ENSINANDO MATEMÁTICA COM JOGOS

BRUNO DE OLIVEIRA SOUZA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

ABRIL - 2013

ENSINANDO MATEMÁTICA COM JOGOS

BRUNO DE OLIVEIRA SOUZA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientadora: Profª. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
ABRIL - 2013

ENSINANDO MATEMÁTICA COM JOGOS

BRUNO DE OLIVEIRA SOUZA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 12 de Abril de 2013.

Comissão Examinadora:

____
Prof. Geraldo de Oliveira Filho, D.Sc. - UENF

____
Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre, D.Sc. - UENF

____
Prof^{a}. Solimá Gomes Pimentel, D.Sc. - UFF

____
Prof^{a}. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho à minha esposa Mariane que sempre me ajudou e me apoiou, até mesmo quando pensei em desistir, ao meu pai Alédio que sempre me incentivou a estudar, à minha mãe Célia Maria que tão cedo nos deixou, mas que sempre estará presente nas boas lembranças e às minhas tias Deisimar e Gilcéia que foram como duas mães, ensinando-me a viver no lugar daquela que não teve tempo de ensinar.

Agradecimentos

À minha esposa Mariane, que estudou junto comigo, sofreu junto comigo, se dedicou junto comigo e que, ainda bem, não teve vontade de desistir junto comigo. A ela devo boa parte deste trabalho.

À minha orientadora, Professora Drª Liliana Angelina León Mescua pela dedicação e, principalmente, pela paciência que teve comigo.

Aos Professores Rigoberto, Geraldo, Oscar e Mikail, que tanto nos ensinaram nesta caminhada.

Ao meu grande amigo, Sulivan, que praticamente me obrigou a fazer a prova de ingresso, sem a "pressão"que ele fez eu não teria chegado aqui.

A todos os meus colegas da turma 2011 da UENF que estudaram junto comigo, me ajudaram, tiraram minhas dúvidas (e não eram poucas) e, principalmente, me incentivaram a continuar.

"Costumava sentir-me culpado

por passar dias inteiros ocupado com jogos,

quando era suposto fazer Matemática.

Mas depois, quando descobri os números surreais,

compreendi que jogar jogos É Matemática."

John Horton Conway

RESUMO

Os conteúdos matemáticos apresentados de maneira tradicional, já não se mostram motivadores ou atrativos para os nossos alunos, há, portanto, a necessidade de abordar a matemática de formas alternativas. Nesse sentido, procuramos realizar uma cuidadosa análise matemática acerca dos jogos Torre de Hanói e Nim, além de pesquisas metodológicas e históricas, que pudessem subsidiar o presente trabalho, o qual visa apresentar propostas de uso didático destes dois jogos, de modo que possam ser inseridos no contexto de trabalho em sala de aula, especialmente, em turmas do 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Matemática, Jogos, Torre de Hanói, Nim e Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

Mathematical contents, presented in a traditional methodology, are not motivating or attracting students any more, wherefore, the necessity of teaching mathematics in an alternative way. In this sense, this work was constructed based on a careful mathematical analysis upon the games "Hanoi Tower"and "Nim", in addition to methodological and historical researches, which could found this paper that aims to show proposals of didactic use of these both games, in order to insert them in the context of classrooms, specially, in 6^{th} and 7^{th} year of Fundamental Education System.

Keywords: Mathematics, Games, Hanoi Tower, Nim and teaching and learning.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

> *Os jogos são tão antigos como a humanidade. O ato de jogar desde sempre acompanhou a civilização. Em todas as civilizações encontramos uma prática lúdica. Os jogos constituem uma das facetas incontornáveis da cultura humana. (...) As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional. (Neto e Silva (2004)).*

O jogo sempre esteve inserido na sociedade, sempre fez parte da cultura humana e, contrariamente ao que poderíamos pensar, não é recente o seu uso para fins educacionais. Desde a Grécia Antiga, talvez mesmo antes, o jogo já era utilizado como ferramenta para o ensino, sabe-se, por exemplo, que Aristóteles sugeria seu uso como meio de imitar atividades adultas, no intuito de preparar para a vida futura. Mas, é na atualidade que o jogo vem, cada vez mais, ganhando espaço como um importante recurso didático, capaz de oferecer novas possibilidades ao trabalho docente, facilitando-o e modificando-o.

Mas o que o Jogo tem a oferecer de tão valioso?

Antes de tentar responder a essa pergunta, devemos nos lembrar de que as mudanças em nossa sociedade estão ocorrendo cada vez mais depressa e, naturalmente, as metodologias de ensino-aprendizagem deveriam acompanhar tais mudanças. Mas não é o que de fato ocorre.

> *Durante muito tempo o ato de ensinar resumiu-se à transmissão de conteúdos, no qual o aluno tornava-se agente passivo da aprendizagem e o professor era tido como o único detentor do saber.(Lima et al. (2013))*

Ainda hoje, está muito presente em nossas escolas o chamado "ensino tradicional", que tem o quadro como recurso totalmente preponderante, com alunos numa posição de passividade frente ao conhecimento, com pouca ou nenhuma atividade que vise à experimentação. Porém, os alunos estão, cada vez mais, respondendo a esse tradicionalismo com desinteresse, baixa motivação, falta de vontade de aprender, indisciplina, entre outros. Em especial, a Matemática parece causar nesses alunos uma espécie de "fobia educacional", pois, muitos deles consideram-na como algo complexo, difícil, por vezes incompreensível e, até mesmo, sem utilidade prática.

> *O desinteresse dos alunos na sala de aula e as dificuldades que por vezes enfrentam em relação à Matemática, são razões mais que suficientes para que os professores procurem novas estratégias de ensino para os ajudar a superar os seus receios e os seus obstáculos. (Mota (2009)).*

Para retirar este "rótulo"que foi posto sobre a Matemática, consideramos que uma das estratégias mais promissoras envolve a ludicidade, a brincadeira, o prazer, todos estes materializáveis através dos Jogos. O uso dos Jogos em sala de aula permite que o aluno passe a enxergar a Matemática de uma maneira mais simples e divertida e não mais como o "vilão"de sua vida escolar.

> *Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. (Borin (1996)).*

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil (1998)) - Matemática de 1998:

> *Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.*

Gerar interesse e vontade de aprender em nossos alunos é sem dúvida, um dos grandes desafios do trabalho docente. Os conteúdos, quando transmitidos da maneira tradicional, já não constituem uma fonte de interesse para a maioria de nossas crianças e jovens, é preciso de alguma forma instigar a curiosidade, despertar o seu desejo de aprender, usar novas ferramentas e práticas mais atraentes e motivadoras.

Nesse sentido, os jogos vêm despontando como uma das alternativas mais promissoras para o enriquecimento da prática docente, pois, são capazes de provocar o aluno, despertar seu interesse de uma forma prazerosa, quase descompromissada, levando-os a ter vontade de aprender.

A potencialidade do jogo em despertar o interesse do aluno o transforma em ferramenta importantíssima da prática docente, a qual permite uma série de novas abordagens, muito mais interessantes e atrativas, de diversos conteúdos. Mas não é apenas o caráter motivacional que nos guia em direção à utilização dos jogos como ferramenta didática.

> *A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática.(Brasil (1998)).*

O jogo praticado em grupo se constitui num elemento facilitador do desenvolvimento da competência matemática e das relações interpessoais, sendo fator de socialização, pois, estabelece a necessidade de aceitação e cumprimento de regras. Sendo assim, o jogo é capaz de "abrir uma porta"para uma maior aproximação professor-aluno e aluno-aluno, ajudando a desenvolver a confiança, a cooperação e o respeito entre as partes.

> *Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes - enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório - necessárias para aprendizagem da Matemática. (Brasil (1998))*

O jogo estimula a formação de atitudes importantes para aprendizagem matemática e leva o aluno a desenvolver seus próprios procedimentos para solucionar problemas. Os Jogos são uma importante ferramenta na tarefa de facilitar a construção de conhecimentos, pois, ajudam a estimular e desenvolver em nossos alunos a capacidade de pensar de uma maneira independente. Além disso, o Jogo estimula a criatividade, promove a comunicação entre os envolvidos favorecendo o desenvolvimento da linguagem e da cooperação, ajuda a desenvolver o raciocínio lógico dedutivo e a capacidade de resolução de problemas e é um grande fator de aumento da motivação dos alunos.

> *Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático.(Brasil (1998))*

Os Jogos também podem auxiliar no desenvolvimento da concentração e da atenção, bem como promover uma melhora da autoconfiança e da autoestima dos alunos. Naturalmente, não se pode pensar que todo e qualquer conteúdo deva ser ensinado com o uso de jogos, mas, certamente, é uma alternativa que pode contribuir fortemente para uma prática docente mais dinâmica e atrativa para nossos alunos.

> *Embora a aplicação dos jogos de natureza matemática, não seja de modo algum a única forma de ensinar e consequentemente de aprender matemática, podem dar um contributo importante para um melhor ensino e aprendizagem.(Quintas (2009)).*

Com base no exposto acima, consideramos que ao trabalharmos com o uso de jogos em sala de aula, devemos estar interessados, não só em introduzir ou reforçar um conteúdo específico, mas em desenvolver no aluno aspectos relacionados à sua motivação, à sua criatividade, à sua socialização, à sua atitude diante de situações problema e à sua atitude diante da matemática como um todo, ou seja, desejamos que o aluno queira aprender, não por ser uma imposição, mas porque isto lhe dá prazer.

São várias as razões que tornam os jogos uma ferramenta didática importantíssima, assim como, são várias as razões que nos levam a acreditar que eles estão intimamente ligados à matemática e, por essas razões, é que optamos por escolher este tema para a realização deste trabalho.

A importância dada aos jogos atualmente, seja como recurso pedagógico, seja como pura diversão, vem crescendo de forma exponencial. Dentre uma enorme quantidade de jogos, há aqueles que possuem princípios e regras ligadas à matemática, e são dois desses jogos, fortemente envolvidos com a matemática, que receberão toda nossa atenção no decorrer deste trabalho, a Torre de Hanói e o Nim.

Daqui por diante o presente trabalho será desenvolvido em quatro capítulos, os quais discorrerão sobre o seguinte:

No capítulo 2, intitulado "Um pouco de História", iniciaremos contando um pouco sobre a relação, ao longo dos séculos, entre jogos e matemática, no qual poderemos observar que alguns dos grandes nomes da matemática tiveram enorme apreço pelos jogos, estudando-os e, em diversos casos, até mesmo criando-os. Além disso, descobriremos que o estudo de alguns jogos culminou em avanços importantes da matemática e que, por mais incrível que possa parecer, há ramos desta que se originaram a partir do estudo e análise de jogos. Logo após, nos restringiremos aos jogos que são o foco de nosso trabalho, fornecendo um breve histórico dos jogos Torre de Hanói e Nim.

No Capítulo 3, intitulado "A Matemática por trás dos Jogos", a Torre de Hanói e o Nim serão estudados do ponto de vista matemático e, através de uma cuidadosa análise, chegaremos à obtenção das estratégias relacionadas a esses dois jogos. No caso da Torre de Hanói estaremos interessados, inicialmente, em determinar a estratégia de resolução perfeita, o que será feito através de raciocínio recursivo, e, em seguida, determinar uma fórmula que nos permita calcular o número mínimo de movimentos em função apenas do número de peças no jogo, o que será feito a partir da construção de uma conjectura, obtida da análise do número de movimentos dos casos com uma pequena quantidade de peças, a qual validaremos através da indução matemática. No caso do Nim, selecionamos três de suas inúmeras variantes, onde as duas primeiras podem ter suas estratégias relacionadas à Divisão Euclidiana, já a terceira variante, notadamente, a que oferece um grau de complexidade mais elevado, faz com que se torne necessário abordar conceitos relacionados à aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração.

O capítulo 4, intitulado "Propostas de uso didático de Jogos Matemáticos", dedica-se, num primeiro momento, a expor de forma bastante breve as vantagens e desvantagens do uso de jogos, bem como a apresentar uma metodologia de aplicação a ser utilizada, para, em seguida, iniciarmos uma abordagem de questões práticas referentes à aplicação desses dois jogos em sala de aula, descrevendo suas respectivas regras, os materiais a serem utilizados, os conteúdos e/ou competências que se pretende desenvolver nos alunos e oferecendo algumas sugestões de aplicação.

Por fim, o capítulo 5 é destinado à apresentação de nossas considerações finais e, a fazer uma breve análise do que foi apresentado ao longo do trabalho.

Capítulo 2

Um pouco de História

Neste capítulo vamos procurar, de forma breve, percorrer alguns momentos históricos que possam comprovar que existe uma estreita relação entre matemática e jogos, mencionando grandes nomes da matemática que dedicaram muito de seus esforços no estudo ou mesmo na criação de jogos. Conhecer alguns dos avanços da matemática, e até mesmo novos ramos desta, que foram motivados pelo estudo dos jogos. Além disso, traremos um breve histórico dos jogos Torre de Hanói e Nim, que são o nosso foco neste trabalho.

2.1 Jogos ao longo da História

Desde a Antiguidade, o Homem, fazendo uso de pedras e outros materiais, se debruçava sobre jogos numéricos simples e padrões geométricos.

> *O jogo mais antigo para o qual se conhecem regras é o jogo de Ur, que floresceu na Mesopotâmia. Descoberto nos anos 20 do século passado, tratava-se de uma corrida entre dois oponentes. (...) O primeiro a concluir o seu percurso seria o vencedor.(Neto e Silva (2004))*

O "Jogo de Ur"era constituído por um tabuleiro no qual havia dois caminhos, cada um separado do outro, e em que cada jogador possuía uma certa quantidade de peças. Nesse jogo eram utilizados dados tetraédricos, os quais, acredita-se, definiam quantas casas deveriam ser percorridas no tabuleiro.

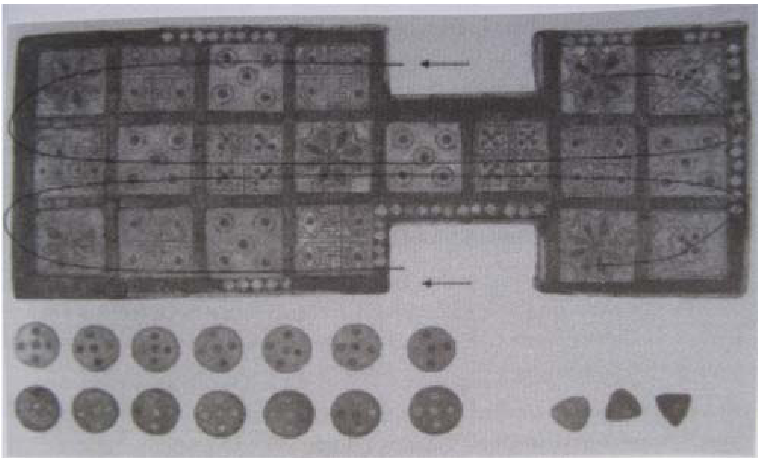

Figura 2.1: Jogo de Ur

Segundo Santos et al. (2007b), Arquimedes (aproximadamente 287 - 212 a.C.), considerado unanimemente o maior gênio científico da Antiguidade, estudou um *puzzle* geométrico chamado *Stomachion*, que se tratava de um jogo semelhante ao, bastante conhecido, *Tangram*.

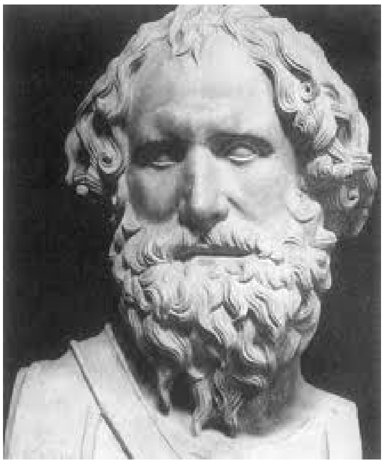

Figura 2.2: Arquimedes de Siracusa

O *Stomachion* é formado por catorze figuras geométricas planas, sendo onze triângulos (dois pares destes idênticos), dois quadriláteros e um pentágono, que podem, se adequadamente dispostos, formar um quadrado.

Muito provavelmente Arquimedes não foi o inventor do *Stomachion*, mas pesquisadores acreditam que ele o tenha estudado no intuito de descobrir de quantas maneiras distintas se poderiam unir as 14 peças do jogo de modo a obter um quadrado.

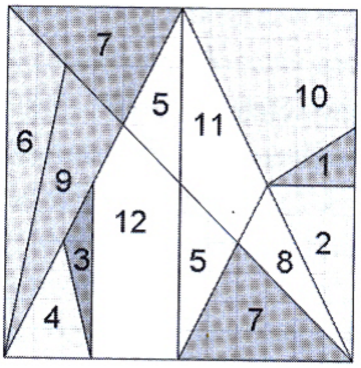

Figura 2.3: Stomachion

Não se sabe se Arquimedes chegou à resposta correta deste problema que para ser solucionado necessita da utilização de uma área da matemática chamada Combinatória. De acordo com Santos et al. (2007b), hoje se sabe que é possível formar 17152 quadrados (ai estão incluídas as permutações de peças idênticas, além de rotações e reflexões).

Durante a Idade Média, as classes cultas faziam uso de diversos jogos, dentre os quais podemos citar o "Jogo do Moinho"que pertence a um grupo de jogos conhecidos como "jogos de alinhamento". Sobre o "Jogo do Moinho", Neto e Silva (2004), dizem o seguinte:

> *Conhecido desde o Egito antigo, só muito recentemente (1996), e através de uma análise computacional que envolveu o estudo de perto de 10 bilhões de posições, se revelou empatado se os jogadores forem perfeitos...*

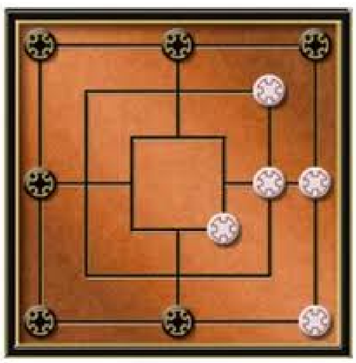

Figura 2.4: Jogo do Moinho

De acordo com Quintas (2009), na Idade Média alguns jogos, que possuíam regras complexas e conceitos difíceis, tiveram sua circulação bastante restrita aos meios "eruditos da sociedade", entre tais jogos pode-se citar o *Rithmomachia*, também chamado de "Jogo dos Filósofos". Tratava-se de um jogo de tabuleiro de caráter pedagógico, desenvolvido para o ensino da Aritmética e de certas relações numéricas, como as progressões.

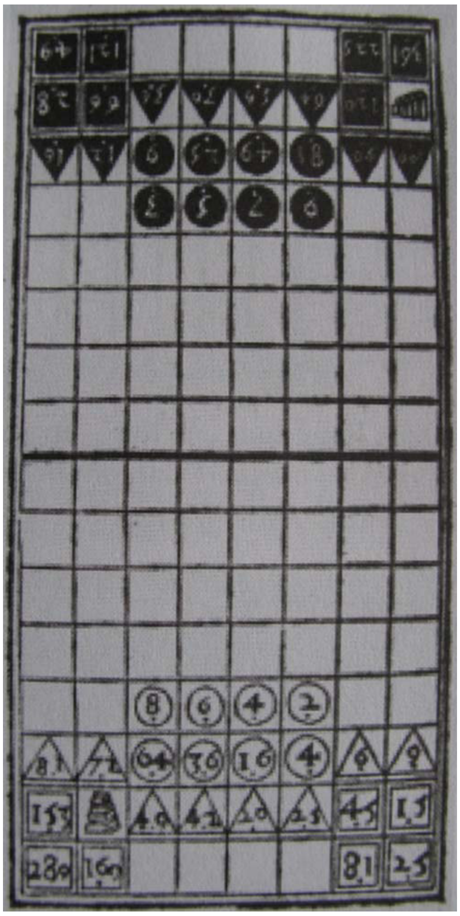

Figura 2.5: Rithmomachia (Jogo dos Filósofos)

No ano de 1494, na cidade de Veneza na Itália, foi publicada uma obra de autoria do monge franciscano e célebre matemático italiano Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 - 1517). Nessa obra, intitulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportinalità* (coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), segundo Santos et al. (2007d), muitos conceitos matemáticos aparecem impressos pela primeira vez, incluindo também, tópicos de matemática recreativa como o problema do jogo interrompido.

Figura 2.6: Luca Bartolomeo de Pacioli

O problema do jogo interrompido, também conhecido como "Problema dos Pontos", pode ser definido do seguinte modo:

> *Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo da "balla". Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? (Quintas (2009))*

O "Problema dos Pontos"é de grande importância para o estudo das probabilidades. Segundo Bernstein (1997), em Desafio aos Deuses:

> *A resolução de como dividir as apostas em um jogo interrompido marcou o início da análise sistemática da probabilidade - a medição de nossa confiança em que algo vai acontecer. Ele nos leva ao limiar da quantificação do risco.*

Segundo Santos et al. (2007d), Luca de Pacioli também é autor de dois livros nunca publicados que só existem em manuscrito, o *De Ludo Scacchorum*, que tratava do jogo de Xadrez, cujo manuscrito foi encontrado recentemente, e um livro de Matemática Recreativa, de nome *De Viribus Quantitatis*.

Segundo Quintas (2009), Girolamo Cardano (1501 - 1576), cientista, matemático, filósofo e médico italiano, *era um apaixonado por jogos de azar*. Ele é autor de *Liber de Ludo Aleae* (O Livro dos Jogos de Azar - publicado apenas em 1663), que versava sobre jogos de azar e no qual ele inicia um estudo simplificado, porém de enorme valor, da teoria da probabilidade.

Figura 2.7: Girolamo Cardano

O enorme interesse de Cardano pelos jogos de azar levou-o a ser, por muitos, considerado o "Pai da Teoria da Probabilidade".

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão foi um grande produtor de atividades lúdicas de valor intelectual. É de autoria de Leibniz a seguinte frase:

O homem atinge o máximo do engenho ao inventar jogos. (Santos et al. (2007a)).

Figura 2.8: Gottfried Wilhelm von Leibniz

À Leibniz é atribuído o desenvolvimento do sistema de numeração binário, este muito importante na resolução de diversos problemas em Teoria dos Jogos, como os jogos do tipo *Nim*.

O jogo de xadrez foi estudado por um dos maiores matemáticos da história, o suíço Leonhard Paul Euler (1707 - 1783).

Figura 2.9: Leonhard Paul Euler

A questão estudada por Euler consistia na procura de um caminho Hamiltoniano num tabuleiro de xadrez para o cavalo (caminho que passa uma, e somente uma vez, por cada uma das casas do tabuleiro).

Figura 2.10: Jogo de Xadrez

A questão colocada por Euler foi a de saber se dado um tabuleiro $N \times N$ é possível, ou não, a um cavalo, partindo de uma casa 1, passar uma só vez por cada uma das restantes $N^2 - 1$ casas. Esta tem sido uma questão bem estudada, com algumas publicações científicas recentes, e algumas variações do enunciado. Sabe-se que para tabuleiros de dimensão $N \geq 5$ existem sempre muitas soluções. (Torres (2002)).

A seguir podemos ver uma solução possível para este problema, que é conhecido como "Cavaleiro de Euler", em um tabuleiro tradicional 8 x 8:

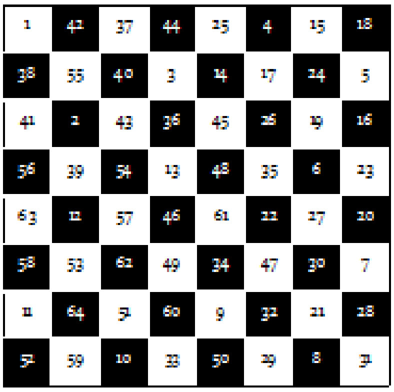

Figura 2.11: Solução para "Cavaleiro de Euler"

Conta-se que Euler foi desafiado a resolver o problema a seguir:

Suponhamos que seis regimentos fornecem seis oficiais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patente nem de regimento?(Santos et al. (2007f))

Ainda de acordo com Santos et al. (2007f), na tentativa de solucionar o problema, Euler desenvolveu o conceito de "Quadrado Latino", que é considerado um antepassado do *Sudoku*. Trata-se de um arranjo quadrangular de n^2 objetos, onde cada linha e cada coluna deve conter cada um dos n tipos diferentes de objetos, como podemos ver a seguir:

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Figura 2.12: Quadrado Latino 3x3

A	C	D	B
D	A	B	C
C	B	A	D
B	D	C	A

Figura 2.13: Quadrado Latino 4x4

O problema proposto a Euler, segundo Santos et al. (2007f), não tem solução, mas conduziu à criação de conceitos matemáticos importantes.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o "Príncipe dos Matemáticos", também demonstrava, segundo Quintas (2009), enorme interesse por jogos, sobretudo de cartas, e fazia o tratamento estatístico em relação às jogadas efetuadas.

Figura 2.14: Johann Carl Friedrich Gauss

De acordo com Zeni (2007), Gauss estudou ainda o chamado "Problema das 8 Rainhas", cuja formulação era a seguinte:

O problema das oito rainhas consiste em dispor 8 rainhas em um tabuleiro 8x8 de tal modo que elas não se ataquem.(Zeni (2007))

O objetivo é dispor as oito rainhas de modo que elas não compartilhem linhas, colunas e nem diagonais. A figura a seguir representa uma das 92 soluções possíveis para o "Problema das oito Rainhas".

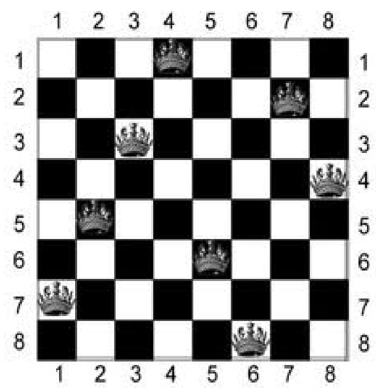

Figura 2.15: Uma solução possível para o "Problema das 8 Rainhas"

William Rowan Hamilton (1805 - 1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês. Embora Hamilton tenha dado contribuições importantes à matemática e à física, segundo Quintas (2009), diz-se que a única publicação pela qual recebeu diretamente dinheiro foi um jogo matemático chamado "Viagem pelo Mundo".

Figura 2.16: William Rowan Hamilton

O jogo "Viagem pelo Mundo"consistia em passar por todos os vértices de um dodecaedro regular, vértices esses que representavam cidades e em que se podia apenas passar uma vez por cada vértice, circulando pelas arestas e voltando ao ponto de partida. Por praticidade, o jogo original passou a ser comercializado em sua versão planificada.

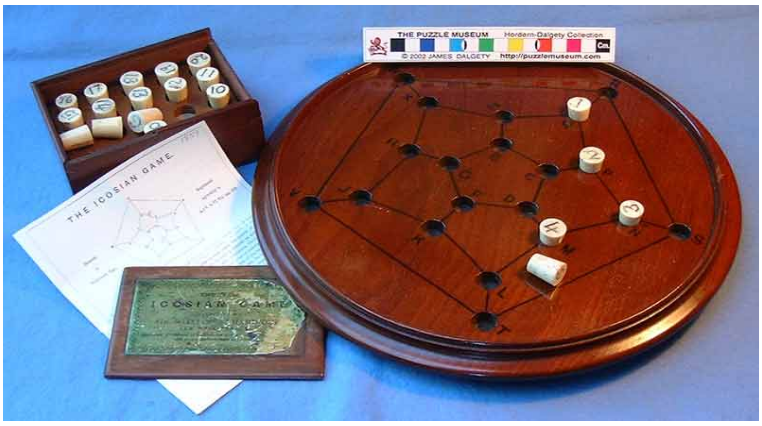

Figura 2.17: Versão planificada do jogo "Viagem pelo Mundo"

Este jogo estava relacionado com os circuitos ou ciclos hamiltonianos (caminho em um grafo [1] não dirigido [2] ou não orientado que visita cada vértice apenas uma única vez, retornando ao vértice inicial), conceito hoje básico da Teoria dos Grafos (ramo da matemática que teve seu estudo iniciado por Euler).

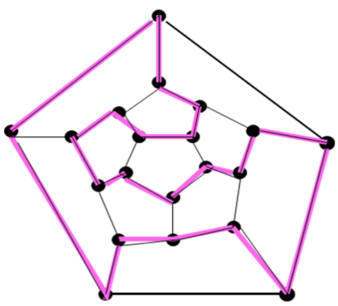

Figura 2.18: Circuito Hamiltoniano associado ao jogo "Viagem pelo Mundo"

[1]Um grafo é uma estrutura definida por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não-vazio de elementos denominados vértices, e E é um conjunto de elementos denominados arestas. Uma aresta é representada por (v_i, v_j), onde v_i, $v_j \in V$.

[2]Um grafo $G = (V, E)$ é chamado de grafo não dirigido se $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$, onde v_i, $v_j \in V$. Em um grafo não dirigido (v_i, v_j) e (v_j, v_i) representam a mesma aresta.

John von Neumann (1903-1957), grande matemático húngaro, que deu importantes contribuições, entre outras áreas, à mecânica quântica, à cibernética e à lógica, é considerado o "Pai da Teoria dos Jogos". A partir da parceria entre Neumann e Óscar Morgenstern a Teoria dos Jogos passou a ser aplicada na análise de problemas econômicos.

Figura 2.19: John von Neumann

> *Em 1928, Neumann publicou um artigo sugerindo que a Teoria dos Jogos poderia ter aplicação na Economia, mas não sabia como fazê-la. Só quando conheceu Morgenstern em Princeton, 1938, o elo com a Economia pode ser feito. Escreveram então "Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico"publicado em 1944... (Costa (2007)).*

As ideias de Neumann foram desenvolvidas por outro grande matemático do século XX, John Forbes Nash Jr, nascido nos Estados Unidos em 1928.

Figura 2.20: John Forbes Nash Jr.

> *John Forbes Nash Jr, matemático americano homenageado no cinema e que ganhou em 1994 o prêmio Nobel em Economia, complementa a teoria realizando trabalhos que a tornaram pertinente a situações em que um lado pode vencer sem precisar, necessariamente, derrotar o adversário. (Costa (2007)).*

Em 1937 nasceu John Horton Conway, matemático inglês que no final da década de 60 alcançou fama mundial no meio matemático por seus trabalhos em Teoria de Grupos.

Figura 2.21: John Horton Conway

Conway também fora influenciado pelas ideias de John von Neumann e, criou um jogo bastante interessante, o "Jogo da Vida". Neste jogo apenas a configuração inicial é definida pelo jogador, depois tudo ocorre de forma automática. Este jogo se desenvolve em tabuleiros semelhantes aos de xadrez, porém, as dimensões desses tabuleiros podem ser arbitrariamente grandes. Cada casa do tabuleiro é chamada de célula e, pode ter apenas dois estados: viva e morta.

De acordo com Santos et al. (2007c)), temos o seguinte:

As gerações sucedem-se segundo as seguintes leis:

1. uma célula viva permanece viva se tiver duas ou três células vizinhas vivas (a vizinhança inclui as células à direita, à esquerda, a de cima e a de baixo bem como as quatro diagonais);

2. uma célula morta ganha vida se tiver três células vizinhas vivas;

3. uma célula viva com menos de dois ou mais de três células vizinhas vivas, morre.

Algumas configurações iniciais para o "Jogo da Vida":

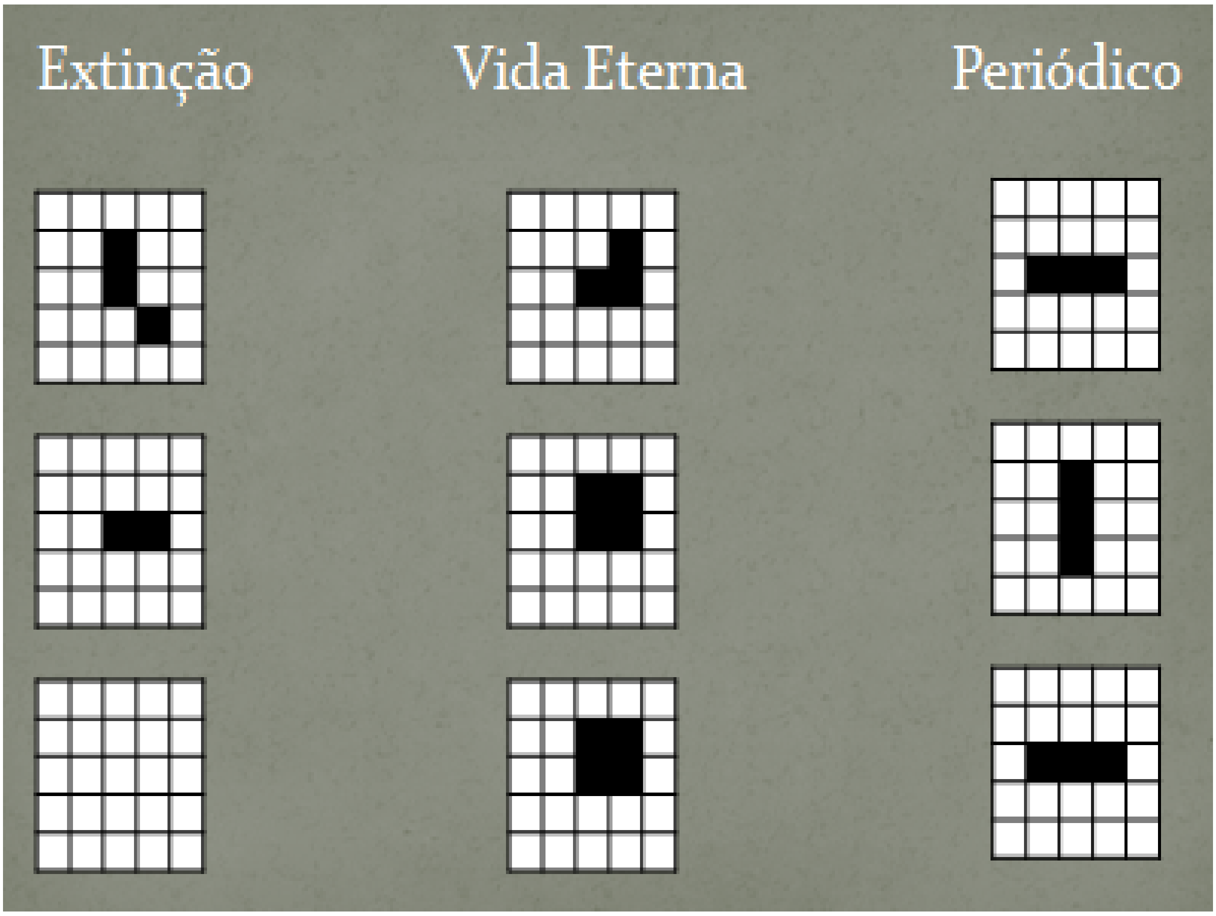

Figura 2.22: Algumas configurações possíveis do "Jogo da Vida"

Ainda sobre o "Jogo da Vida", citamos o seguinte:

> *Este jogo tornou-se mundialmente famoso mercê da coluna de Martin Gardner no Scientific American, em 1970. Em 1971 era já motivo de capa e até lançara uma nova área matemática: os Autómatos Celulares, que são estruturas matemáticas úteis em simulações de processos físicos e biológicos e que, a um nível teórico, podem comportar-se como computadores.(Santos et al. (2007c))*

De acordo com Santos et al. (2007c), Conway criou vários outros jogos e nos anos 1970 deu início à Teoria dos Jogos Combinatórios, que atualmente é uma área da matemática muito estudada.

O exposto até aqui neste Capítulo, nos parece suficiente para gerar a convicção de que a matemática e os jogos estão intimamente ligados, pois, constatamos que os jogos se relacionam com diversas áreas da matemática, despertando o interesse de grandes nomes desta ciência e contribuindo para o seu desenvolvimento, da mesma maneira, a matemática contribui para a compreensão e o desenvolvimento dos jogos. Nesse sentido, compartilhamos das seguintes ideias:

> *O interesse dos matemáticos por muitos jogos, deve-se em parte aos conteúdos matemáticos que fazem parte de alguns deles e também da matemática poder possuir características lúdicas similares aos jogos. A descoberta e utilização de jogos contribuiu e contribui para o desenvolvimento da matemática, quer no aspecto científico, quer pedagógico, sendo também verdadeiro o fenômeno inverso. (Quintas (2009)).*

Por fim, diríamos até que, em certos casos, matemática e jogos se confundem, como se fossem faces de uma mesma moeda e, para corroborar essa ideia, encerramos com uma citação retirada de Santos et al. (2007c), que diz:

> *Costumava sentir-me culpado por passar dias inteiros ocupado com jogos, quando era suposto fazer Matemática. Mas depois, quando descobri os números surreais, compreendi que jogar jogos É Matemática. John Horton Conway*

2.2 Breve Histórico da Torre de Hanói

O jogo Torre de Hanói, sobre o qual nos aprofundaremos mais adiante, é uma criação do matemático francês François Edouard Anatole Lucas (1842 - 1891).

Figura 2.23: François Edouard Anatole Lucas

Nesse jogo é dada uma torre com oito discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três hastes verticais. O objetivo é transferir a torre inteira para uma das outras hastes, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

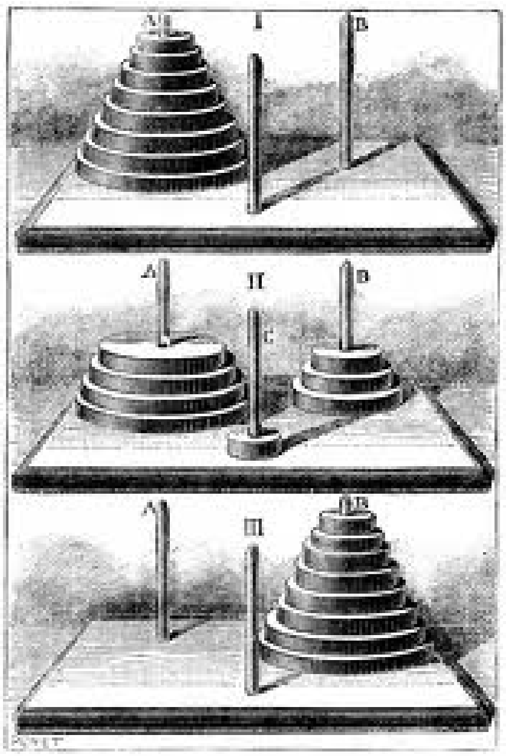

Figura 2.24: As Torres de Hanói

Este jogo, também chamado de torre do bramanismo ou quebra-cabeça do fim do mundo, foi inventado por Lucas em 1883 e, segundo Watanabe (2004), incluído no terceiro volume da sua obra *Récréations Mathématiques*, publicada também em 1883 . Neste mesmo ano o jogo passou a ser comercializado como brinquedo com a seguinte capa:

Figura 2.25: Capa do Jogo Torre de Hanói em 1883

De acordo com Santos et al. (2007e), os dizeres na capa do jogo eram os seguintes:

> *"As Torres de Hanoï - Um verdadeiro puzzle dos Anamitas Jogo trazido de Tonkin pelo Professor N.Claus (de Siam) Mandarim do colégio de Li-Sou-Stian"*

Observação:

O professor N. Claus (de Siam), mencionado na capa do jogo, na verdade, era um pseudônimo de Edouard Lucas, criado por ele próprio, onde podemos notar que Claus é um anagrama de Lucas.

A razão pela qual a Torre de Hanói é também chamada de torre do bramanismo e quebra-cabeça do fim do mundo reside no fato de Lucas ter anexado ao jogo uma história de uma antiga lenda hindu que dizia o seguinte:

> *No templo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. Dia e noite os sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o debaixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir. (Machado (1992))*

Mesmo se tratando apenas de uma história, pode ser interessante utilizá-la como motivação e se fazer a pergunta: Então, quando o mundo irá acabar? Este questionamento foi formulado e respondido pelo próprio Edouard Lucas, também, no terceiro volume da sua obra *Récréations Mathématiques* e, em breve, também o responderemos.

A Torre de Hanói possui regras muito simples e aborda vários conceitos matemáticos, desde o simples reconhecimento de formas, ordem crescente e decrescente e contagem de movimentos, passando pelo raciocínio lógico e formulação de estratégias e chegando até o raciocínio indutivo e a relações de recorrência.

2.3 Breve Histórico do Nim

Os jogos do tipo *Nim*, possuem inúmeras variantes, tantas que sequer seria possível mencionar todas. Esta família de jogos, que se acredita serem de origem chinesa, são praticados há séculos, sendo que o registro escrito mais antigo que se tem conhecimento é de autoria de Luca Bartolomeu de Pacioli (1445 - 1517) em *De Viribus Quantitatis* (obra que não chegou a ser publicada, dedicada à matemática recreativa e que se pode traduzir por "O Poder dos Números"), onde descreve o seguinte:

> *Um jogo entre dois adversários consiste em acrescentar, à vez, um número de feijões, de 1 a 6, a uma pilha inicialmente vazia. Ganha quem colocar o total em 30 feijões.(Quintas (2009)).*

O próprio nome *Nim*, não se sabe ao certo onde se originou, havendo suposições de que poderia ser de origem chinesa ou de origem inglesa, tendo em vista que *Nim*, em inglês arcaico, significa apanhar e que *NIM* de ponta cabeça é *WIN* (vencer).

Em 1902, pela primeira vez, foi feita uma análise matemática a respeito do Nim. O matemático Charles L. Bouton, da Universidade de Harvard, desenvolveu uma teoria para obtenção da estratégia vitoriosa (estratégia máxima) onde emprega conceitos matemáticos relacionados à aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração.

O Nim está relacionado à Teoria dos Jogos Matemáticos, campo de investigação da Matemática Discreta, que vem se desenvolvendo, principalmente, nos últimos 50 anos, daí provém o interesse dos matemáticos pelo Nim.

Na atualidade o Nim é bastante popular, sendo utilizado em testes de seleção para empresas, tendo em vista a necessidade de se empregar o raciocínio lógico-dedutivo, ou como exercício para programadores, já que sua estratégia máxima é de fácil programação computacional.

Capítulo 3

A Matemática por trás dos Jogos

Neste Capítulo, vamos apresentar o desenvolvimento matemático para obtenção das estratégias relacionadas aos jogos Torre de Hanói e Nim, evidenciando assim a riqueza matemática que estes jogos guardam e, também oferecendo um exemplo prático da estreita relação entre a Matemática e os Jogos.

3.1 Torre de Hanói

Esta sessão será dedicada à Torre de Hanói. Aqui chegaremos à estratégia de resolução perfeita e à fórmula que nos permite calcular o número mínimo de movimentos para um número n qualquer de peças no jogo.

3.1.1 Conhecendo o jogo

O jogo Torre de Hanói consiste de uma base na qual são fixadas três hastes verticais idênticas (normalmente de formato cilíndrico) e um número n qualquer de peças de tamanhos diferentes (o jogo original continha 8 peças circulares), as quais possuem um orifício no centro, de modo que possam ser inseridas nas hastes.

As regras do jogo:

- Todas as peças são, inicialmente, colocadas em uma das hastes, sendo que a maior delas fica imediatamente acima da base e as demais são colocadas sobre a maior em ordem decrescente de tamanho, ou seja, as peças menores sempre ficam em cima das maiores formando uma torre;

- O jogador deverá transferir toda a torre, da haste inicial, para uma das outras hastes, de modo que ao final, a torre permaneça com as peças maiores em baixo das menores;
- Ao realizar esta tarefa, o jogador deverá mover apenas uma única peça por vez;
- Em momento algum, uma peça poderá ser colocada sobre outra que seja menor que ela, ou seja, não é permitido formar torres invertidas.

Figura 3.1: Jogo Torre de Hanói

Podemos observar que as regras acima descritas são as mesmas que aquelas contidas na história anexada ao jogo original por Lucas, com a única diferença que as anexadas por Lucas são, de certo modo, mais intrigantes e despertam a curiosidade, talvez tenha sido exatamente este o seu objetivo ao incluí-las.

3.1.2 Estudando os casos mais simples

Nosso objetivo agora é determinar uma estratégia para a resolução da Torre de Hanói com um número n qualquer de peças, assim como, calcular o número mínimo de movimentos que se deve realizar para chegar à solução do jogo.

Para determinar uma estratégia de resolução, que se aplique a um número qualquer de peças no jogo, e calcular o número mínimo de movimentos, precisamos compreender muito bem a dinâmica do jogo e buscar padrões e regularidades que auxiliem em nossa tarefa. Um bom ponto de partida é analisar os casos mais simples do jogo, ou seja, os casos em que o número n de peças envolvidas é bastante pequeno.

De agora em diante designaremos as hastes nas quais as peças são inseridas por A, B e C, sendo, respectivamente, a haste inicial (haste na qual as peças são inicialmente dispostas), a haste auxiliar (haste utilizada para auxiliar na movimentação das peças) e a haste final (haste para a qual se deve transferir todas as peças da torre), as peças serão chamadas, da menor para a maior, de p_1, p_2, p_3, ..., p_n e o número total de movimentos necessários para mover totalmente uma torre de n peças da haste A para a haste C será denotado por T_n.

Caso 1: n = 1, ou seja, apenas uma peça.

É muito fácil perceber que, se houver apenas uma peça, o jogo é resolvido com um único movimento. Basta mover a peça em questão, p_1, da haste A para a haste C.

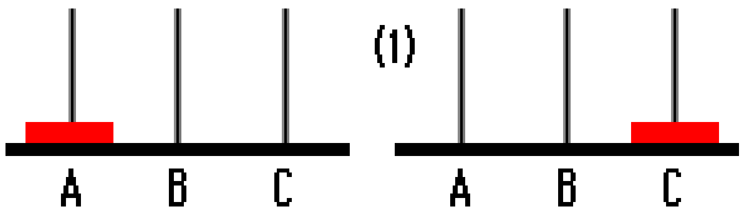

Figura 3.2: Resolução da Torre de Hanói com apenas uma peça

A peça p_1 realiza um único movimento, logo, temos $T_1 = 1$.

Caso 2: n = 2, ou seja, apenas duas peças.

A resolução deste caso é, também, muito simples, pois, basta transferir p_1 de A para B, transferir p_2 de A para C e finalmente transferir p_1 de B para C.

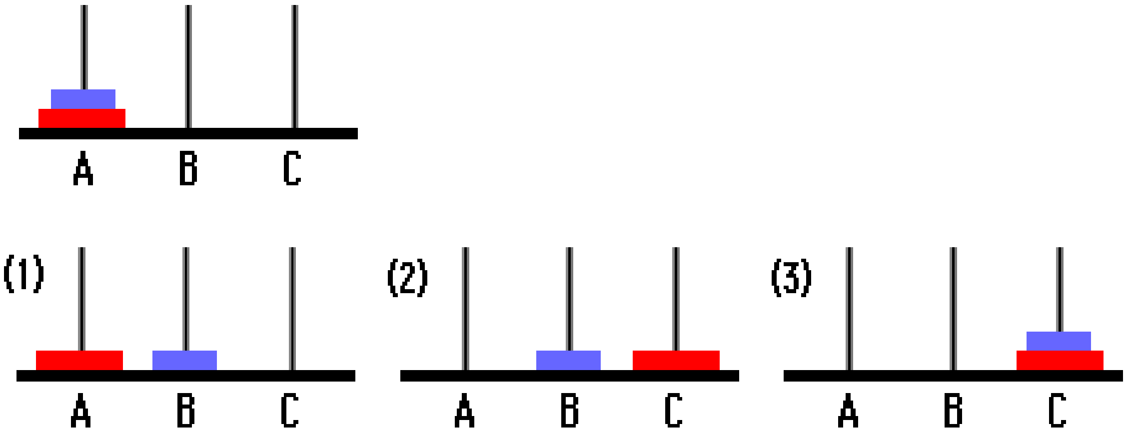

Figura 3.3: Resolução da Torre de Hanói com duas peças

A peça p_2 realiza 1 movimento e a peça p_1 realiza 2 movimentos, logo, $T_2 = 3$.

Caso 3: n = 3, ou seja, joga-se com três peças.

Não é difícil perceber que para transferir a peça p_3 de A para C, primeiro as peças p_1 e p_2 devem ser colocadas na haste B, formando uma "subtorre"de duas peças, para, em seguida, serem transferidas para a haste C onde já se encontrará p_3.

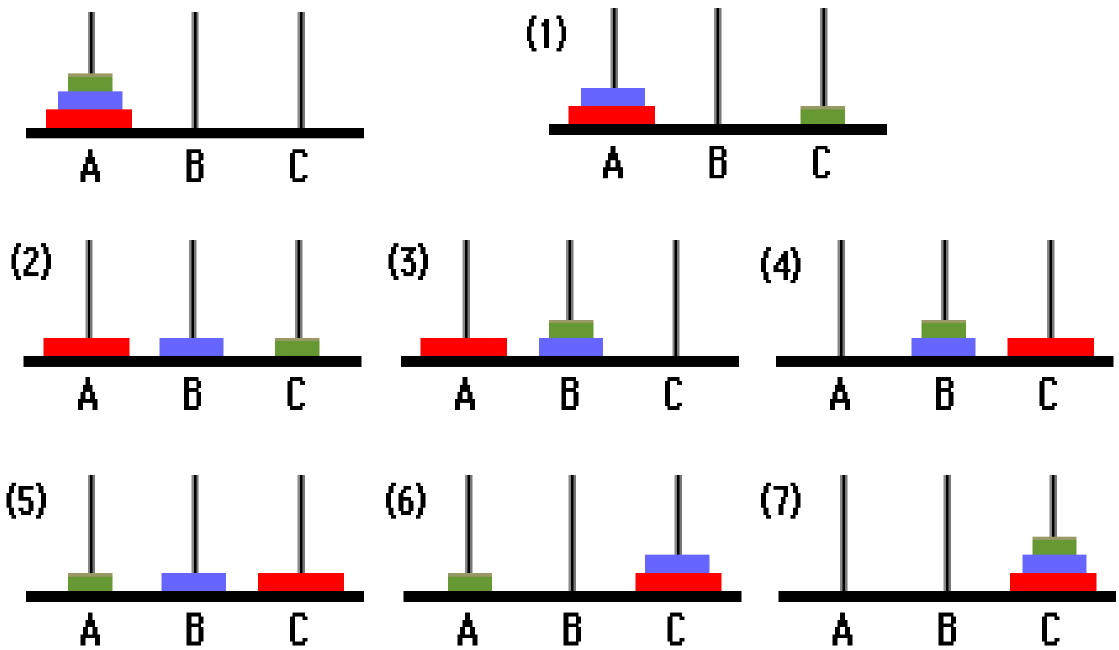

Figura 3.4: Resolução da Torre de Hanói com três peças

A peça p_3 realiza 1 movimento, a peça p_2 realiza 2 movimentos e a peça p_1 realiza 4 movimentos, logo, $T_3 = 7$.

Neste momento já podemos notar algo interessante. Observa-se, com exceção do caso 1 (que podemos dizer que é o caso trivial), que os casos 2 e 3 foram solucionados de modo semelhante, pois, em ambos os casos houve a necessidade de se formar uma "subtorre"antes de transferir a peça maior. Vamos observar mais atentamente:

No caso 2, temos a seguinte configuração inicial:

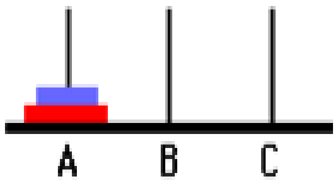

Figura 3.5: Configuração inicial da Torre de Hanói com duas peças

Com uma rápida observação, notamos que só é possível mover a peça p_2 de A para C, se antes a peça p_1 for colocada em B, possibilitando o deslocamento de p_2.

Para mover p_1 de A para B, basta executar um movimento simples, equivalente ao movimento utilizado como solução do caso 1 (com a única diferença que o movimento se processa de A para B e não de A para C), que passaremos a denotar por S_1. Quando p_1 esta em B, podemos dizer que foi formada uma "subtorre"de apenas uma peça e, nesse momento já podemos transferir p_2 de A para C.

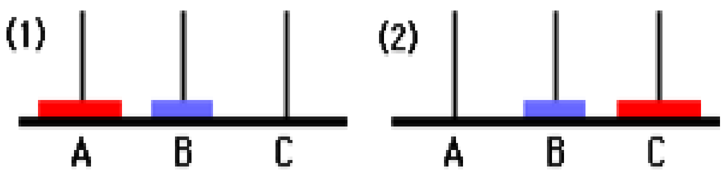

Figura 3.6: Formação da "subtorre"em B e deslocamento de p_2 de A para C

Para concluir a solução do jogo com duas peças, basta transferir a "subtorre", formada por p_1, de B para C, repetindo a solução S_1.

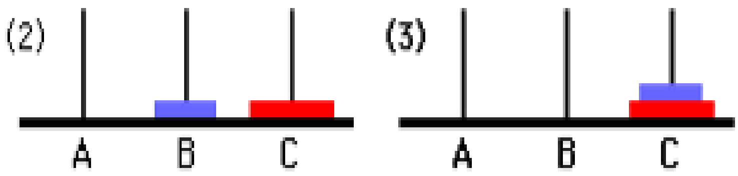

Figura 3.7: Deslocamento da "subtorre"de B para C

Para obter a solução do caso 2, aplicamos a solução S_1, transferimos p_2 de A para C e, por fim, aplicamos novamente a solução S_1.

No caso 3, temos a seguinte configuração inicial:

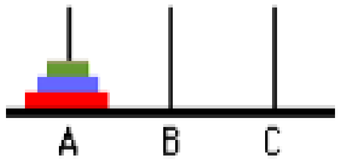

Figura 3.8: Configuração inicial da Torre de Hanói com três peças

É fácil notar que só será possível deslocar p_3 de A para C, se as peças p_1 e p_2 estiverem em B, formando uma "subtorre"de duas peças. Então, antes de solucionar o problema como um todo, devemos solucionar o "subproblema"de deslocar as peças p_1 e p_2 de A para B, mas isto equivale à solução do caso 2 (com a única diferença que o deslocamento será de A para B e não de A para C), o qual já sabemos resolver e, que denotaremos por S_2.

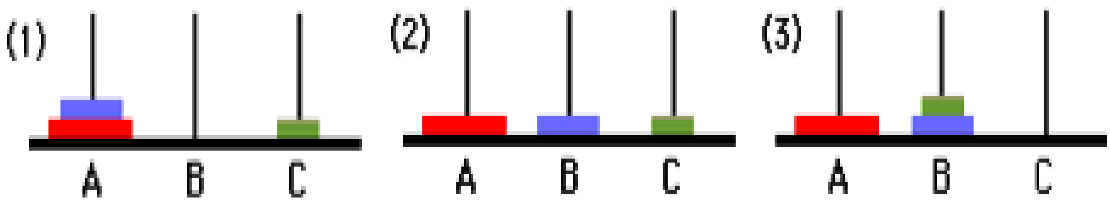

Figura 3.9: Formação da "subtorre"em B através da aplicação da solução S_2

Após a formação da "subtorre"em B, efetuamos o deslocamento de p_3 de A para C.

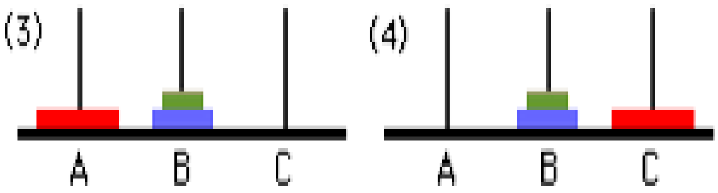

Figura 3.10: Deslocamento de p_3 de A para C

Após transferir a peça p_3 de A para C, novamente, devemos deslocar a "subtorre", formada pelas peças p_1 e p_2, agora de B para C, aplicando para isso, mais uma vez a solução S_2.

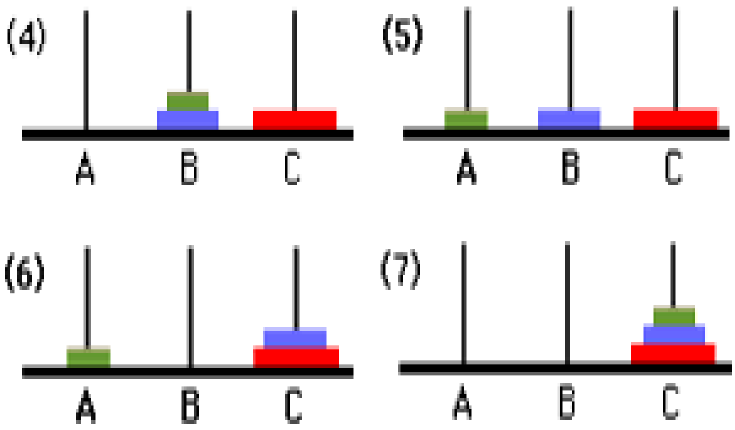

Figura 3.11: Nova aplicação de S_2 para conclusão do jogo

Para obter a solução do caso 3, procedemos de modo totalmente semelhante ao utilizado no caso 2, aplicando inicialmente a solução S_2, em seguida transferindo p_3 de A para C e, por fim, aplicando novamente a solução S_2.

É natural se perguntar o porquê de se analisar estes casos, que são extremamente simples, de uma maneira tão detalhada (ou ainda melhor: por que complicar tanto algo que parece ser tão fácil?). O motivo desta análise detalhada reside no fato de que a ideia de subdividir o problema em casos que já sabemos resolver (com as chamadas "subtorres"), pode ser aplicado a um número qualquer de peças. Vejamos então o caso com quatro peças.

Caso 4: n = 4, ou seja, joga-se com quatro peças

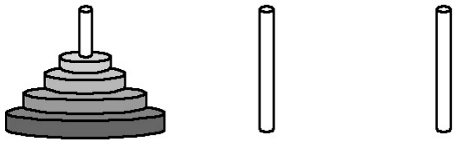

Figura 3.12: Configuração inicial da Torre de Hanói com quatro peças

Podemos notar que para transferir p_4 de A para C precisamos primeiro colocar as demais peças em B, formando uma "subtorre"de três peças, o que pode ser feito aplicando a solução S_3 que já conhecemos.

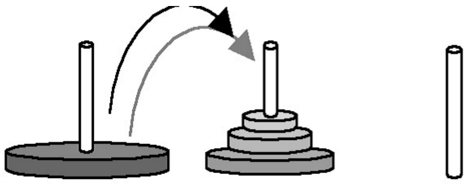

Figura 3.13: Aplicação da solução S_3 para obter uma "subtorre"de três peças em B

Após a 1ª aplicação de S_3, deslocamos p_4 de A para B e, em seguida, aplicamos, novamente, a solução S_3.

Figura 3.14: Deslocamento de p_4 de A para B e nova aplicação da solução S_3

Realmente, a solução do caso 4, S_4, foi obtida procedendo de modo totalmente semelhante ao utilizado nos casos 2 e 3, ou seja, aplicando uma solução já conhecida, no caso S_3, transferindo p_4 de A para C e, por fim, aplicando novamente a solução S_3.

Observa-se ainda que o número de movimentos T_4 é igual a 15. Podemos afirmar que $T_4 = 15$, mesmo sem contar os movimentos (como fizemos nos outros casos), porque a solução S_4 é composta por duas aplicações da solução S_3, que já sabemos possuir 7 movimentos, mais o movimento que leva p_4 de A para C, ou seja, temos:

$$T_4 = T_3 + 1 + T_3 = 2T_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

Resumidamente, a análise destes quatro casos simples, nos leva ao seguinte:

- O caso em que n = 1, que podemos chamar de caso trivial, tem uma solução, denotada por S_1, composta de um único movimento, logo, $T_1 = 1$.
- O caso em que n = 2, tem uma solução, denotada por S_2, composta pela aplicação da solução S_1, seguida pelo movimento da peça maior, p_2, e uma nova aplicação da solução S_1, o que nos leva a seguinte expressão para o número de movimentos:

$$T_2 = T_1 + 1 + T_1 = 2T_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

- O caso em que n = 3, tem uma solução, denotada por S_3, composta pela aplicação da solução S_2, seguida pelo movimento da peça maior, p_3, e uma nova aplicação da solução S_2, o que nos leva a seguinte expressão para o número de movimentos:

$$T_3 = T_2 + 1 + T_2 = 2T_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

- O caso em que n = 4, tem uma solução, denotada por S_4, composta pela aplicação da solução S_3, seguida pelo movimento da peça maior, p_4, e uma nova aplicação da solução S_3, o que nos leva a seguinte expressão para o número de movimentos:

$$T_4 = T_3 + 1 + T_3 = 2T_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

O estudo destes quatro casos, com número bastante reduzido de peças no jogo, já nos permite observar alguns padrões e regularidades, que podem ser utilizados para chegar a conclusões mais abrangentes.

3.1.3 Estudando o caso geral

Na sessão anterior, analisamos o jogo Torre de Hanói com uma, duas, três e quatro peças. Para cada um dos quatro casos determinamos uma solução possível e seus respectivos números de movimentos. Além disso, criamos uma estratégia de resolução que faz uso de soluções mais simples (com menor número de peças) para resolver os casos um pouco mais complexos (com maior número de peças).

Com base no que foi descrito na sessão anterior, teremos como objetivo desta sessão responder as três perguntas seguintes:

- A estratégia criada para resolver os casos mais simples, pode ser aplicada a valores maiores ou mesmo a um valor n qualquer de peças?
- A solução que tal estratégia determina é, de fato, a que utiliza o menor número possível de movimentos?
- Como determinar o número mínimo de movimentos para um número n qualquer de peças, sem precisar contar cada um deles e sem conhecer a solução para $n-1$ peças?

Respondendo a 1ª pergunta:

Para responder a primeira pergunta, suponhamos uma torre com um número n qualquer de peças e, suponhamos ainda, que já tenhamos resolvido o caso com uma peça a menos, ou seja, nós sabemos resolver o caso com $n-1$ peças.

Nosso objetivo é determinar uma solução para o jogo, que denotaremos por S_n, a partir da solução já conhecida, S_{n-1}.

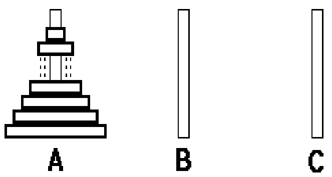

Figura 3.15: Configuração inicial da Torre de Hanói com n peças

Da mesma forma que nos casos mais simples, vistos anteriormente, é fácil perceber que só é possível transferir a peça maior, p_n, da haste inicial, A, para a haste final, C, se as demais peças, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, estiverem na haste auxiliar, B, formando uma "subtorre"de $n-1$ peças.

Como já sabemos resolver o caso com $n-1$ peças, ou seja, conhecemos a solução S_{n-1}, o que temos a fazer é aplicar a solução S_{n-1} (com a única diferença que o deslocamento se processará de A para B e não de A para C), formando uma "subtorre"na haste B, para, em seguida, transferir p_n de A para C.

Figura 3.16: Aplicação da solução S_{n-1} e deslocamento de p_n de A para C

Após transferir p_n de A para C, basta aplicar, novamente, a solução S_{n-1} para deslocar a "subtorre"de B para C.

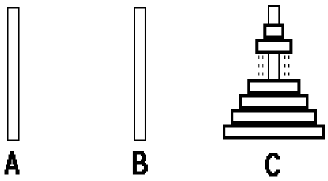

Figura 3.17: Nova aplicação da solução S_{n-1} deslocando a "subtorre"de B para C

Mostramos assim, que a solução S_n é obtida através da aplicação da solução S_{n-1}, formando uma "subtorre"em B, seguida do deslocamento de p_n de A para C e de uma nova aplicação de S_{n-1}, agora, deslocando a "subtorre"de B para C.

Observação:

E se não soubéssemos resolver o caso com $n-1$ peças, ou seja, se não conhecêssemos a solução S_{n-1}?

Essa é a pergunta que poderia ser feita pelo leitor. Para respondê-la, lembremos que, ao estudarmos os casos mais simples, a solução para o caso com $n=4$ foi obtida a partir do caso com $n=3$ e vimos que o caso com $n=3$ poderia ter sido obtido a partir do caso com $n=2$ e este a partir do caso com $n=1$, da mesma forma poderíamos obter a solução para o caso com 5 peças a partir da solução do caso com 4 peças (que já se conhece), a solução para 6 peças a partir do de 5 peças e assim por diante, ou seja, basta repetir este processo para determinar a solução para qualquer número de peças.

Pelo exposto acima, percebemos que a solução S_n é obtida através de um raciocínio recursivo, ou seja, o problema como um todo é reduzido, a cada etapa, em subproblemas similares cada vez menores e, portanto, mais simples de se resolver.

Concluímos que a resposta para a primeira das três perguntas é SIM, podemos resolver o jogo Torre de Hanói, com um número n qualquer de peças, utilizando a estratégia formulada para os casos mais simples. Além disso, agora sabemos que tal estratégia se baseia em um raciocínio recursivo.

Respondendo a 2ª pergunta:

Será que, realmente, a estratégia de resolução que estamos utilizando, é a que resolve o jogo com o menor número de movimentos possível?

Para responder essa segunda pergunta, primeiramente, observemos que, de acordo com a estratégia que desenvolvemos, o número de movimentos necessários para solucionar um jogo com n peças, esta diretamente ligado ao número de movimentos necessários para solucionar o jogo com $n-1$ peças.

Denotaremos, daqui em diante, o número mínimo de movimentos necessários para solucionar um jogo com n peças por M_n.

De fato, de acordo com nossa estratégia, para resolver um jogo com n peças, precisamos inicialmente mover uma "subtorre"com $n-1$ peças da haste A para a haste B, o que pode feito com M_{n-1} movimentos, em seguida, deslocamos a maior peça, p_n, de A para C, o que demanda mais 1 movimento e, por fim, transferimos a "subtorre"com $n-1$ peças de B para C, novamente com M_{n-1} movimentos. Então, o número de movimentos que utilizamos para chegar à solução é:

$$M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1$$

Não temos certeza se este é o número mínimo de movimentos possível para o jogo com n peças, então, tudo que podemos afirmar até o momento é que:

$$M_n \leq M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1 \tag{3.1}$$

A questão neste instante é a seguinte:

Será possível solucionar o jogo em um número ainda menor de movimentos?

Veremos que a resposta é NÃO. Para isso analisemos os seguintes pontos:

- Para mover a peça maior, p_n, da haste A para a haste C, é necessário que todas as demais peças, p_1, p_2,..., p_{n-1}, estejam na haste B (se estivessem em A, p_n não poderia sair, pois haveria outras peças sobre ela, e se estivessem em C, p_n não poderia entrar, pois não pode ficar sobre peças menores que ela própria), formando uma "subtorre"de $n-1$ peças;
- O número mínimo de movimentos para transferir uma torre de $n-1$ peças de A para B é denotado por M_{n-1};
- Para mover p_n de A para C é necessário 1 movimento;
- Por fim, é necessário mover a "subtorre"que se encontra em B para C e, sabemos que, para mover uma torre de $n-1$ peças é necessário fazer no mínimo M_{n-1} movimentos.

Pelo exposto acima, concluímos que o número de movimentos é no mínimo:

$$M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1$$

Portanto, temos:

$$M_n \geq M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1 \tag{3.2}$$

Desta maneira, de (3.1) e (3.2), temos:

$$M_n = 2M_{n-1} + 1 \tag{3.3}$$

Podemos agora, afirmar que a estratégia que utilizamos, de fato, soluciona o jogo com o menor número de movimentos possível, respondendo assim, à segunda pergunta.

Respondendo a 3ª pergunta:

Como calcular o número mínimo de movimentos (para n peças) sem precisar contá-los e sem conhecer a solução anterior (para $n-1$ peças)?

Para responder esta pergunta, partimos do resultado que obtemos acima, ou seja, partimos da expressão (3.3), que é chamada de equação de recorrência.

Uma equação de recorrência possibilita calcular valores desejados a partir do conhecimento de valores anteriores, em nosso caso, sabemos que, com uma peça o jogo é resolvido com apenas um movimento, ou seja, $M_1 = 1$. A partir do valor de M_1 e utilizando a equação de recorrência, construímos a seguinte tabela 3.1:

Quantidade de peças	Equações de Recorrência	Número Mínimo de Movimentos
$n = 1$	$M_1 = 1$	$M_1 = 1$
$n = 2$	$M_2 = 2M_1 + 1 = 2 \times 1 + 1$	$M_2 = 3$
$n = 3$	$M_3 = 2M_2 + 1 = 2 \times 3 + 1$	$M_3 = 7$
$n = 4$	$M_4 = 2M_3 + 1 = 2 \times 7 + 1$	$M_4 = 15$
$n = 5$	$M_5 = 2M_4 + 1 = 2 \times 15 + 1$	$M_5 = 31$
$n = 6$	$M_6 = 2M_5 + 1 = 2 \times 31 + 1$	$M_6 = 63$
$n = 7$	$M_7 = 2M_6 + 1 = 2 \times 63 + 1$	$M_7 = 127$
$n = 8$	$M_8 = 2M_7 + 1 = 2 \times 127 + 1$	$M_8 = 255$
$n = 9$	$M_9 = 2M_8 + 1 = 2 \times 255 + 1$	$M_9 = 511$
$n = 10$	$M_{10} = 2M_9 + 1 = 2 \times 511 + 1$	$M_{10} = 1023$

Tabela 3.1: Número Mínimo de Movimentos

Observando o número mínimo de movimentos em cada caso, podemos notar que todos os resultados são potências de dois, diminuídas de uma unidade. Tal observação pode nos levar a formular uma conjectura como vista na tabela 3.2:

Dizemos que $M_n = 2^n - 1$ é uma fórmula fechada, pois, diferente da equação de recorrência, não depende de soluções anteriores.

Quantidade de peças	Números Mínimo de Movimentos	Reorganizando os dados
1	$M_1 = 1$	$M_1 = 2^1 - 1$
2	$M_2 = 3$	$M_2 = 2^2 - 1$
3	$M_3 = 7$	$M_3 = 2^3 - 1$
4	$M_4 = 15$	$M_4 = 2^4 - 1$
5	$M_5 = 31$	$M_5 = 2^5 - 1$
6	$M_6 = 63$	$M_6 = 2^6 - 1$
...	...	...
n	$M_n = 2^n - 1$	$M_n = 2^n - 1$

Tabela 3.2: Fórmula para Obter o Número Mínimo de Movimentos

Aparentemente já temos a resposta para a terceira pergunta, porém, nada nos garante que a fórmula que encontramos é válida para qualquer valor de n, tudo que sabemos é que ela é válida para alguns valores de n, que como podemos ver são ainda bastante pequenos. Precisamos, então, verificar se a fórmula é válida para qualquer valor n natural.

Para provar a validade de nossa fórmula recorreremos à indução (ver A.6).

Inicialmente, façamos três observações:

1. Queremos mostrar que a fórmula $M_n = 2^n - 1$ é, de fato, verdadeira e expressa o número mínimo de movimentos necessários para solucionar a Torre de Hanói com n peças;

2. Sabemos que o número mínimo de movimentos é dado pela equação de recorrência $M_n = 2M_{n-1} + 1$;

3. A partir dos dois primeiros pontos observados, notamos que, mostrar que $M_n = 2^n - 1$ equivale a mostrar que $2M_{n-1} + 1 = 2^n - 1$.

Vamos à prova:

- A fórmula $M_n = 2^n - 1$ é,claramente, válida para n = 1, pois, temos:

$$M_1 = 2^1 - 1 = 1$$

- Suponhamos que a fórmula $M_n = 2^n - 1$ é válida para qualquer natural n (hipótese indutiva)

- Provemos que a fórmula é verdadeira para $n + 1$, ou seja, mostremos que:

$$M_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

A equação de recorrência $M_n = 2M_{n-1} + 1$ nos garante que vale:

$$M_{n+1} = 2M_n + 1 \tag{3.4}$$

Nossa hipótese indutiva é $M_n = 2^n - 1$, logo, de (3.4), temos:

$$M_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 \tag{3.5}$$

Reescrevendo o segundo membro da expressão (3.5), temos:

$$2(2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 2 \times 1 + 1 = 2^{n+1} - 1 \tag{3.6}$$

De (3.4), (3.5) e (3.6), obtemos:

$$M_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

Com isso, concluímos que, de fato, a fórmula $M_n = 2^n - 1$ é verdadeira e, com ela é possível determinar o número mínimo de movimentos para solucionar o jogo Torre de Hanói com uma quantidade qualquer de peças, bastando para isso conhecer o valor de n. Assim, esta respondida a nossa terceira pergunta.

3.1.4 Quando o mundo acabará?

Então, quando o mundo acabará?

Esta foi a pergunta deixada ao fim da sessão que trazia um breve histórico sobre a Torre de Hanói e, a qual prometemos responder.

É claro que não acreditamos que o mundo irá acabar, pelo menos não por enquanto, mas, de acordo com a lenda vinculada ao jogo Torre de Hanói, o fim do mundo chegaria quando os monges do templo de Benares concluíssem o jogo, transferindo os 64 discos de ouro de uma das agulhas de diamante para outra.

A lenda não nos diz quando eles começaram a realizar a tarefa, nem o quão velozes eles são em sua realização, então, façamos nossas próprias estimativas:

Imaginemos que eles são especialistas no jogo e consigam realizar um movimento a cada segundo, uma estimativa bastante otimista (ou pessimista dependendo do ponto de vista);

Como a lenda menciona que a torre de Bhrama existe desde a criação, suponhamos (claro que por absurdo) que eles realizam a tarefa desde o surgimento da Terra, ou seja, a aproximadamente 5 bilhões de anos.

Com estas estimativas fica difícil imaginar que eles ainda não tenham terminado o jogo, então vejamos quanto tempo os monges levariam para resolver o jogo nestas condições.

Nós já sabemos que o número mínimo de movimentos é dado pela fórmula $M_n = 2^n - 1$, portanto, para resolver o jogo com 64 peças, o número mínimo de movimentos será:

$$M_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Como supomos que é realizado um movimento a cada segundo, bastam alguns cálculos (ver A.5.2) para concluirmos que os monges demorariam cerca de 585 bilhões de anos para realizar a tarefa, ou seja, se, por acaso, o mundo acabar, não será por causa da Torre de Hanói.

3.2 Nim

Esta sessão será dedicada ao jogo de Nim, ou melhor, aos jogos do "tipo Nim". Aqui iremos analisar três dentre as suas inúmeras variantes e obter suas respectivas estratégias vitoriosas (estratégia máxima).

3.2.1 Características do Nim

Os jogos do tipo Nim, que podem ser considerados como uma família de jogos com inúmeras variantes, são resumidamente caracterizados da seguinte forma:

- Há dois jogadores ou duas equipes;

- Não há informação escondida, ambos os jogadores têm acesso a toda informação contida no jogo (em um jogo de baralho, por exemplo, há informações escondidas, pois não se conhece as cartas do adversário);
- Não é um jogo de sorte, o acaso não tem influência no jogo (em um jogo de cara ou coroa, por exemplo, a sorte possui influência);
- Os jogadores se alternam na realização das jogadas;
- Igualdade de acesso, ou seja, ambos os jogadores têm as mesmas possibilidades de movimento (cada um à sua vez) não havendo distinções tais como ocorre, por exemplo, no xadrez com peças pretas e brancas;
- O jogo sempre termina, independentemente de como é jogado, em um número finito de jogadas e elegendo um vencedor, ou seja, não existe a possibilidade de empate.

O Nim caracteriza-se por exigir dos jogadores o uso do raciocínio lógico-dedutivo. Na tentativa de criar uma estratégia vitoriosa, o jogador é levado a construir um modelo que represente a solução da situação-problema apresentada, esse modelo, se bem estruturado, pode levar a construção da chamada "estratégia máxima", estratégia na qual o adversário não possui possibilidade de vitória. Para atingir tal estratégia, o jogador deverá, segundo Grando (2000), *construir habilidades de resolução de problemas, explorar o raciocínio hipotético-dedutivo, generalizar soluções e procedimentos, observar regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático.*

3.2.2 Estratégia Máxima - Variante I

A descrição do jogo:

> *Dispõe-se sobre uma mesa um certo número N de palitos. Estipula-se que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, n palitos, com $n > 1$. Supõe-se, ainda, que nem N nem $N - 1$ sejam múltiplos de $n + 1$. Perde o jogador que retirar o último palito.(Hefez (2011))*

Para compreender melhor o problema, vamos iniciar com dois exemplos, atribuindo diferentes valores para N e n, determinando estratégias de vitória, para em seguida generalizarmos tais estratégias, obtendo a estratégia máxima.

Exemplo 1:

Suponhamos N = 15 e n = 3, ou seja, o jogo se inicia com 15 palitos e cada jogador poderá retirar, em sua vez, 1, 2 ou 3 palitos.

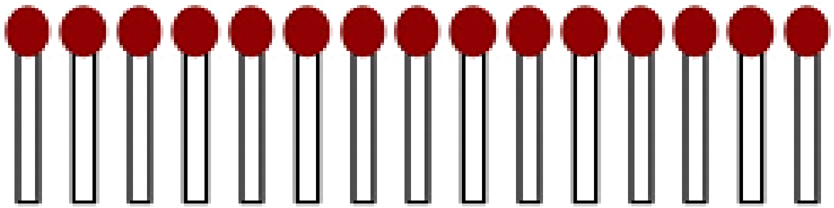

Figura 3.18: Variante I - Configuração inicial com 15 palitos

Encontrando a estratégia vencedora:

Sejam A e B os jogadores a disputar a partida, suponhamos que o jogador A é aquele que fará o primeiro movimento. Façamos uma análise do fim para o começo do jogo para determinar a estratégia que conduzirá o jogador A à vitória:

1. Sabe-se que o perdedor é aquele que retira o último palito, portanto, A deverá deixar 1 palito para B e assim garantir a vitória;
2. Para que A possa deixar exatamente 1 palito para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 2, 3 ou 4 palitos (se B deixa 2 palitos A retira 1, se B deixa 3 palitos A retira 2 e se B deixa 4 palitos A retira 3);
3. Para garantir que B deixará 2, 3 ou 4 palitos, basta que A deixe 5 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 4, se B retira 2 sobram 3 e se B retira 3 sobram 2);
4. Para que A possa deixar exatamente 5 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 6, 7 ou 8 palitos (se B deixa 6 palitos A retira 1, se B deixa 7 palitos A retira 2 e se B deixa 8 palitos A retira 3);

5. Para garantir que B deixará 6, 7 ou 8 palitos, basta que A deixe 9 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 8, se B retira 2 sobram 7 e se B retira 3 sobram 6);

6. Para que A possa deixar exatamente 9 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 10, 11 ou 12 palitos (se B deixa 10 palitos A retira 1, se B deixa 11 palitos A retira 2 e se B deixa 12 palitos A retira 3);

7. Para garantir que B deixará 10, 11 ou 12 palitos, basta que A deixe 13 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 12, se B retira 2 sobram 11 e se B retira 3 sobram 10);

8. Para deixar 13 palitos sobre a mesa, basta que A retire 2 palitos em sua primeira jogada e assim possa garantir a vitória.

Observação:

É comum designar as posições (quantidades de palitos) que dão a vitória ao jogador que as deixou para o adversário por posições P (do inglês *previous*) e as demais posições por posições N (do inglês *next*).

Ilustrando a situação:

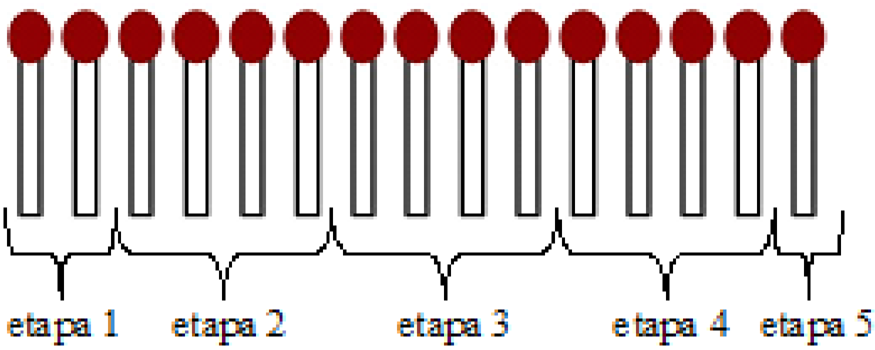

Figura 3.19: Variante I - Etapas para vitória no exemplo 1

- Etapa 1 - O jogador A retira 2 palitos;
- Etapas 2, 3 e 4 - Após a retirada de B, A retira palitos de modo que a soma da jogada de B com a sua própria jogada resulte na retirada de 4 palitos;
- Etapa 5 - Resta apenas um palito para B retirar. O jogador A vence.

Dizemos que são posições P: 1, 5, 9 e 13.

Exemplo 2:

Suponhamos N = 23 e n = 5, ou seja, o jogo se inicia com 23 palitos e cada jogador poderá retirar, em sua vez, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos.

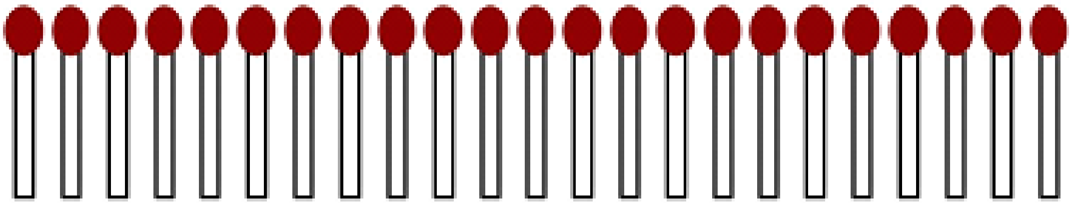

Figura 3.20: Variante I - Configuração inicial com 23 palitos

Encontrando a estratégia vencedora:

De modo semelhante ao exemplo 1, sejam A e B os jogadores a disputar a partida, suponhamos que o jogador A é aquele que fará o primeiro movimento. Façamos a análise:

1. A deverá deixar 1 palito para B e assim garantir a vitória;
2. Para que A possa deixar exatamente 1 palito para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos;
3. Para garantir que B deixará 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos, basta que A deixe 7 palitos sobre a mesa;
4. Para que A possa deixar exatamente 7 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 8, 9, 10, 11 ou 12 palitos;
5. Para garantir que B deixará 8, 9, 10, 11 ou 12 palitos, basta que A deixe 13 palitos sobre a mesa;
6. Para que A possa deixar exatamente 13 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 14, 15, 16, 17 ou 18 palitos;
7. Para garantir que B deixará 14, 15, 16, 17 ou 18 palitos, basta que A deixe 19 palitos sobre a mesa;

8. Para deixar 19 palitos sobre a mesa, basta que A retire 4 palitos em sua primeira jogada e assim possa garantir a vitória.

Ilustrando a situação:

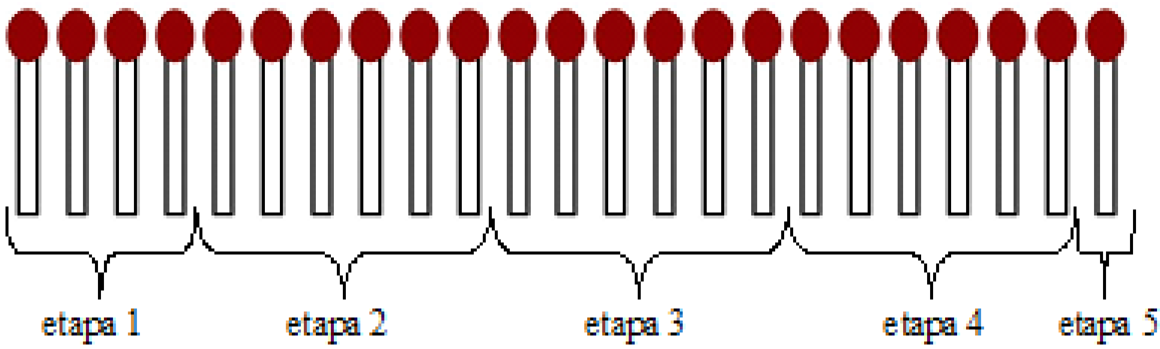

Figura 3.21: Variante I - Etapas para vitória no exemplo 2

- Etapa 1 - O jogador A retira 4 palitos;
- Etapas 2, 3 e 4 - Após a retirada de B, A retira palitos de modo que a soma da jogada de B com a sua própria jogada resulte na retirada de 6 palitos;
- Etapa 5 - Resta apenas um palito para B retirar. O jogador A vence.

Dizemos que são posições P: 1, 7, 13 e 19.

Generalizando e determinando a estratégia máxima:

Após analisarmos estes dois exemplos, podemos notar um padrão:

- Os palitos são separados em grupos de $n+1$ palitos;
- Os palitos restantes são separados em dois grupos, um de apenas 1 palito (o palito que deve ser deixado para que o adversário perca o jogo) e outro com os demais palitos que restaram;
- A primeira jogada do jogador A é sempre a de retirar os "demais palitos restantes", ou seja, após separar os N palitos iniciais em grupos de $n+1$ palitos, dentre os que não

fizerem parte de nenhum desses grupos o jogador A deixa apenas um palito sobre a mesa.

Seja k o número de grupos com $n + 1$ palitos, ou seja, o quociente da Divisão Euclidiana de N por $n + 1$. Seja r o número de palitos que não pertencem a nenhum dos k grupos, ou seja, o resto da Divisão Euclidiana de N por $n + 1$. Observamos que o número de palitos no início do jogo (N) pode ser representado da seguinte forma:

$$N = k(n + 1) + r$$

Assim, como r é o resto da Divisão Euclidiana de N por $n + 1$, é fácil notar que a primeira jogada a ser efetuada pelo jogador A deverá ser retirar $r - 1$ palitos. Daí em diante, basta que o jogador A "complete"a jogada do jogador B de modo a formar grupos de $n + 1$ palitos.

Ilustrando a situação:

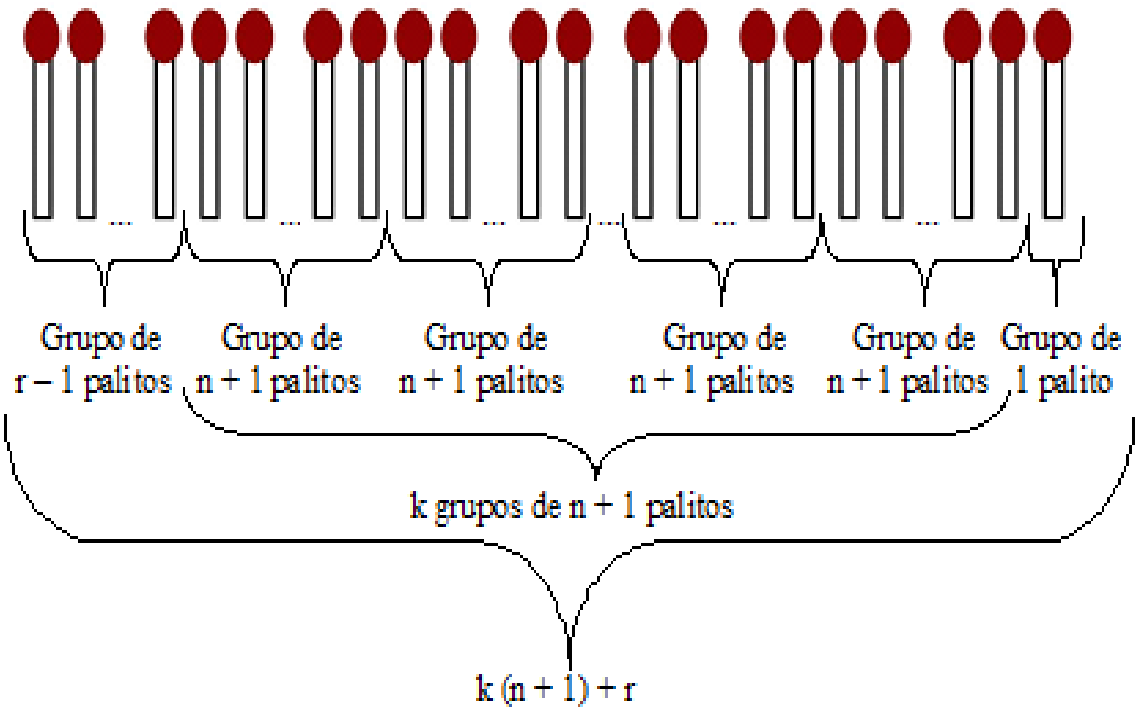

Figura 3.22: Variante I - Etapas para vitória no caso geral

- Na primeira jogada, após realizar mentalmente a divisão de N por $n+1$, determinando o valor de r, o jogador A retira $r-1$ palitos;
- Da segunda jogada em diante o jogador A "completa"a jogada do jogador B de modo que a soma de suas jogadas resulte em $n+1$ palitos;
- Resta 1 palito para que o jogador B retire. O jogador A vence.

As posições P são:

$$1, 1+(n+1), 1+2(n+1), 1+3(n+1), ..., 1+k(n+1)$$

Observação 1:

Pode ser observado na descrição desta variante do jogo de Nim que não se permite que nem N nem $N-1$ sejam múltiplos de $n+1$, logo, necessariamente teremos $r>1$ e consequentemente não há a possibilidade de a estratégia máxima ser utilizada pelo jogador B. Caso não houvesse esta restrição, as configurações iniciais que favoreceriam o jogador B, seriam da forma:

$$N = k(n+1) + r$$

onde r = 1

Se o resto da Divisão Euclidiana de N por $n+1$ for igual a 1, a estratégia máxima pode ser utilizada apenas pelo jogador B.

Observação 2:

O caso em que o resto r é nulo é favorável ao jogador A, pois bastaria que em sua primeira jogada ele "desmontasse"um dos grupos de $n+1$ palitos de modo a deixar apenas 1 palito desse grupo, ou seja, ele deveria retirar exatamente n palitos.

3.2.3 Estratégia Máxima - Variante II

A descrição do jogo:

Dispõe-se sobre uma mesa um certo número N de palitos e estipula-se que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, um número n pré-fixado de palitos, com $n > 1$. Supõe-se, ainda, que N não seja múltiplo de n + 1. Ganha o jogador que retirar o último palito.(Hefez (2011))

Assim como foi feito na Variante I, vamos iniciar com dois exemplos, determinando estratégias de vitória, para em seguida generalizarmos tais estratégias.

Exemplo 1:

Suponhamos N = 13 e n = 3, ou seja, o jogo se inicia com 13 palitos e cada jogador poderá retirar, em sua vez, 1, 2 ou 3 palitos.

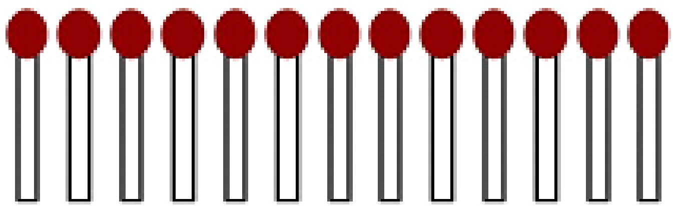

Figura 3.23: Variante II - Configuração inicial com 13 palitos

Encontrando a estratégia vencedora:

Sejam A e B os jogadores a disputar a partida, suponhamos que o jogador A é aquele que fará o primeiro movimento. Façamos uma análise do fim para o começo do jogo para determinar a estratégia que conduzirá o jogador A à vitória:

1. Sabe-se que o vencedor é aquele que retira o último palito, portanto, A deverá "obrigar"B a deixar 1, 2 ou 3 palitos sobre a mesa, para assim garantir a vitória;
2. Para garantir que B deixará 1, 2 ou 3 palitos, basta que A deixe 4 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 3, se B retira 2 sobram 2 e se B retira 3 sobra 1);
3. Para que A possa deixar exatamente 4 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 5, 6 ou 7 palitos (se B deixa 5 palitos A retira 1, se B deixa 6 palitos A retira 2 e se B deixa 7 palitos A retira 3);

4. Para garantir que B deixará 5, 6 ou 7 palitos, basta que A deixe 8 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 7, se B retira 2 sobram 6 e se B retira 3 sobram 5);

5. Para que A possa deixar exatamente 8 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 9, 10 ou 11 palitos (se B deixa 9 palitos A retira 1, se B deixa 10 palitos A retira 2 e se B deixa 11 palitos A retira 3);

6. Para garantir que B deixará 9, 10 ou 11 palitos, basta que A deixe 12 palitos sobre a mesa (se B retira 1 sobram 11, se B retira 2 sobram 10 e se B retira 3 sobram 9);

7. Para deixar 12 palitos sobre a mesa, basta que A retire 1 palito em sua primeira jogada e assim possa garantir a vitória.

Ilustrando a situação:

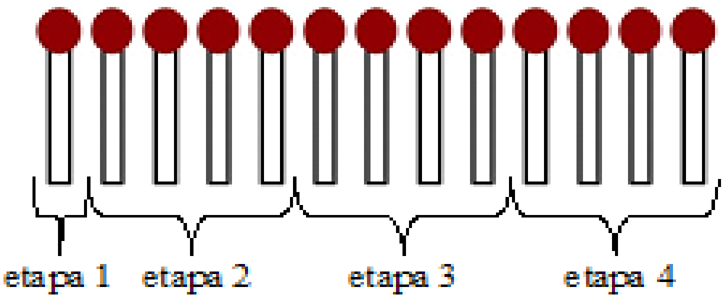

Figura 3.24: Variante II - Etapas para vitória no exemplo 1

- Etapa 1 - O jogador A retira 1 palito;
- Etapas 2, 3 e 4 - Após a retirada de B, A retira palitos de modo que a soma da jogada de B com a sua própria jogada resulte na retirada de 4 palitos garantindo assim a vitória;

As posições P são: 0, 4, 8 e 12.

Exemplo 2:

Suponhamos N = 25 e n = 6, ou seja, o jogo se inicia com 25 palitos e cada jogador poderá retirar, em sua vez, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos.

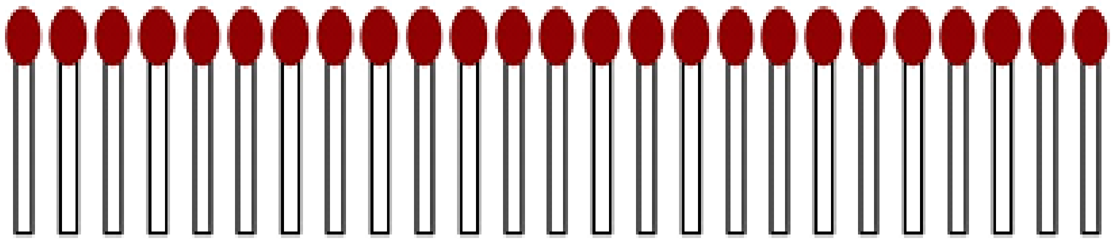

Figura 3.25: Variante II - Configuração inicial com 25 palitos

Encontrando a estratégia vencedora:

Do mesmo modo que foi feito no exemplo 1, sejam A e B os dois jogadores a disputar esta partida, suponhamos também que o jogador A é aquele que fará o primeiro movimento, logo, naturalmente, o jogador B é o segundo a efetuar jogadas. Façamos agora a análise:

1. Sabe-se que o vencedor é aquele que retira o último palito, portanto, A deverá "obrigar"B a deixar 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos sobre a mesa, para assim garantir a vitória;

2. Para garantir que B deixará 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 palitos, basta que A deixe 7 palitos sobre a mesa;

3. Para que A possa deixar exatamente 7 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 palitos;

4. Para garantir que B deixará 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 palitos, basta que A deixe 14 palitos sobre a mesa;

5. Para que A possa deixar exatamente 14 palitos para B é necessário que B tenha deixado sobre a mesa 15, 16, 17, 18, 19 ou 20 palitos;

6. Para garantir que B deixará 15, 16, 17, 18, 19 ou 20 palitos, basta que A deixe 21 palitos sobre a mesa;

7. Para deixar 21 palitos sobre a mesa, basta que A retire 4 palitos em sua primeira jogada e assim possa garantir a vitória.

Ilustrando a situação:

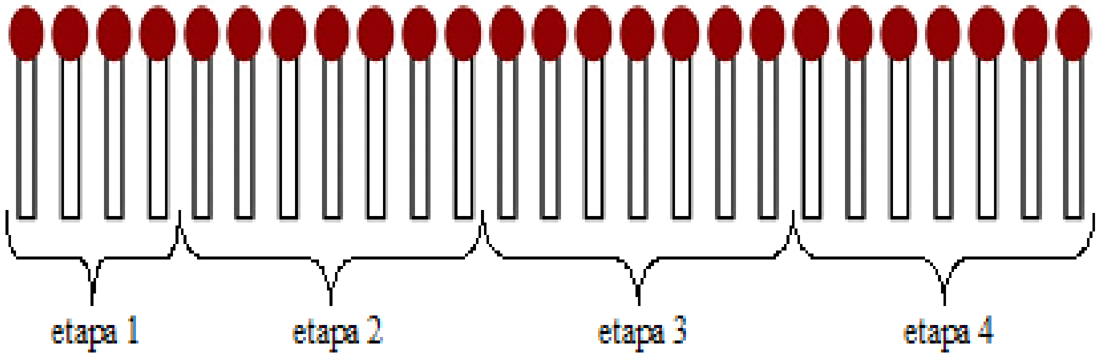

Figura 3.26: Variante II - Etapas para vitória no exemplo 2

- Etapa 1 - O jogador A retira 4 palitos;
- Etapas 2, 3 e 4 - Após a retirada de B, A retira palitos de modo que a soma da jogada de B com a sua própria jogada resulte na retirada de 7 palitos garantindo assim a vitória;

As posições P são: 0, 7, 14 e 21.

Generalizando e determinando a estratégia máxima:

Assim como na Variante I, após analisarmos estes dois exemplos, podemos notar um padrão:

- Os palitos são separados em grupos de n + 1 palitos e mais um grupo com os palitos que sobram;
- A primeira jogada do jogador A é sempre a de retirar os "palitos que sobram", ou seja, após separar os N palitos iniciais em grupos de n + 1 palitos, o jogador A retira os palitos que não ficaram em nenhum desses grupos de n + 1 palitos.

Seja k o número de grupos com $n + 1$ palitos, ou seja, o quociente da Divisão Euclidiana de N por $n + 1$. Seja r o número de palitos que não pertencem a nenhum dos k grupos, ou seja, o resto da Divisão Euclidiana de N por $n + 1$. Observamos que o número de palitos no início do jogo (N) pode ser representado da seguinte forma:

$$N = k(n+1) + r$$

Assim, como r é o resto da Divisão Euclidiana de N por $n+1$, é fácil notar que a primeira jogada a ser efetuada pelo jogador A deverá ser retirar r palitos. Daí em diante, basta que o jogador A "complete"a jogada do jogador B de modo a formar grupos de $n+1$ palitos.

Ilustando a situação:

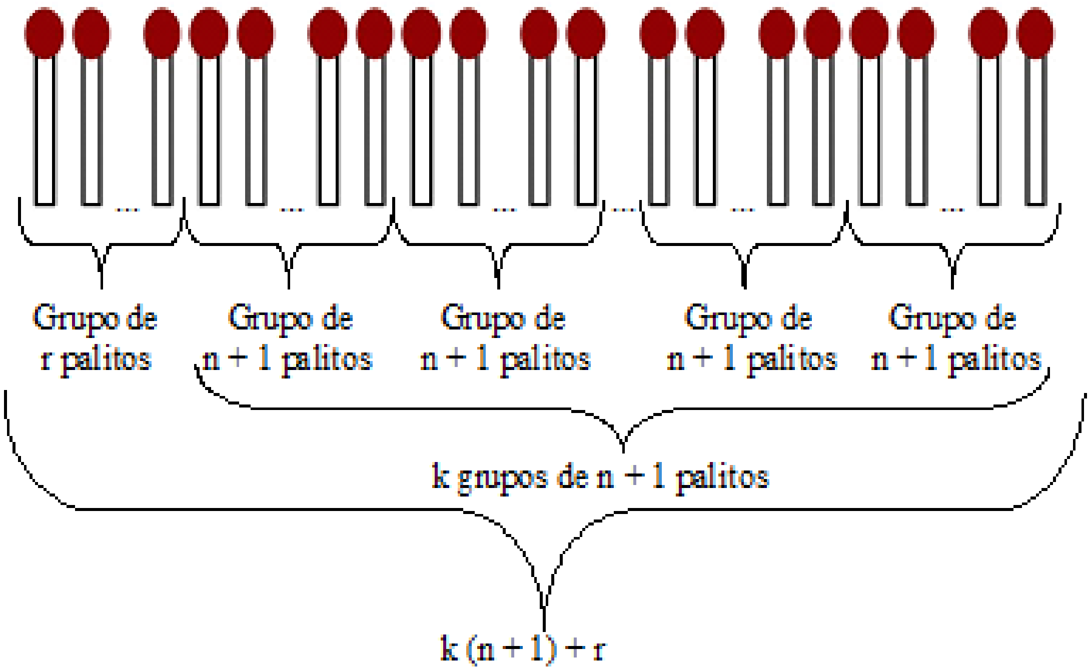

Figura 3.27: Variante II - Etapas para vitória no caso geral

- Na primeira jogada, após realizar mentalmente a divisão de N por n + 1, determinando o valor de r, o jogador A retira r palitos;
- Da segunda jogada em diante o jogador A "completa"a jogada do jogador B de modo que a soma de suas jogadas resulte em $n+1$ palitos garantindo assim a vitória;

As posições P são:

$$0, n+1, 2(n+1), 3(n+1), ..., k(n+1)$$

Observação:

Pode ser observado na descrição desta variante do jogo de Nim que não se permite que N seja múltiplo de $n+1$, logo, necessariamente teremos $r \geq 1$ e consequentemente não há a possibilidade de a estratégia máxima ser utilizada pelo jogador B. Caso não houvesse esta restrição, as configurações iniciais que favoreceriam o jogador B, seriam da forma:

$$N = k(n+1) + r$$

onde r = 0

Se o resto da Divisão Euclidiana de N por n + 1 for igual a 0, a estratégia máxima pode ser utilizada apenas pelo jogador B.

3.2.4 Estratégia Máxima - Variante III

A descrição do jogo:

Dispõe-se sobre uma mesa n fileiras de palitos, onde as fileiras de número 1, 2, ..., n possuem, respectivamente, x_1, x_2, ..., x_n palitos. Cada jogador, em sua vez, deverá escolher uma das n fileiras e dela retirar no mínimo 1 palito e no máximo toda a fileira. Será o vencedor aquele que retirar o último palito.

Dependendo do número n de fileiras e das quantidades x_1, x_2, ..., x_n de palitos por fileira, esta variante do jogo de Nim pode apresentar desde configurações extremamente simples até configurações bastante complexas, as quais exigem, além do raciocínio lógico-dedutivo, a utilização de uma teoria matemática bastante interessante. Vamos iniciar nosso estudo apresentando uma sequência de exemplos, em ordem crescente de complexidade, e posteriormente introduziremos a teoria a qual nos referimos no momento em que ela se apresentar conveniente para a obtenção da estratégia vitoriosa.

Estudo dos casos mais simples

Como foi feito nas duas Variantes do jogo de Nim tratadas anteriormente, consideraremos que o jogador a efetuar a primeira jogada será chamado de jogador A e seu adversário de jogador B, além disso, o estudo será dividido em casos de acordo com o valor de n.

Caso 1: n = 1, ou seja, apenas uma fileira de palitos.

Rapidamente percebe-se que este caso não oferece dificuldade, tendo em vista que o jogador A certamente vencerá o jogo, pois, independentemente do número de palitos, basta que ele retire todos os palitos de uma única vez.

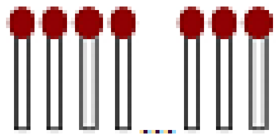

Figura 3.28: Variante III - Apenas uma fileira

A única posição P (posição que dá a vitória àquele que a deixou para o adversário) é 0, portanto, em seu 1° movimento, o jogador A, simplesmente, retira todos os palitos e vence a partida.

Caso 2: n = 2, ou seja, duas fileiras de palitos.

Neste caso a estratégia vitoriosa é bastante simples (desde que suponhamos $x_1 \neq x_2$), pois basta que o jogador A iguale o número de palitos em ambas as fileiras e em seguida copie a jogada do adversário, ou seja, a quantidade de palitos que o jogador B retirar de uma fileira será também retirada da outra fileira pelo jogador A.

Exemplo 1:

Suponhamos $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

A partida se inicia com 3 palitos na 1ª fileira e 4 palitos na 2ª.

Figura 3.29: Variante III - Duas fileiras (3 e 4 palitos)

Em sua primeira jogada, o jogador A retira 1 palito da 2ª fileira.

Figura 3.30: Variante III - Retiradas com duas fileiras (3 e 3 palitos)

O jogador B, em seu primeiro lance, opta por retirar 1 palito da 1ª fileira e o jogador A responde retirando, novamente, 1 palito da 2ª fileira, igualando-a com a 1ª fileira.

Figura 3.31: Variante III - Retiradas com duas fileiras (2 e 2 palitos)

Sabendo que retirar uma fileira inteira daria a vitória ao adversário, o jogador B decide, retirar 1 palito da 2ª fileira. O jogador A retira 1 palito da 1ª fileira, novamente, igualando-as.

Figura 3.32: Variante III - Retiradas com duas fileiras (1 e 1 palitos)

Sem chances de vencer, B retira 1 palito da 1ª fileira e deixa o último palito para que A confirme sua vitória.

Figura 3.33: Variante III - Retiradas com duas fileiras (0 e 1 palito)

A estratégia utilizada acima pelo jogador A pode ser estendida para quaisquer valores de x_1 e x_2 (lembrando-se da única restrição de que $x_1 \neq x_2$), pois, devido aos simples fatos de a quantidade de palitos ser finita e a cada jogada essa quantidade obrigatoriamente se reduzir, em algum momento o jogador B deixará uma das fileiras vazias e bastará ao jogador A igualar a outra fileira, como ocorreu no caso em que $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$, vencendo o jogo.

As posições P, no caso de duas fileiras, são da forma $x_1 = x_2$.

Observação:

Se iniciarmos o jogo com $x_1 = x_2$ a estratégia vitoriosa pertencerá ao jogador B, pois, após a jogada de A será ele que terá a oportunidade de igualar as quantidades de palitos nas duas fileiras.

Caso 3: n = 3, ou seja, três fileiras de palitos.

O caso do jogo de Nim com 3 fileiras não é tão simples quanto os já apresentados, embora possamos encontrar algumas configurações de fácil análise. Vejamos algumas delas:

Exemplo 1:

Suponhamos $x_1 \neq x_2 = x_3$. Digamos $x_1 = 3$ e $x_2 = x_3 = 4$

O jogo se inicia com 3 palitos na 1ª fileira e 4 palitos na 3ª e 4ª fileiras.

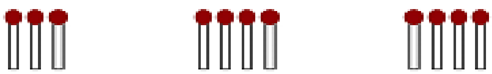

Figura 3.34: Variante III - Três fileiras (3, 4 e 4 palitos)

O jogador A retira toda a 1ª fileira em sua primeira jogada.

Figura 3.35: Variante III - Retiradas com três fileiras (0, 4 e 4 palitos)

Após a retirada da 1ª fileira observa-se que restam duas fileiras com igual quantidade de palitos, portanto, basta ao jogador A proceder como no caso do jogo com apenas duas fileiras, copiando as jogadas do jogador B e assim garantindo a vitória.

Nota-se que qualquer configuração inicial (com n = 3) que possua duas ou três fileiras com igual quantidade de palitos é bastante simples, tendo em vista que ela se reduz facilmente ao caso de duas fileiras, bastando para isso que o jogador A retire todos os palitos de uma das fileiras, deixando para o jogador B duas fileiras com igual quantidade de palitos.

Exemplo 2:

Suponhamos $x_1 = 1, x_2 = 2$ e $x_3 = 4$.

A pequena quantidade de palitos permite uma análise relativamente simples:

- O jogador A não pode iniciar eliminando totalmente nenhuma das três fileiras, pois neste caso o jogador B teria a oportunidade de igualar as duas fileiras restantes (ver caso com n = 2) e facilmente venceria o jogo;

- O jogador A não pode iniciar igualando duas fileiras, pois neste caso o jogador B retiraria a outra fileira e, mais uma vez, restariam duas fileiras com a mesma quantidade de palitos para o jogador A o que fatalmente o levaria à derrota;

- Para cumprir as duas condições anteriores, a única possibilidade para o jogador A é retirar 1 palito da 3ª fileira;

- Após o movimento correto de A (retirar 1 palito da 3ª fileira), qualquer movimento de B levaria ou na eliminação de uma fileira inteira ou em igualar duas das fileiras, o que deixaria o jogador A em vantagem para chegar à vitória.

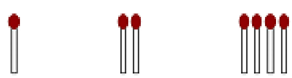

Figura 3.36: Variante III - Três fileiras (1, 2 e 4 palitos)

Para dirimir quaisquer dúvidas, observemos as possibilidades envolvidas mais detalhadamente:

- Possibilidade 1: se A retira toda a 1ª fileira, B poderá retirar dois palitos da 3ª fileira e, assim, ficar em vantagem;

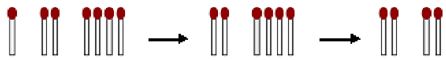

Figura 3.37: Variante III - Possibilidade 1

- Possibilidade 2: se A retira toda a 2ª fileira, B poderá retirar três palitos da 3ª fileira e ficar em vantagem;

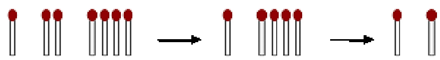

Figura 3.38: Variante III - Possibilidade 2

- Possibilidade 3: se A retira toda a 3ª fileira, B poderá retirar um palito da 2ª fileira e ficar em vantagem;

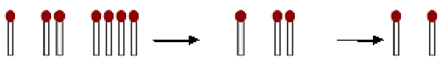

Figura 3.39: Variante III - Possibilidade 3

- Possibilidade 4: se A retira um palito da 2ª fileira, igualando-a com a 1ª fileira, B poderá retirar toda a 3ª fileira e ficar em vantagem;

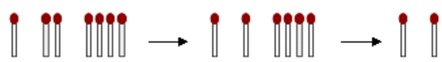

Figura 3.40: Variante III - Possibilidade 4

- Possibilidade 5: se A retira dois palitos da 3ª fileira, igualando-a com a 2ª fileira, B poderá retirar toda a 1ª fileira e ficar em vantagem;

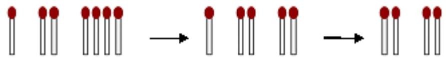

Figura 3.41: Variante III - Possibilidade 5

- Possibilidade 6: se A retira três palitos da 3ª fileira, igualando-a com a 1ª fileira, B poderá retirar toda a 2ª fileira e ficar em vantagem;

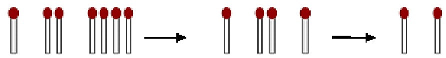

Figura 3.42: Variante III - Possibilidade 6

- Possibilidade 7: A única jogada que dá a vantagem ao jogador A é a retirada de um palito da 3ª fileira, deixando a configuração $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, assim, o jogador B não terá nenhuma jogada favorável, como poderemos observar a seguir.

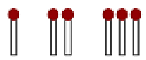

Figura 3.43: Variante III - Possibilidade 7

- Possibilidade 7A: se B retirar um palito da 2ª fileira, A retira toda a 3ª fileira;

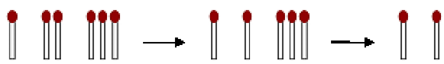

Figura 3.44: Variante III - Possibilidade 7A

- Possibilidade 7B: se B retirar um palito da 3ª fileira, A retira toda 1ª fileira;

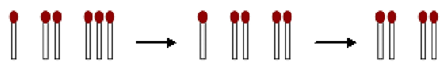

Figura 3.45: Variante III - Possibilidade 7B

- Possibilidade 7C: se B retirar dois palitos da 3ª fileira, A retira toda 2ª fileira;

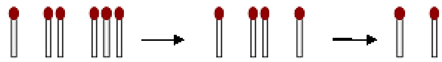

Figura 3.46: Variante III - Possibilidade 7C

- Possibilidade 7D: se B retirar toda 1ª fileira, A retira um palito da 3ª fileira;

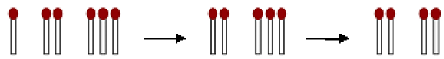

Figura 3.47: Variante III - Possibilidade 7D

- Possibilidade 7E: se B retirar toda 2ª fileira, A retira dois palitos da 3ª fileira;

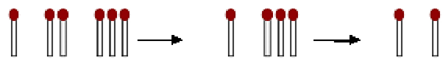

Figura 3.48: Variante III - Possibilidade 7E

- Possibilidade 7F: se B retirar toda 3ª fileira, A retira um palito da 2ª fileira;

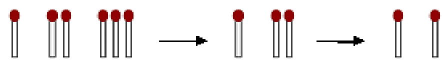

Figura 3.49: Variante III - Possibilidade 7F

Após o jogador A retirar um palito da 3ª fileira, todas as configurações que podem ser obtidas pelo jogador B são favoráveis ao jogador A e, portanto, este está de posse da estratégia vencedora.

Se representarmos as quantidades de palitos em cada fileira como a tripla ordenada (x_1, x_2, x_3), as posições P neste exemplo serão: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (0,2,2) e (1,2,3).

No exemplo acima, não é difícil para o jogador A obter uma estratégia vencedora devido ao número reduzido de palitos, porém, se a quantidade de palitos for aumentada um pouco mais a obtenção de tal estratégia torna-se bastante trabalhosa, exigindo, por parte do jogador, uma análise detalhada de todas as possibilidades envolvidas, o que despenderia um grande tempo e esforço. Assim, parece haver a necessidade de outra abordagem da situação, para que se possa obter as estratégias vencedoras de uma forma mais simples e direta.

A Teoria de Bouton

O matemático Charles L. Bouton desenvolveu um método simples e prático para determinar a estratégia máxima no jogo de Nim, mas para compreender esse método vamos precisar, inicialmente, falar sobre os Números Naturais no Sistema de Numeração Binário e, em seguida, introduzir uma nova operação nos naturais, a "Soma Nim".

Um pouco sobre o Sistema de Numeração Binário

Desde muito cedo nos habituamos ao Sistema de Numeração Decimal Posicional, pois, é ele que utilizamos em nosso cotidiano. Como sabemos, o sistema é dito decimal porque são utilizados dez símbolos, chamados algarismos, na escrita dos números, são eles: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Sabe-se também que a posição ocupada por cada símbolo dentro do número interfere em seu valor, por esse motivo, o sistema é chamado de posicional.

Dada a sua natureza posicional, sabemos que, por exemplo, os números 345 e 543 são diferentes. Na verdade, pode-se dizer que 345 e 543 é uma forma resumida de se escrever esses números, pois:

$$345 = 100 \times 3 + 10 \times 4 + 1 \times 5 = (10)^2 \times 3 + (10)^1 \times 4 + (10)^0 \times 5$$

$$543 = 100 \times 5 + 10 \times 4 + 1 \times 3 = (10)^2 \times 5 + (10)^1 \times 4 + (10)^0 \times 3$$

Dizemos que nosso sistema é de base 10, pois, qualquer número pode ser escrito como soma de múltiplos de potências distintas de 10.

Embora o sistema decimal se destaque por ser universalmente difundido e utilizado, ele não é o único sistema de numeração posicional importante, em computação, por exemplo, é indispensável o uso do sistema binário, sobre o qual falaremos agora devido à sua relação com o jogo de Nim.

O Sistema de Numeração Binário utiliza apenas os algarismos 1 e 0 para representar qualquer número e, assim como no sistema decimal, a posição também é relevante. No sistema binário pode-se escrever qualquer número como soma de múltiplos de potências distintas de 2, portanto, trata-se de um sistema de base 2.

Para representar no sistema binário um número que está inicialmente representado no sistema decimal, devemos primeiramente escrevê-lo como soma de múltiplos de potências distintas de 2 (as potências devem estar em ordem decrescente) e, em seguida, tomar os fatores 0 e 1 que aparecem multiplicando essas potências, na ordem em que estão.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

Representar os números 3 e 6 na base 2.

$$3 = 2 \times 1 + 1 \times 1 = 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

Três escrito na base 10 equivale a onze escrito na base 2.

$3 = (11)_2$

$$6 = 4 \times 1 + 2 \times 1 = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$$

Seis escrito na base 10 equivale a cento e dez escrito na base 2.

$6 = (110)_2$

Exemplo 2:

Representar os números 10 e 22 na base 2:

$$10 = 8 \times 1 + 4 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 0 = 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$$

Dez escrito na base 10 equivale a mil e dez escrito na base 2.

$10 = (1010)_2$

$$22 = 16 \times 1 + 8 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 0$$

$$= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$$

Vinte e dois escrito na base 10 equivale a dez mil cento e dez escrito na base 2.

$6 = (10110)_2$

De modo geral, a representação na base 2 de um número natural k qualquer, inicialmente, escrito na base 10, pode ser obtida do seguinte modo:

Sejam k e n números naturais e $a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, ..., n$.

- Escrevemos k como soma de múltiplos de potências distintas de 2 (na base 10);

$$k = a_n 2^n + a_{(n-1)} 2^{(n-1)} + ... + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

- Escrevemos cada a_i que surge na decomposição na ordem em que aparecem;

$$(k)_2 = a_n a_{(n-1)} \cdots a_2 a_1 a_0$$

Para escrever na base 10 um número que, inicialmente, estava escrito na base 2, basta proceder de forma inversa ao exposto acima.

Exemplo 3:

Representar o número binário 101 na base 10:

$$2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1 = 4 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 5$$

Cento e um escrito na base 2 equivale a cinco na base 10. $(101)_2 = 5$

Exemplo 4:

Representar o número binário 11011 na base 10:

$$2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$

Onze mil e onze escrito na base 2 equivale a vinte e sete na base 10. $(11011)_2 = 27$

Exemplo 5:

Representar os dez primeiros naturais em base 2:

Base 10	Soma de múltiplos de pontências distintas de 2	Base 2
1	$2^0 \times 1$	1
2	$2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$	10
3	$2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$	11
4	$2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0$	100
5	$2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1$	101
6	$2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$	110
7	$2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$	111
8	$2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0$	1000
9	$2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1$	1001
10	$2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$	1010

Tabela 3.3: Os dez primeiros naturais em base 2

Sabendo representar os naturais em base 2, podemos prosseguir e compreender como funciona esta nova operação, criada por Bouton, que hoje se conhece por Soma Nim.

Soma Nim: uma nova operação

A estratégia máxima no jogo de Nim pode ser obtida utilizando-se uma nova operação nos naturais denominada Soma Nim (ver A.7.1). A Soma Nim de dois ou mais números naturais $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ será representada da seguinte maneira:

$$n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 \oplus \cdots \oplus n_k$$

Para determinar a Soma Nim de dois ou mais números naturais vamos proceder da seguinte forma:

- Escrevemos os números em notação binária;
- Dispomos os números (em notação binária) como se fôssemos aplicar o algoritmo da adição usual, ou seja, colocamos "unidade sobre unidade", "dezena sobre dezena", "centena sobre centena"e assim por diante;
- Efetuamos, separadamente, a soma de todos os algarismos das unidades, de todos os algarismos das dezenas, de todos os algarismos das centenas e assim por diante;
- Verificamos se as somas descritas acima resultam em números pares ou ímpares, colocando, na posição onde ficaria o resultado, o número 0 (zero) em caso de soma par e o número 1 (um) em caso de soma ímpar.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

Determinar a Soma Nim de 3 e 5.

$3 = (11)_2$

$5 = (101)_2$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 101 \\ \hline 110 \end{array}$$

Figura 3.50: Soma Nim de 3 e 5

Asisim, temos: $3 \oplus 5 = (110)_2 = 6$

Exemplo 2: Determinar a Soma Nim de 2, 4 e 6.

$2 = (10)_2$

$4 = (100)_2$

$6 = (110)_2$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 100 \\ 110 \\ \hline 000 \end{array}$$

Figura 3.51: Soma Nim de 2, 4 e 6

Assim, temos: $2 \oplus 4 \oplus 6 = (000)_2 = 0$

Exemplo 3:

Determinar a Soma Nim de 1, 7, 9, e 12.

$1 = (1)_2$

$7 = (111)_2$

$9 = (1001)_2$

$12 = (1100)_2$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 111 \\ 1001 \\ 1100 \\ \hline 0011 \end{array}$$

Figura 3.52: Soma Nim de 1, 7, 9 e 12

Assim, temos: $1 \oplus 7 \oplus 9 \oplus 12 = (11)_2 = 3$

Esta nova operação é importante para a determinação da estratégia máxima no jogo de Nim porque Bouton foi capaz de caracterizar as posições P (posições que dão a vitória ao jogador que as deixar para o adversário) do jogo de acordo com o valor da soma Nim das quantidades de objetos (em nosso caso palitos) em cada fileira.

A Soma Nim nula e a estratégia máxima

Determinar a estratégia máxima no jogo de Nim torna-se, relativamente, simples se considerarmos as seguintes constatações de Bouton (ver A.7.2):

- A Soma Nim ao fim do jogo é nula, ou seja, o jogo termina com zero objetos sobre a mesa e, zero objetos equivale a uma Soma Nim igual à zero;
- O jogador que encontra, sobre a mesa, uma quantidade de objetos cuja Soma Nim é diferente de zero, sempre, poderá, com um movimento adequado, fazer com que a Soma Nim da quantidade de objetos restantes se torne zero;
- O jogador que encontra, sobre a mesa, uma quantidade de objetos cuja Soma Nim é igual à zero, independentemente do movimento que realizar, deixará uma quantidade de objetos cuja Soma Nim será, necessariamente, diferente de zero.

Vejamos, na prática, como utilizar a Soma Nim para determinar a estratégia máxima no jogo de Nim.

Exemplo 1:

Consideremos a configuração inicial com $n = 3, x_1 = 1, x_2 = 2$ e $x_3 = 4$.

Esta configuração inicial já foi vista anteriormente e, de antemão, conhecemos a estratégia máxima, em particular, sabemos que a 1ª jogada deve ser a retirada de 1 palito da 3ª fileira. Verifiquemos que ao utilizar a Soma Nim chegamos à mesma conclusão:

Escrevemos as quantidades em notação binária:

$$1 = (1)_2,\ 2 = (10)_2 \text{ e } 4 = (100)_2$$

Efetuamos a Soma Nim:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 100 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$$

Figura 3.53: Soma Nim de 1, 2 e 4

Nota-se que não se trata de uma posição P, pois, a Soma Nim não é nula.

Determina-se uma Soma Nim nula que possa ser obtida a partir da Soma Nim anterior:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 11 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 3.54: Soma Nim de 1, 2 e 3

Observou-se que a única possibilidade de obter uma posição P seria a retirada de 1 palito da 3ª fileira.

Podemos notar que, a partir da configuração atual, o próximo jogador (jogador B), independentemente de seu movimento, não poderá obter outra posição P, como já era de se esperar. Digamos, então, que ele tenha optado por também retirar 1 palito da 3ª fileira, deixando uma configuração correspondente a:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 10 \\ \hline 01 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Figura 3.55: Soma Nim de 1, 2 e 2

É fácil perceber que a próxima posição P será obtida retirando-se o palito da 1ª fileira, o que resulta na seguinte Soma Nim:

$$\begin{array}{c} 10 \\ 10 \\ \hline 00 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 3.56: Soma Nim de 2 e 2

Novamente, o jogador B não tem possibilidade de obter uma nova posição P a partir da posição atual, mas digamos que ele decida retirar 1 palito da 2ª fileira, chegando ao seguinte:

$$\begin{array}{c} 10 \\ 1 \\ \hline 11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

Figura 3.57: Soma Nim 2 e 1

Ao jogador A basta retirar 1 palito da 1ª fileira, para mais uma vez obter uma nova posição P.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 3.58: Soma Nim de 1 e 1

A essa altura, o jogador B se vê obrigado a deixar apenas um palito para o jogador A, que vencerá o jogo.

Exemplo 2:

Consideremos a configuração inicial com $n = 3, x_1 = 5, x_2 = 7$ e $x_3 = 9$.

Esta configuração inicial, claramente, é mais complexa que qualquer outra vista anteriormente. Determinar a estratégia máxima fazendo uso apenas do raciocínio lógico seria bastante trabalhoso. Utilizando a Soma Nim teríamos:

Escrevemos as quantidades em notação binária:

$$5 = (101)_2,\ 7 = (111)_2 \text{ e } 9 = (1001)_2$$

Efetuamos a Soma Nim:

101	5
111	7
1001	9
1011	11

Figura 3.59: Soma Nim de 5, 7 e 9

Nota-se que não se trata de uma posição P, pois, a Soma Nim não é nula e, portanto, o 1° a jogar (jogador A) é aquele que esta em vantagem.

Determina-se uma Soma Nim nula a partir da Soma Nim anterior:

101	5
111	7
10	2
000	0

Figura 3.60: Soma Nim de 5, 7 e 2

O jogador A retira 7 palitos da 3ª fileira obtendo uma Soma Nim nula.

Qualquer retirada do jogador B resultará em uma Soma Nim não nula. Digamos, então, que ele tenha optado por retirar 3 palitos da 2ª fileira, obtendo o seguinte:

101	5
100	4
10	2
011	3

Figura 3.61: Soma Nim de 5, 4 e 2

É fácil perceber que a próxima posição P será obtida retirando-se um palito da 3ª fileira, o que resulta na seguinte Soma Nim:

$$\begin{array}{r} 101 \\ 100 \\ 1 \\ \hline 000 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 3.62: Soma Nim de 5, 4 e 1

Novamente, o jogador B não tem possibilidade de obter uma nova posição P a partir da posição atual, mas digamos que ele decida retirar 1 palito da 2ª fileira, chegando ao seguinte:

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ 1 \\ \hline 111 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

Figura 3.63: Soma Nim de 5, 3 e 1

Ao jogador A basta retirar 3 palitos da 1ª fileira, para obter uma nova posição P.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 11 \\ 1 \\ \hline 00 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 3.64: Soma Nim de 2, 3 e 1

Nesse momento podemos notar que a configuração atual é idêntica (a não ser pela ordem das fileiras) à configuração obtida pelo jogador A no início do exemplo anterior e, portanto, basta que o jogador A proceda da mesma maneira e, assim chegue à vitória.

Independentemente do número de fileiras e da quantidade de palitos em cada fileira, podemos utilizar a Soma Nim para determinar a estratégia máxima e assim chegar facilmente à vitória.

Exemplo 3:

Vejamos a configuração inicial com $n = 5, x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 9, x_4 = 12$ e $x_5 = 15$.

Escrevemos as quantidades em notação binária:

$$6 = (110)_2,\ 8 = (1000)_2,\ 9 = (1001)_2,\ 12 = (1100)_2 \text{ e } 15 = (1111)_2$$

Efetuamos a Soma Nim:

110	6
1000	8
1001	9
1100	12
1111	15
0100	4

Figura 3.65: Soma Nim de 6, 8, 9, 12 e 15

Nota-se imediatamente que não se trata de uma posição P, pois, a Soma Nim não é nula e, portanto, o 1° a jogar (jogador A) é aquele que iniciará esta nova partida em vantagem.

Determina-se uma Soma Nim nula a partir da Soma Nim anterior:

10	2
1000	8
1001	9
1100	12
1111	15
0000	0

Figura 3.66: Soma Nim de 2, 8, 9, 12 e 15

O jogador A retira 4 palitos da 1ª fileira (note que neste caso ele poderia retirar 4 palitos de qualquer uma das outras fileiras) obtendo uma Soma Nim nula.

Qualquer retirada do jogador B resultará em uma Soma Nim não nula. Digamos, então, que ele tenha optado por retirar 5 palitos da 3ª fileira, obtendo o seguinte:

10	2
1000	8
100	4
1100	12
1111	15
1101	13

Figura 3.67: Soma Nim de 2, 8, 4, 12 e 15

É fácil perceber que a próxima posição P pode ser obtida retirando-se 13 palitos da 5ª fileira (há outras opções, verifique!), o que resulta na seguinte Soma Nim:

10	2
1000	8
100	4
1100	12
10	2
0000	0

Figura 3.68: Soma Nim de 2, 8, 4, 12 e 2

Novamente, o jogador B não tem possibilidade de obter uma nova posição P a partir da posição atual, mas digamos que ele decida retirar 3 palitos da 2ª fileira, chegando ao seguinte:

10	2
101	5
100	4
1100	12
10	2
1101	13

Figura 3.69: Soma Nim de 2, 5, 4, 12 e 2

Observando a nova configuração da Soma Nim, o jogador A retira 11 palitos da 4ª fileira, e assim obtém novamente uma posição P.

10	2
101	5
100	4
1	1
10	2
000	0

Figura 3.70: Soma Nim de 2, 5, 4, 1 e 2

Suponhamos que desta vez o jogador B decidiu retirar 2 palitos da 3ª fileira, dessa forma chegamos a seguinte configuração de Soma Nim.

10	2
101	5
10	2
1	1
10	2
110	6

Figura 3.71: Soma Nim de 2, 5, 2, 1 e 2

Para retornar a uma posição P, desta vez, basta que o jogador A apenas retire 2 palitos da 2ª fileira, obtendo a configuração abaixo:

10	2
11	3
10	2
1	1
10	2
00	0

Figura 3.72: Soma Nim de 2, 3, 2, 1 e 2

Digamos que o jogador B opte por retirar 1 palito da 2ª fileira. Desta maneira, a nova configuração da Soma Nim será:

$$\begin{array}{r@{\qquad\qquad}r} 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ 1 & 1 \\ 10 & 2 \\ \hline 01 & 1 \end{array}$$

Figura 3.73: Soma Nim de 2, 2, 2, 1 e 2

Ao observar a configuração da Soma Nim, o jogador A pode perceber facilmente que deve eliminar a 4ª fileira, obtendo o seguinte:

$$\begin{array}{r@{\qquad\qquad}r} 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ 10 & 2 \\ \hline 00 & 0 \end{array}$$

Figura 3.74: Soma Nim de 2, 2, 2 e 2

Como todas as fileiras agora possuem apenas dois palitos, o jogador B se vê com apenas duas opções:

- Retirar 2 palitos ou 1 palito de qualquer fileira;
- Retirar 2 palitos daria a vitória ao jogador A, pois, este iria retirar outros 2 palitos, deixando duas fileiras idênticas, caso que já analisamos.

Retirar 1 palito parece ser a melhor opção, digamos que da 1ª fileira. Neste caso chegamos a seguinte configuração:

1	1
10	2
10	2
10	2
11	3

Figura 3.75: Soma Nim de 1, 2, 2 e 2

Daqui em diante fica fácil perceber (mesmo sem utilizar a Soma Nim) quais são as jogadas que darão a vitória ao jogador A.

A análise desses três exemplos nos mostra a praticidade do método de Bouton, que pode ser utilizado com qualquer número de fileiras, inclusive nos casos de uma e duas fileiras que já haviam sido tratados anteriormente.

Concluímos que a estratégia máxima consiste em, a cada jogada, sempre deixar quantidades de palitos, ao seu adversário, que possuam Soma Nim nula, desta maneira ele não terá possibilidade de vitória.

Capítulo 4

Propostas de uso didático de Jogos Matemáticos

Neste capítulo vamos apresentar propostas de uso didático, em sala de aula, de algumas variantes da família dos jogos Nim e do jogo Torre de Hanói. O capítulo estará subdividido em três sessões, nas quais discorreremos, respectivamente, sobre:

- As vantagens e desvantagens do uso de jogos em âmbito educacional;
- A metodologia a ser utilizada quando da prática em sala de aula;
- A aplicação em si, descrevendo regras, materiais a serem empregados e os conteúdos e/ou competências específicas que se desejam trabalhar com cada jogo.

4.1 Vantagens e Desvantagens do uso de jogos em âmbito educacional

A presente sessão é totalmente destinada a apresentar o conjunto das principais vantagens e desvantagens da utilização de jogos no contexto de ensino-aprendizagem. Segundo Grando (2000), são elas:

Vantagens

- Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;

- Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;
- Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);
- Aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;
- Significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;
- Propicia o relacionamento de diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);
- O jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento;
- O jogo favorece a socialização entre alunos e a conscientização do trabalho em equipe;
- A utilização de jogos é um fator de motivação para os alunos;
- Dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;
- As atividades em jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;
- As atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.

Desvantagens

- Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice"em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;
- O tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;
- A coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;

- As falsas concepções de que devem ensinar todos os conceitos através dos jogos. Então, as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;
- A perda de "ludicidade"do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
- A dificuldade de acesso e disponibilidade de materiais e recursos sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Ainda segundo Grando (2000), as vantagens e desvantagens acima expostas *...devem ser refletidas e assumidas pelos educadores, ao se proporem a desenvolver um trabalho pedagógico, com os jogos.*

Com base nas vantagens e desvantagens do uso dos jogos em sala de aula apresentadas por Grando, podemos concluir que a eficácia dos jogos como facilitador no processo de ensino-aprendizagem depende de como eles serão utilizados, pois, por mais poderosa que nos possa parecer esta ferramenta que temos em mãos, muito pouco ela será útil se não soubermos como usá-la.

4.2 Metodologia

Consideramos que, a princípio, a utilização do jogo em sala de aula depende de uma seleção prévia, baseada no nível de desenvolvimento e de maturidade da turma e dos objetivos específicos traçados pelo professor, tais como introduzir ou reforçar determinado conteúdo ou sanar dificuldades anteriormente identificadas.

Após selecionar o jogo que melhor se adapte ao momento em questão, é hora de levar o jogo à sala de aula e iniciar sua aplicação na prática, o que pode, de modo geral, ser feito de acordo com o esquema sugerido a seguir, que foi baseado em Grando (2000):

- **Conhecendo o material e as regras:**
  O aluno tem o seu primeiro contato com o material do jogo. Neste momento, em muitos casos, é comum que eles brinquem com o material e até finjam que estão efetuando jogadas, provavelmente, fazendo comparações com outros jogos já conhecidos, em seguida, o professor apresenta-lhes as regras do jogo, o que pode ser

feito de várias formas, como, por exemplo, através de uma simples leitura ou mesmo da simulação de algumas jogadas ou até de partidas inteiras dependendo do jogo;

- **Aprendendo a jogar:**
  Acreditamos que, na maioria dos casos, é necessário que o aluno jogue, ao menos algumas vezes, de forma totalmente descompromissada, como uma brincadeira, para que possa internalizar as regras e desenvolver algum entendimento dos mecanismos do jogo;

- **Jogando e conversando sobre o jogo:**
  Ao perceber que os alunos já assimilaram os mecanismos básicos do jogo, é hora do professor fazer questionamentos e observações que os auxiliem a analisar suas jogadas mais cuidadosamente, ajudando-os a identificar as possibilidades de jogadas, fazer previsões ou reconhecer jogadas feitas de forma "errada". A intenção é instigá-los de modo que iniciem a formulação de procedimentos e estratégias que possam, de alguma maneira, estar relacionados a conceitos matemáticos.

  Observação:

  Em muitos casos, é extremamente importante que o aluno faça o registro dos pontos marcados, dos cálculos efetuados ou mesmo de cada jogada realizada durante algumas partidas, pois, o registro facilita a percepção de padrões e regularidades, que ajudam na formulação de estratégias, além disso, o registro em si já é uma forma de levar o aluno a fazer uso da linguagem matemática;

- **Resolvendo problemas de jogo:**
  A apresentação escrita de situações-problemas, relativas a momentos do jogo, leva o aluno a uma análise mais detalhada sobre situações específicas que podem ser presenciadas nas partidas, ajudando-o a aperfeiçoar suas estratégias ou a formular novos procedimentos, além disso, possibilita que o professor conduza o aluno, de maneira mais direta, em direção aos conceitos matemáticos que devem ser trabalhados;

- **Aplicando o que aprendeu:**
  Por fim, sugerimos que o aluno volte a jogar, agora de forma bem mais racional, utilizando as estratégias e procedimentos formulados anteriormente e sendo capaz de maximizar suas possibilidades de vitória através da aplicação dos conceitos matemáticos que estejam relacionados com o jogo.

Após todo o processo de aplicação, é importante que o professor realize uma análise do jogo utilizado, verificando se as expectativas foram atingidas, ou seja, se foram geradas ou consolidadas as aprendizagens que se havia previsto e se há pontos da prática de aplicação ou mesmo de regras do jogo que devam ser revistas ou adaptadas. Para tanto se deve estar atento a aspectos tais como a motivação dos alunos, a vontade de aprender, as dúvidas apresentadas, as estratégias e procedimentos formulados, o comportamento da turma durante o jogo e a apresentação de soluções.

É de grande relevância que o professor auxilie o aluno que não conseguir superar determinadas dificuldades, para que este não perca o interesse pelo jogo, mas é importante salientar que os alunos devem formular seus próprios procedimentos e estratégias, o que ocorrerá, em cada caso, num momento diferente, ou seja, consideramos que não se deve fornecer ao aluno soluções prontas.

> *Nunca se ensine a alguém aquilo que cada um é capaz de descobrir por si próprio. (Nabais* apud *Candeias (2007)).*

Um último ponto que queremos abordar é a importância do reforço positivo, ou seja, do incentivo através do elogio. A motivação do aluno é fundamental para a eficácia do trabalho envolvendo jogos e, uma forma de mantê-lo motivado, é mostrar que o seu desenvolvimento esta sendo percebido, elogiando seus avanços e reforçando atitudes positivas.

4.3 Aplicação

Nesta sessão, vamos abordar certas questões práticas referentes à aplicação, em sala de aula, de algumas variantes da família dos jogos Nim e do jogo Torre de Hanói, descrevendo suas regras e seus objetivos, apontando os conceitos matemáticos que se deseja trabalhar com os alunos em cada jogo e exibindo os materiais necessários à sua utilização e/ou construção.

4.3.1 Nim

O Nim, como já mencionado anteriormente, constitui-se numa família de jogos com inúmeras variantes, algumas extremamente simples com estratégias de fácil compreensão e/ou dedução, bem como outras bastante complexas em suas estratégias de vitória, as quais, como vimos no capítulo anterior, podem exigir a compreensão e utilização de teorias matemáticas relativamente complexas em sua resolução.

Como o intuito do trabalho é apresentar jogos que possam ser inseridos no contexto dos dois primeiros anos do 2º Segmento do Ensino Fundamental, não faz sentido propor a utilização de variações do Nim que exijam o uso de ferramentas matemáticas que estejam além da compreensão dos alunos desta faixa de ensino. Sendo assim, selecionamos apenas algumas variantes que, acreditamos, estejam em consonância com os conteúdos e/ou com o nível de maturidade matemática dos discentes em questão.

Observação:

Os jogos do tipo Nim são os que apresentam maior facilidade na aquisição de materiais para sua prática, pois, podem ser utilizados vários tipos de objetos, tais como feijões, palitos de fósforos, pedrinhas ou mesmo riscos ou bolinhas desenhadas em papel ou no próprio quadro, entre outros. Como acreditamos ser importante atrair a atenção do aluno (terefa nem sempre fácil), o material proposto para o uso em sala de aula são os palitos de picolé coloridos, pois, acreditamos serem visualmente mais atrativos que, por exemplo, feijões ou palitos de fósforo (opinião do autor).

Nim (Variante II)

Para este primeiro jogo, vamos utilizar regras semelhantes às apresentadas na sessão 3.2.3, onde o jogo foi chamado de Variante II.

Descrição básica do jogo:

- Número de participantes: dois jogadores;
- Material utilizado: uma quantidade N de palitos dispostos em forma de fileira sobre uma mesa;
- Objetivo do jogo: ser aquele que retira o último (ou os últimos) palito da fileira;
- Regras do jogo:
  1. Joga-se de forma alternada;
  2. Cada jogador, em sua vez, deve retirar no mínimo 1 e no máximo n (quantidade pré determinada) palitos.

O que se pretende desenvolver no aluno:

- Observação de padrões: dada a simplicidade do jogo, após jogar algumas poucas vezes, espera-se que o aluno perceba alguns padrões que o conduzam a boas jogadas, e ao notar que isto lhe trás vantagens, aumentando suas chances de vitória, acreditamos que o aluno passará a buscar novos padrões, iniciando e/ou reforçando a aquisição deste hábito extremamente útil na resolução de diversos tipos de problemas;
- Raciocínio lógico dedutivo: a reflexão para encontrar os padrões e determinar as boas jogadas leva o aluno a construir esquemas mentais que acabam por exercitar sua capacidade de raciocínio lógico dedutivo, capacidade esta, que como sabemos, é indispensável para um entendimento eficaz do conhecimento matemático;
- Reforçar o conceito de Múltiplo: após observar os padrões e refletir sobre as boas jogadas o aluno é conduzido, sozinho ou com o auxílio do professor, a utilizar o conceito de múltiplo para determinar as boas jogadas, pois, tal conceito esta diretamente ligado à formulação da estratégia vencedora.

Observação:

Claramente, também se pode relacionar esta variante ao conceito de divisão, mais especificamente, à ideia de resto, que, como ficou claro no capítulo anterior, é muito útil para se determinar a primeira jogada a ser efetuada. Porém, nossa experiência evidenciou que, em um primeiro momento, os alunos têm maior facilidade em relacionar o jogo ao conceito de múltiplo (pois percebem que os valores das boas jogadas acabam por formar sequências de múltiplos), por esta razão consideramos que talvez seja mais indicado utilizar outra variante (que abordaremos adiante) para trabalhar conceitos relacionados mais diretamente à divisão.

Sugestões de aplicação:

1. Acreditamos que o momento mais propício para uma primeira utilização desta variante do Nim, seja após se ter trabalhado com conteúdos relacionados ao conceito de múltiplo, para que o aluno tenha mais facilidade em relacioná-lo com o jogo e assim tenha a oportunidade de exercitá-lo dentro de um contexto;

2. No intuito de facilitar a percepção de padrões pelos alunos, pode ser interessante pedir que eles anotem suas jogadas numa folha específica para registros do jogo, a qual pode ser confeccionada pelo professor (sugestões em A.3) ou por eles próprios;

3. Consideramos ser favorável ao andamento da aula, em termos de organização, a separação dos alunos em pequenos grupos de até quatro componentes, pois, entre outros fatores, facilita a anotação de jogadas proposta acima;

4. Uma prática que também pode ser utilizada é dar ao jogador (ou equipe) perdedor da rodada anterior, o direito de decidir quem iniciará a rodada seguinte, pois, dar ao vencedor este benefício pode ser pouco motivador, principalmente, no caso deste já ter encontrado uma estratégia de vitória (o perdedor ficará desmotivado por não conseguir vencer em momento algum e, o vencedor, pelo jogo não mais constituir um desafio);

5. Dar a cada grupo a quantidade exata de palitos com as quais eles irão jogar, embora possa ser um pouco trabalhoso, pode ser útil em termos de organização;

6. Julgamos ser mais proveitoso iniciar com quantidades pequenas de palitos (não mais que 15), pois, parece facilitar a observação de padrões e, de acordo com a evolução de cada grupo, aumentar esse número pouco a pouco. Posteriormente, pode ser interessante variar o valor de n (quantidade máxima que pode ser retirada na vez de cada jogador), a qual, também acreditamos que deva ser iniciada com valores pequenos (2 ou 3);

7. Instigar a curiosidade e motivar os alunos costuma ser bastante proveitoso. Algumas perguntas e dicas em momentos oportunos podem vir a ajudar muito, assim como parabenizar por uma boa jogada ou elogiar alguma descoberta ou um comentário feito por eles.

Nim (Variante I)

Para este jogo, vamos utilizar regras semelhantes às apresentadas na sessão 3.2.2, onde o jogo foi chamado de Variante I. O leitor irá perceber que a semelhança com a variação do Nim apresentada imediatamente acima é extremamente grande.

Descrição básica do jogo:

- Número de participantes: dois jogadores;
- Material utilizado: uma quantidade N de palitos dispostos em forma de fileira sobre uma mesa;
- Objetivo do jogo: deixar o último palito para que o adversário retire, ou seja, aquele que retira o último palito é o perdedor;
- Regras do jogo:
  1. Joga-se de forma alternada;
  2. Cada jogador, em sua vez, deve retirar no mínimo 1 e no máximo n (quantidade pré determinada) palitos.

O que se pretende desenvolver no aluno:

- Observação de padrões: dada a simplicidade do jogo, após jogar algumas poucas vezes, espera-se que o aluno perceba alguns padrões que o conduzam a boas jogadas, e ao notar que isto lhe trás vantagens, o aluno passa a buscar novos padrões, iniciando a aquisição deste hábito;
- Raciocínio lógico dedutivo: a reflexão para encontrar os padrões e determinar as boas jogadas ajuda a exercitar esta capacidade tão importante;
- Reforçar conceitos relacionados à Divisão: após observar os padrões e refletir sobre as boas jogadas o aluno é conduzido, sozinho ou com o auxílio do professor, a utilizar o conceito de resto de uma divisão para determinar a primeira jogada a ser efetuada.

Sugestões de aplicação:

1. Acreditamos que o momento mais propício para uma primeira utilização desta variante do Nim, seja após se ter trabalhado, ou quando se deseje reforçar, conteúdos relacionados à operação de divisão, para que o aluno tenha mais facilidade em relacioná-lo com o jogo e assim tenha a oportunidade de exercitá-lo dentro de um contexto;
2. Dada a extrema semelhança entre esta variante do Nim e a apresentada anteriormente, é importante levar o aluno a buscar similaridades que o ajudem a solucionar o jogo atual, reconhecer relações e fazer analogias é sempre útil;

Observação:

Para não tornar a leitura excessivamente repetitiva, não enumeraremos as demais sugestões, pois estas são totalmente idênticas às de números 2, 3, 4, 5, 6 e 7, já listadas na Variante anterior do Nim.

Nim (Variante III - simplificada)

Para este jogo, vamos utilizar regras semelhantes às apresentadas na sessão 3.2.4, onde o jogo foi chamado de Variante III. Como o leitor deve recordar, mostramos que esta variante do Nim pode apresentar graus de complexidade bastante diferentes, portanto, para adequar o nível de complexidade ao público alvo de nosso trabalho, iremos nos restringir à utilização dos casos com apenas duas fileiras de palitos ou aos casos de três ou quatro fileiras com um número extremamente reduzido de palitos por fileira.

Descrição básica do jogo:

- Número de participantes: dois jogadores;
- Material utilizado: n fileiras de palitos, com quantidades x_1, x_2, ..., x_n de palitos em cada fileira, todas dispostas lado a lado sobre uma mesa;
- Objetivo do jogo: ser aquele que retira o último (ou os últimos) palito;
- Regras do jogo:
  1. Joga-se de forma alternada;
  2. Cada jogador, em sua vez, deve retirar no mínimo 1 palito e no máximo uma fileira inteira de palitos.

O que se pretende desenvolver no aluno:

- Observação de padrões: após jogar algumas poucas vezes, especialmente no caso com apenas duas fileiras, espera-se que o aluno perceba alguns padrões que o conduzem a boas jogadas, e que, ao notar que isto lhe trás vantagens, o aluno passe a buscar novos padrões, ganhando assim um incentivo para aquisição deste hábito;
- Raciocínio lógico dedutivo: a reflexão para encontrar os padrões e determinar as boas jogadas ajuda a exercitar esta capacidade tão importante, que é a principal motivação para o uso desta variante, já que ela não esta, ao menos num primeiro momento, diretamente ligada a nenhum conteúdo específico;

Sugestões de aplicação:

Observação: Não parece haver, a princípio, um momento mais ou menos adequado à aplicação desta variante do Nim, no mais, as sugestões são totalmente idênticas as de números 3, 4, 5 e 7 da variante II e, por esta razão, não serão listadas.

Jogo das Correntes

Esta é uma das diversas variações do jogo de Nim que não se baseiam na retirada de objetos. O Jogo das Correntes desenrola-se em um tabuleiro e utiliza uma única peça. Como podemos notar, o jogo é visualmente muito diferente das demais variações do jogo de Nim até aqui tratadas, porém, o leitor irá perceber que a formulação de uma estratégia de vitória guarda grandes semelhanças com as variações do Nim apresentadas anteriormente.

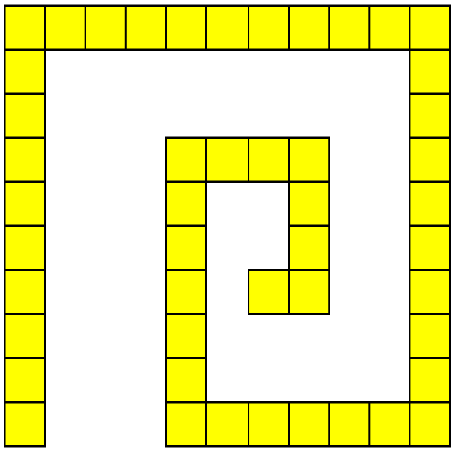

Figura 4.1: Jogo das Correntes

Descrição básica do jogo:

- Número de participantes: dois jogadores;
- Material utilizado: um tabuleiro com N casas e uma peça (algo como uma tampinha de garrafa, por exemplo);
- Objetivo do jogo: ser aquele que coloca a peça na última casa do tabuleiro;
- Regras do jogo:
  1. Joga-se de forma alternada;
  2. Cada jogador, em sua vez, deve avançar com a peça no mínimo uma e no máximo n (quantidade pré-determinada) casas no tabuleiro.

O que se pretende desenvolver no aluno:

- Observação de padrões: após jogar algumas vezes, espera-se que o aluno perceba alguns padrões que o conduzam a boas jogadas, e que, ao notar que isto lhe trás vantagens, passe a buscar novos padrões, iniciando a aquisição deste hábito;
- Construção de analogias: dada a similaridade estratégica do Jogo das Correntes com as duas primeiras variantes tratadas nesta sessão, após jogar algumas poucas vezes, espera-se que o aluno perceba algumas semelhanças que o levem a fazer analogias com as variantes citadas e que isso o conduza a, com maior frequência, construir esquemas de comparação entre algo que lhe é desconhecido e algo a que já esteja habituado;
- Raciocínio lógico dedutivo: a reflexão para encontrar os padrões e determinar as boas jogadas ajuda a exercitar esta capacidade tão importante;
- Reforçar conceitos relacionados à Divisão e/ou ao conceito de Múltiplo: após observar os padrões e perceber as semelhanças entre o Jogo das Correntes e as variantes I e II, o aluno é conduzido, sozinho ou com o auxílio do professor, a utilizar o conceito de resto de uma divisão para determinar a primeira jogada a ser efetuada e/ou o conceito de múltiplo, determinando as boas jogadas.

Sugestões de aplicação:

1. Acreditamos que o momento mais propício para uma primeira utilização do Jogo das Correntes, seja após se ter trabalhado, ou quando se deseje reforçar, conteúdos relacionados à operação de divisão e/ou ao conceito de múltiplo, para que o aluno tenha mais facilidade em relacioná-los com o jogo e assim tenha a oportunidade de exercitá-los dentro de um contexto;
2. Embora o tabuleiro não tenha, originalmente, uma numeração, consideramos propício para percepção de regularidades e padrões, bem como à comparação com outras variantes do Nim, que o tabuleiro seja numerado;
3. Dada a extrema semelhança entre o Jogo das Correntes e outras variantes do Nim, é importante levar o aluno a buscar similaridades que o ajudem a solucionar o jogo atual, reconhecendo relações e fazendo analogias;

Observação:

Novamente, daqui em diante, as sugestões são idênticas as de números 2, 3, 4 e 7, referentes à variante II e não serão listadas.

Algumas sugestões de atividades escritas, que buscam guiar o aluno na formulação de suas estratégias e a relacioná-las com conceitos matemáticos, podem ser encontradas no Apêndice (ver A.5.3).

4.3.2 Torre de Hanói

Como foi mencionado anteriormente, o jogo Torre de Hanói foi criado em 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas e, embora possua regras muito simples, aborda vários conceitos matemáticos, podendo ser utilizado desde os primeiros anos de escolaridade até o Ensino Superior (para Ensino Superior ver Barros (2011)).

Figura 4.2: Torre de Hanói

Por ser um jogo bastante conhecido e utilizado, a Torre de Hanói frequentemente é encontrada no acervo de jogos da própria escola, mas, mesmo que não seja este o caso, não é difícil confeccioná-lo. Uma versão bastante simples e de fácil confecção é a desenvolvida pelo professor Alexandre Costa (ver Costa (2010)), cujo processo de construção transcrevemos a seguir:

Construção da torre

- Sobre um pedaço retangular de papelão toma-se um dos cantos e desenha-se com o auxilio da régua um quadrado de 8x8 cm, ao lado desse quadrado desenha-se outro de 7x7 cm, prosseguimos desenhando quadrados cada vez menores com a diferença de 1 cm do anterior até obtermos 6 quadrados;

- Os quadrados serão as peças que substituirão os discos e devem ser enumerados de 1 a 6 da menor para a maior; em seguida recortamos esses quadrados que empilhados do maior para o menor formando uma torre de 6 peças;

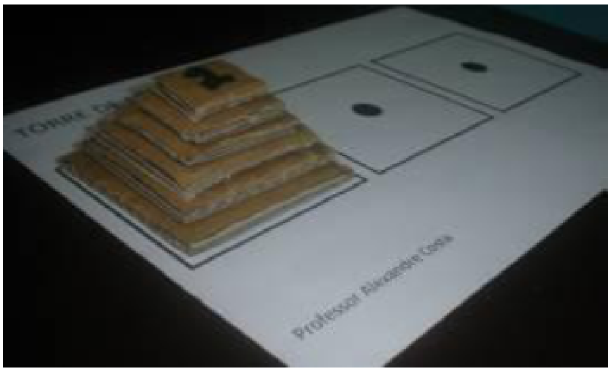

Figura 4.3: Protótipo da Torre de Hanói

Após a confecção das peças o professor disponibiliza uma folha onde as peças serão posicionadas, ela fará o papel das hastes.

Figura 4.4: Folha que serve de base para a Torre de Hanói

É claro que há várias outras formas de se confeccionar a Torre de Hanói, porém, a vantagem do método do professor Alexandre Costa reside em sua simplicidade, que possibilita que alunos de 6° e 7° anos do Ensino Fundamental efetuem a construção sem grandes dificuldades.

Observação:

Em nossa prática o método acima apresentado não foi utilizado, pois, já havíamos confeccionado as Torres de outra maneira, a qual descreveremos no Apêndice (ver A.1).

Descrição básica do jogo:

- Número de participantes: um jogador;
- Material utilizado: três hastes, uma base para fixar as hastes e um número n de peças de tamanhos distintos, que possuam um orifício no centro para que possam ser inseridas nas hastes;
- Objetivo do jogo: transferir, de uma das hastes (haste inicial) para uma das outras (haste final), uma torre formada pelas n peças, de modo que as peças estejam, ao fim da tarefa, na mesma ordem de tamanho que no início (com as maiores em baixo das menores);
- Regras do jogo:
  1. É permitido mover apenas uma peça por vez;
  2. Não é permitido que uma peça fique sobre uma outra que seja menor que ela própria.

O que se pretende desenvolver no aluno:

- Observação de padrões: após jogar algumas vezes, espera-se que o aluno perceba alguns padrões na sequência de movimentos das peças, que irão ajudá-lo a solucionar o jogo. Deseja-se assim reforçar a aquisição deste hábito;

- Construção de analogias: o aluno poderá perceber sozinho ou com ajuda do professor, que a resolução do jogo com um número pequeno de peças dá pistas importantes para a resolução com quantidades maiores de peças e, esta percepção poderá levá-lo a fazer comparações e construir analogias;

- Raciocínio lógico dedutivo: a procura por padrões e a reflexão para construção de comparações e analogias leva o aluno a exercitar sua capacidade de raciocínio lógico dedutivo;

- Reforçar a potenciação: o aluno poderá fazer uso da potenciação (potências de 2) para realizar o cálculo do número mínimo de movimentos num jogo com n peças.

Sugestões de aplicação:

1. Acreditamos que o momento mais propício para uma primeira utilização da Torre de Hanói, seja após se ter trabalhado, ou quando se deseje reforçar, conteúdos relacionados à potenciação, isso devido ao fato de que a fórmula que permite calcular o número mínimo de movimentos ($M_n = 2^n - 1$, onde M_n representa o número mínimo de movimentos num jogo com n peças), está diretamente relacionada ao cálculo de potências de 2.

2. A dedução da fórmula, pelos alunos, não é muito fácil e quase sempre exige auxílio do professor, chamando atenção para os valores já obtidos e dando dicas (confesso que na minha experiência, por várias vezes, acabei por fornecer a fórmula, atitude esta que, agora tenho certeza, deve ser evitada);

3. No intuito de facilitar a percepção de padrões pelos alunos, pode ser interessante pedir que eles registrem suas jogadas numa folha com esta finalidade, a qual pode ser confeccionada pelo professor (sugestão em A.2) ou por eles próprios;

4. Consideramos ser favorável ao andamento da aula, em termos de organização, a separação dos alunos em pequenos grupos de até quatro componentes (temos preferência por grupos de 3), pois, entre outros fatores, facilita a anotação das jogadas proposta acima e favorece a comunicação e as discuções entre os alunos;

5. Embora alguns alunos reclamem, por considerarem excessivamente fácil, pedir que eles registrem o número de movimentos com uma e duas peças no jogo é muito

importante no caso de se pretender que eles cheguem à fórmula para o número mínimo de movimentos;

6. Instigar a curiosidade e motivar os alunos costuma ser proveitoso. Algumas perguntas e dicas em momentos oportunos podem ajudar, assim como parabenizar por uma boa jogada ou elogiar alguma descoberta ou um comentário feito por eles.

7. A lenda que envolve o fim do mundo, anexada ao jogo original por seu criador Edouard Lucas, pode ser um ponto de partida interessante para uma primeira apresentação do jogo aos alunos por despertar a curiosidade.

Algumas sugestões de atividades escritas, que buscam guiar o aluno na formulação de suas estratégias e a relacioná-las com conceitos matemáticos, podem ser encontradas no Apêndice (ver A.5.1).

Capítulo 5

Conclusão

É inegável que diversos jogos estão diretamente ligados à matemática, especificamente, os jogos Torre de Hanói e Nim se mostraram matematicamente ricos em vários níveis, inclusive no âmbito do trabalho com turmas de 6º e 7º Ano do Ensino Fundamental. Nesse nível, a Torre Hanói possibilita o desenvolvimento de um trabalho que, além de abordar questões inerentes ao desenvolvimento do raciocínio lógico, percepção de padrões, criação de analogias, entre outros, se relaciona com a potenciação, conteúdo este de grande importância, tendo em vista que é pré-requisito no tratamento de diversos outros assuntos e, naturalmente, acompanhará o aluno em toda sua vida escolar. Já o jogo de Nim, permite uma abordagem interessante sobre o conceito de múltiplo e também pode ser relacionado à divisão euclidiana.

Há muitos outros jogos, que, da mesma maneira que a Torre de Hanói e o Nim, podem se mostrar matematicamente ricos e, que também permitem abordagens bastante atrativas em vários níveis de escolaridade. Alguns jogos, com os quais tivemos contato durante a pesquisa, nos pareceram tão interessantes em termos de aplicação em turmas de Ensino Fundamental que mereceriam várias páginas de estudo posteriormente, mas, por enquanto, podemos apenas mencionar alguns deles, tais como "O Salto de Rã", que pode ser trabalhado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior (ver Barros (2011)) e que nos parece extremamente interessante no que tange ao desenvolvimento do raciocínio lógico, o "É esticá-lo"e o "Ge-Ó-Pá"que trabalham conteúdos de Geometria, como perímetro e área e propriedades dos quadriláteros, através do uso do Geoplano e os jogos de Trilhas, entre eles a "Trilha do Resto"que trabalha de forma divertida o cálculo mental e conteúdos relacionados à Divisão como os Critérios de Divisibilidade.

Através deste trabalho, buscamos mostrar que os jogos estão ligados não apenas à diversão e ao entretenimento, mas também à história do próprio homem, à educação e, é claro, à matemática.

Ao percorrermos alguns momentos da história dos jogos, ficou evidente a sua relação com a matemática. Muitos jogos foram estudados por grandes matemáticos, alguns foram criados por eles, outros foram fontes de inspiração para o desenvolvimento da própria matemática e até motivaram o surgimento de novos ramos desta ciência. Se os jogos foram fonte de inspiração e motivação para algumas das mentes mais brilhantes de todos os tempos, por que não poderiam ser, também, para nossas crianças e jovens?

Quando fizemos a análise matemática da Torre de Hanói e do Nim, tivemos um exemplo prático, muito claro, da relação que a matemática e os jogos podem ter entre si. Vimos o quanto a matemática é importante para se determinar estratégias de resolução e vitória nestes dois jogos e tivemos a oportunidade de abordar alguns tópicos da matemática de uma forma diferente e interessante.

Nossa pesquisa nos levou a descobrir os "pontos fortes"do trabalho com jogos e a conhecer as vantagens de se usar esse instrumento em sala de aula, mas também nos alertou sobre algumas desvantagens que podem se apresentar em nossa prática, em especial, se não forem tomados certos cuidados e se não houver um planejamento prévio adequado. Buscamos oferecer uma proposta metodológica que possa oferecer algum subsídio ao trabalho docente e, finalmente, apresentamos uma proposta de uso da Torre de Hanói e do Nim que se adéqua ao Segundo Segmento do Ensino Fundamental, em especial, ao 6º e ao 7º Ano, explicitando suas regras e os materiais necessários à sua prática, destacando alguns dos conteúdos que se poderiam trabalhar e, por fim, oferecendo algumas sugestões de aplicação baseadas na própria pesquisa que fora realizada ou em nossa prática em sala de aula.

Ao se propor a utilizar jogos, o professor deve planejar a sua prática de acordo com os objetivos traçados, pois, os jogos, quando bem utilizados, se mostram extremamente eficientes na tarefa de motivar, de despertar a curiosidade, de fomentar o desejo do saber, enfim, eles são uma ferramenta poderosa para ajudar o professor a trazer de volta à sala de aula o prazer de aprender.

O jogo sempre acompanhou a humanidade em sua caminhada ao longo da história. O jogo é interior ao Homem, faz parte de sua natureza. Desde a antiguidade que o jogo, além de simples diversão, é também ferramenta de ensino, mas, é atualmente, que os jogos, em especial, aqueles que chamamos jogos matemáticos, estão, cada vez mais, se mostrando um instrumento de grande importância para este fim, o nobre e indispensável fim de ensinar.

Referências Bibliográficas

Barros, R. J. A. D. R. (2011). A utilização de jogos concretos na aprendizagem de indução finita no Ensino Superior. Tese de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Bernstein, P. L. (1997). *Desafio aos Deuses*. Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, 23ª edição.

Borin, J. (1996). *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática*. CAEM-IME/USP, 2007, São Paulo, 6ª edição.

Brasil (1998). Parâmetros curriculares nacionais : Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. Relatório Técnico, Ministério da Educação- Secretaria de Ensino Fundamental, DF, Brasil.

Candeias, R. P. C. B. B. (2007). Contributo para a História das Inovações no Ensino da Matemática no Primário: João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Portugal.

Costa, A. D. (2010). Torre de Hanói, uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio. Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Costa, C. D. S. (2007). Teoria dos Jogos e a Relação entre o 'Teorema Minimax' de John von Neumann e o 'Equilíbrio de Nash' de John Nash.

Estrela, R. A. P. (2012). Jogos combinatórios e jogos de soma nula. Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro-Portugal.

Grando, R. C. (2000). *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Educação, Brasil.

Hefez, A. (2011). *Elementos de Aritmética*. SBM, Rio de Janeiro, 2ª edição.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 da *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, Rio de Janeiro, 9º edição.

Lima, M. D. C. F. D., Silva, V. V. S. D., e e Silva, M. E. L. (2013). Jogos educativos no âmbito educacional: um estudo sobre o uso dos jogos no Projeto MAIS da Rede Municipal do Recife.

Machado, N. J. (1992). *Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins*, volume 2 da *Coleção Questões da Nossa Época*. Cortez Editora, São Paulo, 1ª edição.

Mota, P. C. C. L. D. M. (2009). Jogos no Ensino da Matemática. Tese de Mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, Portugal.

Neto, J. P. e Silva, J. N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos - O Prazer da Matemática*. Gradiva, Lisboa, 1ª edição.

Quintas, A. D. B. N. (2009). A Aprendizagem da Matemática Através dos Jogos. Tese de Mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, Portugal.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007a). *A Aritmética Binária + Jogo Asiático 'Go'*, volume 4 da *Colecção Jogos com História*.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007b). *A Geometria + Puzzle 'Stomachion'*, volume 6 da *Colecção Jogos com História*. Público e Visão.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007c). *As Somas Nim + Jogo 'Ouri'*, volume 3 da *Colecção Jogos com História*. Público e Visão.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007d). *Matemática Recreativa + Puzzle Anéis Chineses*, volume 7 da *Colecção Jogos com História*. Público e Visão.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007e). *Os Fractais + Pluzzle 'Torre de Hanói'*, volume 5 da *Colecção Jogos com História*. Publico e Visão.

Santos, C. P. D., Neto, J. P., e Silva, J. N. (2007f). *Os Quadrados Latinos + Puzzle Hexágono Mágico*, volume 10 da *Colecção Jogos com História*. Público e Visão.

Silva, E. M. D. e Savioli, A. M. P. D. D. (2012). O conceito de indução finita na compreensão de estudantes de um curso de matemática. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 5:127–148.

Torres, D. F. M. (2002). Cavaleiro de Euler. *Cadernos de Matemática*.

Watanabe, R. (2004). Uma lenda: Torre de Hanói. *Explorando o Ensino da Matemática*, Volume II, pág. 132–135. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasil, Brasília.

Zeni, J. R. D. R. (2007). Três Jogos para o Ensino e Aprendizagem de Números e Operações no Ensino Fundamental. Pesquisa e Extenção.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Sugestão de confecção para o jogo Torre de Hanói

Em nossa prática, inicialmente, a Torre de Hanói foi confeccionada com peças e base em EVA preto de aproximadamente 0,8 cm de espessura e hastes de madeira com base quadrada de aresta de aproximadamente 1,4 cm e cerca de 14 cm de altura. Atualmente, por considerarmos favorável atrair o máximo possível a atenção dos alunos, estamos efetuando a confecção do jogo com EVA colorido, visando torná-lo visualmente mais interessante.

Naturalmente, o primeiro passo é a aquisição do material. Sugerimos que se tenha especial cuidado para que as hastes de madeira não deixem farpas, já que o material será usado com crianças.

Figura A.1: Hastes para a Torre de Hanói

Já de posse do material, usamos um estilete para efetuar os devidos cortes no EVA, obtendo as partes do jogo no formato desejado (optamos por quadrados, pois, nos pareceu mais econômico e fácil recortar neste formato).

Em nossa prática utilizamos as seguintes medidas:

$p_1 = 4cm$

$p_2 = 5cm$

$p_3 = 6cm$

$p_4 = 7,5cm$

$p_5 = 9cm$

$p_6 = 10,5cm$

$p_7 = 12cm$

$p_8 = 13,5cm$

$Base = 30cm$

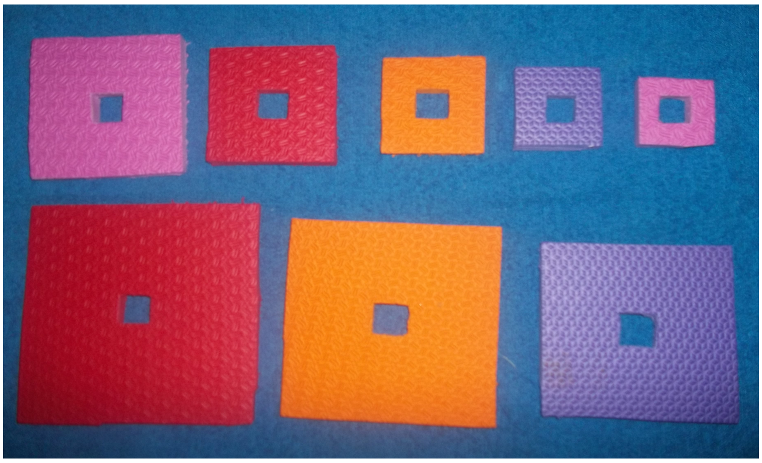

Figura A.2: Peças para a Torre de Hanói

No centro de cada peça, recorta-se um quadrado com arestas de medidas alguns milímetros maiores que as arestas das hastes (em nosso caso recortamos com cerca de 1,7 cm), para que não haja dificuldades em colocar ou retirar as peças das hastes durante o jogo.

Por fim, perfuramos a base em três pontos para encaixar as hastes, um deles com o centro a 7 cm da borda mais próxima e centralizado em relação a duas das outras bordas, e os outros dois com o centro a 7 cm de duas bordas (como se estivessem, cada um, sobre uma diagonal da base), como mostra a figura:

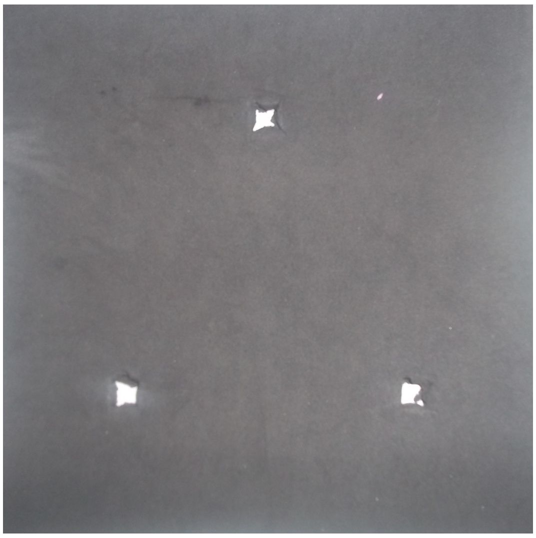

Figura A.3: Base para a Torre de Hanói

Agora basta encaixar as peças e formar a Torre de Hanói.

Figura A.4: Jogo Torre de Hanói

A.2 Sugestão de folha de registros para o jogo Torre de Hanói

Total de Peças	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Total de Movimentos
1		X	X	X	X	X	X	X	
2			X	X	X	X	X	X	
3				X	X	X	X	X	
4					X	X	X	X	
5						X	X	X	
6							X	X	
7								X	
8									

Figura A.5: Torre de Hanói - Modelo de Folha de Registros

Total de Peças	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Total de Movimentos
1	1	X	X	X	X	X	X	X	1
2	2	1	X	X	X	X	X	X	3
3	4	2	1	X	X	X	X	X	7
4	8	4	2	1	X	X	X	X	15
5	16	8	4	2	1	X	X	X	31
6	32	16	8	4	2	1	X	X	63
7	64	32	16	8	4	2	1	X	127
8	128	64	32	16	8	4	2	1	255

Figura A.6: Torre de Hanói - Modelo de Folha de Registros preenchida

Observação:

É normal que os alunos tenham dificuldade em preencher corretamente a tabela, em especial, para valores grandes. O auxílio do professor é muito importante.

A.3 Sugestão de folha de registro para o jogo de Nim (Variantes I e II)

As folhas de registros sugeridas não são, em hipótese alguma, indispensáveis, visto que os próprios alunos poderiam organizar o registro das jogadas em uma folha branca ou de caderno, porém, em termos de organização acreditamos que elas possam ajudar a tornar a compreensão dos registros mais fácil.

A.3.1 Sugestão de folha de registro (tipo 1)

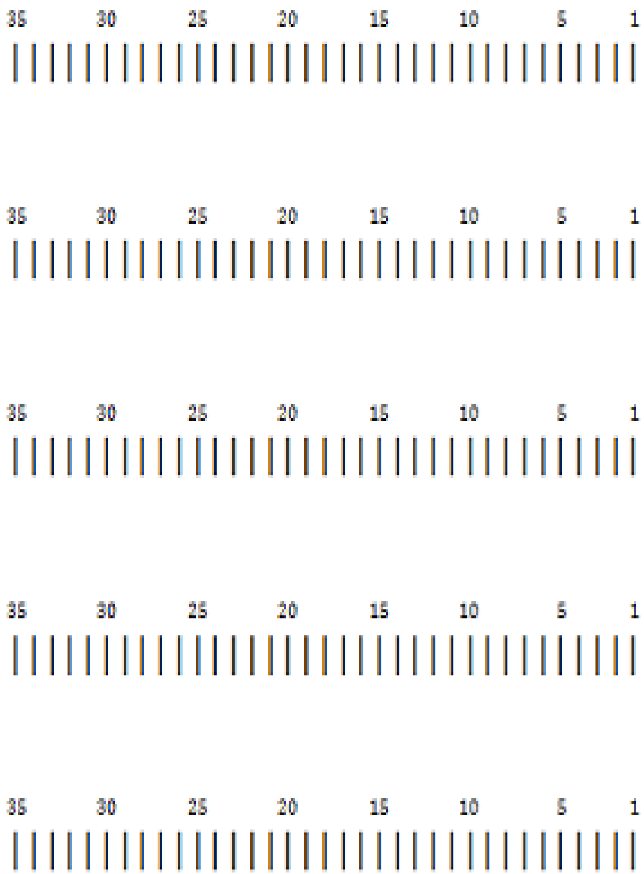

Figura A.7: Nim - Folha de Registros (tipo 1)

Como podemos ver a seguir, nesse primeiro tipo de folha de registros, a quantidade de "palitos"em cada sequência de registros pode ser facilmente alterada, adequando-se a quantidade real de palitos utilizados a cada partida.

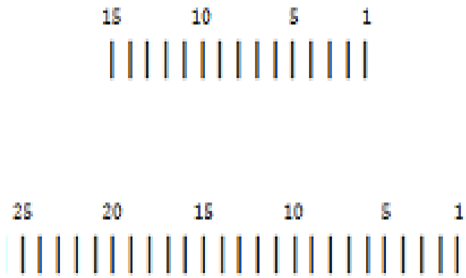

Figura A.8: Nim - Folha de Registros (tipo 1) - modificada

A.3.2 Sugestão de folha de registro (tipo 2)

Neste segundo tipo de folha de registro, fica a critério do professor o uso de uma única faixa para anotar as jogadas de várias partidas, como no exemplo a seguir.

Retiradas		Nº de palitos
Jogador A	Jogador B	10
1	—	9
—	2	7
3	—	4
—	1	3
3	—	0
—		
X	—	10
—	3	7
2	—	5
—	1	4
1	—	3
—	3	0
	—	
—	X	10
2	—	8
—	3	5
1	—	4
—	2	2
2	—	0
—		
X	—	15
—	1	14
2	—	12
—	2	10
1	—	9
—	2	7
3	—	4
—	3	1
1	—	0

Figura A.9: Nim - Folha de Registros (tipo 2) - exemplo de preenchimento

Retiradas		Nº de palitos
Jogador A	Jogador B	

Retiradas		Nº de palitos
Jogador A	Jogador B	

Retiradas		Nº de palitos
Jogador A	Jogador B	

Figura A.10: Nim - Folha de Registros (tipo 2)

A.4 Sobre a nossa prática

Neste trabalho já falamos sobre as razões que nos levaram a defender o uso dos jogos em sala de aula, sobre a grande relação deles com a matemática, sobre os diversos benefícios e vantagens que eles podem trazer à nossa prática, sobre as possíveis desvantagens que podem surgir pelo seu uso inadequado, entre outros pontos também abordados. A maior parte do que foi apresentado é baseado na pesquisa que realizamos, mas, certamente não teríamos escolhido falar a respeito de jogos neste trabalho se não houvesse ocorrido um contato prévio com eles.

Nossa experiência, diferente do que se possa imaginar, não é "recheada de acertos", até porque todo o embasamento teórico que poderia nos ajudar a "desviar das falhas"só começou a ser adquirido com o início da pesquisa, o que ocorreu a não muito tempo, ou seja, boa parte das desvantagens que foram apresentadas na sessão 4.2 foram vivenciadas na prática por nós, pois, utilizamos vários jogos seguindo apenas a nossa intuição, experimentando de uma maneira e depois de outra e muitas vezes sem ter um objetivo consolidado.

Muitos erros foram cometidos, hora dávamos respostas ao invés de "dar as perguntas", hora fazíamos perguntas difíceis demais, às vezes tentávamos usar um jogo e só depois percebíamos que o material não seria suficiente. Houve vezes que tentamos "obrigar"os alunos a jogar e outras em que os deixamos "soltos demais"e, mesmo com tudo isso, ainda escolhemos "defender"o uso dos jogos.

A pergunta é: Por quê?

A resposta não está na introdução deste trabalho, não está nos PCNs ou nos livros de pedagogia, a resposta está na sala de aula. A resposta está no quanto nossos alunos gostavam quando a aula tinha momentos com jogos, em perceber que a aula de matemática já não era a mais "odiada", em ver que alguns daqueles alunos que mais pareciam "estar viajando em outro mundo"enquanto explicávamos a matéria agora prestavam atenção e tentavam aprender e em ver que vários daqueles que não participavam das aulas agora começavam a demonstrar um pouco de interesse e alguns até buscavam ajudar outros colegas.

Não queremos passar a falsa impressão de que os jogos são "a solução de nossos problemas", até porque, nem todos os alunos se sentiam motivados ou se tornavam mais participativos com o uso dos jogos (e mesmo que fosse este o caso, não é possível utilizá-los em todas as aulas), sempre havia aqueles que não conseguíamos atingir como gostaríamos. Para esses alunos, acreditamos que existam outras "ferramentas"que talvez tenham um melhor resultado, infelizmente, por várias vezes não encontramos tal "ferramenta".

O que podemos afirmar, não devido somente à pesquisa, mas principalmente devido ao que vivenciamos, é que a motivação, a vontade de aprender e a participação dos alunos nas aulas, na maioria dos casos, sofre uma melhora e mesmo com todos os equívocos que ainda possamos vir a cometer, acreditamos que vale a pena fazer uso de jogos na sala de aula.

A.5 Sugestões de atividades

As atividades propostas a seguir representam apenas alguns dos possíveis exemplos de exercícios escritos que podem de alguma maneira se relacionar com os jogos Torre de Hanói e Nim. Nestas atividades tentamos oferecer alguns questionamentos que possam auxiliar os alunos a refletirem a respeito das estratégias que estão utilizando e/ou ajudá-los a formular novas estratégias, além disso, há também exercícios voltados para a relação que alguns conteúdos matemáticos têm com esses dois jogos.

Naturalmente, o professor que se propor a aplicá-los, não só pode, como deve alterá-los de acordo com as suas necessidades e objetivos, bem como criar outros exercícios e atividades que possam se adequar melhor ao trabalho com seus alunos.

Devemos ressaltar que as atividades escritas aqui propostas, até a conclusão do presente trabalho, ainda não haviam sido aplicadas em sala de aula devido à dificuldades relacionadas à disponibilidade de tempo para estruturar adequadamente sua aplicação, portanto, não é possível relatar se haveria eficácia em sua utilização.

A.5.1 Atividades relacionadas à Torre de Hanói

Atividade 1:

Na atividade a seguir, buscamos levar o aluno a fazer uma reflexão que possa auxiliá-lo a desenvolver uma estratégia básica (ou a adquirir maior entendimento de uma estratégia já desenvolvida) para a resolução da Torre de Hanói com um número pequeno de peças, esperando que ele possa estender a estratégia desenvolvida para quantidades maiores de peças.

Pode ser interessante que ele esteja em contato com o jogo enquanto responde as questões.

Torre de Hanói - Atividade I

1-Responda:

a) No jogo com 2 peças, quantos movimentos você usou para transferir a torre? É possível mover essa torre com menos movimentos?

b) Para mover a peça maior da haste inicial para a haste final, o que você fez com a outra peça?

c) No jogo com 3 peças, quantos movimentos você usou para transferir a torre? É possível mover essa torre com menos movimentos?

d) Para mover a peça maior da haste inicial para a haste final, o que você fez com as outras peças?

e) No jogo com 4 peças, quantos movimentos você usou para transferir a torre? É possível mover essa torre com menos movimentos?

f) Para mover a peça maior da haste inicial para a haste final, o que você fez com as outras peças? Explique o motivo:

g) Em cada um dos casos acima você agiu de forma parecida? Se a resposta for "sim", quer dizer que você já começa a ter uma estratégia para resolver o jogo. Explique sua estratégia.

Atividade 2:

Nesta segunda atividade que iremos propor, a intenção é fazer com que o aluno passe a relacionar o número mínimo de movimentos para solucionar o jogo com as potências de base 2. Naturalmente, a potenciação já deve ter sido apresentada aos alunos antes da aplicação desta atividade.

Acreditamos que a maioria dos alunos consigua preencher a tabela de cálculos sem grandes dificuldades, assim como as três primeiras linhas da tabela de movimentos. Já a quarta linha da tabela de movimentos é a que acreditamos que possa oferecer alguns problemas, já que com 4 peças no jogo, não é raro que os alunos utilizem mais de 15 movimentos para transferir a torre, neste caso, certamente alguns deles irão precisar do auxílio do professor e precisarão fazer algumas tentativas extras.

No jogo com 5 peças, certamente, na maioria dos casos, serão necessárias algumas tentativas (talvez várias), sendo muito importante o incentivo e o auxílio do professor para que não ocorra a falta de motivação.

Acreditamos que a troca de ideias entre os alunos possa vir a ajudar, sendo a separação em pequenos grupos uma possibilidade a ser considerada.

Torre de Hanói - Atividade II

1-Complete as duas tabelas a seguir e, em seguida, responda:

Número de peças	Número de movimentos que você usou
1	
2	
3	
4	

Figura A.11: Número de movimentos

Valor de n	Cálculo da potência
1	$2^1 =$
2	$2^2 =$
3	$2^3 =$
4	$2^4 =$

Figura A.12: Cálculo de potências

a) Observando os números de movimentos para resolver o jogo e o resultado dos cálculos das potências de base 2, você notou algum padrão? Se notou, qual?

b) Você acha que esse padrão também pode ocorrer com quantidades maiores de peças?

c) Se o padrão continuar a existir, com 5 peças no jogo, quantos movimentos seriam necessários?

2-Jogue com 5 peças, tentando não errar e contando os movimentos. Veja se você consegue obter o valor que havia calculado no item c) do exercício anterior.

Atividade 3:

Nesta atividade, a ideia é tentar fazer com que o aluno consolide a relação entre o número mínimo de movimentos e as potências de base 2, a qual iniciamos na atividade anterior. Além disso, o número de movimentos das peças de cada tamanho mostram padrões interessantes, também relacionados às potências de base 2, que poderão ser observados pelos alunos a partir do preenchimento dos valores iniciais da tabela.

Embora possa haver um ou outro aluno que tenha adquirido domínio suficiente da estratégia de resolução da Torre de Hanói a ponto de conseguir realizar, sem erros, a transferência das torres com 7 ou 8 peças, acreditamos que a grande maioria não terá tamanha concentração, logo, a ideia para preencher a tabela, é a de levá-los a perceber os padrões, efetuando a movimentação da torre apenas até 6 peças e deixar que eles deduzam o restante das jogadas até completarem a tabela totalmente.

Em especial para as torres de 5 e de 6 peças, pode ser que alguns alunos, mesmo com as "dicas"do professor, não consiguam completar a movimentação sem cometer erros. Nesses casos, o professor mostrar-lhes a resolução para que contem os movimentos pode ser uma alternativa a se pensar.

Torre de Hanói - Atividade III

1-Sabendo que P1 é peça menor, P2 é a segunda menor, P3 é a terceira menor e assim por diante, até P8 que é a peça maior, preencha a tabela de movimentos a seguir.

Total de Peças	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Total de Movimentos
1		X	X	X	X	X	X	X	
2			X	X	X	X	X	X	
3				X	X	X	X	X	
4					X	X	X	X	
5						X	X	X	
6							X	X	
7								X	
8									

Figura A.13: Tabela de Movimentos

Você deve ter observado um padrão nos números de movimentos de cada peça. Que padrão é esse?

2-Complete a tabela a seguir, compare-a com a tabela acima e responda:

Valor de n	Valor de 2^n
$n = 1$	$2^1 =$
$n = 2$	$2^2 =$
$n = 3$	$2^3 =$
$n = 4$	$2^4 =$
$n = 5$	$2^5 =$
$n = 6$	$2^6 =$
$n = 7$	$2^7 =$
$n = 8$	$2^8 =$

Tabela A.1: Cálculo de potências

Quanto é 2^9? Qual será o número de movimentos no jogo com 9 peças?

Atividade 4:

Esta é a última atividade proposta relacionada à Torre de Hanói. Ela se inicia com um nível de dificuldade baixo, mas que se torna rapidamente maior, por esse motivo, acreditamos que se deva refletir a respeito do grau de desenvolvimento da turma e, dependendo do caso, talvez seja interessante modificar alguns valores para que o possível excesso de dificuldade não gere desmotivação.

Os objetivos nesta atividade são desenvolver a habilidade de cálculo de potências de base 2 (utilizando a fórmula para o cálculo do número mínimo de movimentos $M_n = 2^n - 1$), trabalhar o algoritmo da divisão, com especial atenção para importância do resto, (através das conversões de segundos em minutos, horas, etc) e desenvolver a capacidade de resolução de problemas e de raciocínio lógico.

Consideramos que o uso de calculadora possa ser bastante útil nos casos dos "desafios 1 e 2", porém, no caso do "desafio dos desafios", calculadoras comuns não comportam a quantidade de algarismos do número referente a quantidade de movimentos, portanto, se o professor quiser aplicar este último desafio (acreditamos que os demais exercícios já cumpram com nossos objetivos), deverá estar atento a isso.

Torre de Hanói - Atividade IV

Você se lembra da lenda sobre a Torre de Hanói que contamos outro dia? Bom, ela dizia que os monges de um antigo templo na Índia receberam uma ordem divina para transferir 64 discos de ouro de uma estaca de diamante para uma outra, tudo seguindo as regras da Torre de Hanói, e que quando eles terminassem a tarefa, o mundo acabaria.

É claro que não acreditamos que essa lenda seja verdadeira, mas hoje, vamos tentar descobrir se essa tarefa seria muito demorada ou não...

Vamos fazer de conta que os monges conseguem fazer um movimento a cada segundo e calcular quanto tempo eles levam para resolver o jogo com algumas quantidades de peças diferentes. Vamos começar com poucas peças...

a) Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 3 peças? (Responda em segundos)

b) Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 5 peças? (Responda em segundos)

c) Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 6 peças? (Responda em minutos e segundos)

d) Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 8 peças? (Responda em minutos e segundos)

e) Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 12 peças? (Responda em horas, minutos e segundos)

Preparado para os desafios?

Desafio 1: Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 18 peças? (Responda em dias, horas, minutos e segundos)

Desafio 2: Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo com 26 peças? (Responda em anos, dias, horas, minutos e segundos) Considere que 1 ano tem exatamente 365 dias.

Agora é a hora da verdade... Respira fundo e vai!!!!!!!!

Desafio dos desafios: Quanto tempo eles levariam para resolver o jogo como esta na lenda, ou seja, com 64 peças?

A.5.2 Em quanto tempo o mundo acabaria?

A atividade anterior nos remete à lenda associada à Torre de Hanói, que fala do fim do mundo, e também aos cálculos que nos fizeram concluir que os monges levariam cerca de 585 bilhões de anos (de acordo com as suposições feitas na sessão 3.4) para solucionar a torre com 64 peças. O raciocínio utilizado pelos alunos para resolver a atividade anterior pode ser semelhante ao usado por nós para determinar o referido período de tempo. A seguir detalhamos como procedemos:

Como, de acordo com a fórmula para o número mínimo de movimentos, o jogo com 64 peças necessita de um total de $M_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ movimentos e nós supomos que seria realizado um movimento a cada segundo, naturalmente, o tempo gasto na árdua tarefa seria de 18.446.744.073.709.551.615 segundos.

Porém, o valor obtido acima, quando dado em segundos, não nos fornece uma ideia clara do quanto a tarefa é demorada, então, lembrando que 60 segundos equivalem a 1 minuto, que 60 minutos equivalem a 1 hora e que 24 horas equivalem a 1 dia e, portanto, em 1 dia há $60 \times 60 \times 24 = 86.400$ segundos, efetuamos a divisão de 18.446.744.073.709.551.615 por 86.400 e obtemos o seguinte:

$$18.446.744.073.709.551.615 = 86.400 \times 213.503.982.334.601 + 25.215 \tag{A.1}$$

Agora temos que a tarefa é realizada em 213.503.982.334.601 dias e 25.215 segundos. Considerando que um ano tenha exatamente 365 dias (embora não seja este o verdadeiro valor, por praticidade, optamos por ele) e efetuando a divisão de 213.503.982.334.601 por 365, obtemos:

$$213.503.982.334.601 = 365 \times 584.942.417.355 + 26 \tag{A.2}$$

Assim chegamos a 584.942.417.355 anos, 26 dias e 25.215 segundos. Como $25.215 = 3600 \times 7 + 15$, o tempo gasto pelos monges seria de 584.942.417.355 anos, 26 dias, 7 horas e 15 segundos, o que aproximamos para cerca de 585 bilhões de anos.

A.5.3 Atividades relacionadas ao Nim

Atividade 1:

Nesta primeira atividade tentamos levar o aluno a refletir sobre a melhor estratégia a ser seguida colocando-o em algumas situações de jogo bastante simples, onde ele deverá optar pela melhor jogada a ser realizada.

Em seguida, pedimos que eles se coloquem no lugar de seu adversário, fazendo a jogada que viria após a sua própria, esperando assim que eles possam perceber eventuais falhas em sua estratégia inicial e, consequentemente, corrigí-las.

Atividade 2:

A segunda atividade tem semelhanças com a primeira, pois, num primeiro momento tenta levar o aluno a pensar se existe ou não uma maneira de sempre vencer, em seguida, o objetivo seria colocar o aluno em uma situação de jogo, bastante simples, e através de algumas perguntas e dicas conseguir guiá-lo em direção à formulação de uma estratégia de vitória e, por fim, sugerimos que seja promovida a discussão de ideias entre os alunos e a aplicação das estratégias em uma situação real de jogo, para que eles possam confirmar a eficiência de suas estratégias ou descobrir falhas e tentar corrigí-las.

Atividade 3:

A terceira atividade é idêntica à segunda, salvo pequenas alterações, em especial o aumento da quantidade de palitos. Porém, ao fim esperamos que o aluno já consiga fazer uma primeira relação com o conceito de múltiplo.

Assim como na segunda atividade, acreditamos que seja interessante levar os alunos a discutirem suas estratégias e jogarem para testá-las.

Nim - Atividade I

1- Imagine que você esta no meio de uma partida do Jogo de Nim, onde vence aquele que retirar o último palito. Leia com atenção e responda:

a) Você pode retirar 1 ou 2 palitos e seu adversário deixou 4 palitos. Quantos palitos você retira e por qual motivo?

b) Você pode retirar 1 ou 2 palitos e seu adversário deixou 5 palitos. Quantos palitos você retira e por qual motivo?

c) Você pode retirar 1 ou 2 palitos e seu adversário deixou 6 palitos. Quantos palitos você retira e por qual motivo?

d) Você pode retirar 1 ou 2 palitos e seu adversário deixou 7 palitos. Quantos palitos você retira e por qual motivo?

2- Volte ao exercício anterior e agora se coloque no lugar do seu adversário. Diga quantos palitos ele deveria retirar e o motivo.

Por exemplo, se na letra "a"você disse que iria retirar 2 palitos, então sobrariam os outros 2. O que seu adversário deveria fazer em seguida?

a) Quantos palitos você disse que iria retirar na letra a) e quantos sobrariam?

O que seu adversário deve fazer e por qual motivo?

b) Quantos palitos você disse que iria retirar na letra b) e quantos sobrariam?

O que seu adversário deve fazer e por qual motivo?

c) Quantos palitos você disse que iria retirar na letra c) e quantos sobrariam?

O que seu adversário deve fazer e por qual motivo?

d) Quantos palitos você disse que iria retirar na letra d) e quantos sobrariam?

O que seu adversário deve fazer e por qual motivo?

e) Em quais itens do exercício 1 você acha que pode ter jogado errado e por qual motivo?

Nim - Atividade II

1- Você acha que no Jogo de Nim a vitória depende mais da sorte ou da estratégia? Você acredita que pode haver uma estratégia que faça vencer sempre?

2- Imagine que você esta no meio de uma partida do Jogo de Nim, onde vence aquele que retirar o último palito. O jogo começa com 10 palitos, você é o primeiro a jogar e pode retirar 1 ou 2 palitos. Será que você consegue achar uma estratégia para vencer sempre?

Dica 1: Responda as perguntas com toda atenção!!!!!

a) Se você deixar 1 palito, quem vence? Por quê?

b) Se você deixar 2 palitos, quem vence? Por quê?

c) Se você deixar 3 palitos, quem vence? Por quê?

Dica 2: Faça de conta que agora o seu objetivo é deixar 3 palitos na mesa.

d) Se você deixar 4 palitos, quem vence? Por quê?

e) Se você deixar 5 palitos, quem vence? Por quê?

f) Se você deixar 6 palitos, quem vence? Por quê?

Dica 3: Faça de conta que agora o seu objetivo é deixar 6 palitos na mesa e conclua a sua estratégia.

3- Já conseguiu uma estratégia para vencer sempre? Se a resposta é sim, forme uma dupla com um colega para comparar suas estratégias. Elas são parecidas ou iguais?

4- Esta na hora de vocês testarem suas estratégias. Procurem outra dupla e os desafie para algumas partidas.

Nim - Atividade III

1- Você esta no meio de uma partida do Jogo de Nim, onde vence aquele que retirar o último palito. O jogo começa com 18 palitos, você é o primeiro a jogar e pode retirar 1, 2 ou 3 palitos. Será que você consegue achar uma estratégia para vencer sempre?

a) Se você deixar 1, 2 ou 3 palitos, quem vence? Por quê?

b) Se você deixar 4 palitos, quem vence? Por quê?

Dica 1: Faça de conta que agora o seu objetivo é deixar 4 palitos na mesa.

c) Se você deixar 5 palitos, quem vence? Por quê?

d) Se você deixar 6 palitos, quem vence? Por quê?

e) Se você deixar 7 palitos, quem vence? Por quê?

f) Se você deixar 8 palitos, quem vence? Por quê?

Dica 2: Agora o seu objetivo é deixar 8 palitos na mesa e conclua a sua estratégia.

2- Seguindo as regras do exercício anterior, é claro que, para poder vencer, na última jogada você não deve deixar palito algum na mesa, ou seja, 0 (zero) palitos.

a) Na penúltima jogada, quantos palitos você deve deixar?

b) E na antepenúltima jogada, quantos palitos você deve deixar?

c) E na jogada anterior? E na primeira jogada?

d) Escreva as quantidades de palitos que devem ser deixadas para o adversário em ordem crescente. O que você consegue observar?

A.6 O Teorema de Indução

Todo conteúdo da presente sessão foi retirado, exceto algumas poucas adaptações, de Lima et al. (2006) e Silva e Savioli (2012).

Como sabemos, N é um conjunto, cujos elementos são chamados de números naturais. A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando $n, n' \in N$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Evidentemente, esta explicação apenas substitui "sucessor"por "logo depois", portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor"não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, conhecidas como "axiomas de Peano"[1]. Tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas.

Em linguagem comum, os "axiomas de Peano"podem ser descritos da seguinte forma:

A) Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

B) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)

C) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

D) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais.

Utilizando a linguagem matemática e considerando N o conjunto dos números naturais, os axiomas de Peano são:

[1] Notável síntese, feita pelo matemático italiano Giussepe Peano (1858-1932), capaz de descrever concisa e precisamente o conjunto dos números naturais a partir de quatro fatos básicos.

a) existe uma função $s : N \longrightarrow N$, que associa a cada $n \in N$ um elemento $s(n) \in N$, chamado sucessor de n;

b) a função $s : N \longrightarrow N$ é injetiva;

c) existe um único elemento 1 no conjunto N, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in N$;

d) Se um subconjunto $X \subset N$ é tal que $1 \in N$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = N$.

A partir dos axiomas de Peano podemos enunciar "O Princípio de Indução Finita", que é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais.

Princípio de Indução Finita (Teorema):

Seja $P(n)$ uma proposição envolvendo um número natural n e suponha que:

a) $P(1)$ é verdadeira;

b) $\forall k \in N$, $P(k)$ verdadeira $\Longrightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$.

Demonstração:

Consideremos o seguinte subconjunto de N, $A = \{n \in N / P(n) verdadeira\}$. Observemos que $1 \in A$, pois $P(1)$ é verdadeira e decorre do item a) do teorema. Além disso, para todo $n \in A$, $P(n)$ verdadeira implica $P(n+1)$ verdadeira, que deriva do item b) do teorema, implicando que $n+1 \in A$. E, portanto, em decorrência do axioma d), concluímos que $A = N$.

A.7 A Soma Nim e o Teorema de Bouton

Nesta sessão, inicialmente, definiremos a Soma Nim e veremos que esta goza das propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e que cada número é o inverso de si mesmo, além de mostrarmos que é válida a Lei do Corte. Em seguida, apresentaremos o Teorema de Bouton e sua demonstração.

Todo conteúdo desta sessão, salvo pequenas adaptações, foi retirado de Estrela (2012).

A.7.1 A Soma Nim

Definição:

Se $x \in I\!N$, podemos escrevê-lo na forma $x = 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + ... + 2x_1 + x_0$, onde $x_i \in \{0, 1\}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., m\}$. Logo, denotaremos por $x = (x_m, x_{m-1}, ..., x_1, x_0)$, onde cada x_i é chamado *dígito*, para $i \in \{0, 1, 2, ..., m\}$.

Dados $x = (x_m, x_{m-1}, ..., x_1, x_0)$ e $y = (y_m, y_{m-1}, ..., y_1, y_0) \in I\!N$, definimos a Soma Nim de x e y, denotada por $x \oplus y$, como o número $z = (z_m, z_{m-1}, ..., z_1, z_0)$, onde $z_i = x_i +_2 y_i$, para cada $i = 0, 1, 2, ..., n$. Além disso, a soma dos *dígitos* obedece a $0 +_2 0 = 0$, $1 +_2 1 = 0$ e $0 +_2 1 = 1 +_2 0 = 1$.

Propriedades da Soma Nim:

1- Associativa: Para quaisquer $x, y, z \in I\!N$: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

2- Comutativa: Para quaisquer $x, y \in I\!N$: $x \oplus y = y \oplus x$

3- Elemento Neutro: Para qualquer $x \in I\!N$: $x \oplus 0 = x$

4- Elemento Inverso: Para qualquer $x \in I\!N$: $x \oplus x = 0$

5- Corte ou Cancelamento: Para quaisquer $x, y, z \in I\!N$: $x \oplus y = z \oplus y \Leftrightarrow x = z$

Demonstração:

1- Dados inteiros x, y e z quaisquer tais que $x = (x_m, ..., x_0)_2$, $y = (y_m, ..., y_0)_2$ e $z = (z_m, ..., z_0)_2$, então:

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= (x_m, ..., x_0)_2 \oplus ((y_m, ..., y_0)_2 \oplus (z_m, ..., z_0)_2) \\ &= (x_m, ..., x_0)_2 \oplus (y_m +_2 z_m, ..., y_0 +_2 z_0)_2 \\ &= (x_m +_2 (y_m +_2 z_m), ..., x_0 +_2 (y_0 +_2 z_0))_2 \\ &= ((x_m +_2 y_m) +_2 z_m, ..., (x_0 +_2 y_0) +_2 z_0)_2 \\ &= (x_m +_2 y_m, ..., x_0 +_2 y_0)_2 \oplus (z_m, ..., z_0)_2 \\ &= ((x_m, ..., x_0)_2 \oplus (y_m, ..., y_0))_2 \oplus (z_m, ..., z_0)_2 \\ &= (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

2- Dados inteiros x e y quaisquer tais que $x = (x_m, ..., x_0)_2$ e $y = (y_m, ..., y_0)_2$, então:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_m, ..., x_0)_2 \oplus (y_m, ..., y_0)_2 \\ &= (x_m +_2 ym, ..., x0 +_2 y_0)_2 \\ &= (y_m +_2 xm, ..., y0 +_2 x_0)_2 \\ &= (y_m, ..., y_0)_2 \oplus (x_m, ..., x_0)_2 \\ &= y \oplus x \end{aligned}$$

3- Dado um inteiro x qualquer tal que $x = (x_m, ..., x_0)_2$, então:

$$\begin{aligned} x \oplus 0 &= (x_m, ..., x_0)_2 \oplus (0, ..., 0)_2 \\ &= (x_m +_2 0, ..., x_0 +_2 0)_2 \\ &= (x_m, ..., x_0)_2 \\ &= x \end{aligned}$$

4- Dado um inteiro x qualquer tal que $x = (x_m, ..., x_0)_2$, então:

$$
\begin{aligned}
x \oplus x &= (x_m, ..., x_0)_2 \oplus (x_m, ..., x_0)_2 \\
&= (x_m +_2 x_m, ..., x_0 +_2 x_0)_2 \\
&= (0, ..., 0)_2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5- Dados inteiros x, y e z quaisquer, então:

$$
\begin{aligned}
x \oplus y = z \oplus y &\Leftrightarrow (x \oplus y) \oplus y = (z \oplus y) \oplus y && \text{por definição de Soma Nim} \\
&\Leftrightarrow x \oplus (y \oplus y) = z \oplus (y \oplus y) && \text{pela associatividade da Soma Nim} \\
&\Leftrightarrow x \oplus 0 = z \oplus 0 && \text{por definição de inverso de um elemento} \\
&\Leftrightarrow x = z && \text{por definição de elemento neutro}
\end{aligned}
$$

A.7.2 O Teorema de Bouton

Inicialmente, lembremos que uma configuração de peças que permite ao jogador que a deixou vencer o jogo independentemente das jogadas que o adversário faça, é chamada de P posição (do inglês *previous*) e, uma configuração que não é P posição, é chamada de N posição (do inglês *next*).

Lema 1.

Seja $(p_1, p_2, ...p_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ uma configuração tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n = 0$. Então, qualquer jogada nessa configuração, origina uma configuração onde a Soma Nim é não nula.

Demonstação:

Seja $(p_1, p_2, ...p_n) \neq (0, 0, ..., 0)$. Seja ainda $(q_1, q_2, ..., q_n)$ a configuração obtida após uma jogada e suponhamos que a jogada é feita sobre a k-ésima pilha. Então $p_i = q_i$, para todo $i \neq k$, e $q_k < p_k$. Logo a Soma Nim da configuração obtida é:

$$\begin{aligned} q_1 \oplus q_2 \oplus ... \oplus q_n &= p_1 \oplus ... \oplus p_{k-1} \oplus q_k \oplus p_{k+1} \oplus ... \oplus p_n \\ &= p_1 \oplus ... \oplus p_{k-1} \oplus (q_k \oplus p_k \oplus p_k) \oplus p_{k+1} \oplus ... \oplus p_n \\ &= (p_1 \oplus ... \oplus p_{k-1} \oplus p_k \oplus p_{k+1} \oplus ... \oplus p_n) \oplus (q_k \oplus p_k) \\ &= 0 \oplus (q_k \oplus p_k) \\ &= q_k \oplus p_k \neq 0 \end{aligned}$$

Lema 2.

Seja $(p_1, p_2, ..., p_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ uma configuração tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n \neq 0$. Então existe, pelo menos, uma jogada nessa configuração que origina uma configuração onde a Soma Nim é nula.

Demonstação:

Seja $(p_1, p_2, ..., p_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ uma configuração tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n \neq 0$. Seja ainda $s = p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n$ e suponhamos que $s = (s_m, s_{m-1}, ..., s_1, s_0)_2$.

Consideremos d tal que $s_d = 1$ e se $s_k = 1$ então $d \leq k$, isto é, d é o dígito 1 mais à esquerda da representação binária de s. Escolha-se um j tal que o d-ésimo dígito de p_j é também 1. Repare-se que j existe uma vez que o dígito s_d é a Soma Nim dos d-ésimos dígitos de cada p_i. Defina-se $q_j = s \oplus p_j$. Então $q_j < p_j$. De fato, todos o dígitos à esquerda de d são os mesmos em p_j e q_j e são nulos. Além disso, o d-ésimo dígito (em q_j) diminui de 1 para 0. Ao retirar $p_j - q_j$ peças da pilha j obtemos uma configuração que anula a Soma Nim. Note-se que se $(q_1, q_2, ..., q_n)$ for a configuração obtida após essa jogada então $q_i = p_i$, para todo $i \neq j$, $q_j = s \oplus p_j$ e

$$q_1 \oplus q_2 \oplus ... \oplus q_n = s \oplus p_j \oplus q_j = s \oplus p_j \oplus (s \oplus p_j) = 0.$$

A demonstração anterior permite-nos estabelecer uma regra prática para a determinação de uma P posição:

Na tabela com a configuração em sistema binário escolhemos a coluna mais signicante (ou seja, a coluna mais esquerda) com um número ímpar de dígitos 1 e eliminamos peças de uma das pilhas correspondentes a esses dígitos, de modo a que a soma de cada coluna seja 0.

O próximo resultado estabelece uma caracterização para as P posições de um jogo de Nim.

Teorema de Bouton:

A configuração $(p_1, p_2, ..., p_n)$ é uma P posição se, e somente se,

$$p_1 \oplus p_2 \oplus p_n = 0.$$

Demonstração:

Qualquer configuração ou é P posição ou é N posição. Seja P o conjunto de todas as configurações com Soma Nim nula e seja N o conjunto de todas as configurações cuja Soma Nim é não nula. Então:

a) A posição terminal pertence a P.

De fato, sendo a posição terminal $(0, 0, ..., 0)$ então $0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 = 0$.

b) Mostremos que, dada uma configuração de P, qualquer jogada nessa configuração transforma-a numa configuração de N.

Seja então $(p_1, p_2, ..., p_n) \in P$. Sem perda de generalidade, suponhamos que são retiradas peças da primeira pilha e obtemos a configuração $(p_1^`, p_2, ..., p_n)$. Se $p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n = 0 = p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n$, então, pela lei do corte, $p_1 = p_1^`$, o que é absurdo. Logo $(p_1^`, p_2, ..., p_n) \neq 0$ e, portanto, $(p_1^`, p_2, ..., p_n) \in N$.

c) Resta mostrar que, dada uma configuração de N, existe sempre uma jogada que a transforma numa configuração de P.

Tal como foi feito na demonstração do Lema 2, na tabela da Soma Nim, escolha-se a coluna mais significante com um número ímpar de dígitos iguais a 1.

Escolha-se uma pilha onde apareça um dígito 1 nessa coluna e seja x_0 o número de peças dessa pilha e mude-se esse dígito 1 para o dígito 0; mudemos também todos os dígitos de x_0 nas colunas onde o número de dígitos 1 é ímpar. É fácil observar que o número de peças dessa pilha ficou inferior a x_0, o que mostra que passamos de uma configuração de N para uma de P.

Estas três condições mostram que uma configuração é P posição se e só se a sua Soma Nim é nula.