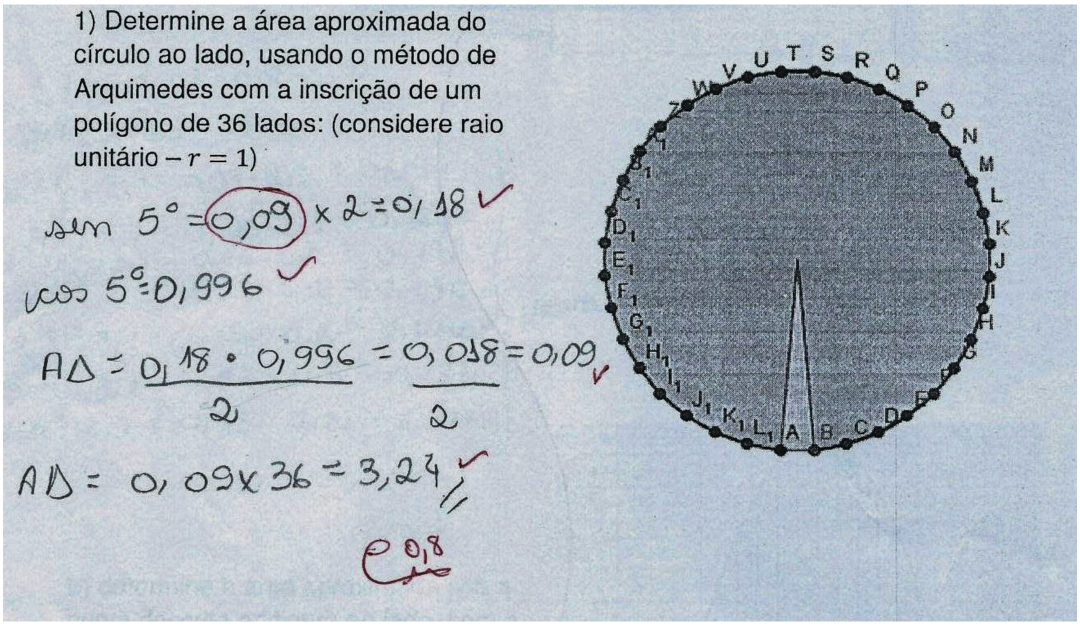
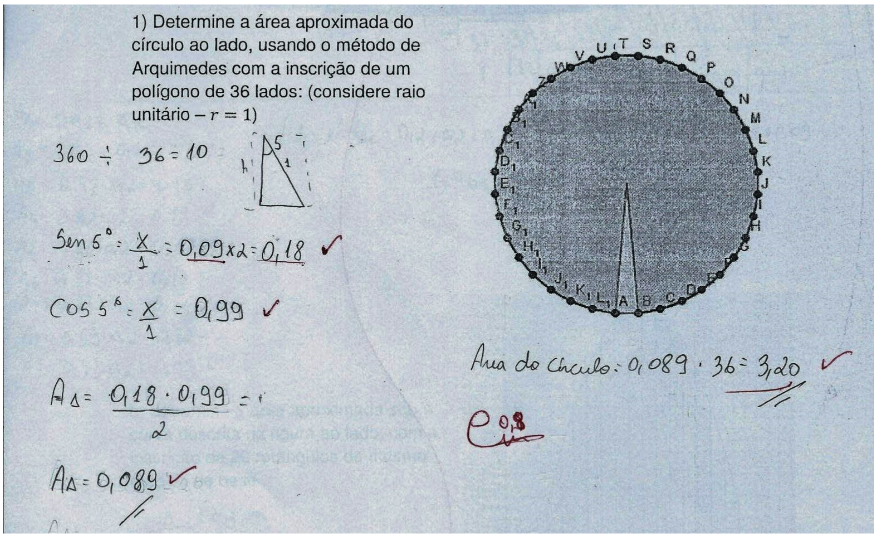
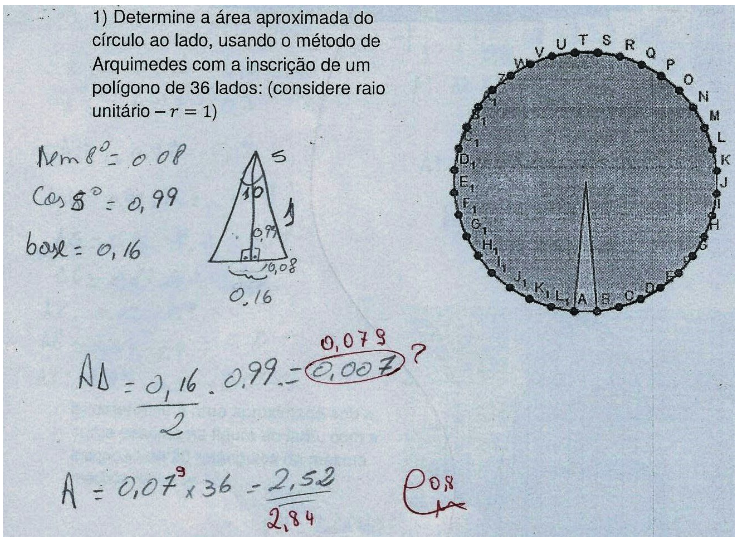


Figura 3.22: Atividade superior resolvida pela aluna A_9; e, atividade inferior resolvida pela aluna A_{24}.


1) Determine a área aproximada do círculo ao lado, usando o método de Arquimedes com a inscrição de um polígono de 36 lados: (considere raio unitário – $r = 1$)


1) Determine a área aproximada do círculo ao lado, usando o método de Arquimedes com a inscrição de um polígono de 36 lados: (considere raio unitário – $r = 1$)

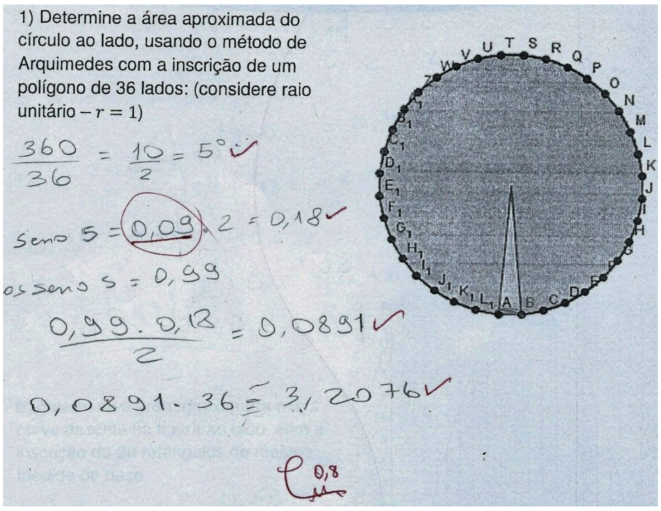

1) Determine a área aproximada do círculo ao lado, usando o método de Arquimedes com a inscrição de um polígono de 36 lados: (considere raio unitário – $r = 1$)

Figura 3.23: Atividade superior resolvida pelo aluno A_{17}; Atividade do centro resolvida pelo aluno A_{23}; e, Atividade inferior resolvida pelo aluno A_1.

Nesta atividade os alunos tinham que usar as razões trigomométricas seno, cosseno ou tangente, para para resolvê-la. De modo geral, a construção apresentada pelos alunos segue um mesmo padrão, muitos cálculos são omitidos e, a organização das ideias, muitas vezes, não apresenta uma sequência lógica, ficando implícito o que se deseja saber.

Além disso, apesar do método de resolução ser semelhante, são registradas algumas diferenças nos resultados, conforme é possível perceber na resolução apresentada, nas Figuras 3.22 e 3.23, acima. Esse fato ocorreu devido ao arredondamento adotado pelos alunos. Para agilizar sua construção estabelecem um ponto de corte para o arredondamento, muitas vezes indevido.

Mediante o uso de uma calculadora científica obteve-se para o valor de $sen(5°)$ o resultado $0,08715574274$. Os alunos, ao resolverem esta atividade, adotaram, em sua maioria, dois resultados: $0,08$ com arredondamento para baixo (ou truncamento) e, por sinal errado; ou, $0,09$ com arredondamento para cima, neste caso, correto. Embora essa diferença, de três milésimos, seja pequena, é significativa na conclusão do cálculo. Durante a resolução das atividades que antecederam a atividade avaliativa, em muitos momentos, o professor destacou a importância e o cuidado que se deve ter, principalmente no cálculo de área dos polígonos.

O principal objetivo desta atividade era perceber se os alunos haviam entendido o método de resolução aplicado. Ao comparar os resultados obtidos pelos alunos, cujos cálculos estão dispostos nas Figuras 3,22 e 3.23, pode-se perceber a variação nos resultados mas, de modo geral, pode-se afirmar que o objetivo foi alcançado. Embora haja alguma diferença em seus resultados, a maioria dos alunos que resolveu esta atividade não apresentou muitas dificuldades. Todos os cálculos apresentados, com coerência, foram considerados e valorizados.

Como a maioria dos resultados obtidos pelos alunos apresentava dois cálculos distintos, com variações na casa dos centésimos, apenas, o professor entendeu que não haveria necessidade de expor um número maior de resoluções, pois tais resoluções seriam desnecessárias, além de que não iriam agregar valores significativos. Vale acrescentar que, resoluções cujos cálculos apresentados estavam errados, ainda na fase inicial, ou atividades deixadas em branco, foram desprezadas, por não contribuírem para a análise dos resultados.

3.2.2.2 Questão 2:

Determine a área de cada um dos polígonos, a seguir, inscritos no círculo, usando o método de Arquimedes. Compare os resultados obtidos em (a) e (b). O que se pode concluir? (Considere raio unitário $r = 1$)

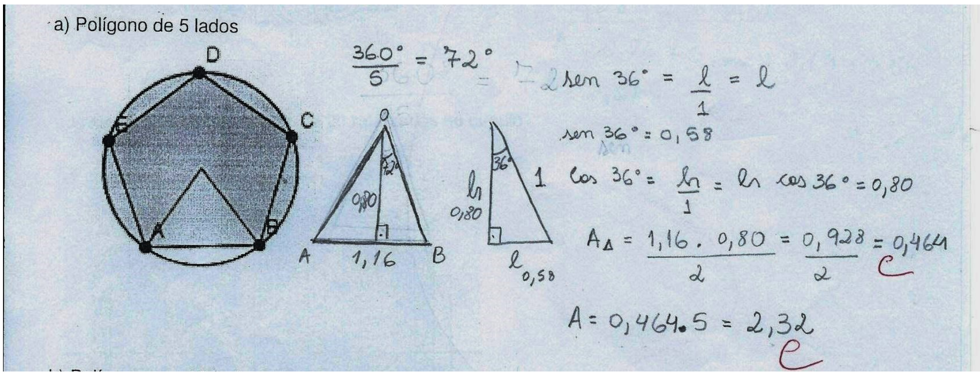
Observações:

Nesta atividade foram elaborados dois modelos de atividade:

No primeiro modelo, o item (a) apresenta um polígono com 5 lados e o item (b), apresenta um polígono com 15 lados;

No segundo modelo, o item (a) apresenta um polígono com 12 lados e o item (b), apresenta um polígono com 30 lados.

Modelo - 1



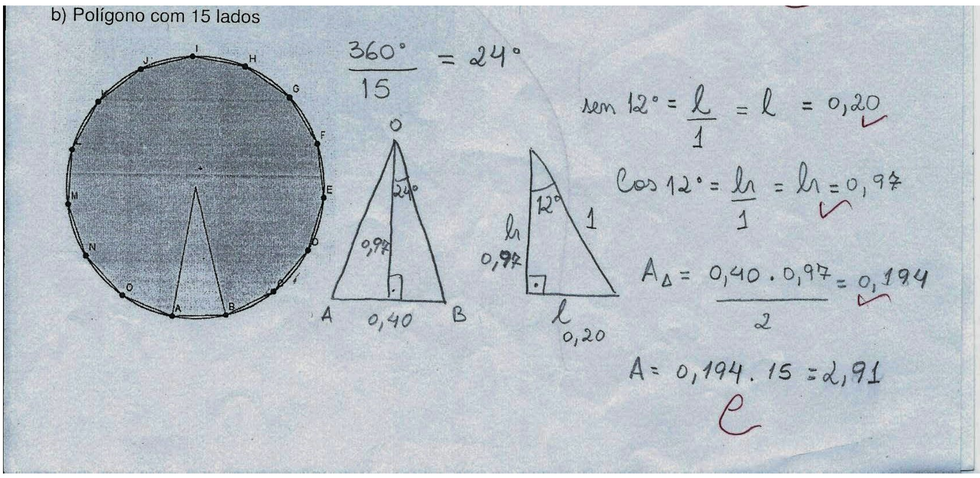


Figura 3.24: Atividade resolvida pelo aluno A_8;

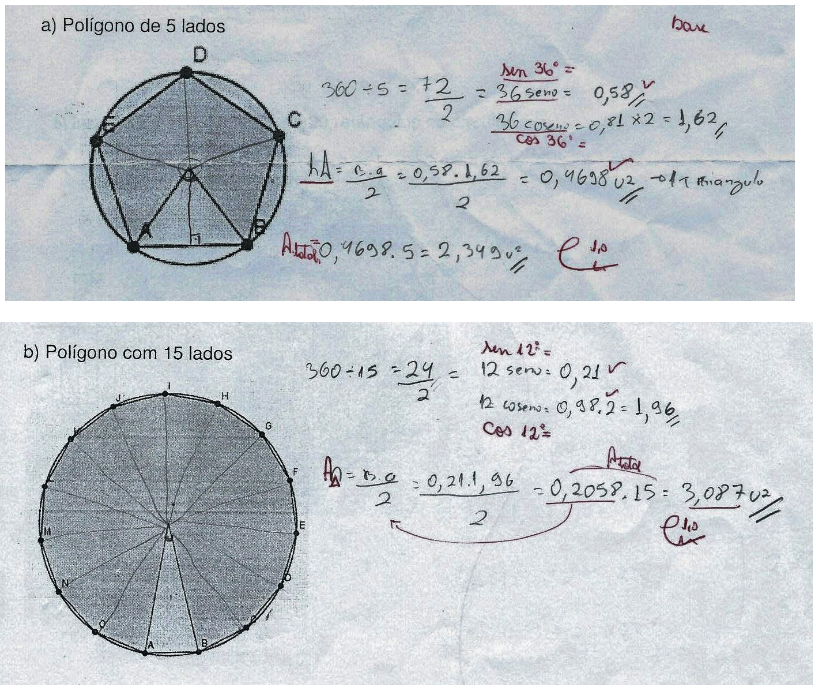


Figura 3.25: Atividade resolvida pelo aluno A_{13}.

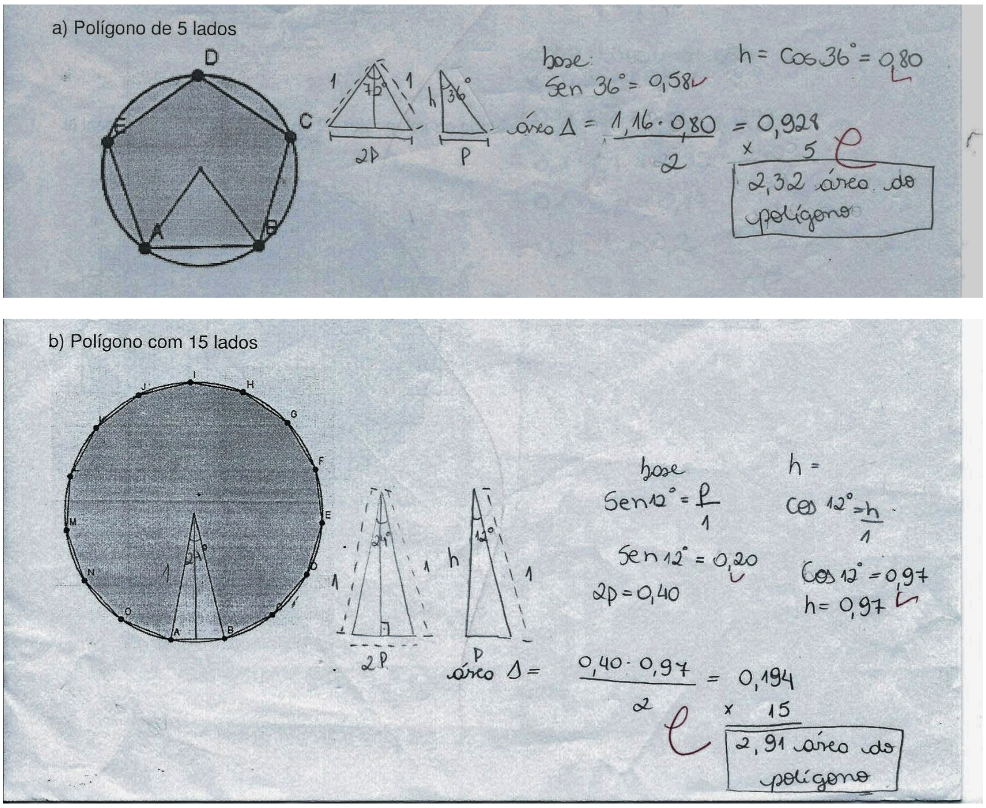


Figura 3.26: Atividade resolvida pelo aluno A_9.

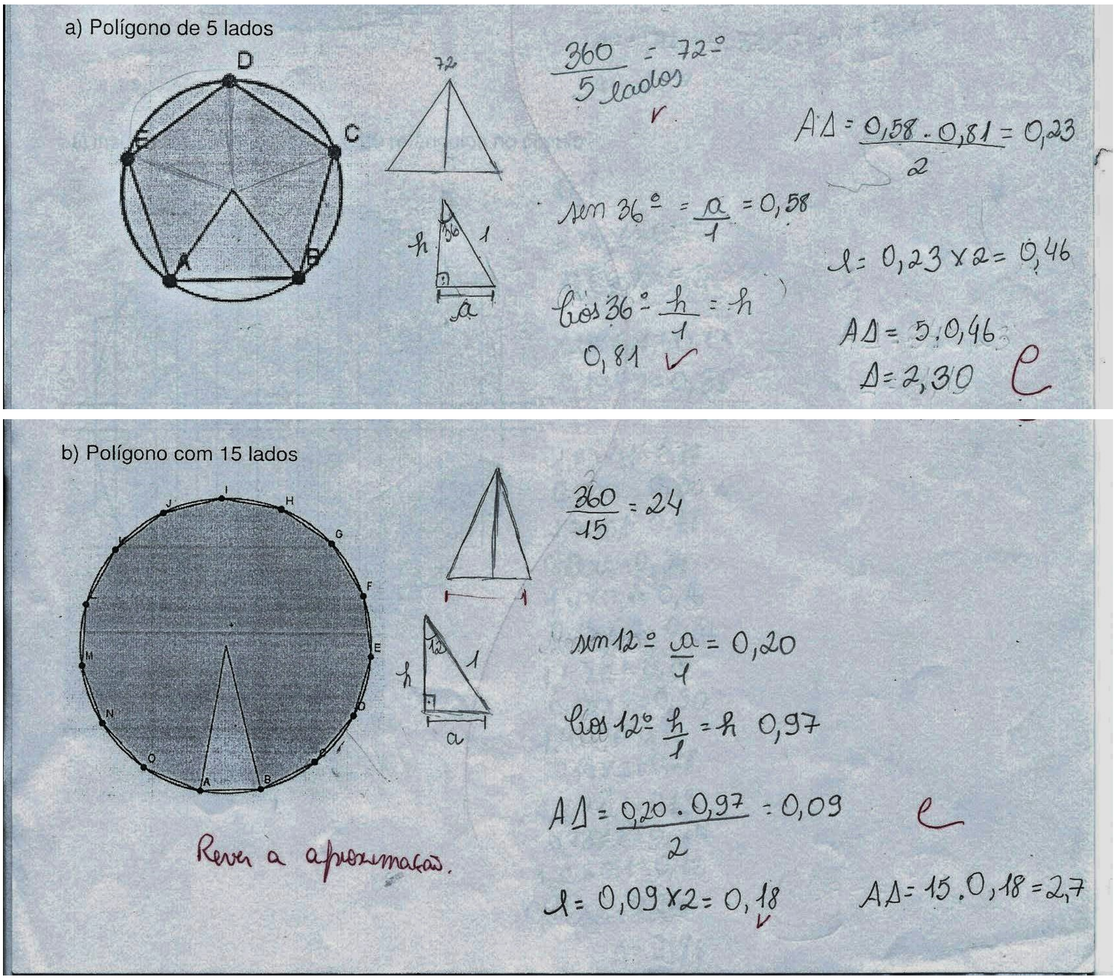


Figura 3.27: Atividade resolvida pelo aluno A_{19}

Modelo - 2

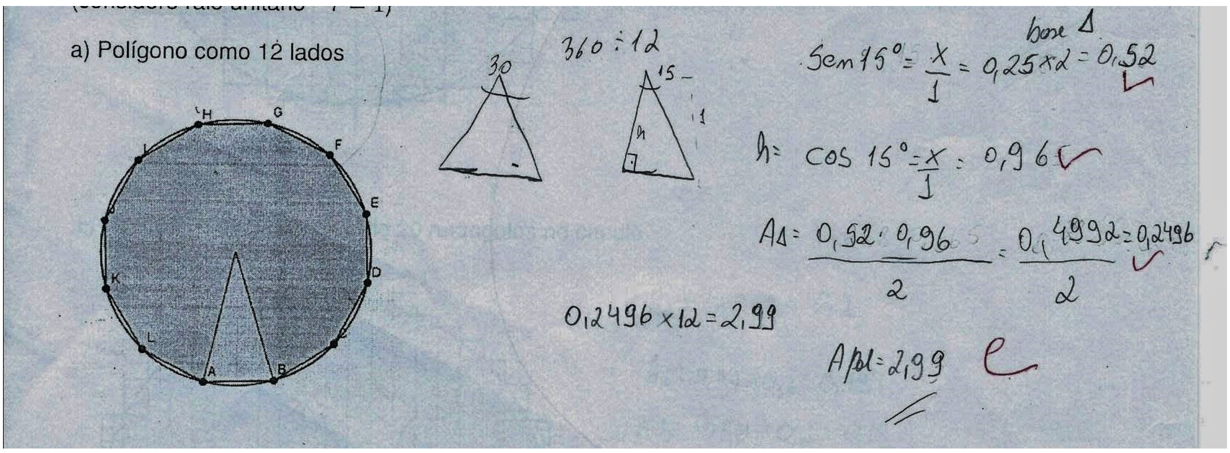


Figura 3.28: Atividade 1(a) resolvida pelo aluno A_{17}.

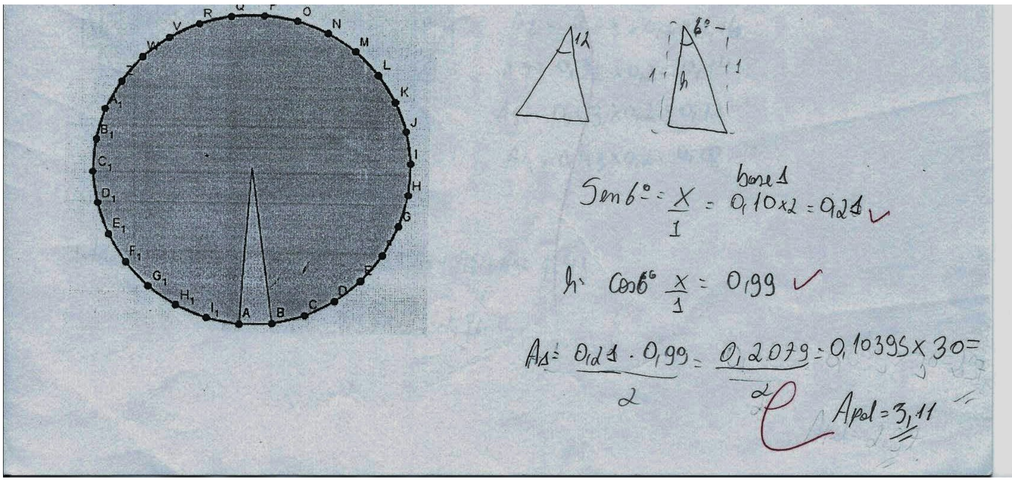


Figura 3.29: Atividade 1(b) resolvida pelo aluno A_{17}.

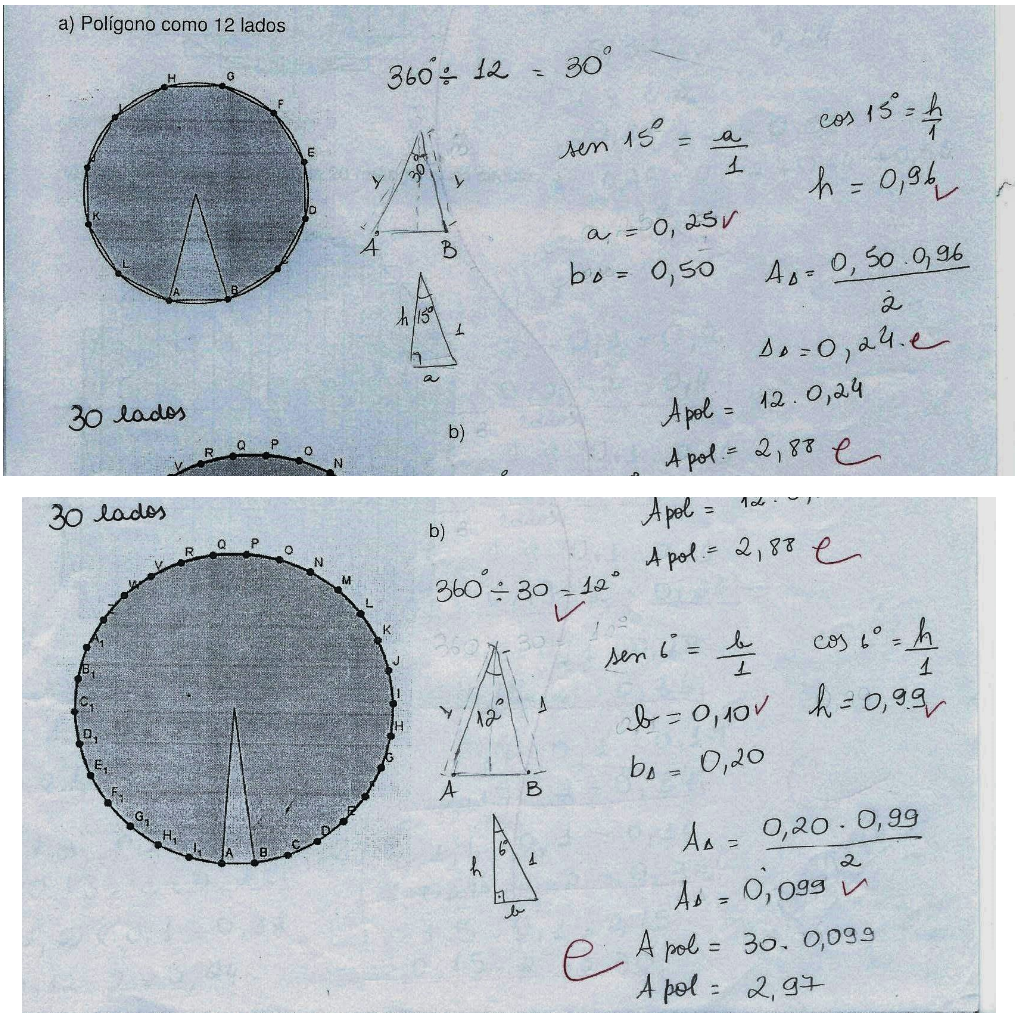


Figura 3.30: Atividade resolvida pelo aluno A_7.

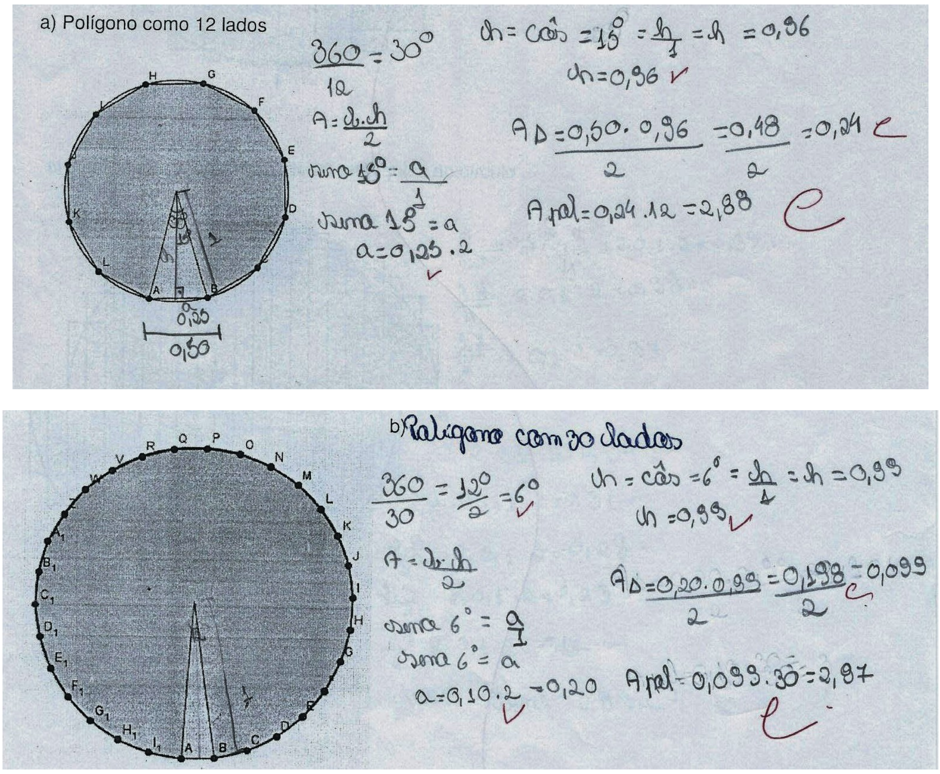


Figura 3.31: Atividade resolvida pelo aluno A_6.

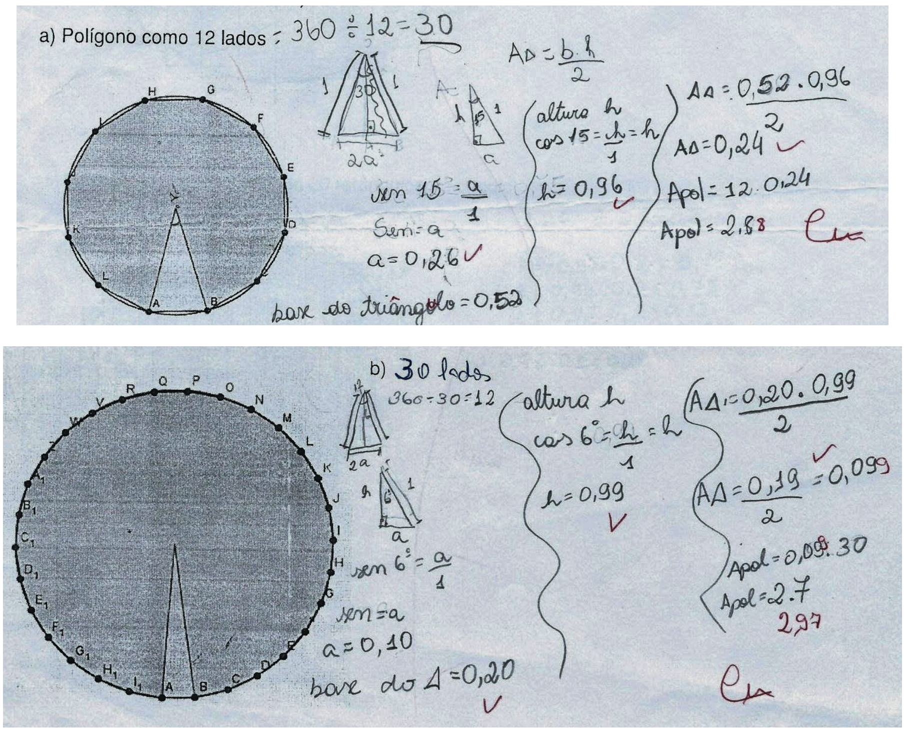


Figura 3.32: Atividade resolvida pelo aluno A_{12}.

Ao levar em consideração o estudo que antecedeu a atividade avaliativa e os resultados obtidos nesta atividade, o aluno teria subsídios suficientes para apresentar sua conclusão. Nesse sentido, após determinar a área dos dois polígonos, inscritos no círculo, o aluno deveria comparar os resultados obtidos e, concluir, a partir desses resultados.

No encontro seguinte, conforme combinado com a turma, o professor indagou os alunos sobre a atividade avaliativa, da aula anterior. O objetivo era saber, dos alunos, qual a conclusão após a resolução da questão 2, precisamente.

Alguns alunos se manifestaram, apresentando suas percepções, após a resolução da atividade. Pode-se resumir o entendimento, por eles descrito, a partir da conclusão apresentada pelo aluno A_1.

A_1_ Professor! Eu entendi que: quanto maior o número de lados do polígono que vai dentro do círculo mais perto da área do círculo é o resultado. No meu caso, eu tinha um polígono com 5 lados e outro com 15 e, os resultados que eu encontrei foram $2,35$, [eu acho] para a área do polígono de 5 lados e, $2,94$ para a área do polígono de 15 lados. Eu cheguei a essa conclusão pensando nas aulas anteriores.

Após a manifestação deste aluno, o grupo de alunos que tinha resolvido o modelo 1, em sua maioria, apresentou praticamente a mesma conclusão, embora contrários ao arredondamento apresentado pelo aluno A_1.

A aluna A_7 acrescentou: "Professor! Mas no meu cálculo eu tinha um polígono com 12 lados e o outro com 30. Não lembro muito bem dos valores que eu encontrei. O senhor poderia ver pra mim?"

Ao verificar o cálculo desta aluna, o professor informou os resultados, por ela obtidos e, a partir destes resultados, os colegas que resolveram o modelo 2, mesma atividade da aluna, concordaram parcialmente com os resultados. Apontaram diferenças, na primeira ou segunda casa decimal.

Nesse momento de troca, o professor aproveitou para esclarecer algumas dúvidas que ainda persistiam, a principal foi a escolha da casa decimal para o arredondamento. Apesar de não apresentarem um resultado preciso, esperado para a construção, o professor destacou que a diferença nos resultados estava diretamente ligada ao arredondamento por eles adotado e, desse modo, concluiu:

Pr._ Quando estamos resolvendo um exercício que, no cálculo, seja necessário arredondar os resultados que aparecem na calculadora, como estes, devemos estar atentos a dois "detalhes". O primeiro, é a escolha da quantidade de casas decimais, que iremos utilizar, pois o resultado está diretamente ligado a esta escolha. O segundo "detalhe"diz respeito à casa escolhida para o "ponto de corte, o arredondamento".

Pr._ Para entender melhor, vamos comparar os resultados obtidos, por dois alunos, na resolução do item (b), com a inscrição de polígonos com 15 lados. Os resultados obtidos, por cada um deles foi $2,7$ e $2,91$. Comparando os resultados, é possível verificar que há diferença e, significativa, precisamente $0,21u.a.$ Se considerar um círculo de raio 1 metro, a diferença será de $0,21m^2$, do mesmo modo, se o raio mede 1 quilômetro a diferença será de $0,21km^2$.

A partir desta comparação, o professor finalizou, recordando os critérios que devem ser adotados para o arredondamento, em cálculos, cujos resultados apresentam quantidade significativa de casas decimais.

Percebe-se, nas resoluções apresentadas pelos alunos, tanto nesta atividade avaliativa, quanto na resolução das atividades que antecederam-na, que os alunos entenderam a construção e o cálculo com a aplicação do método de Arquimedes.

Ao comparar a resolução apresentada pelos alunos, em cada atividade, é possível notar que os resultados obtidos, diferem, em sua maioria, a partir da segunda casa decimal, salvo algumas exceções.

Salienta-se que cada aluno tem seu método de resolução. Alguns alunos resolvem seus cálculos detalhando-os, identificando medidas de base, altura e área do triângulo, para obter, em seguida, a área da região requerida. Outros alunos são menos detalhistas, descrevem de modo direto os resultados, ocultando muitas informações que auxiliam a interpretação desses resultados.

Apesar de não terem estudado trigonometria no ano anterior, conforme haviam mencionado, os alunos mostraram-se dedicados e envolvidos durante a resolução das atividades. Assumiram o papel de estudantes e conseguiram suprir suas deficiências.

O professor finalizou este tópico, que envolvia aplicação do método de Arquimedes, após a discussão e reflexão realizada pelos alunos, envolvendo a atividade avaliativa aplicada na aula anterior. Na sequência dos estudos, o professor iniciou o novo tópico, também referente ao cálculo de área do círculo, agora com a aplicação do método de Riemann.

3.2.3 O método de Riemann

O professor iniciou este tópico perguntando aos alunos se eles conheciam ou se já tinham ouvido falar do matemático alemão *"Georg Friedrich Bernhard Riemann"*, ou simplesmente *Bernhard Riemann*. Explicou que Riemann foi um grande matemático de seu tempo e, para introduzir o método de Riemann, o professor trouxe para os alunos um pouco da história desse matemático, extraída de uma nota de rodapé e classificada como um "esboço biográfico"conforme classificou Anton (2002, p. 410) e, que pode ser conferido no Anexo B.

A partir da leitura deste "esboço", o professor disse aos alunos:

Pr._ Riemann desenvolveu um método que, embora diferente do método de Arquimedes, determinava também com precisão, a área de regiões curvilíneas por meio da inscrição e circunscrição de retângulos.

Pr._ Para a aplicação desse método, ele dividiu o intervalo no qual está limitada a região curvilínea, em n partes iguais. Inscrevendo e circunscrevendo n retângulos, em que uma das dimensões de cada retângulo, apresentava medida igual a uma dessas n partes, obtidas na divisão. A outra dimensão correspondia ao comprimento do segmento entre a curva dada e o eixo horizontal correspondente.

Para ilustrar, o professor usou as imagens representadas na Figura 3.33.

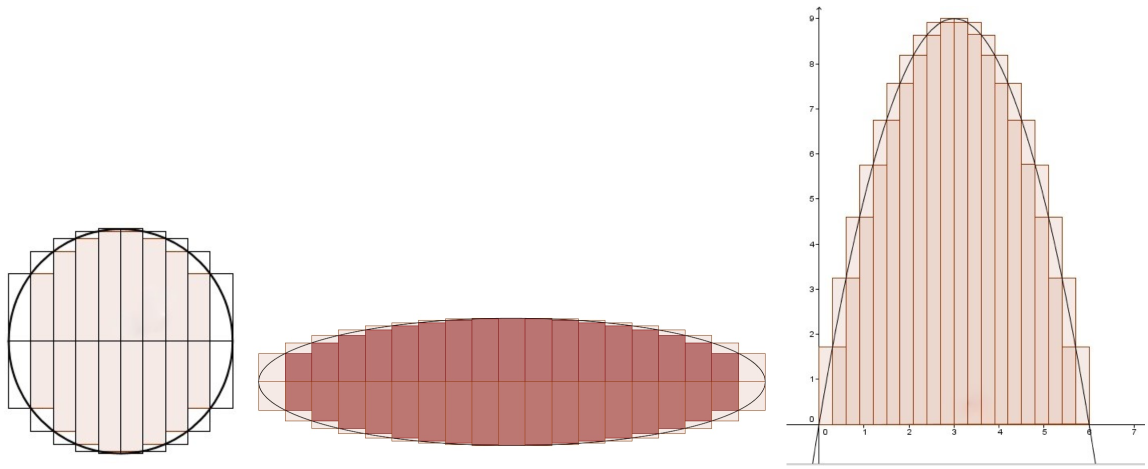


Figura 3.33: Figuras ilustrando a aplicação do método de Riemann para o cálculo de área de regiões com contornos curvilíneos.

A partir desta introdução e comentários, o professor entregou uma folha quadriculada aos alunos solicitando que fossem construídos dois círculos de raio qualquer, idênticos e, que essa medida de raio fosse considerada unitária ($r = 1u$) no intuito de padronizar os resultados posteriores.

Como sugestão, para a construção, disse o professor: "Usem para a medida do raio, comprimento igual a 5 vezes o lado de um desses quadradinhos, da malha quadriculada.

Esta quantidade irá facilitar no cálculo que faremos posteriormente."

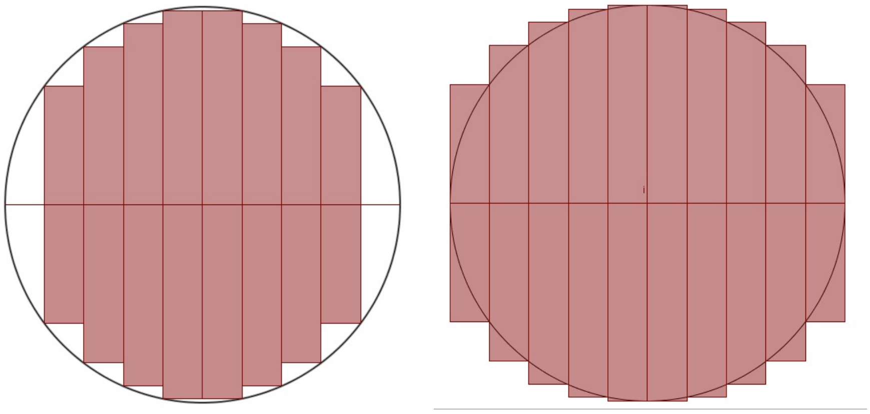


Figura 3.34: Inscrição e circunscrição de retângulos no círculo de raio unitário.

O professor usou a imagem apresentada na Figura 3.34 para ilustrar e indicar como ficariam cada um dos retângulos. Em seguida, solicitou aos alunos para traçarem o diâmetro do círculo, identificado na horizontal, como ilustrado na figura. Sugeriu, também, que esta medida fosse dividida em 10 partes iguais.

Em seguida, solicitou aos alunos para construírem retângulos inscritos em um dos círculos e, circunscritos no outro, como ilustrado na Figura 3.34. Observou que a medida da dimensão do retângulo, apoiada sobre o diâmetro, corresponde a décima parte deste, e, a outra dimensão, medida igual ao segmento que é perpendicular à primeira dimensão obtida e que intersecta o círculo em dois pontos extremos.

Para determinar a área, aproximada, do círculo, por meio da inscrição ou circunscrição de retângulos, são necessários os valores das suas dimensões.

Desse modo, o professor observou: "Como o diâmetro é igual ao dobro do raio e, sendo este unitário, ao dividir o diâmetro em 10 partes iguais, cada uma das partes terá medida igual a $0,2$ unidade de comprimento $(u.c.)$ Portanto, a dimensão do retângulo apoiada no diâmetro, terá $0,2$ unidade de comprimento. A medida da outra dimensão, depende da intersecção entre seus vértices e, o círculo. Além disso, o segmento obtido para formar esta dimensão, na construção de cada retângulo é perpendicular ao diâmetro."

Pr._ Percebam, aqui na figura, que é possível inscrever oito retângulos no círculo e, é possível circunscrever os dez retângulos.

Pr._ Notem também que, sobrepondo as duas figuras, com exceção dos dois retângulos circunscritos centrais, para cada retângulo circunscrito há um retângulo inscrito de mesmo comprimento e, portanto, de mesma área.

Pr._ Logo, a área do menor retângulo inscrito no círculo é igual a área do menor retângulo circunscrito; a área do segundo menor retângulo inscrito no círculo é igual a área do segundo menor retângulo circunscrito e, assim por diante.

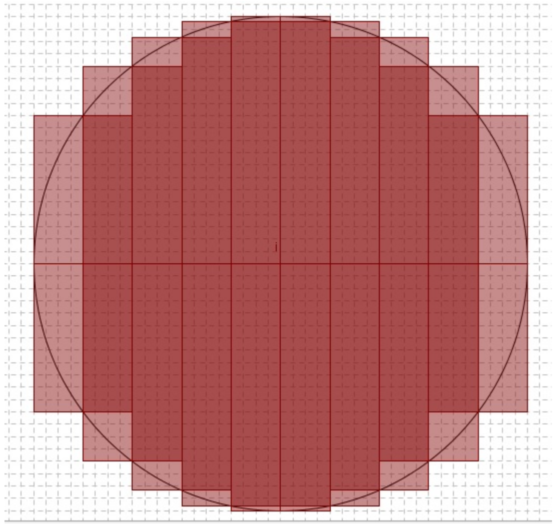


Figura 3.35: Figura utilizada para ilustrar a sobreposição dos retângulos, inscritos e circunscritos, no círculo.

Para facilitar, o professor sugeriu que fosse traçado um novo diâmetro. Este, perpendicular ao primeiro e, subdividi-lo também em intervalos iguais.

O professor completou dizendo: Vamos, primeiramente, determinar a área dos retângulos inscritos no círculo e, em seguida, iremos determinar a área dos retângulos circunscritos.

Os alunos apresentaram algumas dificuldades, tais como: construir os retângulos, determinar a medida do comprimento de cada retângulo e, determinar a área de cada retângulo a partir da obtenção das suas dimensões. Muitos alunos esqueceram que haviam adotado, para a medida do raio, um valor padrão, unitário e, como a base de cada retângulo, estava apoiada no diâmetro do círculo, esta, tinha medida igual a $0,2u.c.$.

Após obter a outra dimensão do retângulo, calcularam a área, misturando as duas unidades de medida, gerando erros em seus resultados.

Nesse sentido, o professor explicou: _ Como vimos antes, o raio foi definido como unitário, isto é, vale uma unidade de medida, seja ela dada em metros, centímetros, milímetros, etc. Desse modo, o diâmetro terá como medida 2 unidades de raio. Vimos que uma das dimensões de cada retângulo está apoiada no diâmetro e que esta medida $(0,2u.c.)$ é igual para todos os retângulos.

Pr._ Vocês usaram régua para determinar o comprimento de cada um dos retângulos e obtiveram valores dados em centímetros. Para determinar a área de cada retângulo é necessário que façam a conversão dessas medidas para a unidade de medida $u.c.$, pois, desta forma, estaremos trabalhando com uma unidade de medida genérica.

Ainda assim, um grupo de alunos que não havia entendido como determinar o valor dessa dimensão, perguntou se haveria outro jeito de calcular a área de cada retângulo.

Essa dúvida pode ser sintetizada pelo questionamento do aluno A_5:
A_5_ Professor! Eu ainda não entendi por que é que eu não posso usar a medida que eu encontro com a régua. Onde é que eu estou errando?

A partir deste questionamento, o professor pensou em uma nova estratégia. Com o auxílio do Geogebra, construiu o círculo da Figura 3.36 e, então disse:

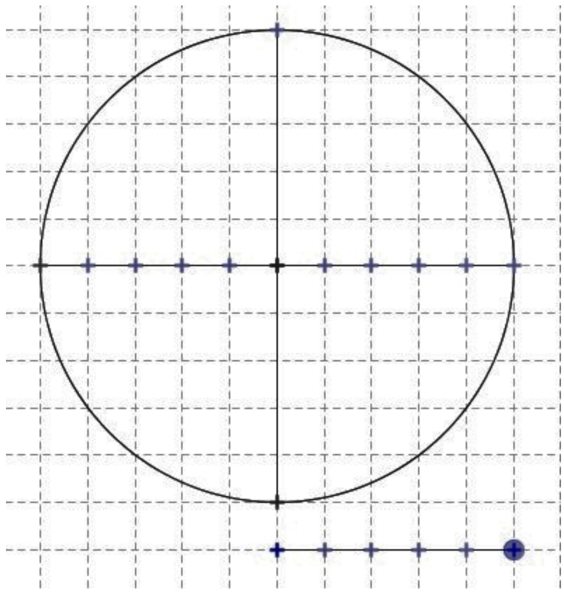


Figura 3.36: Construção do círculo no Geogebra.

Pr._ Eu sugeri que fosse construído um círculo, cuja medida do raio seja igual a 5 quadradinhos da malha quadriculada, como esta figura. Foi definido, anteriormente, que fosse adotada a medida do raio como unitária ($r = 1u.$). Desta forma, como o diâmetro (d) equivale ao dobro da medida do raio, terá duas unidades de medida ($d = 2u.$), ou 10 quadradinhos, da malha quadriculada.
Pr._ Vamos considerar que a medida do lado de cada um destes quadradinhos tenha aproximadamente $0,5$ cm de comprimento. Ou seja, o diâmetro do círculo terá 5 cm de comprimento. Assim, podemos estabelecer a razão 2:5, em que, "2"representa o dobro da medida do raio (ou o diâmetro, e cinco é o comprimento desta medida, dada em centímetros).
Pr._ Com o auxílio da régua, vocês encontraram 4,9 cm, aproximadamente, para o comprimento do maior retângulo. Vamos converter este valor para a unidade de medida padrão, estabelecida acima. Assim, por meio de uma regra de três, simples e direta, podemos escrever:

$$\begin{array}{ccc} \textit{medida em centímetros} & & \textit{medida em u.c.} \\ 5 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 4,9 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Isto é:

$$\frac{5}{4,9} = \frac{2}{x}$$

Pr._ Resolvendo essa igualdade, obtemos $x = 1,96 u.c.$. Portanto, valor menor que o diâmetro. Desse modo, a área (A) do referido retângulo será:

$$A_{Retângulo\ Inscrito} = 1,96 \times 0,2 = 0,392$$

Com a conclusão do cálculo da área do retângulo de maior comprimento, inscrito no círculo, o professor solicitou aos alunos que determinassem a área dos outros retângulos inscritos, cuja medida de comprimento, dada em centímetros, já haviam obtido.

Desse modo, os alunos fizeram a conversão das medida que haviam obtido, em centímetro para $u.c.$, obtendo os seguintes valores: $1,84$; $1,6$; e, $1,2$. Em seguida, calcularam a área de cada um dos referidos retângulos, obtendo, para estes, os seguintes resultados: $0,368$; $0,32$; e, $0,24$, respectivamente.

Então, o aluno A_1 concluiu, dizendo: _ Professor! Eu somei os quatro resultados que foram calculados e multipliquei por dois, pois nós calculamos a área da metade do círculo. Ficou assim:

$$A_{Círculo} = (0,392 + 0,368 + 0,32 + 0,24) \times 2 = 2,64$$

Para determinar a área da região circunscrita por retângulos, o professor perguntou: "Como podemos determinar a área do círculo, circunscrita por retângulos? Teremos que repetir todo esse cálculo?"

Alguns alunos disseram que sim, mas que seria muito cansativo. Outros alunos recordaram de uma explicação dada, ainda no início da aula, pelo professor, na qual eram comparados os retângulos inscritos e circunscritos. A observação apresentada pelo aluno A_2 resume os argumentos dos alunos:

A_2_ O senhor disse antes que a área do retângulo menor, dentro do círculo, é igual a área do retângulo menor do lado de fora do círculo, e, depois, disse o mesmo para à área do segundo e, assim por diante. Então, se isso é verdade, eu só preciso calcular a área daqueles dois retângulos que estão no meio. Qual vai ser a medida do comprimento desses dois retângulos?

Nesse momento o aluno A_1 indagou: "Posso dizer que o comprimento desses dois retângulos é igual ao diâmetro do círculo?"

Concordando com os alunos, o professor questionou-os, querendo saber o valor da área desses dois retângulos e, consequentemente, a área total da região circunscrita pelos retângulos, no círculo.

Assim, o aluno A_1 concluiu: "A área de cada um desses dois retângulos será igual a $0,4$, é só fazer base vezes altura."

$$A_{retângulocircunscrito} = 2 \times 0,2 = 0,4$$

A_1_ Daí, a área dos dois retângulos é igual a $0,8$, pois multiplica por dois esse resultado. A área total é igual a esse resultado somado com o valor da área que foi calculada antes, com os retângulos dentro do círculo.

$$A_{Área\ total} = 2,64 + 0,8 = 3,44$$

No final da atividade, o professor sugeriu aos alunos para construírem nova tabela, semelhante à construída na aplicação do método de Arquimedes, e, nela fossem dispostos os resultados obtidos no cálculo de área com a inscrição e circunscrição de retângulos.

Como tarefa de casa, foi determinado o cálculo da área, aproximada, do círculo, agora com a inscrição e circunscrição de 20, 40 e 50 retângulos, quantidades estas correspondentes à subdivisão do diâmetro em intervalos de mesmo tamanho.

O sétimo encontro foi dividido em duas partes. Na primeira parte, foram resolvidas e discutidas as atividades deixadas como tema de casa, no último encontro. Durante esse momento, foram esclarecidas dúvidas que ficaram pendentes, envolvendo a aplicação do método de Riemann, no círculo. No segundo momento, o professor estendeu a aplicação do método de Riemann, para o cálculo da área, da região delimitada por uma elipse.

No primeiro momento da aula, os alunos relataram que as dificuldades encontradas concentravam-se em dividir o diâmetro em quantidade tão grande de intervalos, como, por exemplo, quando dividiram, ou tentaram dividi-lo, em 40 e 50 partes iguais. Alguns alunos, inclusive, desistiram de construir e, assim, de calcular a área dessas duas regiões.

Disse, então, o professor: "Vamos observar, aqui no Geogebra, como fica preenchida a figura com a inscrição e, consequentemente, a circunscrição de 20 retângulos. Comparando esta com o exemplo da aula passada, o que podemos observar?"

Alguns dos alunos, que resolveram a atividade extra-classe, apresentaram as suas observações, como pode-se perceber a seguir:

A_1_ Professor! Aquela região que ainda falta preencher fica menor, se reduz à metade do que era.

A_3_ É, Sor! Aquela parte que tinha ficado de fora, agora com a nova divisão, ela diminuiu

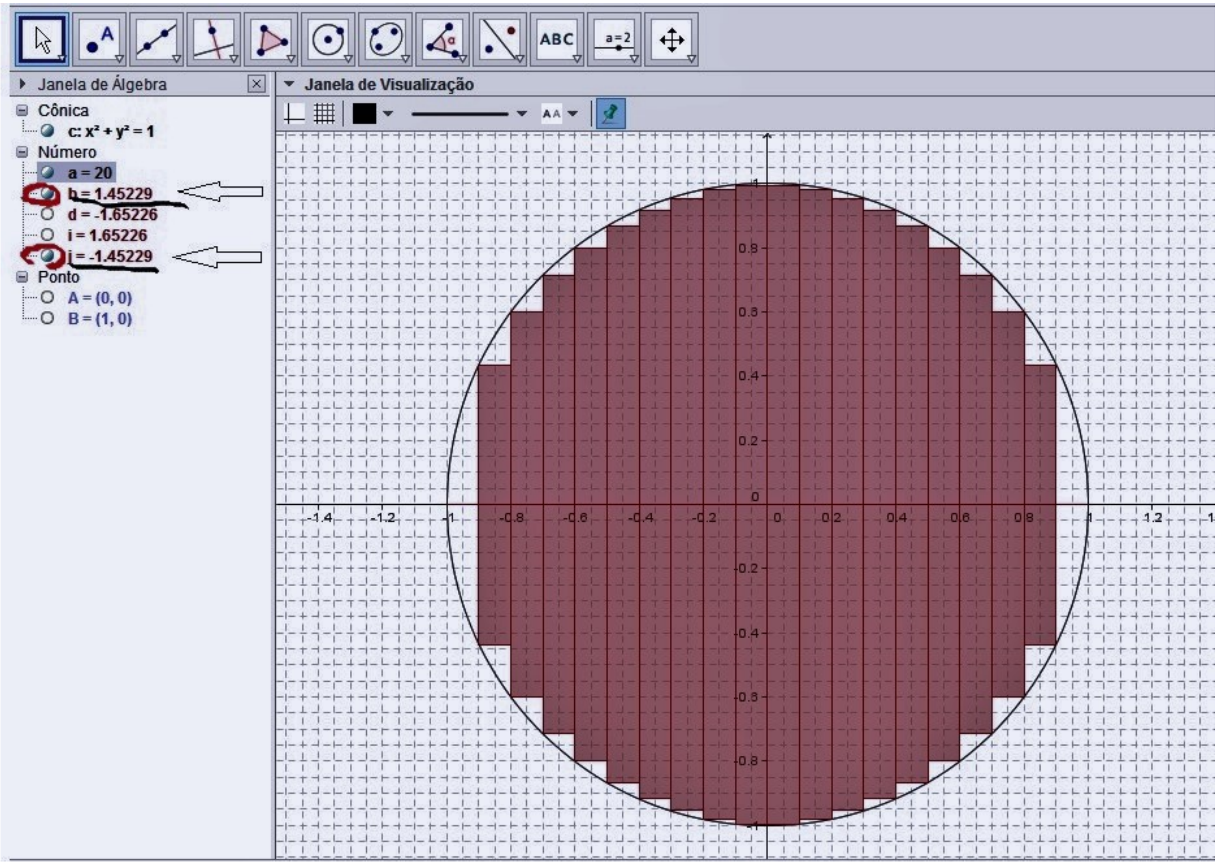


Figura 3.37: Imagem apresentada aos alunos ilustrando a inscrição de 20 retângulos e o respectivo valor da área

pela metade!

A_4_ Sor! Eu concordo em parte com o A_3 e o A_1, mas eu acho que, na verdade, quando eu aumentei para 20 retângulos, a região que faltava para preencher ficou reduzida a menos que a metade.

A_2_ Professor! Nós (A_2, A_5, A_6 e A_7) estávamos conversando e achamos que, quando o senhor aumentou aí no computador (Geogebra) a quantidade de retângulos para 20, aquela parte que faltava realmente fica menor e, parece que, como disse o A_3, ela cai pela metade.

Então, o professor concluiu dizendo: "Percebam que há diferentes arcos compondo o círculo, à medida que aumentamos o número de retângulos, na intenção de determinar a área do círculo, novos arcos são formados mas, em nenhum deles podemos inserir polígonos para completar o espaço vazio. Não teremos condições de, nesse curto espaço de tempo, verificar o quanto reduz a área a ser preenchida, mas é aceitavel a afirmação dos colegas quando dizem que, a região a ser preenchida, se reduz próximo da metade, quando duplicamos a quantidade de retângulos inseridos."

Continuando, o professor mostrou aos alunos os resultados obtidos para a área dos retângulos inscritos e circunscritos no círculo, com aproximação até a quinta casa decimal, com o uso do software Geogebra.

A partir da Figura 3.37 , o professor explicou o seguinte sobre o software Geogebra:

Pr._ O Geogebra é um software de geometria dinâmica, muito útil em diversas áreas da matemática. Possui diversos recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente.

Pr._ Este software gera imagens em duas dimensões, representadas pelos eixos OX e OY. Nesse sentido, tudo o que se constrói nele, seja ponto, reta, formas geométricas, dentre outras construções, é descrito por meio de coordenadas cartesianas. Tais coordenadas, assumem valores tanto positivos quanto negativos.

Pr._ Assim como muitas outras construções geométricas, o círculo, no Geogebra, é descrito por meio de uma equação matemática. O círculo desta figura, em particular, é representado pela equação

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.1}$$

Pr._ Para calcular a área da região descrita pelo círculo obtido a partir da equação, usando o método do Riemann no Geogebra, devemos isolar uma variável da equação (3.1) em função da outra, obtendo duas funções. Devemos proceder desta forma, pois o software, reconhece a aplicação do método de Riemann por meio do uso de funções.

Pr._ Normalmente isolamos a variável y em função da variável x. Com o isolamento desta variável, obtemos duas funções, identificadas por y_1 e y_2 e, cada função representa uma região do círculo, um semi-círculo, conforme podemos perceber nesta figura. Aqui foram inscritos retângulos, no círculo, o mesmo procedimento é válido para retângulos circunscritos.

Pr._ A primeira função (y_1) dada por

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2} \tag{3.2}$$

corresponde a parte do semi-círculo, localizada acima do eixo OX, enquanto a função (y_2), dada por

$$y_2 = -\sqrt{1 - x^2} \tag{3.3}$$

representa a parte do semi-círculo, localizada abaixo do eixo OX.

Pr._ Antes de concluir, gostaria de chamar a atenção de vocês para o valor numérico que representa a área da região abaixo do eixo OX. O software reconhece aquela região, como região oposta (um espelho), à de cima. Comparem o sinal das duas funções e a imagem que cada uma representa, não são opostas?

Pr._ Desse modo, devemos considerar o valor absoluto para a área desta região.

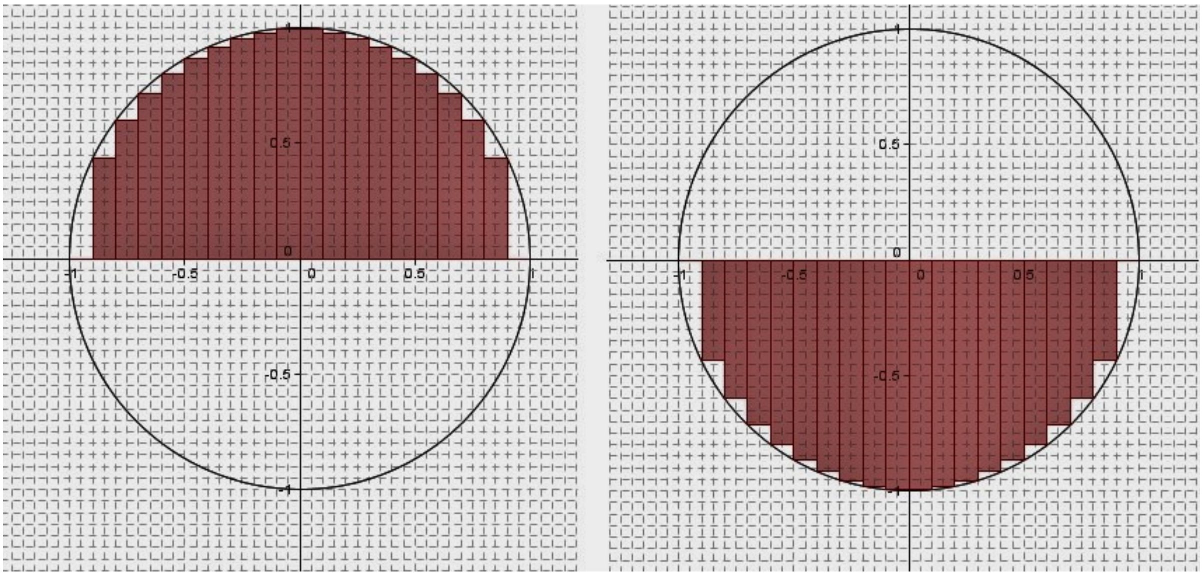


Figura 3.38: Imagem utilizada, com a inscrição de retângulos, para ilustrar, aos alunos, a aplicação do método de Riemann, no Geogebra.

A partir desta observação, alguns alunos perguntaram:

A_3_ Como assim, professor? O que o senhor quer dizer com valor absoluto?

A_1_ Professor! Eu entendi praticamente tudo, apenas no final não ficou claro. O que significa esse valor absoluto?

A_5_ É, sor! Repete desde essa última parte, quando o senhor compara a função e a imagem. Por que as funções são opostas?

Assim, o professor retomou a explicação e finalizou dizendo: "Pessoal! Quando eu disse que devemos considerar o valor absoluto da área, quis dizer que a área, independente do tipo de região, é constituida por duas dimensões, que podem apresentar diferentes unidades de medida, sejam elas dadas em quilômetros, metros, centímetros, dentre outras. Nenhuma delas assume valor negativo, por isso, aquele número mostrado na figura anterior $(-1,45)$ deve ser considerado em módulo. Assim, a área total dos retângulos inscritos no círculo daquela figura (Figura 3.37) é dada por:

$$A_{\acute{A}rea\ da\ regio\ inscrita} = 1,45 + |-1,45|$$
$$A_{\acute{A}rea\ da\ regio\ inscrita} = 1,45 + 1,45$$
$$A_{\acute{A}rea\ da\ regio\ inscrita} = 2,90"$$

Aproveitando a Figura 3.37 construída, o professor ocultou os retângulos inscritos e exibiu a área do círculo, preenchida com retângulos circunscritos. Ao informar os valores da área dos retângulos circunscritos, o professor solicitou aos alunos para que, confrontando com os seus resultados, verificassem se, pelo menos até a segunda casa decimal, os resultados eram iguais.

Nesse instante a aluna A_3, com dúvidas perguntou: "Professor! A minha resposta está igual só na primeira casa decimal, tem algum problema?"

Então, o professor respondeu que não seria um problema sério, e completou: "para que os resultados coincidissem até a segunda casa decimal, pelo menos, o arredondamento que você adotou ou, ainda, a quantidade de casa decimais que foram usadas para determinar a medida do comprimento do retângulo, seria um fator determinante."

Ao clicar no controle deslizante, na tela de visualização do Geogebra, o professor foi ampliando a quantidade de retângulos, inscritos e circunscritos, para 30, 40, 50 intervalos iguais. Em seguida, ampliou para 100, 200, 300, 400 e 500 intervalos iguais.

Como finalização do cálculo de área do círculo, o professor acrescentou: "Para cada aumento na quantidade de retângulos, tanto inscritos quanto circunscritos no círculo, há um aumento ou redução, respectivamente, no resultado da área, indicada aqui, na janela de álgebra".

Pr._ Esse aumento ou redução está tendendo para um determinado valor, π, como vimos anteriormente. Riemann, em outras palavras, definiu esse procedimento de cálculo como o limite da soma da área de cada um, dos n retângulos inscritos, ou circunscritos no círculo".

Para dar continuidade nos estudos, o professor iniciou a segunda parte da aula, com a aplicação do método de Riemann, para determinar a área de uma elipse. O professor apresentou a imagem da Figura 3.39, uma elipse com eixo focal medindo 4 unidades de medida e, eixo não focal, medindo 1 unidade de medida, perguntando aos alunos como era determinada a área dessa região.

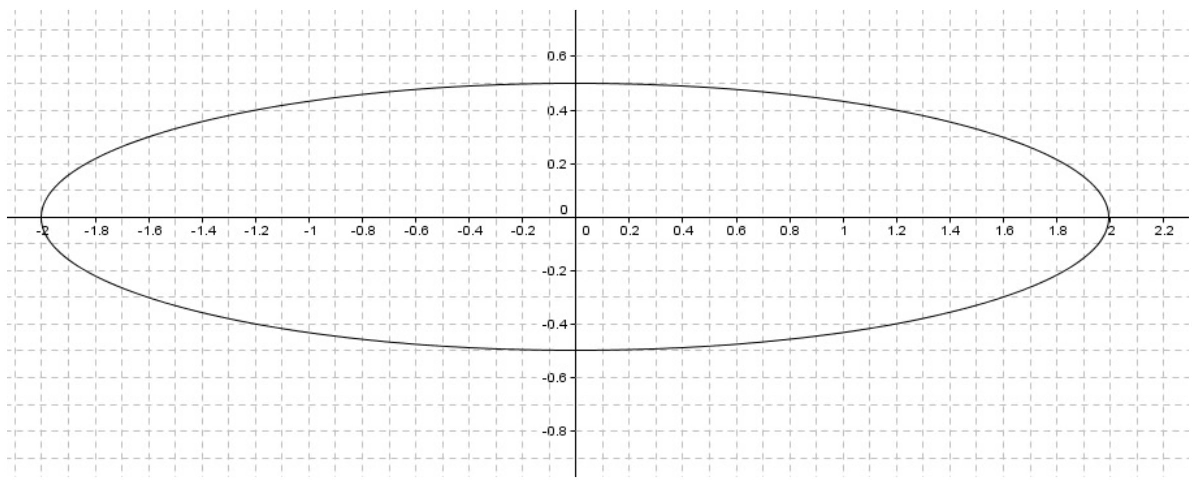


Figura 3.39: Imagem de uma elipse apresentada aos alunos para iniciar o cálculo de área da elipse.

Alguns alunos, aproveitando a apresentação anterior sobre a área do círculo, perguntaram se poderia ser usado o mesmo método, o método de Riemann ou, se teria um outro método, como o método de Arquimedes, para aplicar. Ao responder esta pergunta, o professor disse que seria o método de Riemann, uma vez que o método de Arquimedes, com a inscrição e circunscrição de polígonos regulares, só poderia ser aplicado no círculo e, além disso, o método de Riemann poderia ser estendido a qualquer figura com formato curvilíneo, descrito por meio de funções algébricas.

Inicialmente, o professor informou aos alunos que os elementos da elipse eram: eixo focal e eixo não focal, vértices e focos. Estes dois últimos elementos não seriam utilizados neste estudo, tendo em vista que, as construções seriam disponibilizadas aos alunos, devido ao pouco tempo que restava para o desenvolvimento do projeto. Como primeiro exemplo, determinou que fossem inscritos e circunscritos 10 retângulos, de modo semelhante ao desenvolvido no círculo. Nesse sentido, sugeriu que o eixo focal fosse dividido em 10 partes iguais e, para facilitar, as figuras foram construídas e impressas a partir do software Geogebra usando malha milimetrada na construção.

Os alunos iniciaram a construção com a divisão do eixo focal em 10 partes iguais. Logo após o início, a aluna A_3 fez a seguinte observação: "Professor! Assim como o círculo, não tem como inscrever os 10 retângulos na elipse, só é possível inscrever 8, pois a altura dos dois retângulos extremos coincidem com o vértice da elipse."
Pr._ Está correto!

Disse o professor e aproveitou para apresentar aos alunos, como ficaria a inscrição e circunscrição dos 10 retângulos no Geogebra. A Figura 3.40 ilustra essa construção.

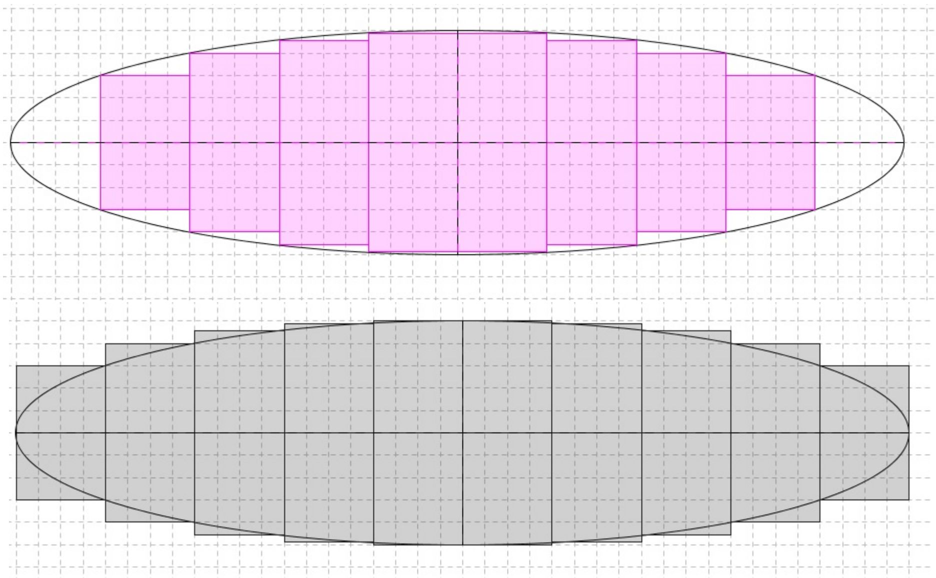


Figura 3.40: Elipses com retângulos inscritos e circunscritos.

Para resolver este exemplo, os alunos optaram em determinar o comprimento, em centímetros, de cada retângulo, mediante o uso de régua e, em seguida, foram estabelecidas escalas de medidas para associar às medidas de eixo focal e eixo não focal definidos para a elipse. A cópia entregue a eles tinha medida de $4cm$ no eixo não focal e, com isso, estabeleceram a escala $1 : 4$, ou seja, a unidade de medida apresenta 4 cm de comprimento. A partir do encontro dos dois eixos, na direção dos vértices, foram identificados 8 retângulos, quatro para a esquerda e, os outros quatro, para a direita, sendo dois a dois, iguais.

Desta forma, indagou o aluno A_1: "Professor! Se, partindo do centro em direção à parte de fora (vértice), são quatro retângulos para a esquerda e, outros quatro para a direita e, ainda, cada dois deles são iguais, um do lado esquerdo e outro do direita, então, posso calcular a área de uma metade e fazer vezes dois o resultado? Duplicar o resultado dessa metade?".

O aluno A_2, atento à pergunta do colega, respondeu: "Eu acho que sim A_1. Porque o cálculo é parecido com o cálculo que a gente resolveu antes, no círculo".

Completou a aluna A_3: "Claro que dá, A_1! Compara com os cálculos que nós resolvemos no círculo, é bem parecido".

O professor acompanhou as discussões, concordou com o que foi dito e, em seguida, sugeriu para eles determinarem a área em questão. Nesta construção os alunos encontraram, com o auxílio de régua, as medidas:$3,9cm \quad (0,975u.c.)$; $3,6cm \quad (0,9u.c.$; $3,2cm \quad (0,8u.c)$; e, $2,4cm \quad (0,6u.c.)$. A medida da base foi adotada com $4u.c$, desse modo, a medida da base de cada retângulo mede, respectivamente, $0,4u.c.$.

A maioria dos alunos determinou a área dos retângulos, tanto inscritos quanto circunscritos, calculando a área de cada um dos retângulos com comprimentos diferentes e que compunham uma metade da elipse. Em seguida, reuniram os resultados, para assim determinar o valor desta metade de área e, por fim, duplicaram esse resultado, obtendo o valor total da área da elipse.

O professor sugeriu que fossem nomeados cada um dos retângulos, usando para isso, a simbologia: R_1, R_2, R_3, ... , R_{10}, para os 10 retângulos circunscritos e, R_1, R_2, ... , R_8, para os 8 retângulos inscritos na elipse, na intenção de facilitar o entendimento e construção dos resultados. Com isso, os alunos nomearam os retângulos, da esquerda para a direita, conforme sugestão e, calcularam a área de cada retângulo, conforme expresso abaixo.

i) Área de cada retângulo inscrito:

$$R_1 = R_8 = 0,975 \times 0,4 = 0,39$$
$$R_2 = R_7 = 0,9 \times 0,4 = 0,36$$
$$R_3 = R_6 = 0,8 \times 0,4 = 0,32$$
$$R_4 = R_5 = 0,6 \times 0,4 = 0,24$$

ii) Área total dos retângulos inscritos $A_{T_{insc.}}$

$$A_{T_{insc.}} = 2 \times (0,39 + 0,36 + 0,32 + 0,24) = 2,62u^2$$

A área dos (10) retângulos circunscritos na elipse foi obtida acrescentando ao resultado acima, a área dos dois retângulos centrais, cujo comprimento coincidia com o comprimento do eixo não - focal ($1u.c.$), conforme relato do aluno A_2.
A_2_ Professor! Se esse cálculo é parecido com o cálculo de antes (comparando ao cálculo desenvolvido no círculo), então, a área desses (8) retângulos de dentro da elipse é igual à área dos retângulos que estão no lado de fora, quer dizer, dos 8 retângulos que estão do lado de fora menos a aqueles dois do meio, os mais compridos (apontando para os retângulos circunscritos, contidos no centro da elipse). A área desses dois é:

E calculou a área desses dois retângulos, conforme descrito abaixo.

Área dos retângulos circunscritos, centrais:

$$A = 2 \times (1 \times 0,4) = 0,8u^2$$

E o aluno concluiu, usando a expressão: $A_{T_{insc.}}$ para indicar a Área total dos retângulos inscritos e, A_c para indicar a Área dos retângulos centrais circunscritos. Desse modo, escreveu:

Área total dos retângulos circunscritos

$$A_{T_{circ.}} = A_{T_{insc.}} + A_c$$
$$A_{T_{circ.}} = 2,62 + 0,8 = 3,42u^2$$

Um pequeno grupo de alunos, resolveu de um modo um pouco diferente dos demais. Percebendo que a base do retângulo era a mesma, optaram em somar o comprimento obtido nos diferentes retângulos e, determinar, a partir deste resultado, a área total dos retângulos inscritos e circunscritos, confome descreveu o aluno A_6, abaixo.
A_6_ Professor! Eu pensei assim:
A largura de cada retângulo é a mesma, o que muda é o comprimento, certo?!

O professor, concordando com o raciocínio do aluno pediu para continuar com a explicação. E o aluno continuou:
A_6_ Então, se eu colocar eles um do lado do outro(esboçando por meio de desenho, registrou seu pensamento), eu tenho um retângulo maior ainda, com o comprimento de medida igual a soma das medidas de comprimento de cada um deles. Assim, o comprimento total será:

Descreveu o comprimento total obtido e, o valor da correspondente área, que estão dispostos a seguir.

Comprimento total dos retângulos inscritos:

$$2 \times (0,975 + 0,90 + 0,8 + 0,6) = 2 \times (3,275) = 6,55$$

Área total dos retângulos inscritos $(A_{T_{insc.}})$

$$A_{T_{insc.}} = 0,4 \times 6,55 = 2,62$$

Para determinar a área dos retângulos circunscritos, o aluno A_6 usou o mesmo raciocínio, acrescentando ao comprimento obtido, com a inscrição dos retângulos na elipse, o comprimento dos dois retângulos centrais, cujas medidas coincidiam com a medida do eixo não focal. Desta forma, o aluno descreveu o seguinte cálculo para o comprimento total dos retângulos circunscritos:

$$6,55 + 2 \times 1 = 8,55u.c.$$

e área total dos retângulos circunscritos: $(A_{T_{circ.}})$

$$A_{T_{circ.}} = 0,4 \times 8,55 = 3,42u^2$$

Após esclarecidas algumas dúvidas, o professor determinou a resolução de atividades, envolvendo a aplicação do método de Riemann. Sugeriu o cálculo da área aproximada do círculo, inscrevendo e circunscrevendo retângulos, a partir da divisão do seu diâmetro em intervalos de 20, 40 e 50 partes iguais.

O professor solicitou aos alunos para que resolvessem as atividades restantes em casa, anotando as eventuais dúvidas, tendo em vista que o período estava se encerrando. Disse ainda que, no início do próximo encontro, seria oportunizado um momento de discussão e esclarecimento de dúvidas, revisando as atividades pendentes.

No oitavo encontro, o professor revisou, no início do período, as atividades deixadas como tema. A fim de identificar e sanar eventuais dificuldades, o professor aproveitou o momento de revisão e questionou os alunos.

A turma, em sua maioria, relatou que a maior dificuldade foi para construir os retângulos, tanto inscritos, quanto circunscritos na elipse. O aluno A_5 resume o relato da maioria dos alunos. Segundo ele:

A_5_ Levei muito tempo para construir os retângulos e demorei para medir o comprimento de cada retângulo, pois eram bem parecidos. Mas achei fácil calcular a área da elipse. Acabei desistindo de calcular a área da elipse com 50 retângulos, porque a largura de cada um deles era muito pequena, a medida do comprimento, quase igual, nos retângulos que estavam bem próximos, e não rendia, construir e medir aqueles retângulos.

O professor optou em não generalizar o cálculo da área da região delimitada pela elipse, em virtude do tempo que iria dedicar com esta construção. Tendo em vista que o próximo encontro seria o último, na aplicação do projeto, conforme definido com a equipe diretiva da escola e, professora titular, no início do trabalho. Além disso, para concluir a aplicação do método de Riemann, faltava o cálculo da área de uma região, descrita por meio de uma função polinomial.

A curva escolhida para aplicar este método era descrita por uma função quadrática, com concavidade voltada para baixo. Esta escolha se deve por assemelhar-se a uma das inúmeras curvas que podem ser encontradas na estrutura de uma montanha russa.

Para introduzir o cálculo da área desta região, o professor disse: "Imaginem uma montanha russa, com todas as curvas possíveis, como: loopings, rampas, retas, dentre outras. Vamos considerar uma dessas curvas, semelhante a esta, da figura. Quando vocês estudaram funções, no primeiro ano, uma delas foi a função quadrática, cujo gráfico é uma parábola. De certo modo, a curva desta imagem é parecida com o gráfico de uma função quadrática, com concavidade voltada para baixo".

A Figura 3.41 ilustra a comparação feita pelo professor. Seguindo a linha de raciocínio, o professor acrescentou:

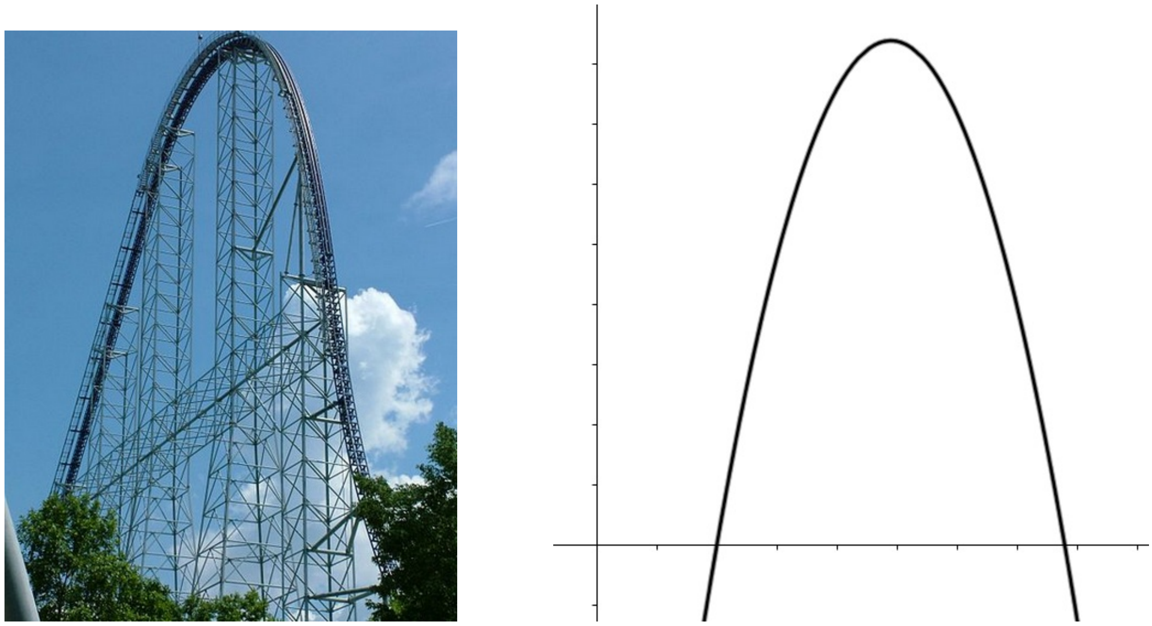


Figura 3.41: Imagem e representação gráfica de uma curva

Pr._ Suponha que o gráfico ao lado da imagem descreva o comportamento desta curva. Admita, também, que o ponto mais alto desta curva fique a 40 metros de altura do chão e, que a distância entre dois pontos extremos, da curva e paralelos ao chão (horizontal), tenham 20 metros de distância, um do outro. Qual será a área, aproximada, da região compreendida entre a curva e o eixo horizontal (chão)?
Pr._ Como podemos resolver esse problema?
Pr._ Qual dos dois métodos estudados melhor resolve esta situação - problema?

A maioria dos alunos concordou que, para resolver este problema, o melhor método seria o método de Riemann. Além disso, alguns alunos, acrescentaram:
A_n_ É só dividir a medida da base, em intervalos iguais e, inscrever retângulos, como ocorreu no cálculo da área do círculo e, da área da elipse.

Nesse sentido, o professor distribuiu uma cópia impressa para cada aluno, da construção gráfica e, orientou-os a dividir a medida da base (eixo horizontal) em 10 partes iguais, inicialmente, calculando o valor aproximado para a área.

Após alguns minutos de discussão, o aluno A_2 apresentou como resposta, aproximadamente, $440m^2$ de área. Em seguida, os alunos A_1 e A_3 responderam que haviam encontrado um valor um pouco diferente, tinham obtido como resposta, aproximadamente, $444m^2$. Conferindo seus cálculos, revendo aproximações e arredondamentos, o aluno A_2 obteve o mesmo resultado dos colegas A_1 e A_3.

É importante destacar que, o professor sugeriu para usarem apenas valores inteiros, levando em consideração que o próprio problema solicitava um valor aproximado para a área. Em seguida, a maioria dos alunos concluiu seus cálculos, encontrando como resultado o valor $444m^2$ para a área da região.

A partir deste resultado, usando o software Geogebra, o professor apresentou a imagem da Figura 3.42, para ilustrar essa construção aos alunos e, o resultado da área da região inscrita. O valor $448m^2$ representa o valor preciso, com a inscrição dos 10 retângulos na curva dada.

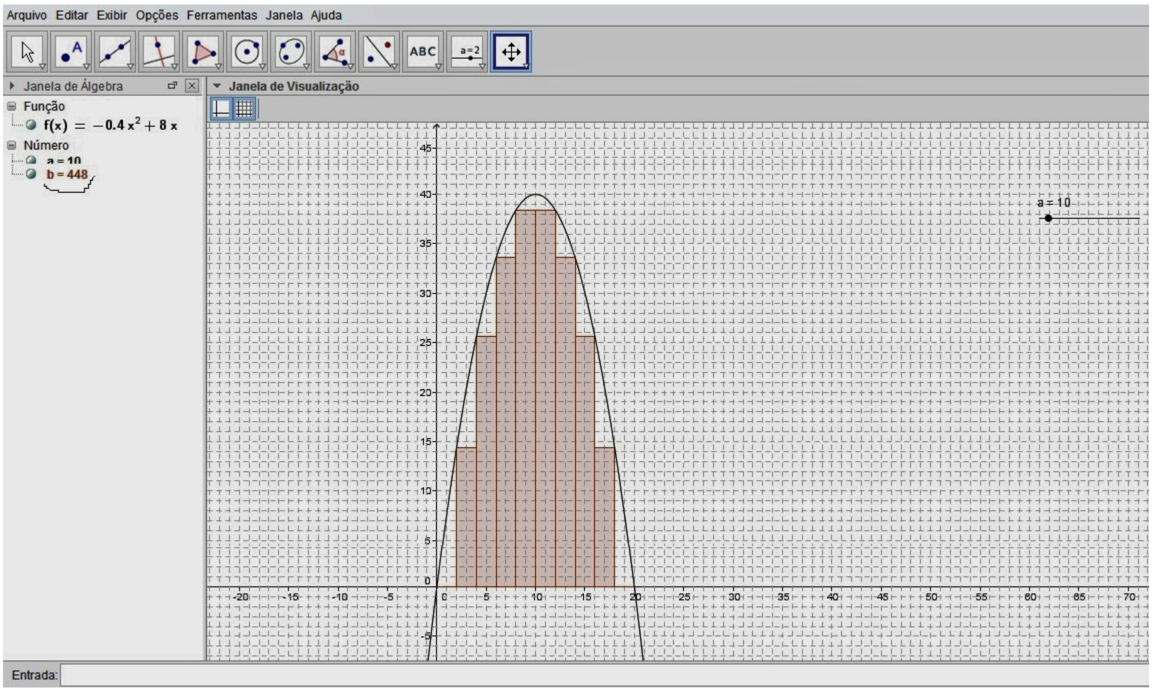


Figura 3.42: Inscrição de 10 retângulos da curva descrita pelo problema.

Em seguida, ocultando o valor da área, na janela de álgebra e, movendo o controle deslizante até a posição 20, no software Geogebra,o professor perguntou aos alunos: "Qual será a área dessa região, dividindo o intervalo em 20 partes iguais e, inscrevendo os 20 retângulos, correspondentes?"

Instantes depois, surge a primeira resposta dada pela aluna A_3, seguida pelos colegas A_1 e A_2. Em seus cálculos, os alunos encontraram como resultado $489m^2$.

Em grupos, os alunos estavam reunidos numa troca constante, no intuito de buscar melhor compreensão do conteúdo. Enquanto aguardava pelos resultados, caminhando pela sala e observando o desenvolvimento dos alunos, ajudando-os na construção, o professor ouviu muitos comentários, dos alunos. Abaixo estão alguns desses comentários:

Grupo formado pelos alunos A_1, A_2, A_3 e A_5:

A_n_ Professor! Estávamos conversando e vimos que esses cálculos não são difíceis de resolver, o que é complicado é construir esses retângulos, por que com um risco errado ou torto, é o que chega para errar o cálculo.

Grupo formado pelos alunos A_4, A_6, A_8 e A_9:

A_n_ Professor! É difícil construir esses retângulos, não dá para usar o computador? É mais fácil nele. O cálculo em si, não é difícil.

Grupo formado pelos alunos A_5, A_7, A_{10} e A_{12}:

A_5_ Olha, professor! Não é reclamar, mas é difícil fazer esses desenhos aqui. Depois que a gente pega o jeito no cálculo vai embora, mas construir esses retângulos, "pequenininhos", ainda, não dá para querer. Mas está bem legal!

Outros grupos apresentaram suas opiniões, em geral, semelhantes às relatadas. Vale destacar que, um grupo de alunos, que normalmente resolviam e participavam das atividades, sem expressar sua opinião no grande grupo, desta vez se manifestou, ainda que no pequeno grupo, dizendo que estavam gostando das atividades e do trabalho como um todo. Ressalta-se que o receio de alguns alunos, em falar e participar no grande grupo, se deve a alguns fatores, como a pressão da turma, o receio ou vergonha de se expor, diante dos colegas de turma.

Ouvindo a opinião dos alunos e, concordando com eles, o professor, então disse: "Concordo com o que vocês estão dizendo. Depois que descobrimos ferramentas que facilitam a construção de figuras, como é o caso do Geogebra, dificilmente vamos gostar de desenhar, reproduzir no papel imagens e figuras que podem ser produzidas instantaneamente. Mas, é por meio destes desenhos que construímos o nosso conhecimento, eu, consigo entender um novo conteúdo, relacionado ao ensino de geometria, depois que eu faço o desenho, interpretando-o. Dificilmente vou entender uma figura pronta, sem saber como foi construída, preciso desenhar, construir, só assim consigo entender e interiorizar o conteúdo".

O professor, continuando com esse momento de reflexão, acrescentou: "Imaginem como era o cálculo e a construção dessas figuras nos tempos de Arquimedes e, bem mais tarde, nos tempos de Riemann, dentre muitos outros que se destacaram em matemática. E se eles tivessem cruzados os braços, não deixando nenhum registro, ou ainda, não produzindo matemática, devido à dificuldade em construir figuras, ou sem as ferramentas e

tecnologia que temos hoje, será que teríamos o que temos hoje, como: carros, computadores, tablets, celulares, tvs, todos de última geração?"
Pr._ O que é novo hoje, se torna obsoleto amanhã, mas tudo isso se deve àqueles que construíram matemática usando ferramentas, que, em nossos dias, são consideradas "rudimentares", como régua, compasso, lápis, papel, etc.

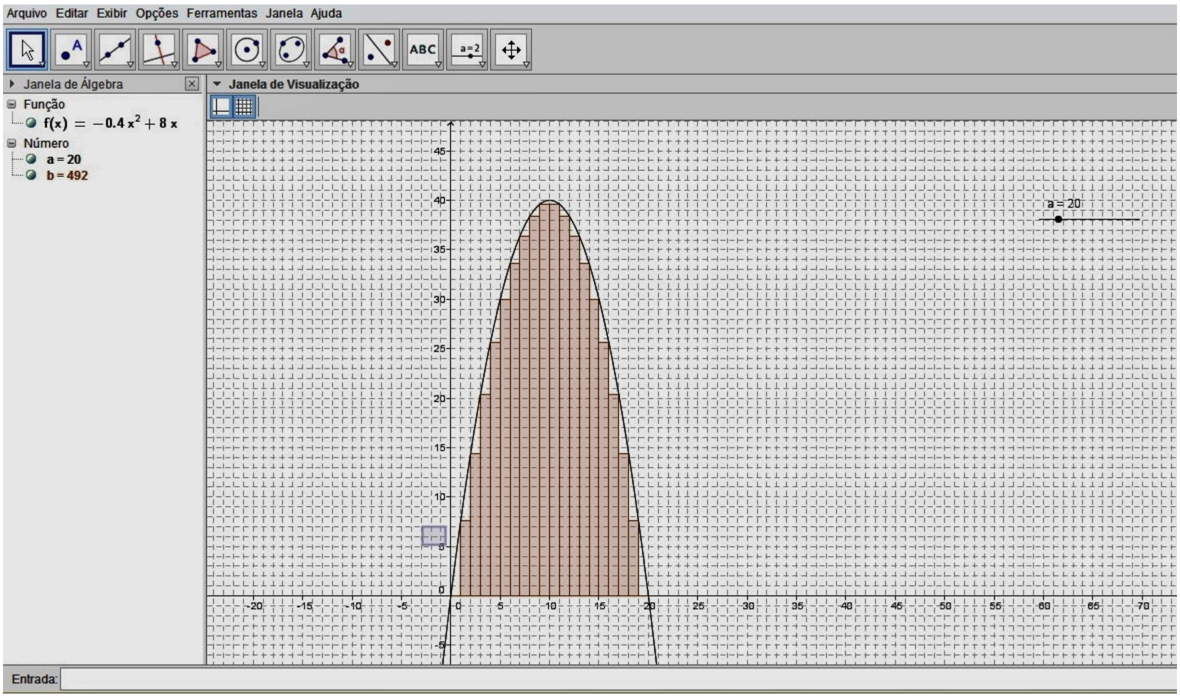


Figura 3.43: Inscrição de 20 retângulos da curva descrita pelo problema.

Após esse comentário, o professor reexibiu o valor da área, da janela de álgebra, no software Geogebra, conforme a figura 3.43, perguntando aos alunos: "Qual foi o resultado que vocês encontraram nesse cálculo? Encontraram um valor próximo de 492 m^2?"

Novamente, devido ao arredondamento utilizado por eles, encontraram, como resultado, um valor diferente, mas próximo do valor determinado no Geogebra, ou seja, encontraram $489m^2$.

Dando continuidade à resolução desta atividade e, deslizando o controle deslizante, que permite ampliar ou reduzir a quantidade de retângulos sob a curva, o professor ampliou a quantidade de retângulos inscritos dizendo aos alunos para observarem o comportamento do valor da área, como descrito à seguir:
Pr._ Observem que, a medida que a quantidade de retângulos é ampliada, a medida da base de cada retângulo diminui, aproximando-os cada vez mais à curva, isso faz com que os espaços em branco fiquem cada vez menores e, assim, a área total dessa região, seja cada vez mais próxima do valor procurado.

Acrescentou ainda:

Pr._ Para efeito de cálculo, vamos considerar a inscrição de 100 retângulos sob a curva, aproveitando o fato de estarmos usando o Geogebra nessa resolução. Com o software, temos condições de determinar o valor, quase exato, da área desta curva e, inúmeras outras situações envolvendo área de regiões curvilíneas.
Pr._ Se quisermos determinar valores exatos desta, e de muitas outras curvas, expressas por meio de funções matemáticas, teremos que estudar um pouco mais de matemática. Precisamente, após estudar, a segunda disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, teremos condições e ferramentas matemáticas que irão permitir determinar o valor exato de construções, como esta. O caminho é árduo, mas todo o esforço é recompensado.

Como conclusão da atividade, indagou o professor: "Qual será a área aproximada da região sob a curva?"

Considerando que o software forneceu o valor da área, ficou fácil responder. A área aproximada seria igual a $525m^2$, levando em consideração apenas a parte inteira do resultado obtido.

Depois de alguns comentários e contribuições dos alunos, referentes aos valores obtidos para a situação-problema, o professor apresentou outra situação-problema. Resgatou o problema que gerou o presente estudo.

> "Como revestir o fundo de uma piscina em forma de elipse, usando cerâmica, de tal modo que as peças utilizadas deixem o mínimo de resíduos, isto é, de tal modo que o desperdício de material seja o mínimo possível?"

Ao questionar os alunos, buscou-se saber se eles estavam lembrados deste problema, que foi apresentado no primeiro encontro e que era o foco desse estudo. O professor, acrecentou também a Figura 3.44, para ilustrar a situação-problema.

A partir deste questionamento, surgiram algumas contribuições interessantes, como as relatadas a seguir:
A_1_ Professor! Deve ser com a aplicação do método de Riemann, pois foi o que nós mais estudamos neste período.

Esta observação feita pelo aluno, com a entonação que usou, soou com um ar de graça que, a maioria dos alunos caiu em risos, incluindo o professor.

Os alunos A_3, A_2 e A_5, fizeram os seguintes questionamentos:
A_3_ Deve-se usar uma cerâmica que tenha um bom comprimento e que a largura seja pequena, mas será que existe um tipo de cerâmica assim?
A_3_ Será que alguma fábrica de cerâmica pode fabricar peças de tamanhos especiais?
A_3_ Poderia perguntar para um primo, que é pedreiro, se ele conhece, ou sabe se é possível.

Abriu-se um momento de discussão, que envolveu o grupo de alunos. Com o final do período, considerando o próximo encontro como o último para a aplicação do projeto, no

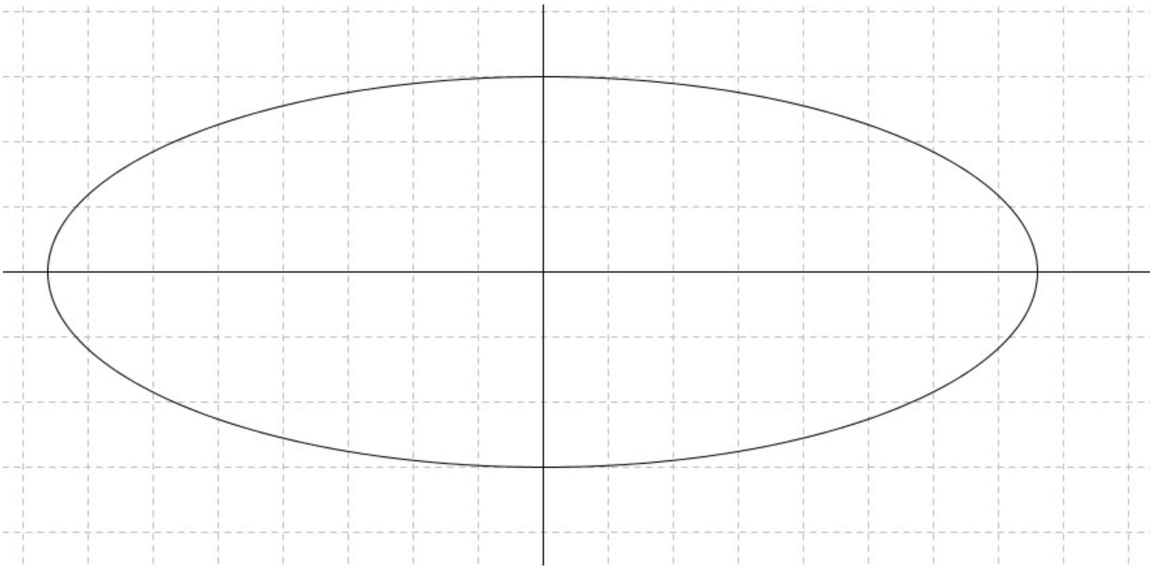


Figura 3.44: Figura que ilustra a situação-problema apresentada no início do trabalho de aplicação.

qual estava programada uma última atividade avaliativa, não foi possível dar continuidade à discussão. Mas, o professor ficou entusiasmado com o envolvimento e a participação dos alunos.

No último encontro, ocorreu a aplicação da terceira atividade avaliativa e, o questionário final, com a análise dos alunos, sobre o projeto aplicado durante este período. Além de ser o trabalho final do projeto, também tinha peso de nota parcial para o trimestre. Por considerar que os alunos estavam apreensivos, o professor atendeu a um último pedido da turma. Os alunos, solicitaram que o trabalho fosse resolvido em duplas, justificando que durante todo o projeto eles trabalharam em duplas, trios ou grupos com até quatro alunos, e que em duplas haveria uma troca de ideias e, consequentemente, a resolução do problema.

Tendo em vista que foram necessários os dois períodos de aula para a resolução do trabalho, o professor enviou o questionário final, como tema de casa. Destacou a importância dessas respostas para a conclusão do trabalho, que fossem respostas coerentes, completas e com seriedade. O professor recomendou, ainda, que o questionário fosse entregue à professora titular, no próximo dia de aula.

3.2.4 Atividade avaliativa 3 e análise dos resultados

A atividade avaliativa, aplicada no último encontro, era composta por duas questões, ambas envolvendo a aplicação do método de Riemann. A primeira questão, composta por duas alternativas, era direcionada ao cálculo da área do círculo. A segunda questão, também composta por duas alternativas, era direcionada ao cálculo da área de uma elipse, no item (a) e, ao cálculo da área da região compreendida entre o gráfico de uma função quadrática e o eixo OX, no item (b).

3.2.4.1 Questão 1:

Determine a área, aproximada, do círculo de raio unitário (r=1), em cada caso, usando o método de Riemann. Compare os resultados obtidos em (a) e (b), com a inscrição e circunscrição de retângulos. O que se pode concluir?
(a) Inscrição e circunscrição de 10 retângulos no círculo;
(b) Inscrição e circunscrição de 20 retângulos no círculo.

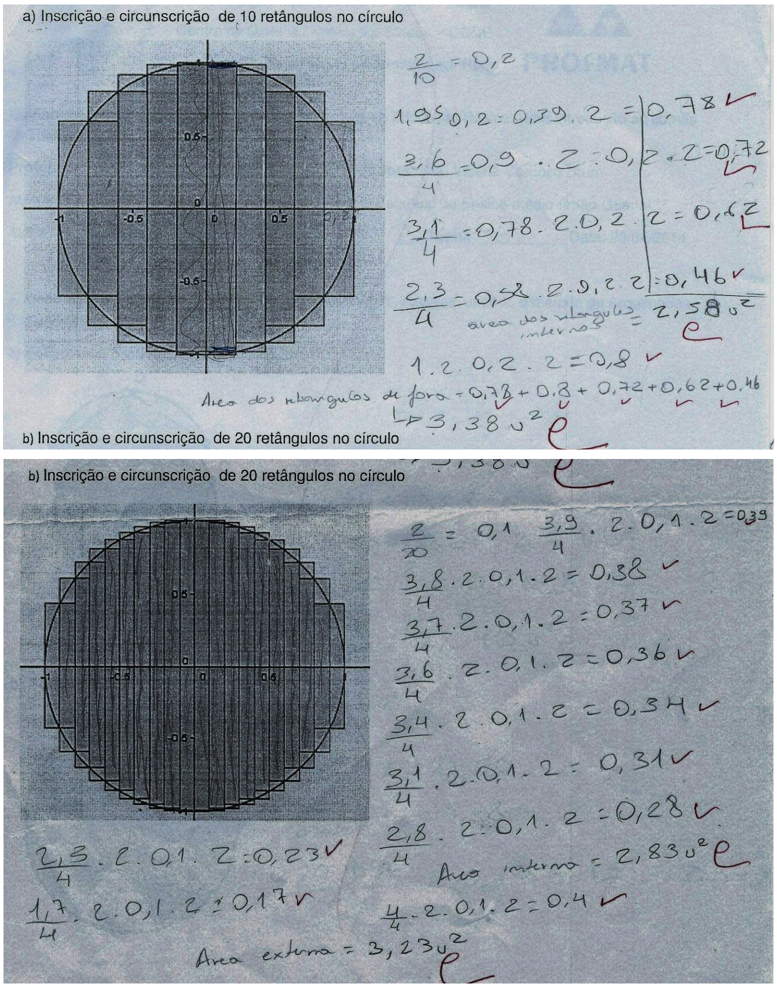


Figura 3.45: Questão (1), resolvida pela dupla A_1 e A_3.

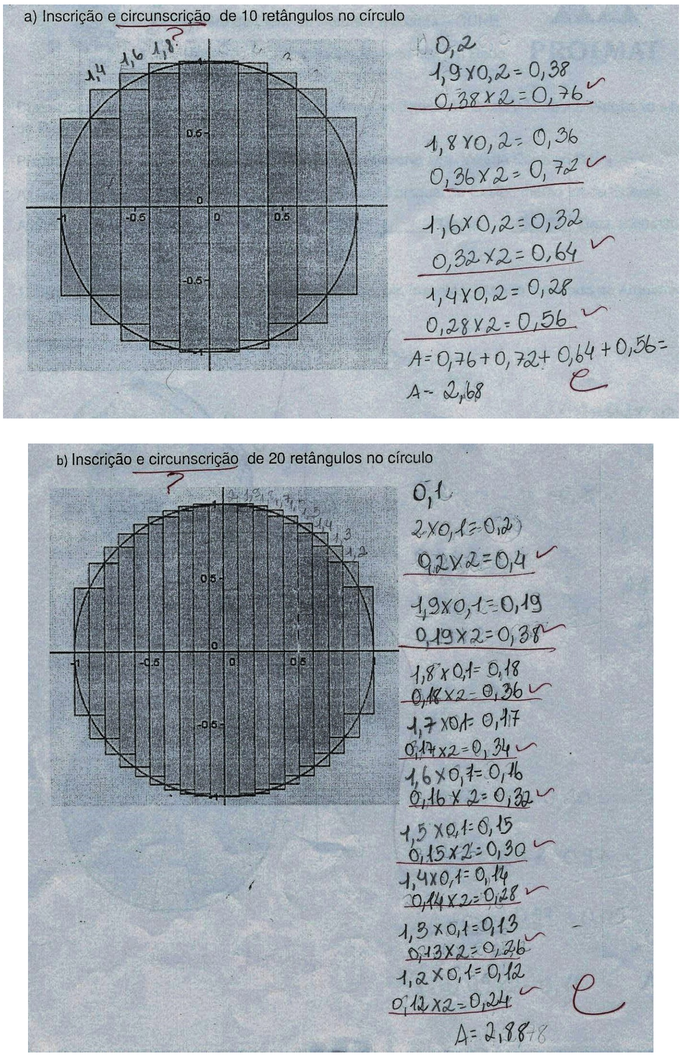


Figura 3.46: Questão (1), resolvida pela dupla A_{19} e A_{10}.

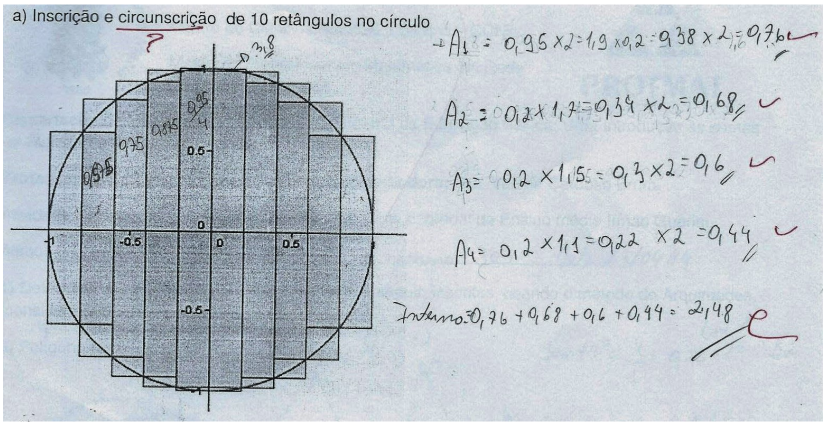


Figura 3.47: Questão (1-a), resolvida pela dupla A_{17} e A_4.

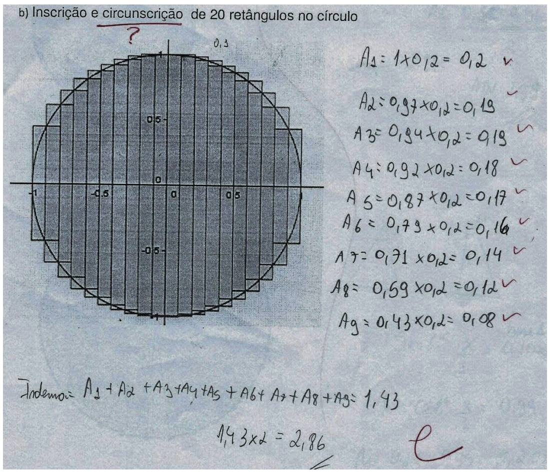


Figura 3.48: Questão (1-b), resolvida pela dupla A_{17} e A_4.

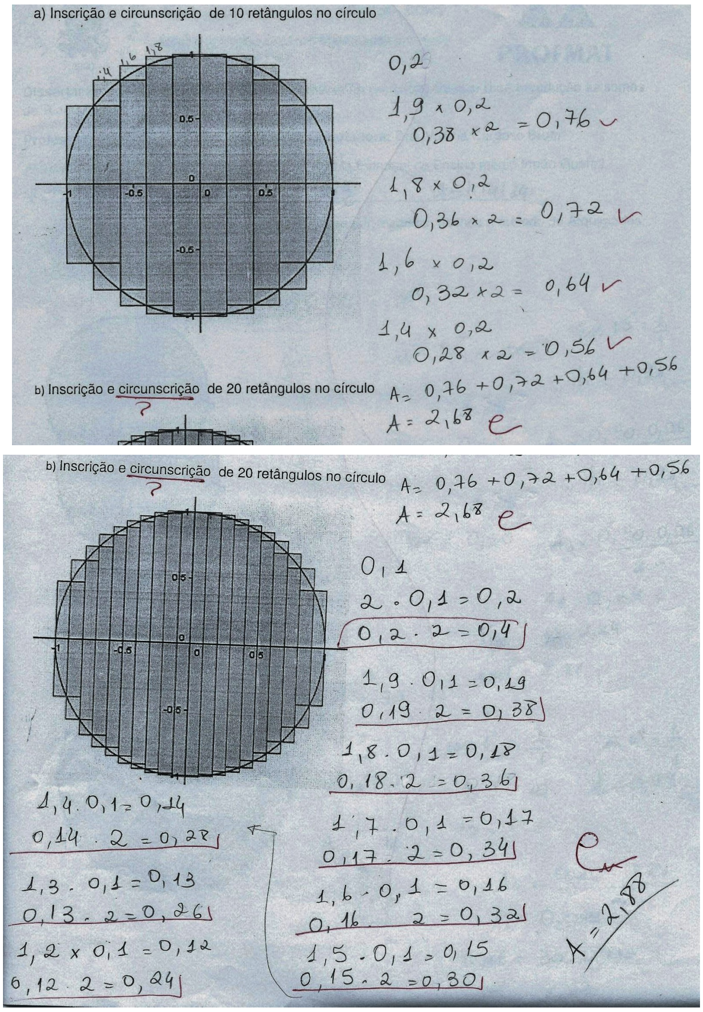


Figura 3.49: Questão (1), resolvida pela dupla A_7 e A_{12}.

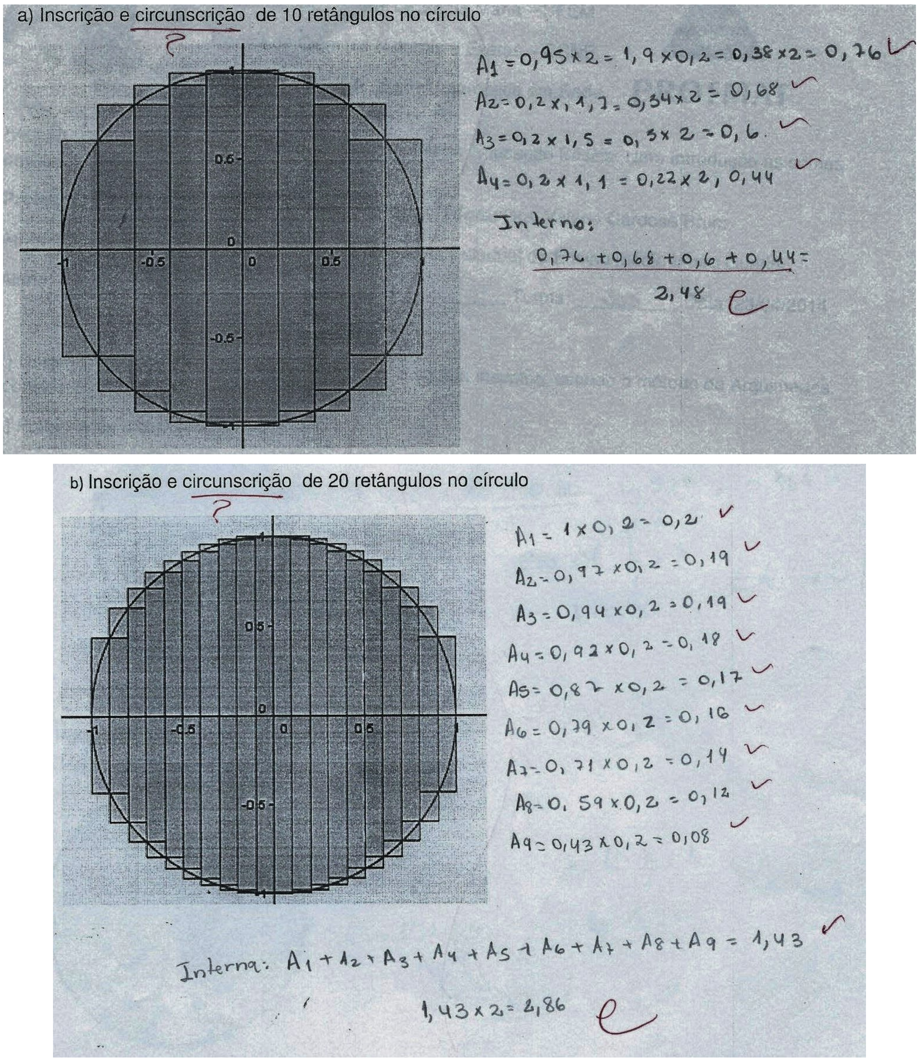


Figura 3.50: Questão (1), resolvida pela dupla A_{22} e A_{21}.

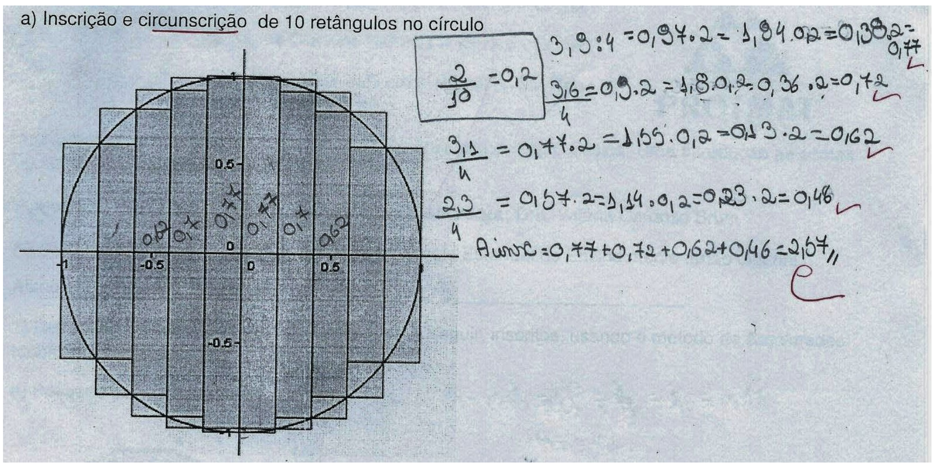


Figura 3.51: Questão (1-a), resolvida pela dupla A_6 e A_2.

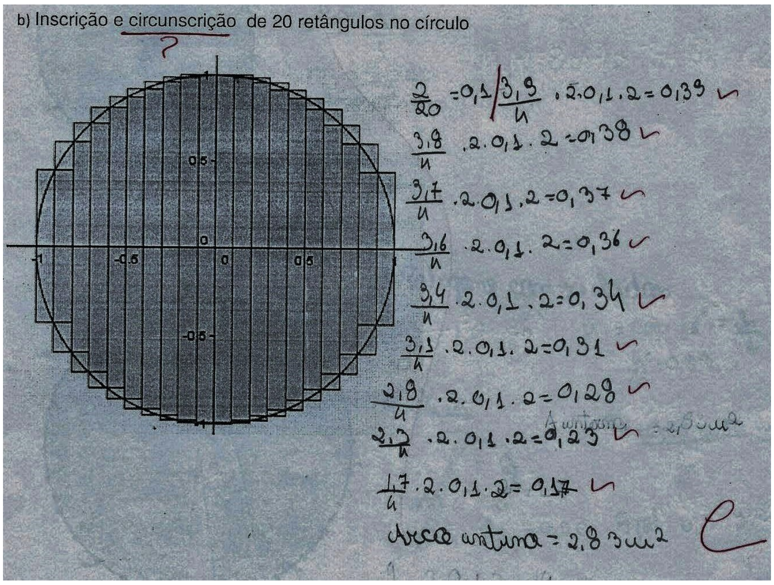


Figura 3.52: Questão (1-b), resolvida pela dupla A_6 e A_2.

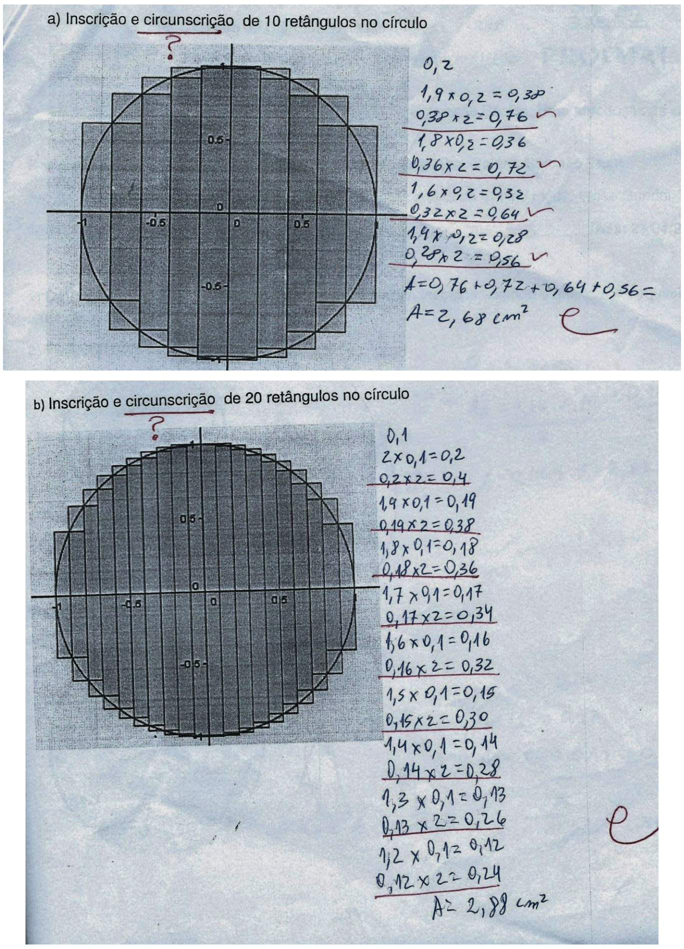


Figura 3.53: Questão (1), resolvida pelo aluno A_{18} e A_{16}.

3.2.4.2 Questão 2

O método de Riemann pode ser aplicado no cálculo de diferentes formas geométricas, como é o caso da Elipse, e a curva descrita por uma função quadrática, por exemplo. Nesse sentido: (Considere a medida do eixo focal igual a 4 $u.\ c.$ e eixo não focal de medida 1 $u.\ c.$)

a) determine a área aproximada da elipse apresentada na figura a seguir, com a inscrição de 20 retângulos cujas medidas de base são todas iguais.

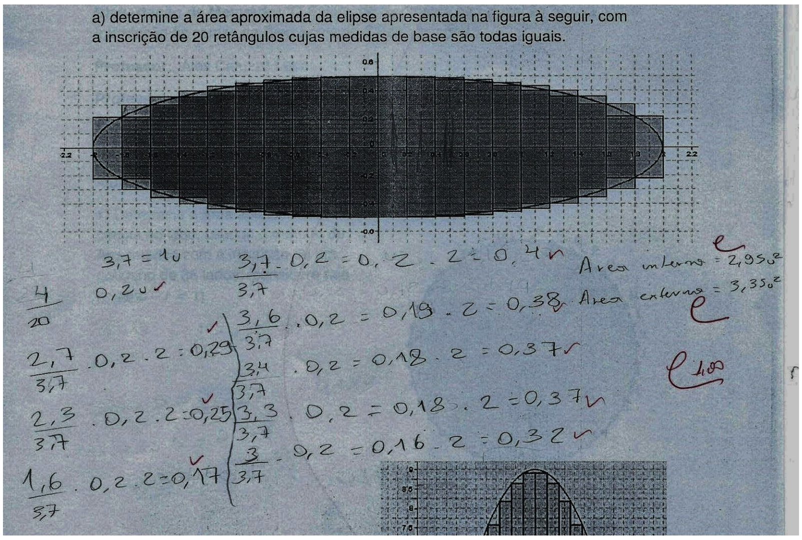


Figura 3.54: Atividade 2(a) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_1 e A_3.

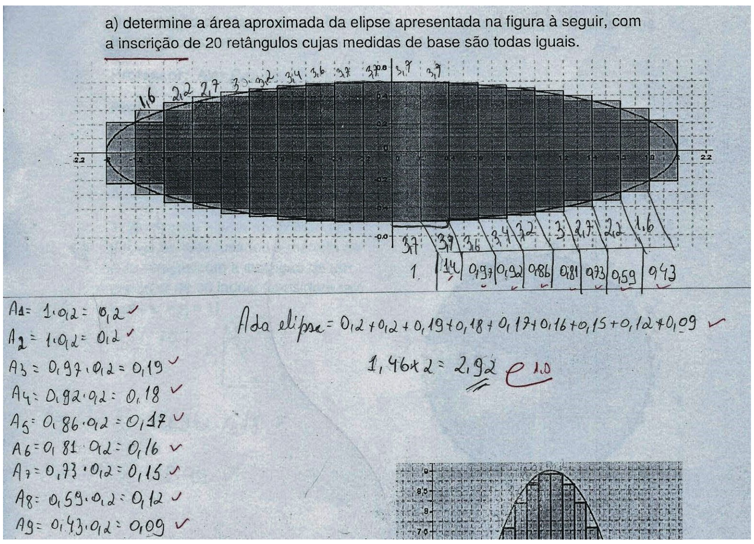


Figura 3.55: Atividade 2(a) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{17} e A_4.

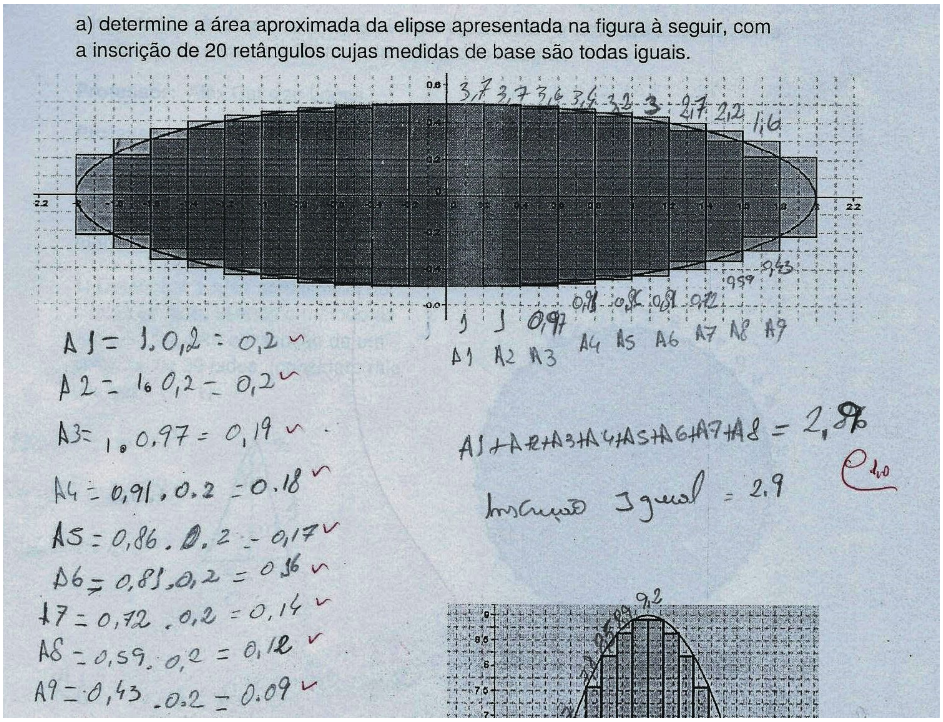


Figura 3.56: Atividade 2(a) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{23} e A_5.

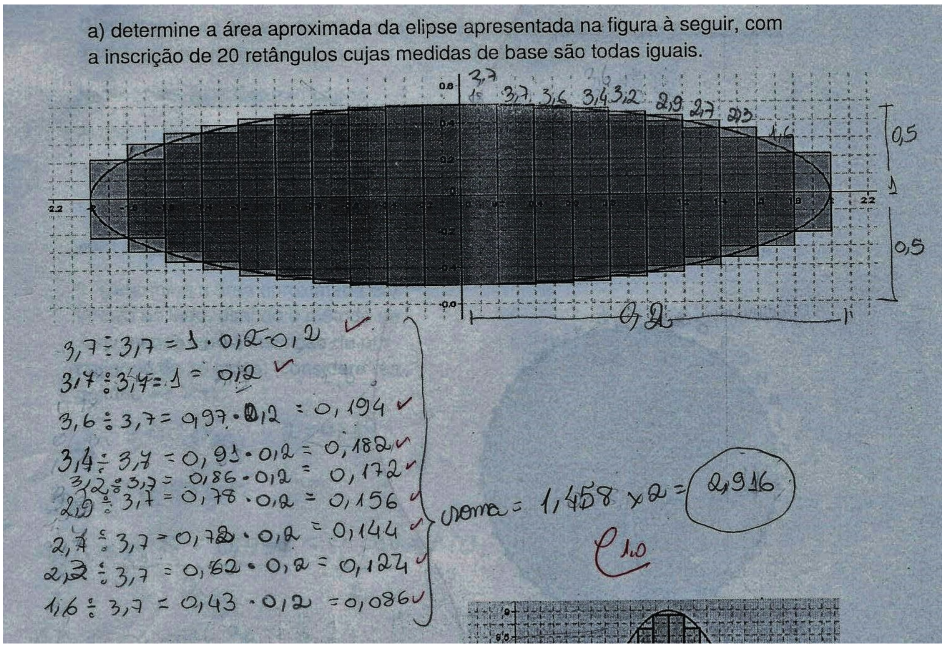


Figura 3.57: Atividade 2(a) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{24} e A_6.

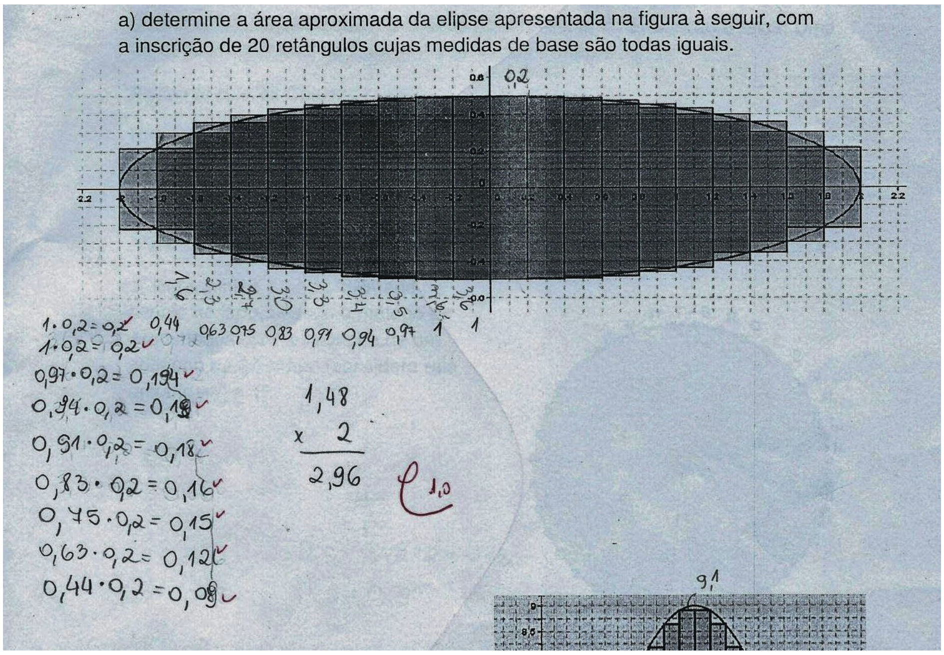


Figura 3.58: Atividade 2(a) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_9 e A_{25}.

b) determine a área aproximada sob a curva descrita na figura ao lado, com a inscrição de 20 retângulos de mesma medida de base.

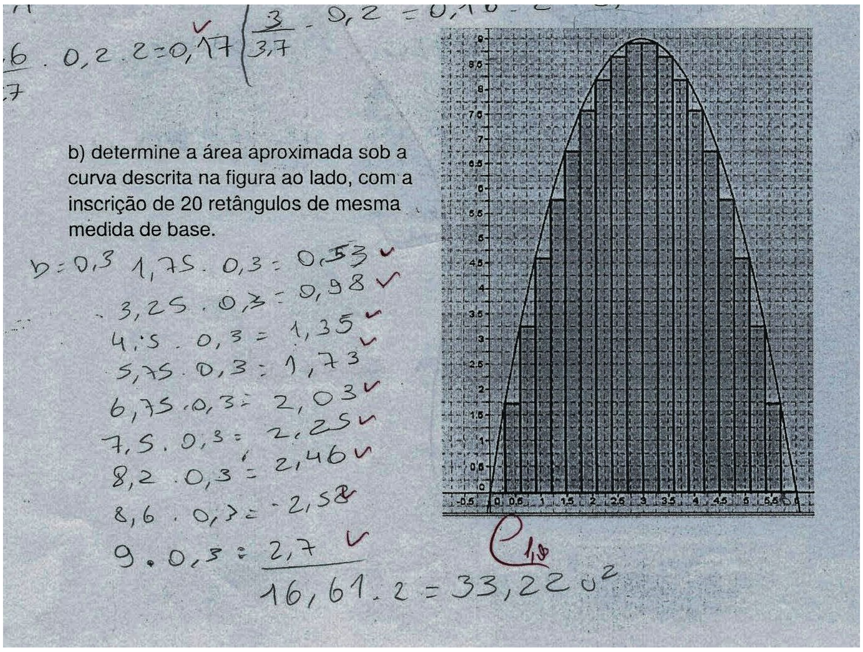


Figura 3.59: Atividade 2(b) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_1 e A_3.

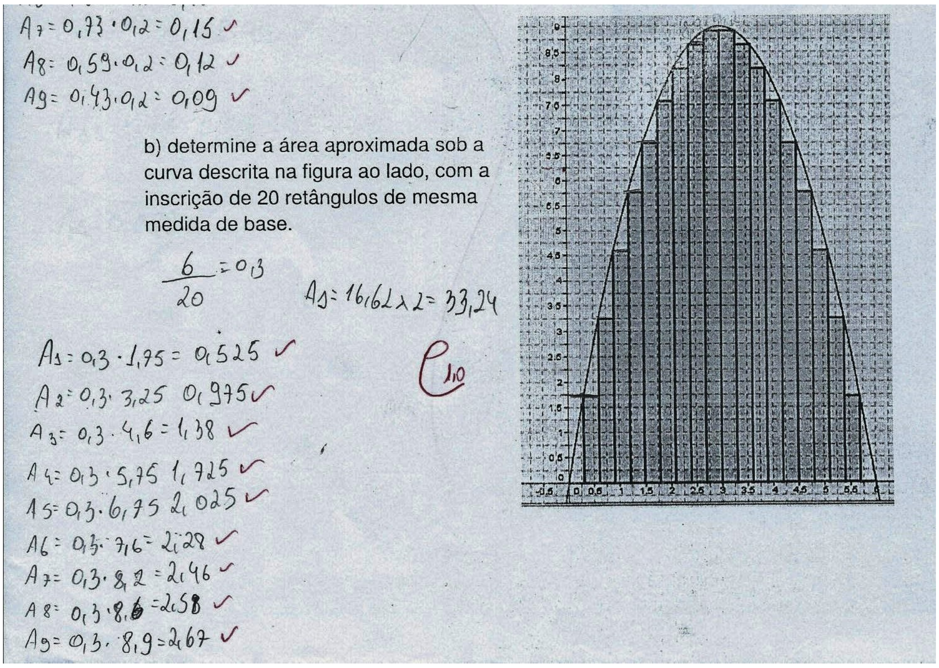


Figura 3.60: Atividade 2(b) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{17} e A_4.

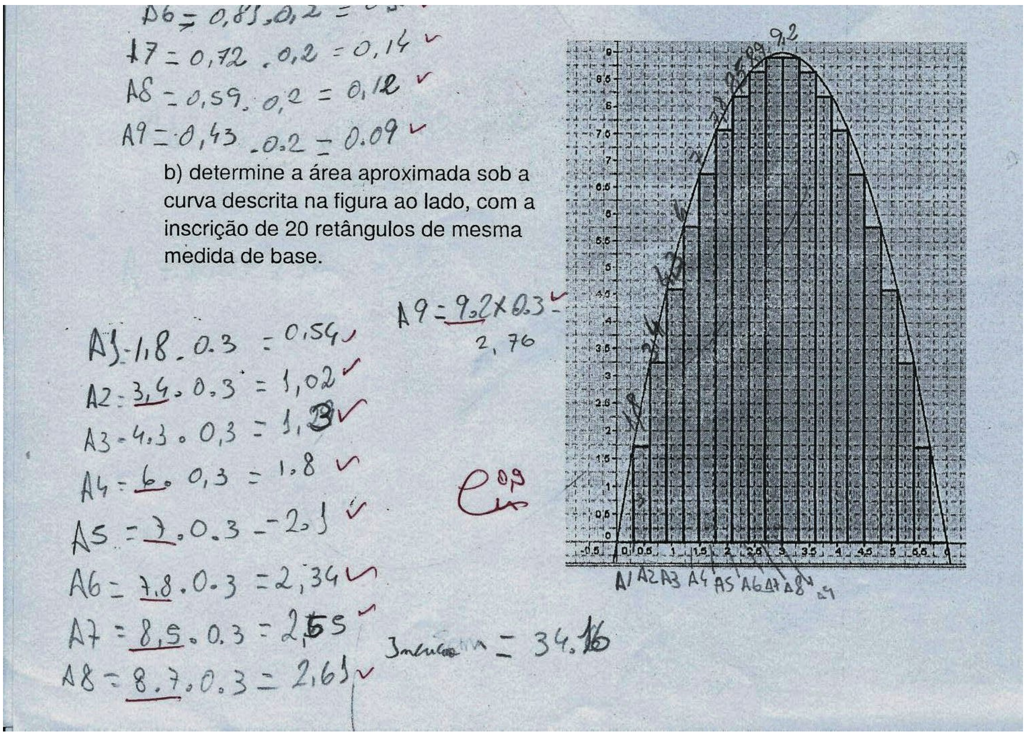


Figura 3.61: Atividade 2(b) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{23} e A_5.

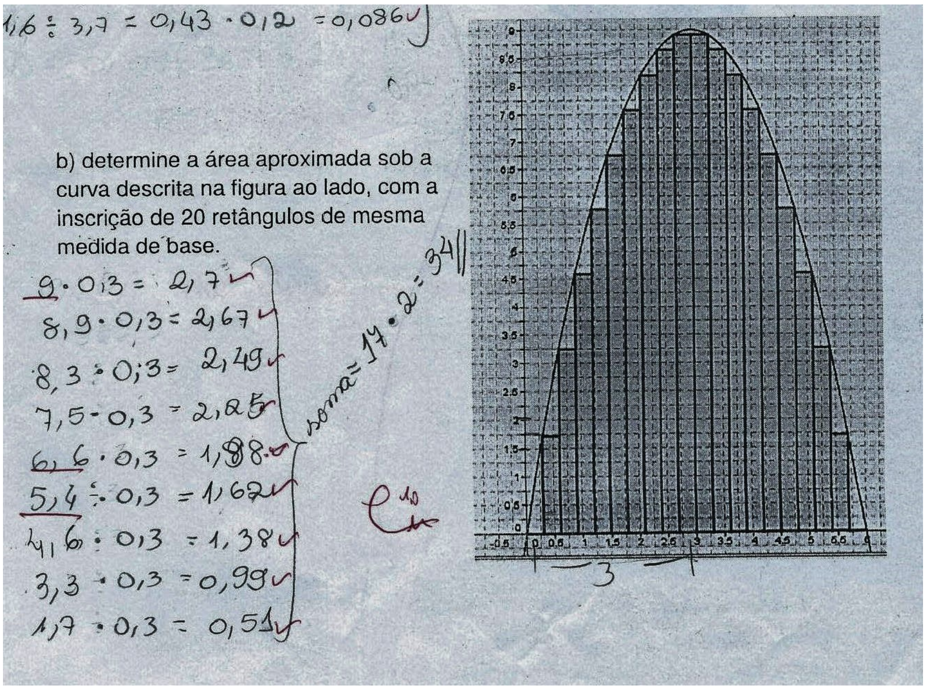


Figura 3.62: Atividade 2(b) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_{24} e A_6.

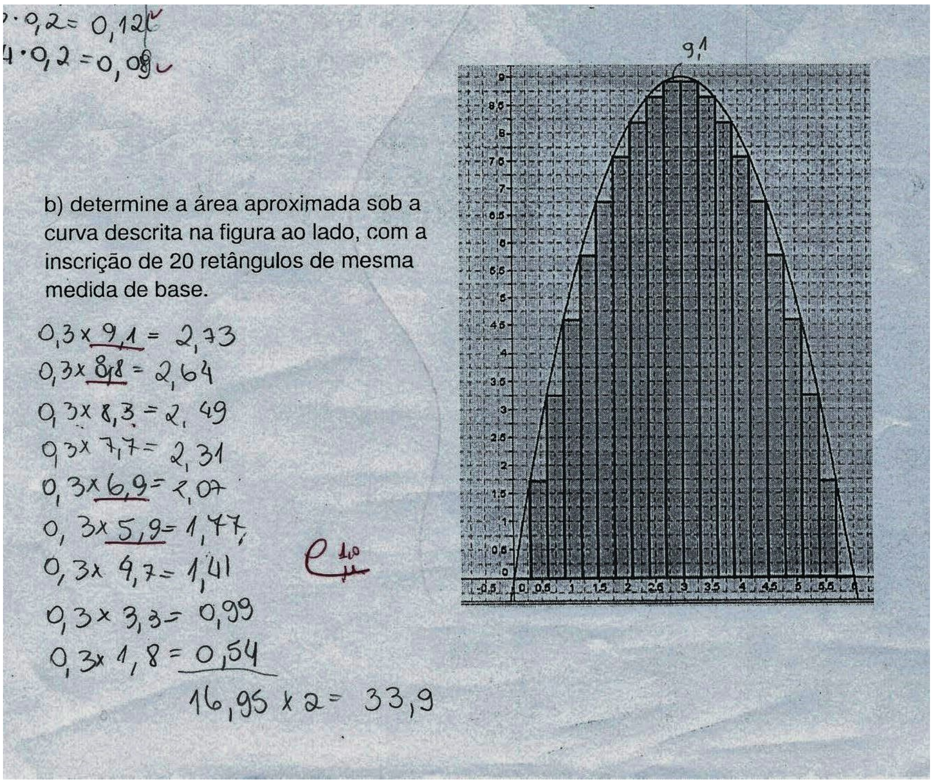


Figura 3.63: Atividade 2(b) resolvida pela dupla formada pelos alunos A_9 e A_{25}.

Ao corrigir esta avaliação, o professor levou em consideração todo o período de estudos, como o desenvolvimento e a construção do cálculo produzido pelos alunos. Muitos dos resultados apresentados foram aceitos, pois durante a resolução das atividades, foram sugeridos arredondamentos, com o uso de diferentes casas decimais. Este fato pode servir para explicar o porquê de diferentes resultados obtidos, embora as diferenças apresentadas não fossem significativas.

Dividida em duas questões, esta atividade avaliativa exigia do aluno, na primeira questão, além do cálculo, uma breve conclusão, a partir da comparação dos resultados obtidos. A segunda questão, exigia apenas o cálculo da região inscrita em cada item, apesar de apresentar, na figura do item (a), retângulos inscritos e circunscritos na elipse.

Os alunos, em sua maioria, determinaram a área aproximada do círculo apenas com a inscrição de retângulos. Eles não conseguiram determinar a área da região circunscrita no círculo, devido ao tempo dedicado para a resolução das outras atividades. Mas obtiveram resultados coerentes, próximos de resultados precisos, que somente um software matemático poderia determinar para a atividade proposta. Apenas uma dupla determinou a área aproximada do círculo, com a inscrição e circunscrição de retângulos. Porém, esta mesma dupla não concluiu a atividade, a partir dos resultados obtidos.

A resolução do item (a) na questão (2) foi consideravelmente fácil, haja visto que os alunos tiveram maior tempo na resolução de atividades pré-avaliativas. Na resolução do item (b), os alunos apresentaram algumas dificuldades no ínício do cálculo. Muitos questionaram, querendo saber se deveriam usar régua para determinar o comprimento de cada retâgulo. O professor, ao responder, indagou-os, a fim de saber se a imagem fornecida na atividade apresentava algum dado numérico útil para a resolução.

Para muitos alunos, o intervalo $[0, 6]$ no eixo horizontal não representava uma medida, simbolizava, apenas, a localização de dois pontos extremos. Inicialmente, tentaram medi-la, quando questionaram o professor sobre o resultado obtido, se o valor encontrado estava correto, ouviram como resposta outra pergunta. Indagando-os sobre o que representava o segmento horizontal, o professor forneceu outra informação, até então, não percebida por parte da turma.

Observando o que foi produzido pelos alunos, percebe-se, em algumas resoluções, sequências de cálculo, muitas vezes implícitas. Tais sequências apresentam ideias soltas, sem um arranjo, uma organização. Nelas, são omitidas informações que facilitariam a interpretação do cálculo construído.

O professor exigiu dos alunos, tanto no item (a), quanto no item (b) da questão (2), apenas a área de cada região, por meio da inscrição de retângulos. Optou-se em exigir apenas o cálculo da área, nesta questão, devido ao pouco tempo destinado para a resolução e discussão de atividades relacionadas ao cálculo de área destas duas regiões.

O professor entendeu que seria necessário um período de estudos um pouco maior, para exigir dos alunos, em uma atividade avaliativa, a interpretação de resultados com maior profundidade, considerando que cada aluno é único e, por isso, necessita de um tempo de aprendizagem, seja ele maior ou menor. Para que se consigam bons resultados, é necessário um período de estudos mais extenso e, com maior intensidade. Como o prazo de aplicação era limitado, com início e fim definidos, tornou-se inviável.

3.3 Questionário 2 (Final)

Com o término da atividade avaliativa, concluiu-se, também, o período de estudos e aplicação do projeto de pesquisa. Com o intuito de coletar informações acerca do período de estudos, o professor distribuiu o segundo questionário.

Neste questionário são apresentadas questões, direcionadas ao período de estudos, mais especificamente, sobre a aplicação dos métodos de Arquimedes de Riemann, além de questões direcionadas às aulas ministradas pelo professor. A análise do aluno tem caráter informativo, serve para o professor perceber como o aluno vê suas aulas e, principalmente, por não identificar o autor das respostas, dá ao aluno mais liberdade para construi-las, sem sentir-se constrangido.

A visão do aluno é muito importante para a construção e aprimoramento do material de estudos. Nesse sentido, são apresentadas, a seguir, as respostas dos alunos a cada uma das questões contidas no questionário.

A primeira questão que serviu para análise das atividades, a questão de número (4), solicitou do aluno uma avaliação do material produzido. Do total de alunos, precisamente: oito alunos consideraram o material com compreensão regular, 14 alunos consideraram o material com linguagem acessível e boa compreensão e, 8 alunos consideraram o material de fácil compreensão. Nenhum deles considerou o material de difícil compreensão. Dentre suas justificativas, destacam-se:

A_{x_1} _ Foi consideravelmente fácil de entender, consegui ter um bom aproveitamento do material.

A_{x_2} _ O material proposto estava com uma boa compreensão para que entendesse o conteúdo apesar de ter tido algumas dificuldades

A_{x_3} _ Pois o professor trouxe materiais com ilustrações e figuras, que facilitaram o entendimento, ficou melhor entendido com as figuras.

A_{x_4} _ Foi muito bem elaborado e aplicado com respostas bem elaboradas, não foi muito fácil mas consegui compreender o conteúdo.

A_{x_5} _ Quanto ao material achei bom, os recursos eram legais, mas tive dificuldades para compreender a matéria.

A_{x_6} _ O material que foi apresentado mostrou a compreensão de uma parte fundamental da geometria.

A_{x_7} _ Algumas explicações eram difíceis de serem interpretadas.
A_{x_8} _ Algumas coisas que foram explicadas não entendi.
A_{x_9} _ Apesar de ter sentido dificuldades em alguns assuntos apresentados, consegui compreendê-los após um pouco de prática e dedicação.
$A_{x_{10}}$ _ Em minha opinião por ter cálculos muito complexos e por ter muitos alunos, o ensino ficou prejudicado.
$A_{x_{11}}$ _ Tive muita dificuldade de entender a matéria, não pelo professor, pela matéria mesmo.
$A_{x_{12}}$ _ Alguns exercícios não compreendi direito.

A questão seguinte solicitou aos alunos para avaliarem o grau de importância da revisão apresentada, nos três primeiros encontros. Nesses encontros, foram revisados o cálculo de área de figuras geométricas planas, como: o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o trapézio, o losango e o triângulo, sendo construídas, cada uma das figuras, na malha quadriculada e, com o auxílio software Geogebra.

Dentre todos os alunos, 8 alunos consideram muito importante a revisão realizada nos três primeiro encontros, 18 consideram importante essa revisão e 4 consideram de regular importância. Nenhum deles considerou essa revisão como não sendo importante.

Durante a revisão, foram construídos, geometricamente, cálculos de fórmulas, apresentadas aos alunos no início do ano letivo. Apesar do estudo realizado pelos alunos no início do ano, sobre o conteúdo revisado neste tópico, pode-se perceber que os alunos, em sua maioria, considerou importante essa revisão. Por meio de suas justificativas, é possível perceber este fato.

A_{x_1} _ Pois já tem noção de como conseguir calcular qualquer figura
A_{x_2} _ Foi muito boa a ideia de revisar o conteúdo de uma forma diferente e legal.
A_{x_3} _ Pois o uso das fórmulas não serão usadas diariamente no futuro.
A_{x_4} _ Fiz esta escolha pois achei conveniente e bom o que aprendemos, e isto será mais adiante também.
A_{x_5} _ É importante pois através dessas fórmulas podemos encontrar a área de qualquer objeto, e elas podem ser utilizadas na construção de casas, edifícios, grandes monumentos.
A_{x_6} _ Pois vamos usar no nosso dia, mesmo que não seja diariamente e particularmente eu irei usar certa forma na minha profissão.
A_{x_7} _ Pois estas fórmulas são usadas para construir casas, edifícios, grandes obras, etc..
A_{x_8} _ É importante pois permitiu uma melhor compreensão destes cálculos, podendo ainda ter compreensão e visualização do conteúdo.
A_{x_9} _ Pois com essa construção podemos ter uma melhor visão das formas geométricas.

Percebe-se, em algumas respostas, o direcionamento dos conteúdos revisados, embora superficialmente.

Na questão (6), o professor explorou um tópico apresentado, que cobriu a revisão no ensino de trigonometria no triângulo retângulo. Esta revisão foi necessária, pois os alunos não haviam estudado trigonometria no ano anterior. Em virtude da situação apresentada, o professor aplicou o material que seria disponibilizado como texto complementar. Sobre este material, foi solicitada uma avaliação dos alunos.

Dentre as respostas apresentadas, 12 alunos consideraram muito bom o material revisado e de fácil compreensão; 18 consideraram bom o material estudado e, nenhum deles avaliou como regular. A seguir são apresentados os comentários dos alunos que justificaram esta questão.

A_{x_1} _ Só não foi muito bom, pois seno, cosseno e tangente não havia estudado no ano passado, complicou um pouco, mas é muito interessante.

A_{x_2} _ Quase toda a turma não lembrava da trigonometria, o material anexo foi essencial para todos nós.

A_{x_3} _ Pois mesmo havendo certas dificuldades sobre o conteúdo a explicação foi boa para o aprendizado.

A_{x_4} _ Durante essa aula eu pude esclarecer todas as minhas dúvidas em relação às razões trigonométricas, podendo assim compreender melhor os conteúdos seguintes.

A_{x_5} _ Porque não tínhamos mais conhecimento nesse conteúdo, assim revisamos e entendemos.

A_{x_6} _ Resolveu toda nossa dificuldade das aulas anteriores. (Uma referência ao quarto encontro quando foi introduzido o método de Arquimedes)

A_{x_7} _ O material apresentado estava com uma boa compreensão, na minha opinião, aprendi bem a matéria.

A_{x_8} _ Finalmente entendi como se calculava (seno, cosseno e tangente).

Nas duas questões seguintes (questão 7 e questão 8), buscava-se saber quanto aos métodos de Arquimedes e Riemann, como o aluno avaliou escolhendo uma das três opções: fácil resolução, média resolução, e, difícil resolução, aquela que melhor preenche o seu nível de compreensão.

Na questão (7), com a aplicação do método de Arquimedes, 10 alunos avaliaram como de fácil resolução, 16 deles avaliaram o conteúdo como de média resolução e 4 alunos consideraram o conteúdo de difícil resolução. Algumas das justificativas para estas avaliações são apresentadas a seguir.

A_{x_1} _ Após o aprendizado, foi fácil.

A_{x_2} _ Tive uma certa dificuldade em entender como era dada sua resolução, mas após entender, percebi que não há grande dificuldade na resolução.

A_{x_3} _ É fácil, depois que se aprende esta matéria, com um pouco de esforço e dedicação.

A_{x_4} _ Complicado de fazer, mas compreensível.

A_{x_5} _ Assim que aprendemos foi fácil, mas até entender, demorou um pouco.

A_{x_6} _ No início senti dificuldade para resolver o cálculo, mas com um pouco mais de prática pude compreendê-lo melhor.

A_{x_7} _ Pois as fórmulas dadas são complicadas para compreensão.

A_{x_8} _ Depois que a gente aprende esse método é mais fácil.

A_{x_9} _ Muito difícil!

$A_{x_{10}}$ _ Me confundi um pouco na hora de resolver.

$A_{x_{11}}$ _ Tem que conseguir saber exatamente as medidas, o raio, a altura, seno, cosseno e tangente.

Na questão (8), com a aplicação do método de Riemann, a maioria dos alunos entendeu que o cálculo era muito extenso e, de média resolução. Precisamente, 4 alunos consideraram o cálculo de fácil resolução e, os demais alunos, 26, consideraram de média resolução, devido à quantidade de cálculo a ser resolvido. Abaixo estão alguns relatos dos alunos.

A_{x_1} _ Esse método é um pouco mais demorado para fazer, mas não é tão complicado.

A_{x_2} _ Porque após ter compreendido as fórmulas se tornou mais fácil desenvolvimento dos cálculos dados.

A_{x_3} _ Pois demoramos para conseguir entender a lógica dos cálculos.

A_{x_4} _ Achei a resolução do cálculo um pouco complicada na hora da explicação mas depois de realizar alguns exercícios consegui compreender melhor.

A_{x_5} _ Porque ainda tenho algumas dúvidas.

A_{x_6} _ Demorei para entender o raciocínio.

A_{x_7} _ Complicado para fazer, mas compreensível.

A_{x_8} _ A matéria foi um pouco complicada mas depois de algumas explicações ficou mais fácil.

A_{x_9} _ Após entender como o método funciona é consideravelmente fácil.

$A_{x_{10}}$ _ Depois que peguei o jeito de fazer os cálculos foi tudo mais fácil.

A questão (9) tratou dos objetivos de Arquimedes e Riemann ao desenvolver seus métodos de cálculo. Esta questão tinha por objetivo extrair dos alunos o seu entendimento quanto a cada um dos métodos aplicados, visando o cálculo de regiões com formato curvilíneo. De modo geral, as respostas apresentadas foram todas direcionadas ao cálculo da área de uma região circular, como pode ser percebido nos relatos a seguir.

A_{x_1} _ Um modo mais fácil de nós aprendermos a resolver a área do círculo.

A_{x_2} _ Era calcular a área do círculo.

A_{x_3} _ Eles encontraram um meio mais fácil, de achar a área do círculo.

A_{x_4} _ Facilitam a resolução dos cálculos, utilizando formas novas e ideias que ajudassem a melhor compreensão da área do círculo.

A_{x_5} _ Colocar triângulos e retângulos para que não seja preciso usar π.

A_{x_6} _ Eles buscaram uma forma mais simples de descobrir a área do círculo.

A_{x_7} _ Facilitar a resolução dos cálculos, utilizando formas novas e ideias que ajudassem a melhor compreensão da área do círculo.

Na questão (10), o professor solicitou ao aluno para que fizesse uma autoavaliação, quanto à sua participação durante o desenvolvimento do projeto, atribuindo uma nota de 1 a 10, onde: nota 1 indicava totalmente insatisfeito com o seu envolvimento e 10 indicava totalmente satisfeito.

Precisamente:

Dez alunos atribuiram nota 10. Apenas três justificaram dizendo:

A_{x_1} _ Porém fiquei com algumas dúvidas.

A_{x_2} _ Porque é sempre bom aprender mais e me dediquei.

A_{x_3} _ Me preocupei e me envolvi para entender o material que o professor trouxe.

Dois alunos atribuiram nota 09, mas apenas um justificou, dizendo:

A_{x_1} _ Boa! Vim nas aulas, participei das aulas e questionei.

Dez alunos atribuiram nota 08. Cinco deles justificaram, dizendo:

A_{x_1} _ Tive algumas dificuldades mas me esforcei e procurei participar das aulas para entender a matéria.

A_{x_2} _ Tive algumas dificuldades pois foram poucas as aulas, mas me esforcei para entender o conteúdo.

A_{x_3} _ Eu busquei prestar o máximo de atenção nas aulas, e tentei esclarecer todas as minhas dúvidas.

A_{x_4} _ Tentei sempre compreender e tirar as dúvidas e consegui aplicar bem o que aprendi.

A_{x_5} _ Pois apesar de algumas dificuldades considero que tive uma boa satisfação das aulas.

Quatro alunos atribuiram nota 07, mas apenas dois deles justificaram, dizendo:

A_{x_1} _ Aproveitei a explicação mas tive algumas faltas.

A_{x_2} _ Gostei do método de ensino do professor e procurei entender.

Dois alunos atribuíram nota 05 e, apenas um justificou, dizendo:

A_{x_1} _ Pois não fui muito participativa em questão de falar e questionar.

Dois alunos não responderam esta questão.

Na questão (11), solicitou-se do aluno uma avaliação das aulas ministradas pelo professor, durante a aplicação do projeto, atribuindo uma nota de 1 a 10, onde: nota 1 indicava totalmente insatisfeito com as aulas e 10 indicava totalmente satisfeito.

Precisamente:

Quinze alunos avaliaram as aulas com 10. Oito deles justificaram, dizendo:

A_{x_1} _ Sabe ensinar como resolver os problemas, com raciocínios lógicos utilizando os teoremas de Arquimedes e Riemann.

A_{x_2} _ Compreendi como todos os cálculos eram realizados (área, Arquimedes e Riemann). As aulas foram bem desenvolvidas e de fácil compreensão.

A_{x_3} _ Ótima explicação, dicas e material.

A_{x_4} _ Foi um bom teste de mestrado.

A_{x_5} _ As aulas do professor Alex foram ótimas, junto a forma diferente de dar aulas.
A_{x_6} _ Se preocupou se nós estávamos entendendo ou não, trouxe até matéria que não estava nos planos dele.
A_{x_7} _ Porque ele nos ensinou coisas novas.
A_{x_8} _ Foram todas muito bem elaboradas e praticadas.
Treze alunos avaliaram com nota 09. Cinco deles justificaram, dizendo:
A_{x_1} _ Fiquei com algumas dúvidas.
A_{x_2} _ Ele trouxe materiais que ajudaram os alunos a compreender melhor, também nos ajudou nos exercícios.
A_{x_3} _ Eu achei interessantes, pois o professor utilizou métodos criativos e foi paciente, buscando deixar o assunto bem claro para toda a turma.
A_{x_4} _ Pois tivemos uma boa explicação do conteúdo, um bom material de estudo.
A_{x_5} _ Pois ele nos auxiliou nas atividades que foram necessárias e o método de ensino foi bom.
Dois alunos não responderam esta questão.

Na questão (12), o professor solicitou aos alunos para avaliarem, quanto às suas expectativas, do início do projeto, ao chegar o final, se elas tinham sido atingidas, atribuindo uma nota de 1 a 10, onde: nota 1 indicava que não tinham sido atingidas e 10 indicava que tinha atingido plenamente.

Precisamente:
Seis alunos avaliaram com nota 10. Desses, três justificaram, dizendo:
A_{x_1} _ Superaram, pois era uma "revisão" de alguns conteúdos, que já haviam sido vistos anteriormente e, que eu não havia compreendido e após o projeto passei a compreendê-los.
A_{x_2} _ Todos foram atingidos, e até demais, no começo pensei que não ia entender nada, mas é mais fácil do que todos imaginavam.
A_{x_3} _ As aulas foram boas e superaram minhas expectativas, pois as aulas foram bem produtivas.
Seis alunos avaliaram com nota 09. Apenas dois alunos justificaram, dizendo:
A_{x_1} _ Eu já conhecia o professor e sabia como eram suas aulas, por isso, acredito que ele está muito bem e até mesmo melhorou muito em relação às suas antigas aulas.
A_{x_2} _ Sim, pois já tinha sido aluna do professor Alex e conhecia os métodos dele.
Doze alunos avaliaram com nota 08. Metade deles, justificaram dizendo:
A_{x_1} _ Sim foram atingidos mas ouve um pouco de dificuldade na compreensão de alguns exercícios.
A_{x_2} _ Foram sim, consigo entender melhor a geometria e seus cálculos.
A_{x_3} _ Teve algumas coisas que não aprendi tão bem, achei a matéria difícil.
A_{x_4} _ Apesar de ter sentido um pouco de dificuldade em alguns pontos, consegui compreender melhor os assuntos que eu já sabia e também aprender novos assuntos.

A_{x_5} _ Era mais ou menos isto que eu esperava.

A_{x_6} _ Não porque não entendemos tudo o que ele explica.

Dois alunos avaliaram com nota 07 e, justificaram, dizendo:

A_{x_1} _ Não aprendi muito bem alguns exercícios.

A_{x_2} _ Pois gostaria de ter mais aulas para tirar algumas dúvidas.

Dois alunos avaliaram com nota 05, porém não apresentaram justificativas da nota. Outros dois alunos não responderam esta questão.

A questão (13) o professor deixou livre para os alunos expressarem o que considerassem importante e que não havia sido mencionado acima.

Cinco alunos registraram:

A_{x_1} _ Foi pouco tempo que tivemos em relação à grande quantidade de conteúdo, as aulas tiveram de ser um pouco corridas, mas conseguimos tirar bastante proveito delas.

A_{x_2} _ Todo esse período de aulas me deu fontes da geometria, juntamente com as explicações claras do professor.

A_{x_3} _ Que o professor continuasse a aplicar as matérias durante o ano todo pois suas aulas são excelentes.

A_{x_4} _ O caráter do professor.

A_{x_5} _ Por termos tido bastante conteúdo, o tempo das aulas acabou não colaborando muito mas, mesmo assim, tivemos um bom aprendizado.

Capítulo 4

Reflexões e conclusões sobre o trabalho de aplicação

O presente trabalho teve como principal objetivo introduzir conceitos preliminares do cálculo integral por meio do cálculo da área. O trabalho ficou limitado ao cálculo de área de três regiões distintas: o círculo, a elipse e regiões limitadas por gráficos de funções polinomiais e o eixo OX.

Na aplicação deste trabalho, foram utilizados dois métodos distintos. O primeiro método aplicado foi o método de Arquimedes, que consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares no círculo. O segundo método aplicado foi o método de Riemann, que consiste em inscrever e circunscrever retângulos, na região selecionada para determinar a área.

Antes da aplicação de cada um dos dois métodos, foram revisados alguns tópicos envolvendo o cálculo de área de quadriláteros e triângulos. Durante esta revisão, foram inúmeros os comentários e observações relatados pelos alunos. Destaca-se, em particular, o relato do aluno A_{15}, quando disse:

A_{15}_ Sor! Muitas vezes, os professores entram na sala e querem que a gente aprenda de qualquer jeito, [...]. Se fosse sempre assim, com certeza a gente aprenderia melhor.

O comentário acima, relatado após a revisão do cálculo da área do trapézio, chamou a atenção do professor pela seriedade com que o aluno apresentou-o. Nele, percebe-se uma crítica ao modelo de ensino, no qual, o aluno trilhou durante aproximadamente onze anos de vida escolar.

Muitos são os argumentos que podem ser apresentados para justificar o uso indiscriminado de fórmulas, sem proporcionar ao aluno a construção de conceitos e significados. Dentre muitos dos argumentos que podem ser apresentados como obstáculos Bassanezi (2013, p.35) destaca:

> a) Obstáculos instrucionais — Os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo.
>
> b) Obstáculos para os estudantes — O uso de Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. [...]
>
> c) Obstáculos para os professores — Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolder modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento doo processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às práticas de matemática em áreas que desconhecem. [...]

Além desses argumentos, pode-se acrescentar a longa jornada de trabalho como forma de complementar os baixos salários, causando a desmotivação de muitos professores. Além disso, em virtude da ampliação da jornada de trabalho, não conseguem tempo necessário para qualificação e aprimoramento das suas práticas.

Durante a aplicação do método de Arquimedes, os alunos afirmaram, ainda no início da aplicação deste método, desconhecer as razões trigonométicas. Por um motivo ou outro, o (a) professor (a) desta turma, no ano anterior, não ensinou o tópico envolvendo trigonometria. Tal situação retardou a sequência do trabalho, pois foi necessário dedicar um tempo que era limitado para revisar conceitos essenciais para a sua aplicação.

Apesar disso, o trabalho transcorreu dentro da normalidade. O objetivo deste método era determinar a área do círculo por meio da inscrição e circunscrição de polígonos regulares. Tomando o raio com medida unitária, buscou-se provocar o aluno, com a intenção de fazê-lo concluir que a área procurada iria se aproximar de π.

A partir das construções e cálculos apresentados pelos alunos, pode-se afirmar que esse objetivo foi alcançado. Por meio da construção e análise de tabelas, alguns alunos concluiram que os resultados obtidos e dispostos na tabela aproximavam-se do número π.

Esse entendimento dos alunos permite acrescentar uma aplicação indireta do "método da Antiderivada para o cálculo de área", conforme descreve Anton (2000, p.380).

Nesta mesma direção, Stewart (2008, p.3) define:

> Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Ficou clara, mesmo que implicitamente, a noção de limite apresentada pelos alunos pois eles descreveram essa construção, intuitivamente. Porém, certamente iriam apresentar dificuldades, caso o método fosse formalizado e direcionado para o cálculo de limite.

O método de Riemann foi aplicado no cálculo da área de regiões delimitadas por círculos, elipses e gráficos, este último, descritos por funções polinomiais. Esse método correspondia à inscrição e circunscrição de retângulos nas regiões acima citadas. Inicialmente, o professor determinou o cálculo da área do círculo, em seguida propôs o cálculo da área da elipse e, por fim, foi proposto o cálculo da área de regiões delimitadas por gráficos de funções polinomiais.

A área aproximada do círculo por meio da inscrição e circunscrição de retângulos foi obtida, de certo modo, com facilidade. Alguns alunos perceberam a convergência para o valor de π rapidamente.

Antes de iniciar a aplicação do trabalho, pretendia-se determinar a construção de elipses com medidas de eixo focal e não-focal variadas, a fim de ampliar a quantidade de argumentos que permitisse a construção de uma regra geral para o cálculo da área. Porém, no decorrer da aplicação, percebeu-se que a construção pretendida não poderia ser desenvolvida pois seria necessária uma quantidade de tempo maior que a prevista.

Por esse motivo, optou-se em aplicar o método da Riemann em apenas uma elipse de tal modo que o eixo focal – intervalo que foi dividido em quantidades iguais – fosse dividido em uma quantidade maior de partes.

Ao propor a divisão do intervalo em 10, 20 e 40 partes iguais, o professor pretendia, a partir dos resultados obtidos, mostrar aos alunos para qual valor esses resultados estavam convergindo. Mas, observou que os alunos, após terem calculado a região com 20 subdivisões, apresentavam-se cansados e, de certo modo, desmotivados.

Considerando que não foi possível ampliar a quantidade de elipses construídas e obter os respectivos resultados da área calculada, o professor entendeu que não teria argumentos suficientes para generalizar os resultados, convergindo-os, desta forma, para a fórmula da elipse.

O método de Riemann foi aplicado no cálculo da área, da região descrita pelo gráfico, de uma função polinomial. Devido à limitação do tempo para a aplicação, optou-se pelo gráfico descrito por uma função quadrática. Pretendia-se, a partir desta construção, determinar o valor aproximado da área, sob a curva e, consequentemente, introduzir, de modo implícito, a noção de cálculo integral.

Mas, conforme já mencionado anteriormente, não foi possível aprofundar a aplicação desse método na região descrita pela parábola, devido ao pouco tempo que restava. Esta atividade foi aplicada no penúltimo encontro, véspera da última atividade avaliativa.

Novamente, por meio do software Geogebra, ampliou-se a quantidade de retângulos, neste caso, inscritos da figura e mencionou-se que a área, exata, sob a curva, poderia ser obtida após estudar, no ensino superior, um curso de cálculo integral.

Pretendia-se, com esta construção, mostrar aos alunos, de modo implícito, que a área sob a curva corresponde ao limite das somas das áreas de cada retângulo inscrito sob a curva descrita pelo gráfico, conforme a definição apresentada por Stewart (2008, p. 374).

> A **área** A da Região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes:
>
> $$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x]$$

Em última análise, observa-se que, um trabalho como o que foi aplicado em turma regular, não pode ser aplicado, com tempo limitado, onde são definidos início e fim. Pois, quando está envolvida a construção do conhecimento e não o uso de fórmulas pré-estabelecidas, deve-se dar o tempo necessário para que o aluno possa assimilar o que ele está construindo. Nesse sentido, conclui-se que o Ensino de Matemática Avançada pode ser introduzido no Ensino Médio, com muitos benefícios ao aluno, tanto na construção geométrica quanto na aritmética.

Referências

ALMEIDA, Lourdes Werle de et al. Modelagem matemática na educação básica. 1ª ed. ,1ª reimpressão - São Paulo: contexto, 2013.

ALMOULOUD, S. A. Contexto e contextualização nos processos de ensino aprensdizagem da Matemática. Nova Escola. São Paulo. ano 29, n.270, p. 68-70, mar. 2014.

ANTON, Howard. Cálculo um novo Horizonte. Trad. Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha - Vol 1. 6ª ed. - Porto Alegre: Bookman, 2000.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3ªed. 4ª reimpressão - São Paulo: Contexto, 2013.

BOYER, Carl B.. MERZBACH, Uta C.. História da Matemática. [Tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

LIMA, Elon Lages. Isometrias. 2ª ed. - Rio de Janeiro: SBM 2007.

LOCKHART, P. O Lamento de um Matemático - Parte I. Cálculo. Osasco. ano 4, n. 37, p.44-65, Fev. 2014.

LOCKHART, P. O Lamento de um Matemático - Parte II. Cálculo. Osasco. ano 4, n. 38, p.48-53, Mar. 2014.

ROONEY, Anne. A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito [Tradução: Mario Fecchio]- São Paulo: M.Books, 2012.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana, CARVALHO, J.B.P. de. Tópicos de História da Matemática - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SBM. Fundamentos de Cálculo. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

STEWART, James. Cálculo, volume1. 5ª edição - Tradução Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo. Cengage Learning, 2008.

PetMatemática. Noções Básicas de Cálculo e Geometria Plana com GeoGebra. Santa Maria, 2012. Disponível em: $http://petmatematica.weebly.com/uploads/2/2/2/2/22229894/apostila\_$ Acesso em 16/03/2014.

Anexos

Anexo A

"Esboço biográfico"de Arquimedes

Arquimedes (287 aC - 212aC). Matemático e cientista grego. Nascido em Siracusa, na Sicília, era filho do astrônomo Fídeas e possivelmente aparentado de Heiron II, rei de Siracusa. A maior parte dos fatos da vida vem do biógrafo romano Plutarco, que inseriu algumas páginas provocadoras sobre ele na vasta biografia do soldado romano Marcelo. Nas palavras de um escritor, "o relato sobre Arquimedes é marcante como uma finíssima fatia de presunto em um enorme sanduíche".

Arquimedes é considerado juntamente a Newton e Gauss, como um dos grandes matemáticos da história e é, certamente o maior matemático da antiguidade. Seu trabalho é tão moderno em espírito e técnica que é difícil distingui-lo dos trabalhos dos matemáticos do século dezessete, mesmo que feito sem os benefícios da álgebra e de um sistema numérico conveniente. Entre as suas realizações matemáticas, desenvolveu um método geral (exaustão) para achar áreas e volumes, o qual usou para achar áreas limitadas por parábolas e espirais e volumes de cilindros, parabolóides e segmentos de esferas. Ele elaborou um procedimento par aproximar π limitando o seu valor entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Apesar das limitações do sistema numérico grego, criou métodos para encontrar raízes quadradas e um método baseado pelo miríade grego (10.000) para representar grandes números como um seguido por 80 bilhões de milhões de zeros.

Dentre todos os seus trabalhos, o que mais orgulhava Arquimedes era o método para encontrar o volume de uma esfera — ele mostrou que o volume de uma esfera é 2/3 do volume do menor cilindro que a contém. Satisfazendo a um pedido seu, a figura de uma esfera e um cilindro foi gravada na lápide de seu túmulo. Além de matemática, Arquimedes trabalhos extensivamente em mecânica e em hidrostática. Quase todo o estudante colegial conhece Arquimedes como um cientista distraído o qual, descobrindo que um objeto ao boiar desloca o seu peso do líquido, pulou de uma banheira e correu nu pelas ruas de Siracusa gritando, "Eureka, Eureka!"(significando, "eu descobri!"). Arquimedes, na realidade, criou a disciplina de hidrostática e usou-a para encontrar posições de equilíbrio para vários corpos flutuantes. Ele lançou os postulados fundamentais da mecânica, descobriu leis das alavancas e calculou centros de gravidade de várias superfícies planas e sólidas. Na agitação da descoberta das leis da alavanca, atribuiu-se a ele a frase: "Dai-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo".

Embora Arquimedes estivesse mais interessado em matemática pura do que em suas aplicações, ele era um gênio em engenharia. Durante a segunda guerra Púnica, quando Siracusa foi atacada pela frota romana sobre o comando de Marcelo, foi registrado por Plutarco que as invenções militares de Arquimedes seguraram a frota em uma baía por três anos. Ele inventou supercatapultas que faziam chover pedras pesando um quarto de tonelada ou mais sobre os romanos e aterrorizantes engenhos mecânicos de ferro com "bicos e garras", os quais, por cima das paredes da cidade, agarravam os navios e os faziam rodopiar contra as pedras. Após o primeiro revés, Marcelo chamou Arquimedes de um "Briareus geométrico (monstro mitológico com cem braços) que usava nossos navios como xícaras para tirar água do oceano".

Finalmente, o exército romano foi vitorioso e contrariando ordens específicas de Marcelo, Arquimedes, com então 75 anos, foi morto por um soldado romano. De acordo com o registro do incidente, o soldado fez sombra sobre a areia onde Arquimedes trabalhava num problema matemático. Irritado, Arquimedes gritou: "não perturbe os meus círculos". O soldado num acesso de raiva matou o velho.

Com a sua morte, o talentoso matemático grego caiu em esquecimento, só tendo sido completamente relembrado novamente no século dezesseis. Infelizmente, não há nenhuma pintura ou estátua desse grande homem.

Anexo B

"Esboço biográfico"de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866). Matemático alemão. Bernhard Riemann, como é comumente conhecido, era filho de um ministro protestante. Recebeu de seu pai a educação elementar e com pouca idade mostrou talento em aritmética. Em 1846, entrou na Universidade de Göttingen para estudar teologia e filosofia, mas logo transferiu-se para matemática. Estudou física com W. E. Weber e matemática com Karl Friedrich Gauss, considerado por alguns o maior matemático que já apareceu. Em 1851, recebeu o seu Ph.D sob a orientação de Gauss e permaneceu em Göttingen para ensinar. Em 1862, um mês após o seu casamento sofreu um ataque de pleurisia e permaneceu extremamente doente pelo restante de sua vida. Finalmente, sucumbiu à tuberculose em 1866, com 39 anos.

O trabalho de Riemann em geometria está cercado de uma história interessante. Para a sua aula introdutória, antes de tornar-se professor - assistente, submeteu três tópicos possíveis para Gauss. Este surpreendeu Riemann, escolhendo o tópico que ele menos gostava, os fundamentos de geometria. A aula parecia uma cena de filme. O velho e enfraquecido Gauss, um gigante no seu tempo, observando intensamente seu jovem brilhante protegido juntar as partes do seu trabalho em um sistema belo e completo. Dizem que Gauss ficou ofegante de prazer quando a aula chegava ao fim e voltando para a casa estava maravilhado com o talento de seu estudante. Gauss morreu pouco depois. Os resultados apresentados por Riemann naquele dia acabaram sendo a ferramenta fundamental, usada por Einsten cerca de 50 anos depois, para desenvolver a teoria de relatividade.

Além de seu trabalho em geometria, Riemann fez grandes contribuições à teoria das funções complexas e à física - matemática. A noção de integral definida, presente na maioria de cursos de cálculo, é a ele atribuída. A morte prematura de Riemann foi uma grande perda para a matemática, uma vez que seu trabalho era brilhante e de importância fundamental.

Anexo C

Bibliografia de Apoio

ALVARENGA, Mauro Lopes. O método da exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático. 2006. 14 f. Monografia (graduação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006. Disponível em: http://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1755/1/Mauro%20Lopes%20Alvarenga.pdf. Acesso em 22/01/2014.

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 5.ed.. Rio de Janeiro: SBM 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Hein, Nelson. Modelagem Matemática no ensino. 5ªed. 3ª reimpressão- São Paulo: Contexto, 2013.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Introdução à Geometria Espacial 4ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2005.

DANYLUK, Ocsana Sônia.[Org.]. História da Educação Matemática: escrita e reescrita de histórias. Porto Alegre: Sulina, 2012.

FERREIRA, Rosangela Sviercoski. Matemática Aplicada às Ciências Agrárias: Análise de dados e modelos. - Viçosa: UFV, 1999.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. Um Convite à Matemática. 2ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 1977-78.

IEZZI, Gelson. et. al. Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas, Noções de Integral. São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, E. L., CARVALHO,P.C.P., WAGNER, E. e MORGADO,A.C.. A matemática do Ensino Médio. Vol. 2. 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, E. L., CARVALHO,P.C.P., WAGNER, E. e MORGADO,A.C.. A matemática do Ensino Médio. Vol. 3. 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, Elon Lages. Geometria Analítica e Álgebra Linear. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 4ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. - 5ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011.

NETO, Antonio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana. 1ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, Antonio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise.-2ªed.- Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SÁ, Ilydio Pereira de. Arquimedes de Siracusa e o seu Método da Exaustão: uma Atividade Didática para o cálculo de π. Revista Eletrônica TECCEN, Vassouras, v.4, n.3, p. 15-24, mai. - ago., 2011. Disponível em: $http://www.uss.br/pages/revistas/revistateccen/V4N22011/pdf/002_Arquimedes_Siracusa_Metodo_Exaustao.pdf$ Acesso em 22/01/2014.

SBM. Geometria Analítica. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

SBM. Geometria. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

VILLELA, Mariana Fernandes dos Santos, SANTOS, P. B., JAFELICE, R.S.M. Fluxo Sanguíneo: Uma aplicação da Integral de Riemann. FAMAT em Revista – número 9 – Outubro de 2007. Disponível em: $http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_09_sala_04.pdf$, Acesso em 28/02/2014.

WAGNER, Eduardo.Construções Geométricas - com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 6ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2007.