UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

FUNÇÃO LINEAR POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RELATO DE CASO NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Darlan Rodrigo Abegg

Santa Maria, RS, Brasil

2014

FUNÇÃO LINEAR POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RELATO DE CASO NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Darlan Rodrigo Abegg

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Karine Faverzani Magnago

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Abegg, Darlan Rodrigo
FUNÇÃO LINEAR POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RELATO DE CASO NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL / Darlan Rodrigo Abegg.-2014.
92 p.; 30cm

Orientador: Karine Faverzani Magnago
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Função Linear 2. Proporcionalidade 3. Modelagem Matemática I. Faverzani Magnago, Karine II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

FUNÇÃO LINEAR POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RELATO DE CASO NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

elaborada por
Darlan Rodrigo Abegg

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

Karine Faverzani Magnago

Karine Faverzani Magnago, Dra.
(Presidente/Orientador)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Giuliani

Osmar Francisco Giuliani, Dr. (UNIPAMPA)

Maria Inês Martins Copetti, PhD. (UFSM)

Santa Maria, 21 de agosto de 2014.

Dedico este trabalho a todas as pessoas que acreditaram em mim.

AGRADECIMENTOS

À minha namorada Claudia Fernanda Veiga de Mendonça, pelo amor, paciência, compreensão e incentivo durante todos os momentos do curso, meu sincero muito obrigado.

À minha família e amigos pelo apoio e compreensão, principalmente nos momentos em que me fiz ausente.

À professora Karine Faverzani Magnago, pelo carinho e atenção a mim dedicados e por compartilhar de sua sabedoria na orientação deste trabalho.

Aos professores do curso Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFSM, pela amizade, paciência e pelos conhecimentos compartilhados, em especial à professora Carmen Vieira Mathias, pela atenção e competência demonstrada em relação à coordenação do curso.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Aos meus colegas de mestrado PROFMAT da turma de 2012 da UFSM, pelo convívio e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação docente, em especial o colega Erivelto Bauer de Matos, grande amigo que me auxiliou inúmeras vezes, à colega Ivonete Friess, grande amiga desde o início do curso, e também aos colegas de viagem Raphael D' Acampora e Sandro Amorim.

Aos professores da banca, por terem dedicado parte do seu tempo para examinarem meu trabalho e trazerem sugestões para melhorá-lo.

À Secretaria Municipal de Educação de Santo Ângelo pela liberação da carga horária nas sextas feiras e sábados, e aos meus alunos que participaram da proposta didática.

Aos professores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho e em especial Eduardo Wagner, pelas vídeo aulas gravadas e transmitidas da SBM / IMPA no Rio de Janeiro, que contribuíram muito em minha formação.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, e não estão nominalmente citados.

“Nunca deixe que lhe digam que não vale apena acreditar no sonho que se tem ou que seus planos nunca vão dar certo ou que você nunca vai ser alguém”

(Renato Russo)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

FUNÇÃO LINEAR POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RELATO DE CASO NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL
AUTOR: DARLAN RODRIGO ABEGG
ORIENTADORA: KARINE FAVERZANI MAGNAGO
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 21 de agosto de 2014.

O presente trabalho de dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta para introdução ao ensino de função linear, desenvolvendo todas as atividades em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, a partir do emprego da Modelagem Matemática. Como referencial teórico, os estudos foram fundamentados, principalmente, nos conceitos de Modelagem Matemática, apresentados por Bassanezi (2002). A atividade proposta para a introdução ao estudo da função linear consistia no estudo da variação da altura do nível de água em um recipiente de vidro. Cada grupo de alunos realizou medições de altura alcançadas pelo nível do líquido em cada recipiente de acordo com a entrada de um volume fixo de água. O cenário permitiu aos estudantes desenvolverem uma atividade de experimentação, fazer medições, registrar dados, gerar hipóteses e apresentar suas descobertas e conclusões aos pares. O desempenho dos estudantes durante os encontros e os resultados por eles apresentados no final da sequência de atividades, mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para alunos do 8º ano. Além disso, percebeu-se que através da Modelagem Matemática ocorreu uma melhor compreensão da Matemática envolvida no trabalho.

Palavras-chave: Função linear. Proporcionalidade. Modelagem Matemática.

ABSTRACTO

Disertación de Maestría
Curso de Maestría Profesional en la Red Nacional – PROFMAT
Universidad Federal de Santa Maria

FUNCIÓN LINEAL POR MEDIO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: UN CASO EN SERIE FINAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA
AUTOR: DARLAN RODRIGO ABEGG
ORIENTACIÓN: KARINE FAVERZANI MAGNAGO
Fecha y lugar de la defensa: Santa Maria, 21 de Agosto de 2014.

El presente trabajo de disertación tiene como objetivo presentar una propuesta para introducción de función lineal. Las actividades serán desarrolladas en una clase de 8º año del primario desde el empleo de la Modelación Matemática. Los estudios fueron fundamentados, principalmente, en los conceptos de Modelación Matemática presentados por Bassanezi. La actividad propuesta para la introducción al estudio de la función lineal se basó en el estudio de la variación de la altura o nivel del agua en un recipiente de vidrio. Cada grupo de estudiantes realizó mediciones de altura alcanzadas por el nivel de líquido en cada recipiente de acuerdo con la entrada de un volumen fijo de agua. El escenario creó a los alumnos la oportunidad de desarrollo de una actividad de experimentaciones, hacer mediciones, apuntar datos, generar hipótesis y presentar sus descubrimientos y conclusiones a los pares. El desempeño de los estudiantes durante los encuentros y los resultados por ellos presentados al final de la secuencia de las actividades enseñó que la propuesta es válida y adecuada para la faja de edad en cuestión. Así como a través de la Modelación Matemática ocurrió una mejor comprensión de las matemáticas envueltas en el trabajo.

Palabras Clave: Función Lineal. Proporcionalidad. Modelación Matemático.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A cada nova divulgação de resultados de avaliações internacionais, repete-se a constatação: a situação da Educação Básica no Brasil é modesta. Diante dos números negativos, como por exemplo, 38º lugar, entre 44 países no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), especialistas de diversas instituições sugerem ações, algumas interessantes, tais como maior investimento do PIB na Educação, investimentos na formação continuada de professores e mudanças nas propostas curriculares (MACHADO, 2014).

O presente trabalho de dissertação está diretamente ligado à necessidade de metodologias inovadoras que possibilitem a interação dos alunos diante da disciplina de Matemática, sendo que a ideia de proposta surgiu de uma atividade apresentada por Villarreal e Mina (2013) na VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática.

Sendo assim, o objetivo geral do trabalho é identificar de que forma a Modelagem Matemática através de atividades envolvendo funções lineares pode contribuir de modo que os estudantes atribuam significados no seu uso em situações contextualizadas, fazendo uma reflexão sobre a importância deste conteúdo.

Também são objetivos específicos deste trabalho:

- Discutir as dificuldades no ensino e na aprendizagem de funções lineares na escola;
- Analisar o que os Parâmetros Curriculares Nacionais abordam para o ensino de funções em particular função linear;
- Discutir sobre o ensino de proporcionalidade como função linear;
- Analisar alguns livros didáticos a fim de verificar como se dá a introdução do conceito de função linear no Ensino Fundamental;
- Estudar concepções da Modelagem Matemática para que seja possível explorá-la através de atividade didática;
- Fazer uma revisão do artigo que inspirou a nossa atividade didática;
- Aplicar uma atividade didática, através da Modelagem Matemática a fim de introduzir o conceito de função linear;
- Relatar e analisar a atividade didática realizada pelos alunos, discutindo os resultados alcançados;
- Verificar a pertinência de trabalhar tal conteúdo com alunos de 8º ano.

São objetivos específicos da atividade didática:

- Introduzir o conceito de função linear através da modelagem matemática;
- Contextualizar a matemática abordada durante a atividade;
- Utilizar a Modelagem na Educação Matemática como ferramenta de ensino aprendizagem;
- Identificar padrões entre quantidades durante a atividade prática;
- Operar, coordenar e identificar os diferentes registros de representações;
- Observar a presença de conceitos matemáticos nos modelos construídos.

A investigação, através da modelagem matemática é útil para que situações didáticas sejam levantadas e resolvidas, desenvolvendo nos alunos o senso crítico, a percepção acerca de questões que vão além da sala de aula. A questão direcionadora resume-se em: *como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito da função linear?*

Para isso, a Modelagem Matemática é utilizada neste trabalho como principal metodologia empregada na busca por uma conexão entre professores e alunos. Este tipo de prática pedagógica contribui para a formação de professores comprometidos com o ensino de matemática.

Utilizando-se da busca pela introdução do conceito de funções lineares, o trabalho aponta os vários mecanismos para se alcançar a prática da Modelagem, direcionando para os principais passos de sua realização.

Dessa forma, na busca de alcançar o objetivo proposto, a pesquisa foi desenvolvida em três capítulos; no primeiro discutimos a partir da nossa vivência as dificuldades no ensino e na aprendizagem de funções lineares na escola atual. Mencionam-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que norteiam o trabalho dos professores e retratam a importância de se trabalharem funções fazendo-se associações ao cotidiano dos alunos. Fizemos uma breve revisão de proporcionalidade abordada como função linear a partir da concepção de alguns autores. E também analisamos alguns livros didáticos do Ensino Fundamental no intuito de verificar como está sendo introduzido o conceito de função linear.

No capítulo 2, fizemos uma revisão de alguns tópicos de Modelagem Matemática, enfatizando os pensamentos de alguns autores que trabalham com essa tendência, entre os quais se encontra, com suas colocações pertinentes, Bassanezi (2002) que servirão de norte para o presente trabalho de dissertação. Destacam-se também as etapas sugeridas por Bassanezi para o encaminhamento de atividades envolvendo a Modelagem, etapas essas que embasarão a atividade didática. Ainda no capítulo 2, revisamos o artigo de Villarreal e Mina (2013), o qual serviu de inspiração para nossa atividade didática, e por fim fizemos algumas considerações sobre este capítulo.

No capítulo 3, a atividade didática proposta para a introdução ao estudo da função linear é apresentada, a qual consiste no estudo da variação da altura do nível de água em um recipiente de vidro de acordo com a entrada de um volume fixo de água. Os objetivos e as expectativas serão relatados e analisados minuciosamente a fim de verificar-se a pertinência de trabalhar tal conteúdo matemático com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Propomos uma sequência da atividade de modelagem, fazendo o uso do *software* matemático GeoGebra.

Por fim, é realizada uma análise crítica sobre como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito da função linear, fazendo uma perspectiva de trabalhos futuros e apresentando o referencial bibliográfico usado na dissertação.

1. FUNÇÃO LINEAR

Neste capítulo inicial, faremos uma abordagem sobre funções lineares, sendo que na seção 1.1 é discutido o ensino deste conteúdo na escola atual e em complementação, na seção 1.2, são revisados os documentos orientadores, no intuito de verificar a pertinência do ensino de funções lineares. Já na seção 1.3 revisamos como alguns autores tratam de proporcionalidade como função linear e na seção 1.4 trazemos abordagens de como está sendo trabalhada a introdução deste conteúdo no Ensino Fundamental, trazendo exemplos de como os livros didáticos apresentam conceitos e exemplos de funções lineares.

1.1 Ensino e Aprendizagem de Funções Lineares

Temos uma Escola do século XIX, com professores do século XX e alunos do século XXI. Esta frase usada informalmente por diversos autores retrata que o modelo atual de ensino não atende mais às expectativas dos nossos jovens alunos. Além disso, a estrutura curricular da Escola ainda segue o modelo no qual o aluno é um mero espectador da fala do professor. Os professores precisam estar em constante transformação para atender as expectativas de promover a formação de um aluno crítico e atuante na sociedade moderna.

Vários conteúdos matemáticos são apresentados aos alunos através de procedimentos, regras ou com fórmulas, onde o aluno por muitas vezes não consegue abstrair, ou seja, entender realmente o que esta fazendo e para que serve aquele conteúdo, sendo assim esse aluno vira um “fazedor de contas”.

Com base em nossas vivências como aluno e como professor, sabemos que o ensino de funções lineares na escola, é apresentado no primeiro ano do Ensino Médio, sendo que a grande maioria dos professores apresentam funções lineares “prontas” como $f(x) = 3x$, ou seja, funções que não modelam ou que não representam situações do cotidiano dos alunos, e a partir dessas funções os professores exploram valores numéricos, verificam quem é o coeficiente angular e o coeficiente linear e fazem tabelas de valores (geralmente são usados valores inteiros positivos) para construir gráficos.

Percebemos, com base na nossa vivência enquanto professor, que o ensino de funções lineares desta forma não se torna significativo para o aluno. Vários professores tendem a ensinar como foram ensinados, em que se está mais preocupado em passar o conteúdo para os alunos, do que provocar o interesse de investigar para que, por exemplo, funções lineares são úteis no nosso dia a dia.

A preocupação excessiva com apresentações formais é uma falha no ensino do conteúdo matemático de funções lineares na escola atual. Porém, não se deve atribuir exclusivamente ao professor essa "culpa" por um ensino desconectado do contexto do aluno, cabe também às universidades repensar o seu modo de formação inicial ou continuada de professores.

A própria construção do conceito de função, historicamente, evolui para que este fosse aceito pela comunidade matemática. Os povos antigos representavam por meio de tabelas, relações existentes no seu dia a dia. O emprego das aproximações de uma relação funcional era uma simples proporcionalidade e constitui o primeiro passo rumo ao desenvolvimento de noções mais gerais de função.

A compreensão de função, com a terminologia do conceito (conjuntos, elementos, variáveis dependentes e independentes) e a correspondente simbologia x, y, $f(x)$, com suas diferentes representações, resultados da transformação histórica, é dúbia para professores, sendo que estas dificuldades se refletem no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Isso vai de encontro às ideias de Sajka:

> As dificuldades que os alunos revelam no tema funções estão muito relacionadas com a ambiguidade intrínseca do simbolismo matemático, com o contexto restrito no qual os símbolos são ensinados, bem como com o tipo limitado de tarefas, e, ainda, com a própria interpretação que o aluno faz delas (SAJKA, 2003, p.236).

O ensino do conceito de funções lineares através de exemplos contextualizados pode conduzir os alunos a uma aprendizagem satisfatória do conteúdo.

A utilização de representações de uma função linear, seja por tabelas, por gráficos, algebricamente ou verbalmente são de extrema importância na compreensão do conceito de função. A passagem de uma representação para outra é uma prática necessária, pois cada registro fornece algumas possibilidades e trabalha com diferentes habilidades.

Rossini (2006) considera que as expressões algébricas podem auxiliar na visualização de funções lineares, na identificação do coeficiente "a" em $f(x) = a.x$ como taxa de variação, bem como na construção do significado e das fórmulas para representação de funções lineares. Porém, é necessário apresentar expressões algébricas em diversos contextos cotidianos, trabalhando sua interpretação, para que os alunos superem suas dificuldades e assim desenvolvam capacidades de identificar, interpretar, descrever e coordenar as situações apresentadas.

Para uma efetiva aprendizagem do conteúdo matemático funções lineares, acredito que seja importante que os professores inovem ao propor as atividades. Também é preciso que as universidades transformem seu currículo com o intuito de capacitar professores para lidar com as demandas do século XXI. Além disso, a experiência didática mostra que os livros didáticos precisam criar uma sequência didática que permita ao do aluno transformar informações em conhecimento.

1.2 Funções Lineares e Proporcionalidade nos Documentos Orientadores

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no que diz respeito à Matemática, têm como finalidade orientar a prática escolar dos professores, contribuindo para que os alunos tenham acesso ao conhecimento matemático relacionado com o seu cotidiano e com os Temas Transversais.

Discutiremos nesta seção, as principais recomendações dos PCN na área de matemática em relação aos conteúdos de proporcionalidade fazendo uma conexão com a ideia de função linear.

Os PCN para o 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental, que correspondem ao 8° e ao 9° ano, recomendam que se explorem atividades em que noções de grandezas e medidas, sejam relacionadas à ideia de proporcionalidade.

Cita-se como objetivos para o 3º ciclo do Ensino Fundamental, que a Matemática deve visar ao desenvolvimento:

> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p.65).

Muitas situações do nosso cotidiano podem ser descritas pela proporcionalidade, evidenciando que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é necessário para a interpretação dos mais variados tipos de situações, assim como citado nos PCN para o 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental:

> A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções (BRASIL, 1998, p.84).

O estabelecimento de um vínculo entre proporcionalidade e função linear é apresentado nos PCN para o Ensino Fundamental no 4º ciclo:

> Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou nãoproporcional (BRASIL, 1998, p.82).

Entendemos que o ensino de proporcionalidade, não está restrito à apenas um ano do ensino fundamental. Seu conceito está indiretamente associado a vários outros conteúdos matemáticos, desde a simples ideia de multiplicação como adição repetida de parcelas até as relações entre unidades de medida na geometria.

No Ensino Fundamental, muitos livros didáticos apresentam um capítulo isolado de proporcionalidade, evidenciando o seu algoritmo, que todos conhecemos pela tradicional “regra de três”.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), destacam a necessidade de o aluno perceber definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos, com a função de construir novos conceitos e estruturas a partir do que foi aprendido no Ensino Fundamental.

Em relação ao ensino de funções lineares, o documento afirma que:

> O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p.118).

O estudo de funções lineares no Ensino Médio aparece no 1º ano, juntamente com o estudo das diferentes funções, sendo que os BRASIL (2002) apontam para que se dê ênfase no conceito de função, em suas propriedades em relação às operações e principalmente na interpretação de seus gráficos e nas suas aplicações.

Os PCNEM (2002) também evidenciam que:

> Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida(...). Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado (...) (BRASIL, 2002, p.118).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OEC), lançadas pelo Ministério da Educação em 2006 orientam que o estudo de funções (na nossa atividade didática será função linear), pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas. Para a nossa atividade didática exploraram-se as grandezas capacidade (em mililitros) e a grandeza altura (em centímetros). Além disso, os PCN apontam que "também é importante provocar os alunos para que se apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações de crescimento e decrescimento" (BRASIL, 2006, p.72).

Segundo as OEC, é recomendável que o estudo de funções seja apresentado aos alunos, em diferentes modelos, tomado em diferentes áreas do conhecimento. Segue também que:

> As ideias de crescimento, modelo linear ($f(x) = a.x$) e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento (BRASIL, 2006, p.73).

A análise dos PCN foi realizada para justificar a aplicação da nossa atividade didática que tem por objetivo introduzir o conceito de função linear no 8º ano do Ensino Fundamental, ou seja, rompendo com tradicional de apresentar este conteúdo somente no Ensino Médio e dando continuidade ao estudo de proporcionalidade que se faz no 7º e 8° ano do Ensino Fundamental.

Cabe ressaltar que nossa intenção em apresentar o conteúdo de funções lineares no 8º ano, não é trabalhar com uma linguagem excessivamente formal, mas sim apresentar aos alunos situações contextualizadas onde se possa explorar a dependência entre duas grandezas, fazendo a conexão com o conteúdo de proporcionalidade e explorando a linguagem usual dos alunos, suas representações gráficas, introduzindo uma linguagem algébrica.

1.3 Proporcionalidade como Função Linear

A proporcionalidade é um importante conteúdo matemático, pelo qual podemos contextualizar conteúdos matemáticos relacionados a várias situações cotidianas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais citam a exploração de situações de aprendizagem onde é possível observar o raciocínio proporcional através da observação da variação entre grandezas.

O conceito de proporcionalidade vem sendo trabalhado praticamente em todos os anos do Ensino Fundamental (séries finais), sua exploração é articulada com outros conteúdos matemáticos. Com base na nossa vivência enquanto professor é possível verificar essas situações, conforme apresentado no quadro 1.

6º ano	# Proporcionalidade na multiplicação e divisão # Proporcionalidade nas unidades de medida # Porcentagem
7º ano	# Razões e proporções # Grandezas proporcionais # Escalas; velocidade constante # Regra de três simples # Ampliação e redução de figuras e fotos # Porcentagem
8º ano	# Expressões algébricas # Proporcionalidade envolvendo área e perímetro # Números diretamente proporcionais # Divisão em partes proporcionais, regra de sociedade # Proporcionalidade direta e gráfico
9º ano	# Função linear como caso particular de função afim # Proporcionalidade em geometria # Razão entre segmentos e segmentos proporcionais # Proporcionalidade na circunferência, o número pi # Proporcionalidade e escala # Proporcionalidade em um feixe de retas paralelas (Teorema de Tales) # Transformações geométricas (homotetia) # Proporcionalidade em triângulos retângulos # Juros simples

Quadro 1: Proporcionalidade associada a outros conteúdos. Fonte: o autor

Porém a partir do 7º ou 8º ano, dependendo da matriz curricular da escola, apresenta-se a mecanização do procedimento de proporcionalidade, a famosa regra de três, sendo que muitos alunos utilizam esse algoritmo e acabam deixando de lado o raciocínio proporcional. Esse algoritmo é um método eficiente, porém segundo Post, Beher e Lesh (1995):

> [...] os métodos mais eficientes são, com frequência, aqueles menos significativos, que devem, portanto, ser evitados nas fases de ensino iniciais. Infelizmente, muitas vezes confundimos eficiência com significação e, por descuido, embora com a melhor das intenções, introduzimos um conceito da maneira mais eficiente, porém menos significativa (POST, BEHER, LESH, 1995, p. 93).

O raciocínio proporcional desperta no aluno capacidade de compreender quando ocorre uma situação de natureza proporcional, o entendimento da natureza multiplicativa das relações proporcionais e a capacidade para resolver problemas cotidianos sem fazer uso de representações tabulares, algébricas ou gráficas.

Ponte (2010) defende que “a proporcionalidade direta deve ser explorada (intuitivamente) como função linear desde os primeiros anos de escolaridade, adquirindo precedência sobre a noção de igualdade entre razões (proporção)”.

O ensino de proporcionalidade direta como função linear foi defendida por Ávila (1986), sendo que ele afirma que a abordagem escolar do tema proporcionalidade como igualdade de razões, não é tão comum, pois guarda resquícios da teoria das proporções de Eudoxo, que deu lugar com o desenvolvimento da Matemática, à teoria dos números reais de Dedekind. A saber:

> Com a fundamentação dos números reais, no século passado, em bases sólidas e mais confiáveis do que as da antiga Geometria, a teoria das proporções de Eudoxo passa a ter apenas valor histórico. [...] não precisamos mais usar a superada teoria geométrica das proporções, muito menos seus resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar fatos, como os problemas de “regra de três” (ÁVILA, 1986, p. 2).

A partir disso, é possível ensinar proporcionalidade direta como função linear e não por meio de razões, pois a essência da proporcionalidade direta está nas relações multiplicativas.

Lima (2006) analisa o texto matemático segundo ele, muito bem conceituado, intitulado *Aritmética Progressiva*, de Antonio Trajano, cuja primeira edição no Brasil ocorreu em 1883 e ainda se achava em circulação na década de 60. Trajano dá a seguinte definição:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente ou inversamente proporcionais (TRAJANO, 1883, apud LIMA, et al., 2006, p.93).

Substituindo as grandezas de Trajano por suas medidas, que são números reais, pode-se traduzir o que está dito acima para nossa linguagem atual, o que foi realizado por LIMA et all (2006, p.93) da seguinte maneira:

> Uma proporcionalidade é uma função f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que, para quaisquer números reais c, x, tem-se $f(cx) = c.f(x)$ (proporcionalidade direta) (LIMA, et al., 2006, p.93).

Nesta nova versão, as grandezas da definição antiga são os números reais x, y e a correspondência a que Trajano se refere é uma função f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$.

A passagem detalhada da fórmula geral de proporcionalidade direta para a fórmula geral de função linear esta descrita a seguir:

> (...) se $f(cx) = c.f(x)$ para todo c e para todo x então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = c.f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear (LIMA, et al., 2006, p.93).

Podemos dizer em uma linguagem menos formal que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x.

Ou ainda, que uma função de proporcionalidade direta ocorre quando a cada número x corresponde o número ax, sendo a o fator multiplicativo.

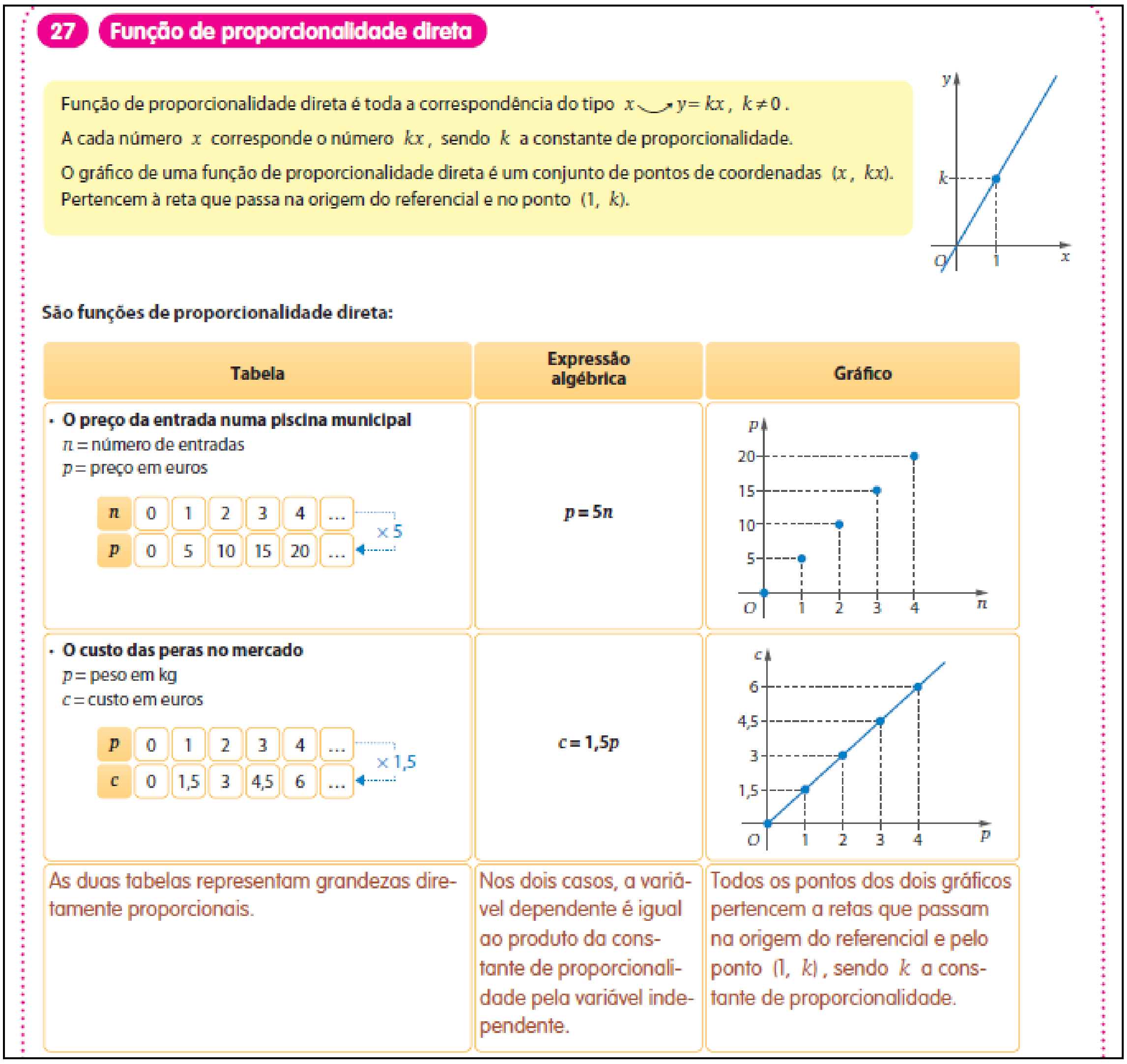
1.4 Comparações entre as Abordagens de Livros Didáticos do Ensino Fundamental e a da Proposta

Nesta seção faremos uma breve abordagem de como está sendo o ensino de funções lineares nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Para isto levaremos em consideração nossa vivência de professor, analisando alguns livros de Matemática.

Escolhemos livros didáticos em que os autores têm propostas diferenciadas para a introdução de conteúdos, os livros que escolhemos trazem propostas que buscam contextualizar o objeto de estudo, no nosso caso função linear, através de situações problemas, atividades investigativas ou outras abordagens.

Pretendemos analisar o modo como à proporcionalidade é apresentada nos livros didáticos, com vista à introdução do conceito de função linear, verificando atividades de análise da relação de dependência entre grandezas.

O primeiro livro didático analisado é um livro digital (*e-book*) da Raiz Editora, para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, do qual fizemos o recorte, conforme figura 1 (MATEMÁTICA, 2014).



27 Função de proporcionalidade direta

Função de proporcionalidade direta é toda a correspondência do tipo $x \mapsto y = kx$, $k \neq 0$.

A cada número x corresponde o número kx, sendo k a constante de proporcionalidade.

O gráfico de uma função de proporcionalidade direta é um conjunto de pontos de coordenadas $(x,\ kx)$. Pertencem à reta que passa na origem do referencial e no ponto $(1,\ k)$.

São funções de proporcionalidade direta:

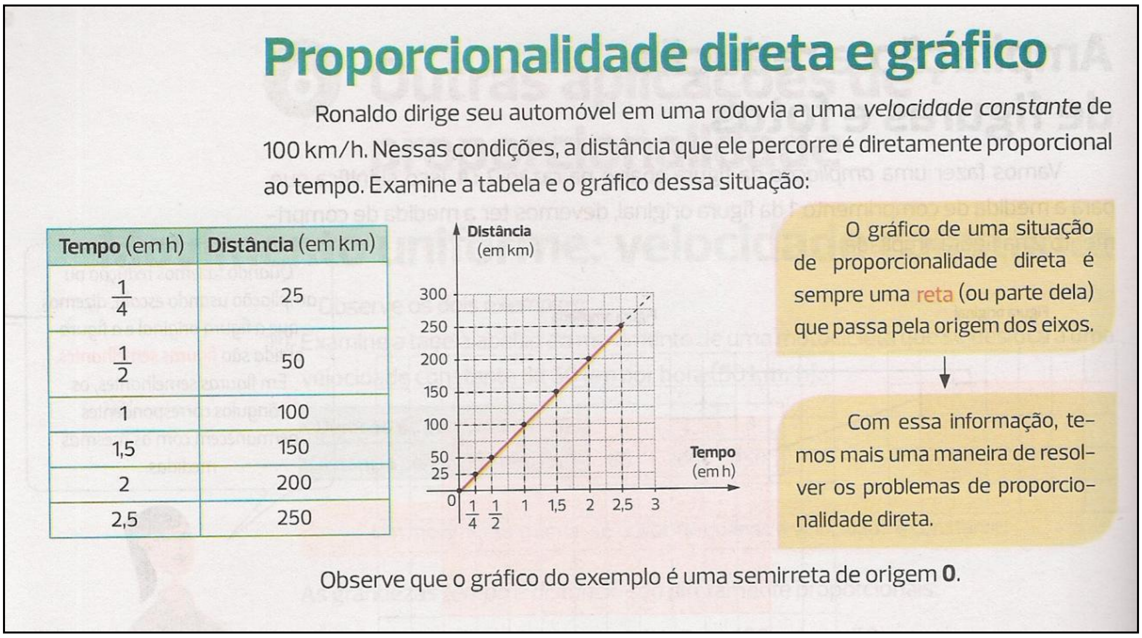
Tabela	Expressão algébrica	Gráfico
• **O preço da entrada numa piscina municipal** n = número de entradas p = preço em euros n: 0, 1, 2, 3, 4, … p: 0, 5, 10, 15, 20, … $\times 5$	$p = 5n$	
• **O custo das peras no mercado** p = peso em kg c = custo em euros p: 0, 1, 2, 3, 4, … c: 0, 1,5, 3, 4,5, 6, … $\times 1{,}5$	$c = 1{,}5p$	
As duas tabelas representam grandezas diretamente proporcionais.	Nos dois casos, a variável dependente é igual ao produto da constante de proporcionalidade pela variável independente.	Todos os pontos dos dois gráficos pertencem a retas que passam na origem do referencial e pelo ponto $(1,\ k)$, sendo k a constante de proporcionalidade.

Figura 1: Função de proporcionalidade direta. Fonte: Raiz Editora

Neste livro o conteúdo chamado de "Função de proporcionalidade direta" é apresentado através de situações cotidianas. Primeiramente é dado o conceito de função linear e logo após mostra-se duas situações problemas onde aparecem a tabela de valores, a expressão algébrica e o gráfico correspondente de cada situação.

A atividade contextualiza o conteúdo de proporcionalidade como função linear, com bons exemplos, mas percebemos que o aluno não participa da construção do conceito, este é dado como pronto e acabado. Na nossa proposta de atividade didática, o aluno tem papel fundamental, pois é ele que coleta os dados para representar na tabela, logo após ele constrói o gráfico e após isso ele é encorajado a encontrar a expressão algébrica que modela o problema. Nossa proposta é diferente da apresentada pelo autor na figura 1, porém que pode levar o aluno a entender o significado de todas as representações de uma função linear.

O segundo livro escolhido intitula-se Projeto Teláris, sendo que o recorte que fizemos é do livro do 8º ano do Ensino Fundamental, conforme figura 2 (DANTE, 2012).



Proporcionalidade direta e gráfico

Ronaldo dirige seu automóvel em uma rodovia a uma *velocidade constante* de 100 km/h. Nessas condições, a distância que ele percorre é diretamente proporcional ao tempo. Examine a tabela e o gráfico dessa situação:

Tempo (em h)	**Distância** (em km)
$\frac{1}{4}$	25
$\frac{1}{2}$	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

O gráfico de uma situação de proporcionalidade direta é sempre uma reta (ou parte dela) que passa pela origem dos eixos.

Com essa informação, temos mais uma maneira de resolver os problemas de proporcionalidade direta.

Observe que o gráfico do exemplo é uma semirreta de origem **0**.

Figura 2: Proporcionalidade direta e gráfica. Fonte: Dante (2012)

Conforme podemos verificar no recorte, o autor introduz no 8º ano o conceito de função linear em sua representação tabular e gráfica, com um exemplo de proporcionalidade direta. O exemplo apresentado retrata uma situação cotidiana, trabalhando com a proporcionalidade envolvida entre as grandezas tempo (horas) e distância (quilômetros).

Por melhor que tenha sido a intenção que o autor em apresentar uma situação problema, ele faz uso de números na forma fracionária, decimal e inteira, o que pode confundir o aluno. Cabe também questionar os valores envolvidos, será que há possibilidade de uma automóvel andar 2,5 horas com velocidade constante? Além disso, eventualmente esse problema, pode ser artificial para alguns estudantes, fugindo um pouco do contexto da sua faixa etária.

Ainda no mesmo exemplo o autor afirma que o gráfico de uma situação de proporcionalidade direta é sempre uma "reta", porém será que essa construção gráfica a partir dos dados da tabela é evidente para o aluno? Cabe ao professor pensar como trabalhar essa situação, pois as grandezas estão em escalas diferentes, devemos refletir em como de fato ensinar o aluno a marcar esses pontos no plano cartesiano.

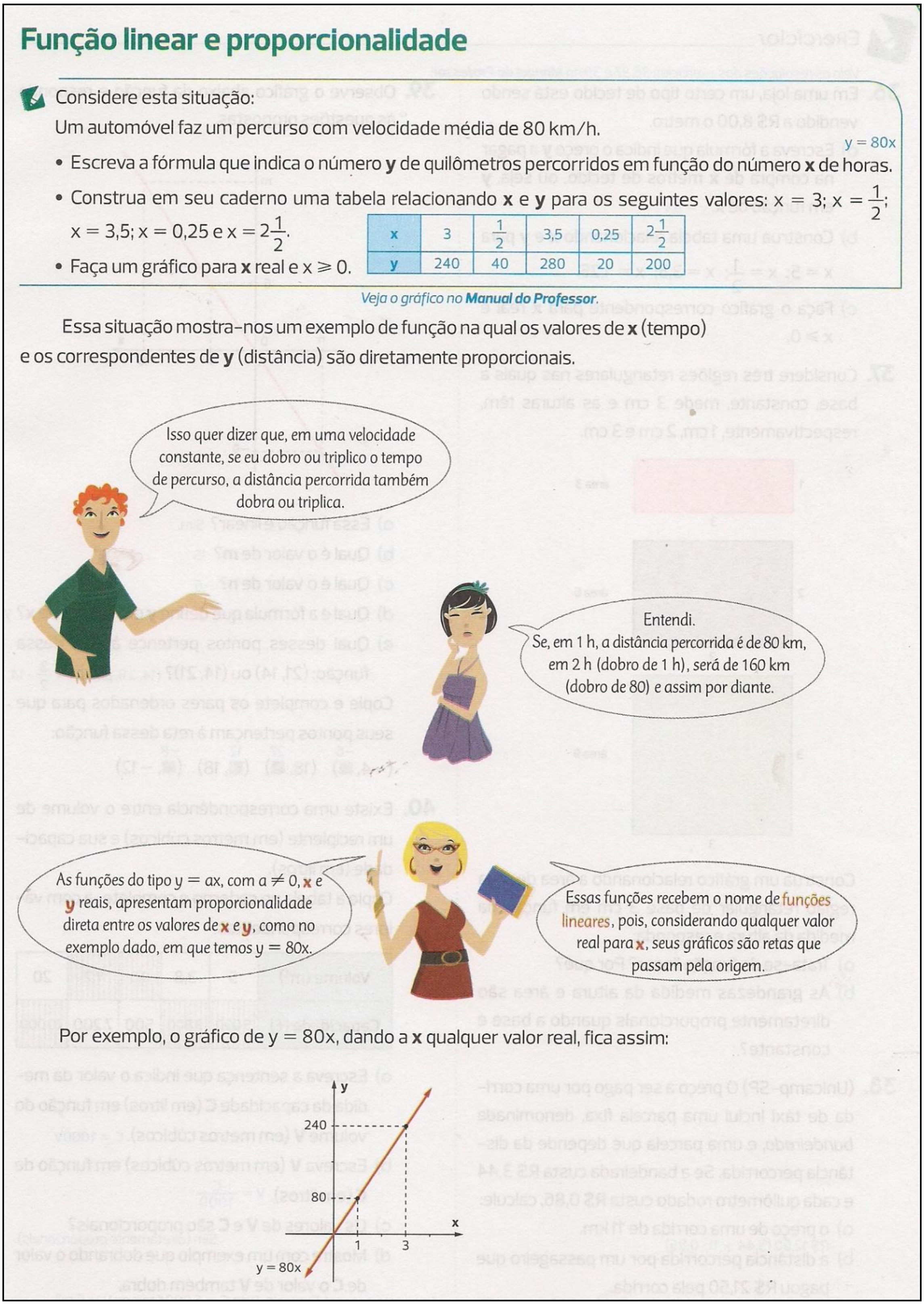
O que diferencia nossa proposta de atividade didática, da apresentada na figura 2, é justamente o fato de o professor poder trabalhar com grandezas de escalas diferentes em atividades práticas, o que pode colaborar para o aluno ter um melhor entendimento da relação existente entre as grandezas. Será mais significativo para o aluno construir o gráfico, pois este terá que trabalhar com eixos em escalas diferentes, devendo então marcar as coordenadas conforme a tabela e dados, para verificar que os pontos estão dispostos sobre uma linha reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

O autor Luiz Roberto Dante, dá continuidade ao ensino de proporcionalidade no 9º ano do Ensino Fundamental, porém agora trata de proporcionalidade como função linear na sua representação algébrica, o que não ocorria no 8º ano. O recorte que analisaremos é apresentado na figura 3 (DANTE, 2012).

Notamos que novamente é apresentada uma situação problema, sobre velocidade média e a partir desta situação o autor pede a fórmula, ou seja, a representação algébrica da situação problema, sendo que logo após propõe a construção de uma tabela e por fim faz uma discussão sobre proporcionalidade direta que leva ao conceito de função linear, apresentando então a representação gráfica da situação problema.

Devemos refletir enquanto professor, como ensinar todas essas representações (algébrica, tabular, gráfica), pois para nós, essa passagem de uma representação para outra é facilitada pela nossa formação, mas para os alunos, será que todos tem essa habilidade? Destacamos que a construção tabular e gráfica pode auxiliar muito para o aluno conseguir representar algebricamente a função linear.

Essas indagações são necessárias, pois por mais que os livros didáticos mudaram sua forma de apresentação dos conteúdos, passando de exercícios abstratos para exploração de situações problemas, nossos alunos ao resolver um problema por muitas vezes ficam sem saber o que fazer, ou seja, não foi desenvolvido um raciocínio que permitisse o aluno a apresentar suas conclusões.



Função linear e proporcionalidade

Considere esta situação:
Um automóvel faz um percurso com velocidade média de 80 km/h.

- Escreva a fórmula que indica o número **y** de quilômetros percorridos em função do número **x** de horas. $y = 80x$
- Construa em seu caderno uma tabela relacionando **x** e **y** para os seguintes valores: $x = 3$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 3{,}5$; $x = 0{,}25$ e $x = 2\frac{1}{2}$.
- Faça um gráfico para **x** real e $x \geq 0$.

x	3	$\frac{1}{2}$	3,5	0,25	$2\frac{1}{2}$
y	240	40	280	20	200

*Veja o gráfico no **Manual do Professor**.*

Essa situação mostra-nos um exemplo de função na qual os valores de **x** (tempo) e os correspondentes de **y** (distância) são diretamente proporcionais.

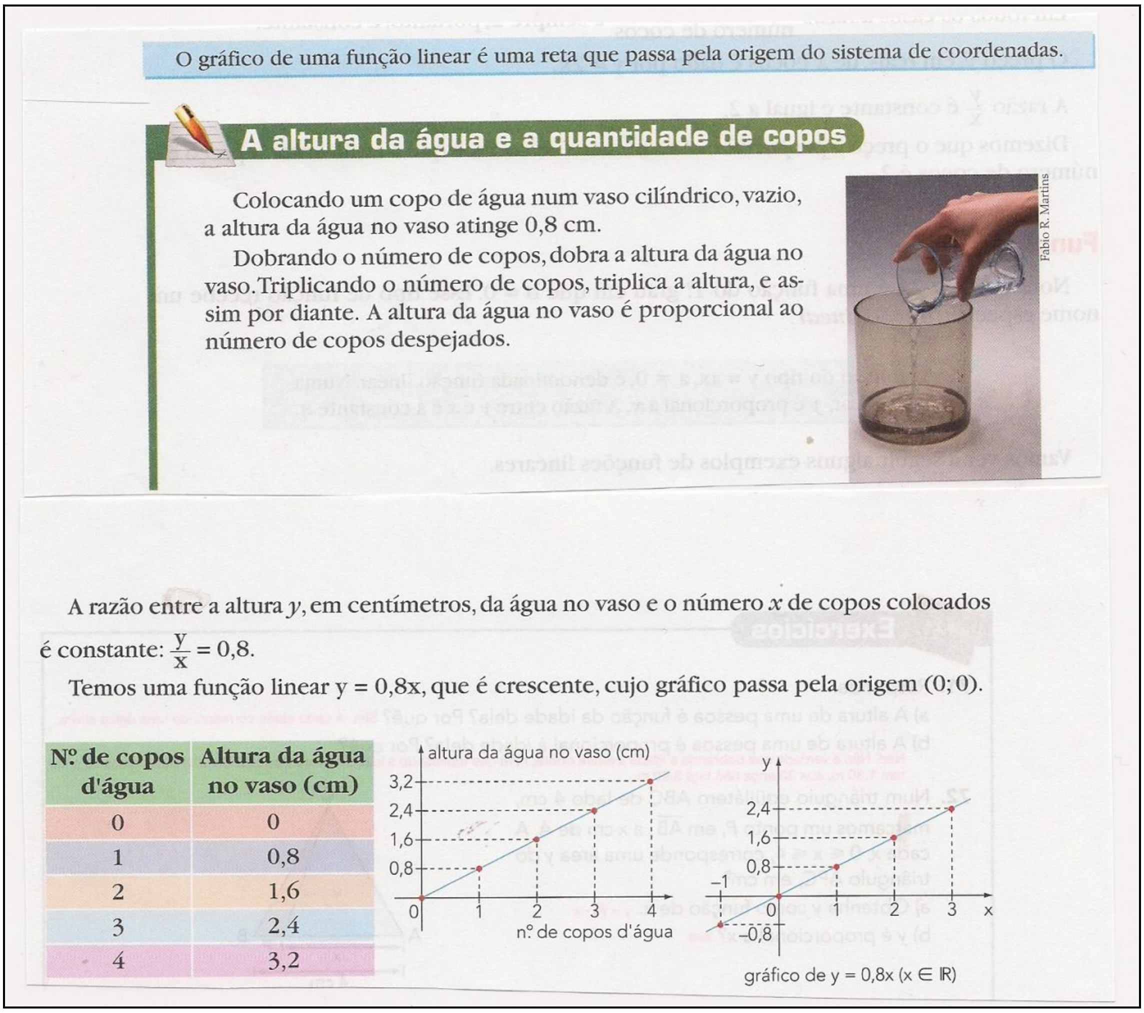
Por exemplo, o gráfico de $y = 80x$, dando a **x** qualquer valor real, fica assim:

Figura 3: Função linear e proporcionalidade. Fonte: Dante (2012)

Outro fato que merece destaque na atividade proposta pelo autor, são as grandezas que não seguem uma ordem crescente nem decrescente na representação tabular, isto pode ser um complicador para o aluno compreender o que são grandezas diretamente proporcionais, pois ele não conseguirá visualizar na construção da tabela este fato.

Porém na conversa entre os personagens, o autor consegue de fato explicitar proporcionalidade direta como fator multiplicativo e então define função linear. Isto vai de encontro a nossa proposta de atividade didática, fazer o alunos refletir sobre essas grandezas serem diretamente proporcionais, fazendo com que eles verifiquem qual é a taxa de crescimento (fator multiplicativo) e assim definindo uma função linear.

Nosso próximo recorte foi retirado do livro Matemática e Realidade do 9º ano do Ensino Fundamental do autor Gelson Iezzi. A seguir analisaremos o recorte conforme figura 4 (IEZZI, 2005).



O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas.

A altura da água e a quantidade de copos

Colocando um copo de água num vaso cilíndrico, vazio, a altura da água no vaso atinge 0,8 cm.

Dobrando o número de copos, dobra a altura da água no vaso. Triplicando o número de copos, triplica a altura, e assim por diante. A altura da água no vaso é proporcional ao número de copos despejados.

Fabio R. Martins

A razão entre a altura y, em centímetros, da água no vaso e o número x de copos colocados é constante: $\frac{y}{x} = 0{,}8$.

Temos uma função linear y = 0,8x, que é crescente, cujo gráfico passa pela origem (0; 0).

Nº de copos d'água	Altura da água no vaso (cm)
0	0
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2

Figura 4: Altura da água e a quantidade de copos. Fonte: Iezzi (2005)

Iezzi (2005) introduz o conceito de função linear, dando a definição tradicional (que não aparece no recorte) e logo após afirma que o gráfico dessa função linear é uma reta. Percebemos que o aluno não participou deste processo de ensino e aprendizagem e cabe refletir, será que nossos alunos entendem o porquê do gráfico ser uma reta? É preciso criar situações, onde o aluno chegue a estas definições e conceitos e não torná-lo um mero espectador da fala do professor.

De imediato o autor propõe uma situação problema que aborda grandezas proporcionais, o que de fato contribui muito para o aluno entender o conceito de função linear, mas novamente devemos refletir, como tornar de fato significativo o entendimento do conceito de proporcionalidade direta como função linear.

A proposta para introdução do conteúdo apresentada pelo autor é semelhante à nossa proposta, porém na nossa proposta o aluno é levado a coletar esses dados através de observações num experimento, o que contribui para um melhor entendimento, permitindo ao aluno visualizar na tabela construída que as grandezas são proporcionais. É interessante colocar o aluno para pensar, introduzir conceitos matemáticos através de situações concretas.

Já do livro didático Vontade de Saber Matemática, para o 9º ano do Ensino Fundamental, fizemos o seguinte recorte, conforme figura 5 (SOUZA, 2012).

O autor na seção "Função Linear e Proporcionalidade", define que grandezas proporcionais podem ser representadas por funções lineares. Novamente percebemos que o autor não leva o aluno a construir esse conceito, sendo que apresenta o problema e logo abaixo dá a representação algébrica da situação. Talvez alguns alunos até consigam entender, mas será que todos os alunos conseguem interpretar aquela função e explicá-la com sua linguagem natural. Precisamos estar cientes, o que para nós professores parece óbvio, para o aluno pode não ter significado.

Na representação tabular e gráfica o autor leva o aluno a encontrar a constante de proporcionalidade da função linear, usando a razão entre grandezas para encontrar tal constante. Nesse problema em especial, o desenvolvimento do raciocínio proporcional poderia ajudar a encontrar essa constante, levando o aluno a entender que essa constante de proporcionalidade é um fator multiplicativo ou uma taxa de crescimento.

Função linear e proporcionalidade

Em anos anteriores estudamos situações em que duas ou mais grandezas eram diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Situações que envolvem grandezas proporcionais podem ser representadas por funções lineares. Observe o exemplo.

A produção de 1 quilograma de queijo mozarela precisa, em média, de 10 L de leite. Para calcular quantos litros de leite são necessários para produzir certa quantidade de queijo, podemos utilizar a seguinte função linear.

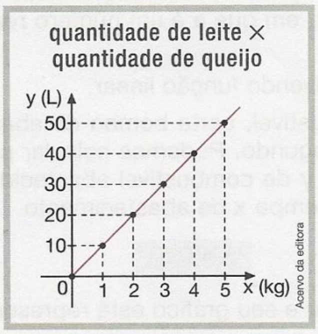
$$\underbrace{y}_{\text{leite (L)}} = 10 \cdot \underbrace{x}_{\text{queijo (kg)}}$$

Fabricação de queijo.

97

A quantidade de leite está em função da quantidade de queijo a ser produzido. Veja a representação gráfica dessa função.

x	y = 10x	(x, y)
0	$y = 10 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$y = 10 \cdot 1 = 10$	(1, 10)
2	$y = 10 \cdot 2 = 20$	(2, 20)
3	$y = 10 \cdot 3 = 30$	(3, 30)
4	$y = 10 \cdot 4 = 40$	(4, 40)
5	$y = 10 \cdot 5 = 50$	(5, 50)



Queijos

Além da mozarela, são fabricados no mundo todo diversos outros tipos de queijo. Na França, por exemplo, são fabricados mais de 400 tipos.

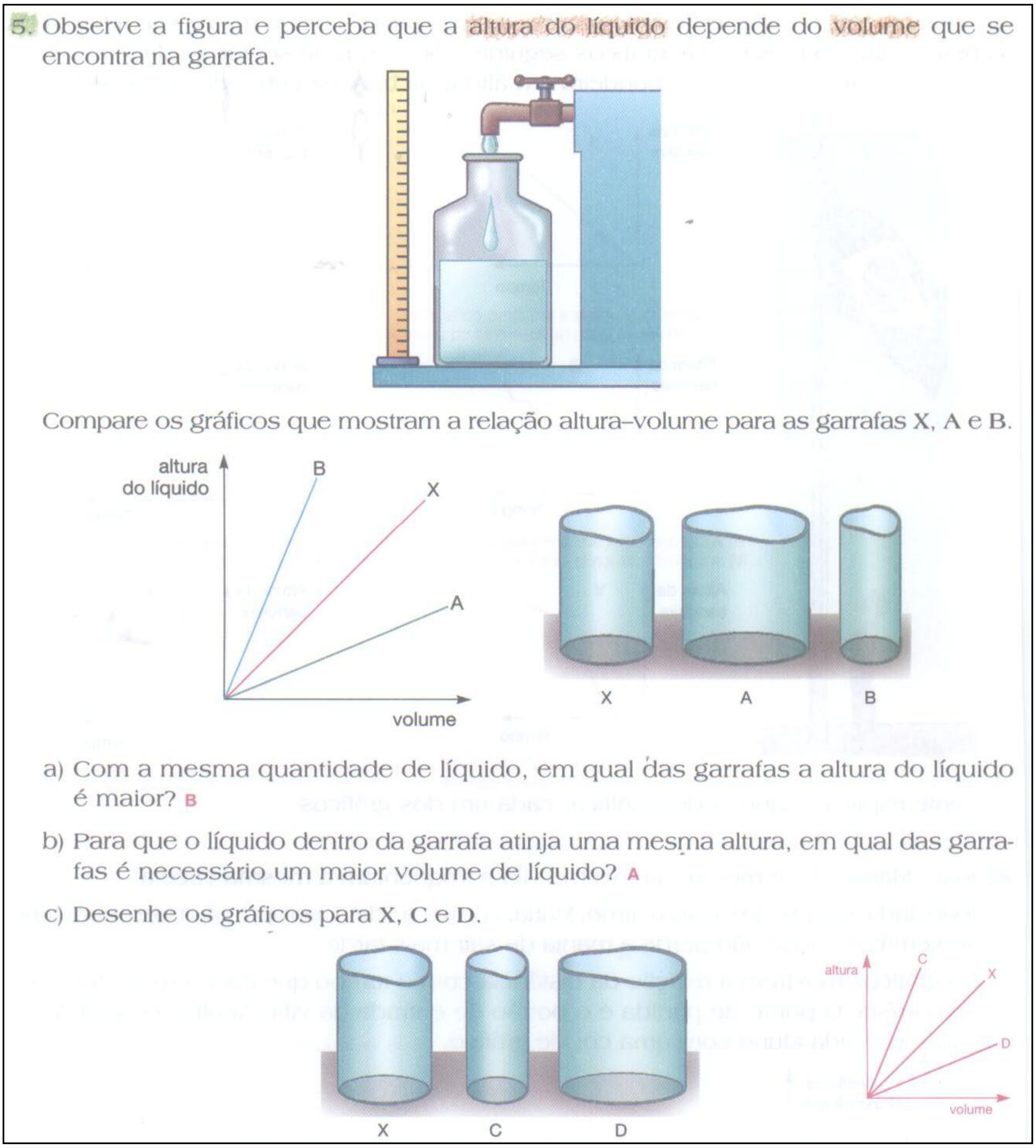
Observando o gráfico podemos notar que, se a quantidade de queijo aumenta, a quantidade de leite aumenta na mesma proporção, isto é, se triplicarmos a quantidade de queijo a ser produzido, a quantidade necessária de leite também triplicará.

Assim, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais, e ao calcularmos $\frac{y}{x}$, com $x \neq 0$, obtemos a **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} = \frac{40}{4} = \frac{50}{5} = 10 \leftarrow \text{constante de proporcionalidade}$$

Figura 5: Função linear e proporcionalidade. Fonte: Souza (2012)

Nosso último livro didático analisado, Matemática Hoje é Feita Assim, é um livro do 9º ano escrito por Bigode (2006), onde o autor faz o uso de uma atividade para introduzir a representação gráfica de uma função linear. Apresentamos a seguir o recorte, conforme figura 6.


5. Observe a figura e perceba que a altura do líquido depende do volume que se encontra na garrafa.

Compare os gráficos que mostram a relação altura–volume para as garrafas X, A e B.

a) Com a mesma quantidade de líquido, em qual das garrafas a altura do líquido é maior? B

b) Para que o líquido dentro da garrafa atinja uma mesma altura, em qual das garrafas é necessário um maior volume de líquido? A

c) Desenhe os gráficos para X, C e D.

Figura 6: Atividade proposta no livro Matemática Hoje é Feita Assim. Bigode (2006)

Percebemos que nesta proposta o autor tenta dar significado à taxa de variação da função linear, ou fator multiplicativo, estes relacionados à inclinação da reta em relação ao eixo *x*.

Para isto ele pede que o aluno observe que a altura do líquido depende do volume que se encontra na garrafa, sendo que depois propõe alguns questionamentos interessantes, fazendo a exploração da visualização gráfica.

A atividade proposta por Bigode (2006) é sem dúvidas, uma abordagem que contextualiza a representação gráfica de uma função linear e que requer um raciocínio proporcional do aluno. A única ressalva que fizemos, é que esta atividade poderia se tornar mais significativa, se ela fosse desenvolvida de forma prática, onde o aluno através da modelagem matemática faça esses experimentos e a partir de observações chegue às suas conclusões.

Ao analisarmos todos esses livros didáticos do Ensino Fundamental, percebemos que houve um grande avanço na introdução do conceito de função linear, que antes era visto somente de um ponto de vista algébrico e agora aparece contextualizado em situações cotidianas. Ambos os processos são importantes, mas o professor antes de trabalhar com exercícios algébricos e resolução de situações problemas, deve criar mecanismos onde o aluno participe da construção desses conceitos, onde o aluno seja o ator principal.

Sugerimos que o aluno colete os dados numéricos com que irão trabalhar através de observações, simulações ou experimentos, depois seja levado a representar por meio de tabelas e gráficos a situação modelada e por fim de fato construa a representação algébrica da função linear.

Sabemos que isso requer trabalho e planejamento do professor, este muitas vezes terá que sair da sua zona de conforto, e preparar abordagens iniciais para a introdução de alguns conteúdos. Também é preciso dizer que, ao se trabalhar desta forma, os alunos não estarão mais dispostos em filas, o que pode gerar conversa, barulho, e desconfiança dos outros professores, mas devemos lembrar que temos alunos do século XXI, que precisam ser atuantes, precisam participar do processo de ensino-aprendizagem para que atribuam significados aos conteúdos matemáticos.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

O presente capítulo traz algumas considerações sobre Modelagem Matemática, metodologia escolhida para o desenvolvimento da nossa atividade didática. Na seção 2.1, revisa-se conceitos básicos de modelagem matemática. A seção 2.2 consta da revisão do artigo de Villarreal e Mina (2013) que inspirou nossa atividade didática. Na seção 2.3, colocam-se algumas considerações sobre modelagem matemática no ensino.

2.1 Tópicos sobre Modelagem Matemática

Atualmente no ensino de Matemática nas escolas brasileiras percebemos que alguns professores de matemática estão buscando romper com o ensino tradicional, em que os conteúdos estão quase sempre bem delineados, obedecendo a uma sequência, sendo que muitas vezes a repetição de exercícios nas aulas expositivas e teóricas se dá vislumbrando o cumprimento do programa de conteúdos deste componente curricular.

Por isto, estes professores estão adotando metodologias de ensino nas quais o foco é a aprendizagem do aluno, com a contextualização dos conteúdos, sendo que a preocupação é com os "meios" e não somente com os "fins", tudo isso na tentativa de tornar as aulas de matemática mais atrativas, prazerosas e produtivas.

Uma dessas metodologias é a Modelagem Matemática, objeto de estudo neste capítulo, e que será usada na aplicação da nossa atividade didática.

Essa metodologia possibilita aos professores de matemática, ao trabalhar determinado conteúdo, contextualizarem o objeto de estudo, mostrando que este pode ser útil para resolver determinadas situações no seu dia a dia, e por consequência, evitando aquela velha pergunta "para que eu preciso aprender isso?".

Na modelagem, no início o professor pode propor aos alunos a escolha do tema de estudo, ou pode escolher um tema que permita explorar determinados conteúdos matemáticos no final do processo.

De um modo geral na modelagem depois de escolhido o tema ou objeto de estudo, os alunos fazem experimentos ou observações que permitem coletar dados, sendo que a partir desses dados é natural aparecer uma forma de representação, muitas vezes uma tabela. Nesse ponto, os alunos são levados a explorar determinadas situações, onde criam hipóteses e fazem estimativas, sendo que a formulação do modelo matemático é consequência deste processo. Entretanto, o aprendizado na modelagem não se restringe a seguir procedimentos, o resultado final depende sempre da criatividade e empenho dos alunos.

É sabido que muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos, logo precisamos ensinar matemática a partir de situações que despertem interesse do aluno.

Isso vai de encontro com as ideias de Bassanezi (2012, p.24) que define modelagem como "a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Em contraponto, Barbosa (2001, p.24) define que "Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações de outras áreas da realidade".

Para aplicação da nossa atividade didática que usou a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, tomamos os conceitos de Bassanezi como base, o qual sugere cinco etapas de atividades intelectuais, que são:

> 1.*Experimentação*: atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados, no qual os métodos experimentais geralmente são ditados pela natureza do experimento e objetivo da pesquisa [...].
> 2.*Abstração*: procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos [...].
> 3.*Resolução*: o modelo é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente [...].
> 4.*Validação*: é o processo de aceitação ou não do modelo proposto – nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – o grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação [...].
> 5.*Modificação*: o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, pois sempre pode ser melhorado [...] (BASSANEZI, 2002, p. 26-32).

Na nossa proposta de atividade didática, o objeto de estudo, funções lineares, foi escolhido para dar sequência ao conteúdo de proporcionalidade, que muitas vezes se resume apenas à mecanização do procedimento da "regra de três". Buscamos então uma maneira, de dar significado ao conteúdo de proporcionalidade, introduzindo o conceito de função linear, através da modelagem matemática, contextualizando uma situação da realidade.

No planejamento da proposta, preocupamo-nos em permear todas as etapas sugeridas por Bassanezi, ou seja, propomos inicialmente um experimento, no qual fosse possível a coleta de dados através de medições, sendo que os dados coletados fossem registrados de alguma forma. Logo após, ocorreu o levantamento de hipóteses, conduzindo o aluno a simplificar o problema em termos matemáticos, o que Bassanezi chama de abstração. Na resolução, obtém-se o modelo matemático capaz de responder a questão, trocando a linguagem natural pela linguagem matemática. No momento da validação, os resultados são comparados com os dados, conferindo suas soluções e previsões com os valores obtidos no experimento. Por fim, ocorre a modificação, que somente ocorrerá caso algum resultado validado não esteja dentro do previsto, assim deve-se voltar aos dados iniciais do experimento e retomar o processo.

A figura 7 representa as atividades intelectuais presentes no processo de modelagem, segundo Bassanezi.

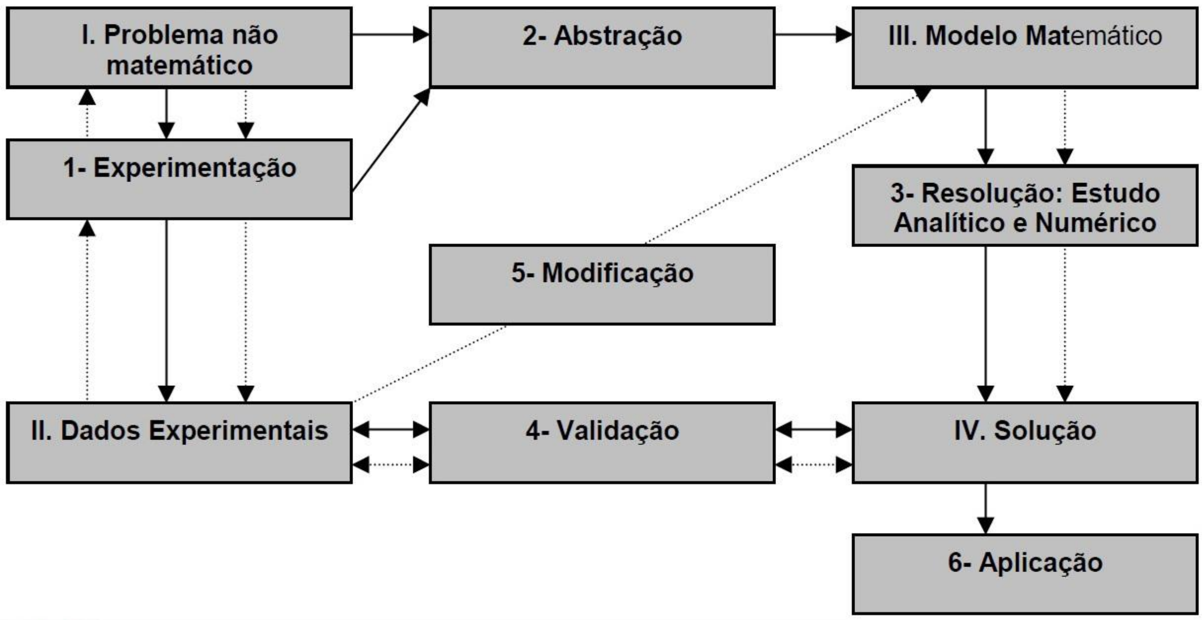


Figura 7 – Atividades intelectuais. Fonte: Bassanezi (2012)

A Modelagem Matemática quando utilizada como metodologia de ensino, traz vários benefícios ao aluno, pois além de ser uma maneira lúdica de aprender, quando se aprende matemática tendo como ponto de partida uma situação real, o aluno sente-se motivado, pois ele participará do processo de ensino e aprendizagem e não será um mero espectador, que fica só ouvindo o professor falar e depois faz cansativas listas de exercícios do tipo siga o modelo.

Bassanezi (2002) cita os principais argumentos a favor da inclusão da Modelagem Matemática como ferramenta de ensino:

> 1. *Argumento formativo*: enfatiza aplicações matemáticas, a performance da modelagem matemática e a resolução de problemas como processo para desenvolver *capacidade* em geral e *atitudes* dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.
> 2. *Argumento de competência crítica*: focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
> 3. *Argumento de utilidade*: enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações.
> 4. *Argumento intrínseco*: considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas.
> 5. *Argumento de aprendizagem*: garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática (Bassanezi, 2002, p.36).

Com estes argumentos de Bassanezi, afirma que a Modelagem Matemática quando utilizada como estratégia de ensino aprendizagem pode estimular novas ideias e técnicas experimentais, além de servir como recurso para melhor entendimento da realidade.

Mas, mesmo havendo aspectos positivos, poderá haver dificuldades durante o processo de modelagem, Bassanezi aponta para elas:

> a) *Obstáculos instrucionais*: Os cursos regulares possuem um *programa* que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo.
> b) *Obstáculos para os estudantes*: O uso de modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. [...] A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. Também o tema escolhido para modelagem pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse.
> c) *Obstáculos para o professor*: Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem (Bassanezi, 2002, p.37).

Porém mesmo que surjam obstáculos, o rompimento com o ensino tradicional, por si só, já é um fator importante, sendo que o propósito de tornar as aulas de matemática mais dinâmicas através da modelagem proporciona ao aluno o despertar para o conhecimento.

Segundo Bassanezi (2002, p.38), “a modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas aonde o conteúdo de matemática vai sendo sistematizado e aplicado”.

Em contraponto, Barbosa (2001, p.2) diz que “a Modelagem Matemática na Educação Matemática possui propósito, dinâmica de trabalho e natureza de discussões matemáticas diferentes daqueles presentes na modelagem profissional”.

Portanto, Matemática e a Modelagem não se apresentam como fins e sim como meios para investigar e compreender situações da realidade e, desta forma, elas devem ser capazes de despertar nos alunos, a compreensão daquilo que está aprendendo.

2.2 Revisão do Artigo de Villarreal e Mina

Nossa proposta de atividade didática foi inspirada em uma atividade semelhante desenvolvida por duas acadêmicas do curso de Matemática e relatada no trabalho de Villarreal e Mina (2013) na Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática em 2013 na cidade de Santa Maria.

Em seu artigo em espanhol, Villarreal e Mina (2013), a primeira, professora da Universidade Nacional de Córdoba na Argentina e a segunda, professora do Colégio Gabriel Taborim também na Argentina, destacam a necessidade de haver experiências que contribuam para que futuros professores de Matemática atribuam sentido à modelagem matemática como estratégia pedagógica nas aulas de Matemática.

As autoras também se referem a diferentes perspectivas vinculadas a aplicação de modelagem matemática. Citam a aplicação do conhecimento matemático recém-ensinado para resolver um problema real; a apresentação de um problema real a fim de motivar os alunos para o estudo do conteúdo matemático que será usado para resolvê-lo; e o trabalho com temas do mundo real, escolhidos pelos alunos, que também propõem e resolvem problemas com a ajuda do professor.

No artigo são relatadas as experiências de Araceli e Melania, acadêmicas do curso de Matemática, que aplicaram atividades didáticas com o uso da modelagem, para estudantes entre 12 e 13 anos, em uma turma de 2º ano de educação secundária de uma escola pública de gestão privada, o que corresponde baseado na idade dos estudantes aqui no Brasil ao 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental.

Entre os conteúdos que elas programaram para atividade didática, encontram-se as relações entre variáveis e suas representações mediante tabelas, gráficos e fórmulas em particular, se propôs o estudo de funções lineares.

Villarreal e Mina (2013) destacam que a professora titular da turma na qual as acadêmicas desenvolveram a atividade didática fazia uso das tecnologias. Ainda relatam que cada aluno levava diariamente seu *notebook* para a escola, sendo que era frequente o uso de planilhas de cálculo, simuladores virtuais, vídeos e *softwares* específicos de matemática, tais como o GeoGebra e o Graphmatica. Por fim, destacam que a presença de tecnologias foi um desafio para Araceli e Melania na aplicação da atividade de modelagem, pois queriam conectar essas abordagens.

No artigo, as autoras relatam também que a turma já havia estudado brevemente os conteúdos matemáticos com o uso de tecnologias, e que o trabalho de modelagem gerou no início dúvidas e incertezas para as futuras professoras. As principais dificuldades apontadas por Araceli e Melania se referem à gestão da turma na maneira apropriada de orientar os alunos durante o processo de modelagem.

A atividade experimental que as acadêmicas planejaram consiste no estudo da variação da altura do nível de água em recipientes de diferentes formas (como os da figura 8) em função do ingresso de uma quantidade fixa de líquido.

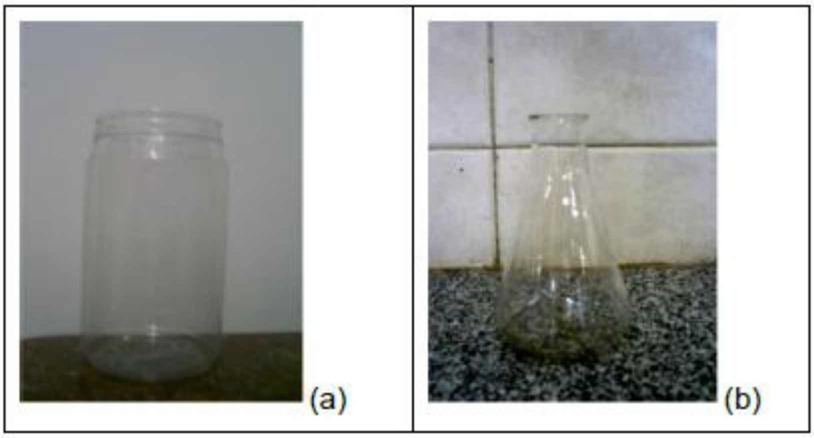


Figura 8: Exemplos de recipientes utilizados. Fonte: Villarreal e Mina (2013)

Os grupos de alunos realizaram medições da altura alcançada pelo nível do líquido em cada recipiente para o ingresso de um volume fixo de água em cada medição. Isso permitiu aos alunos gerar tabelas e gráficos com o uso de *software*. A figura 9 mostra o experimento sendo realizado.

Figura 9: O instrumento de medição. Fonte: Villarreal e Mina (2013)

O cenário permitiu aos alunos, medir, registrar dados, gerar hipóteses e apresentar aos seus colegas as suas conclusões utilizando algum suporte digital. A atividade demandou um total de 2 semanas com uma carga horária semanal de 3 horas e 20 minutos. A figura 10 mostra a apresentação de um grupo de alunos usando o *software* GeoGebra.

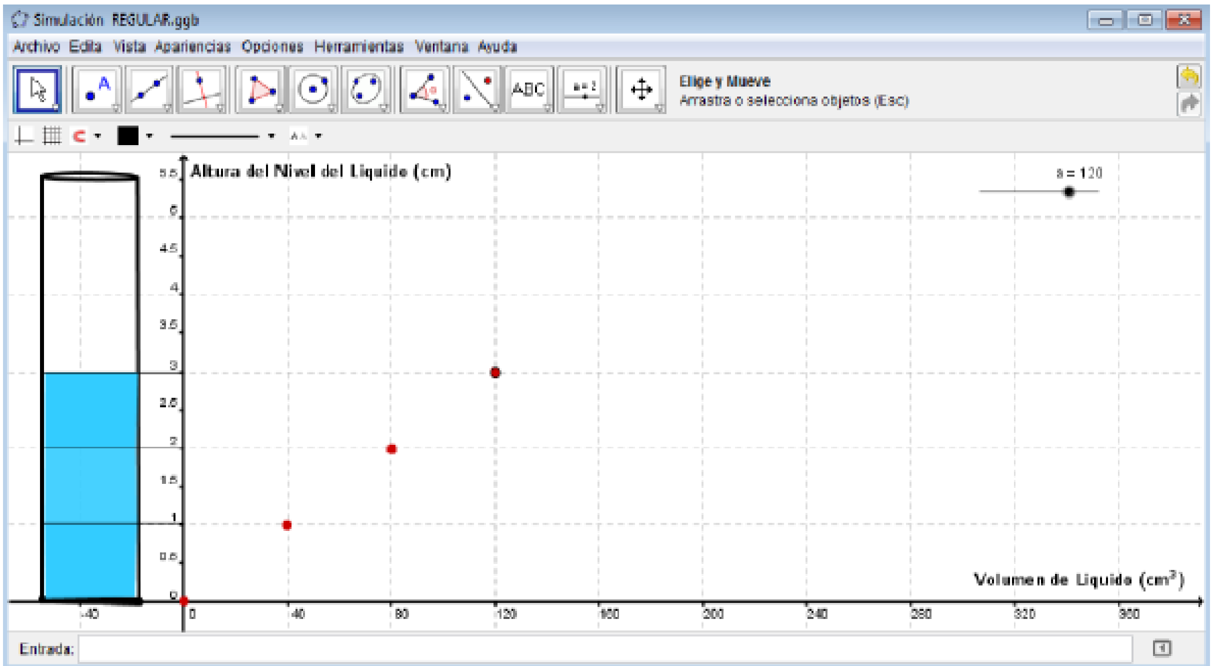


Figura 10: Imagem de simulação no Geogebra. Fonte: Villarreal e Mina (2013)

Depois desse processo de modelagem, Araceli e Melania propuseram uma próxima atividade, o qual consistiu em que cada grupo de alunos escolhesse um tema de seu interesse e resolvessem um problema usando os passos do processo de modelagem que haviam vivenciado durante a atividade experimental.

As acadêmicas relatam que surgiram vários temas, mas o aspecto mais interessante foi à utilização de diferentes tecnologias no processo de modelagem que os estudantes apresentaram, tais como o uso de câmera, cronômetro e filmadora para registrar o experimento, além de usar *softwares* matemáticos no *notebook* e nos *tablets* durante o processo de modelagem.

Villarreal e Mina (2013) evidenciam o surgimento de relações entre as tecnologias e o processo de modelagem matemática, o que confirma segundo as autoras, as afirmações realizadas por diversos professores no contexto mundial.

Por fim, as autoras destacam a importância do uso de tecnologias como aliadas durante o processo de modelagem. Destacam que as acadêmicas concluíram que o trabalho permitiu discutir e consensuar sobre as decisões a cada passo no processo de modelagem, que o trabalho de “risco” se transformou em um trabalho que gerou oportunidades para aprendizagens dos alunos.

Ao final desta revisão de artigo, gostaríamos de diferenciar os públicos da nossa atividade didática e da atividade realizada por Araceli e Melania. No nosso caso, a atividade didática foi desenvolvida numa escola pública, onde os alunos que participaram da proposta tinham entre 12 e 14 anos, porém vinham de famílias humildes, com poder aquisitivo baixo e que não tinham acesso a tantos equipamentos tecnológicos. Já na atividade realizada pelas acadêmicas, os alunos também tinham entre 12 e 13 anos, porém estudavam em uma escola particular, onde as famílias de classe alta tinham acesso as mais variadas formas de tecnologias, tanto que cada aluno levava seu *notebook* para a escola.

Apesar das notáveis diferenças entre os públicos, não é nosso objetivo fazer esta comparação na atividade didática, e sim mostrar que a modelagem matemática pode ser um processo de ensino significativo em ambientes diferentes.

2.3 Algumas Considerações

Deseja-se através da atividade de modelagem matemática apresentar ao aluno a possibilidade de participar do processo de ensino e aprendizagem, pois a curiosidade incitada neles através da modelagem e das suas descobertas certamente vai colaborar para uma melhor compreensão de conteúdos da disciplina de matemática.

É importante dizer que não se pretende substituir todas as aulas de Matemática ditas tradicionais por aulas que envolvam modelagem. Isso porque, para alguns conteúdos a metodologia da modelagem pode não ser adequada. Recomenda-se então o uso de outras metodologias, tais como a resolução de problemas, a investigação matemática, o uso de jogos e tecnologias.

Também é importante dizer que em alguns momentos durante o processo de modelagem, o professor deve tomar a frente para explicar o conteúdo, de maneira a formalizar, ou mesmo auxiliar o aluno a obter conclusões acerca daquilo que foi por ele próprio descoberto.

Por meio da Modelagem, quando o aluno aprende um conteúdo que tem utilidade no seu dia a dia, ou que, poderá ser útil, torna-se mais fácil para o aluno a compreensão daquilo que está aprendendo, pois para ele tal aprendizado não será "em vão" e atenderá a uma velha queixa dos alunos, a utilidade, contextualização e aplicação de certos conteúdos matemáticos na vida cotidiana do aluno.

Diante de tudo que foi apresentado, criou-se um cenário para encaminhar a atividade didática aos alunos, a fim de dar considerações sobre a problemática principal dessa dissertação: como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos para que eles possam atribuir significados ao conceito de função linear?

3 ATIVIDADE DIDÁTICA

O presente capítulo refere-se a nossa atividade didática. A seção 3.1 consta da metodologia utilizada na aplicação da atividade. Na seção 3.2, descrevemos como foi elaborada a proposta didática. Já na seção 3.3, relatamos o desenvolvimento do experimento com o uso da modelagem matemática, sendo que na seção 3.4 ocorre o relato e análise das atividades realizadas pelos alunos. Na seção 3.5, discutimos os resultados alcançados. Por fim, a seção 3.6 consta de uma proposta de sequência de atividade com o *software* GeoGebra.

3.1 Metodologia

A inserção dos conceitos fundamentais de funções lineares no Ensino Fundamental relaciona-se com a possibilidade de trabalhar conexões com os conteúdos de proporção e “regra de três” muito explorados pelos professores nessa fase de escolaridade, conceitos esses que são vistos também como proporcionalidade. Além disso, esses temas possuem grande aplicabilidade em problemas reais que podem ser modelados e trabalhados em qualquer nível de ensino e aprofundados no Ensino Médio.

Tomamos a Modelagem Matemática, na perspectiva de Bassanezi, como metodologia de ensino com o intuito de motivar e contribuir para a aprendizagem dos alunos de uma forma diferente e contextualizada. Considera-se que os alunos, enxergando a aplicabilidade do que estudam na escola, sentir-se-ão mais motivados para o estudo de matemática e terão mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderão conectá-las a outros assuntos, além de desenvolver a capacidade de aplicar a matemática em diversas situações. Todos esses fatores apontam na direção da Modelagem Matemática como um processo rico e criativo.

A ideia da nossa proposta surgiu de uma atividade apresentada por Villarreal e Mina (2013) na VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, conforme foi revisado no capítulo 2, seção 2.2.

Nossa proposta didática foi organizada com atividades que possibilitavam ao estudante a experimentação e a visualização com a utilização de diversos materiais concretos, entre eles recipientes cilíndricos, réguas, provetas, num laboratório de ciências, o qual permitiu também a quebra do cotidiano da sala de aula. Pretendia-se, também verificar a pertinência de trabalho de tal conteúdo matemático com alunos dessa faixa etária.

As atividades que foram propostas nesse trabalho se direcionam a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Nesta etapa da escolaridade, na área de matemática, os alunos passam a ter contato com a álgebra (operações com polinômios, produtos notáveis, equações, razão e proporção, grandezas proporcionais, regra de três), que são vistos como conteúdos abstratos, mas que podem ser traduzidos para uma linguagem natural, pois estes possuem grande aplicabilidade nos problemas da vida cotidiana. É justamente nesse momento, que podem ser apresentadas atividades exploratórias que estimulem a curiosidade e a atenção do estudante, de modo a dar significado ao conteúdo matemático.

De acordo com isso, para a aplicação das atividades didáticas desse trabalho, foram organizados três encontros presenciais de três horas cada um, totalizando 9 (nove) horas. As atividades foram aplicadas no laboratório de ciências de uma escola da Rede Municipal de Ensino, do município de Santo Ângelo – RS, na última semana do mês de novembro de 2013 e na primeira semana do mês de dezembro de 2013. Além disso, ainda no mês de outubro de 2013, foram efetuados os primeiros contatos com os alunos participantes do trabalho.

Nessa ocasião, foram convidados, todos os alunos das duas turmas de 8º anos da escola, sendo que foi formado um grupo de 12 alunos, dos quais 7 meninas e 5 meninos, com idades entre 12 e 14 anos, sendo que todos eles obtiveram êxito em todos os anos de escolaridade até então. As atividades foram no turno da tarde, integrando também as atividades da escola de tempo integral, que visa oferecer estudos de reforço, aprofundamento de estudos e as mais variadas atividades didáticas e lúdicas, bem como oficinas e atividades esportivas.

3.2 Descrição da nossa Atividade Didática

Nossa proposta de atividade didática para introduzir o conceito de função linear por meio da modelagem matemática começa com um experimento, logo após são feitos questionamentos que conduziram o processo de modelagem.

Para possibilitar a realização da atividade experimental foi necessário separar alguns materiais disponíveis no laboratório de ciências da escola e adquirir outros. No experimento foram usadas 6 provetas graduadas com capacidade de 200 mililitros cada uma, elas seriam usadas para coletar uma quantidade de líquido. Também foram usados 6 recipientes de vidro transparente de forma cilíndrica reta com o fundo plano, com capacidade para 1 litro cada um. Estes foram usados para os alunos despejar o líquido colhido na proveta.

Para auxiliar no processo, disponibilizou-se instrumentos de medição, a saber, 6 réguas de 30 centímetros e 6 fitas métricas de 1 metro, estes instrumentos serviram para medir a altura alcançada pelo líquido no recipiente cilíndrico.

O líquido utilizado foi preparado em um balde, sendo que acrescentamos 10 litros de água e um pacote de corante verde para dar cor à água, para esta ficar mais visível na hora de fazer as medições.

O experimento consistiu em coletar com a proveta graduada uma quantidade fixa de líquido colorido do balde, despejar o líquido no recipiente cilíndrico e fazer a medição com a régua ou a fita métrica da altura alcançada pelo mesmo. O procedimento deveria ser repetido algumas vezes, sendo que os dados coletados deveriam ser anotados em folhas de ofício disponibilizadas aos alunos.

A quantidade de líquido a ser coletada pelos alunos não foi previamente determinada, para valorizar essa tomada de decisão dos alunos e o porquê deles escolherem tal quantidade.

O experimento corresponde à primeira das cinco etapas da modelagem matemática descritas por Bassanezi (2012), etapa que o autor chama de experimentação, e que define como sendo uma atividade onde se obtém dados que serão usados nas outras etapas de modelagem.

Depois da atividade experimental, foram lançados problemas aos alunos, sendo que esses serviram de norte para as etapas que Bassanezi define como abstração e resolução.

Os problemas e tarefas lançadas aos alunos foram apresentados com os seguintes objetivos, conforme Quadro 2.

Tarefa / Problema/ Atividade	*Objetivos*
1) Represente através de uma tabela os dados que você coletou.	Observar e verificar dependência entre grandezas.
2) Expresse graficamente os dados que você registrou.	Utilizar a representação gráfica como forma de expressão de uma função linear.
3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:	Compreender a noção de dependência de grandezas.
4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (mililitros) e a altura do líquido (centímetros)?	Verificar a relação de proporcionalidade existente, diretamente ou inversamente proporcional.
5) Sendo x a variável que representa os mililitros e y a variável que representa os centímetros, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?	Verificar e interpretar os conceitos iniciais de domínio e imagem de uma função linear.
6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?	Determinar se as grandezas são diretamente proporcionais.
7) Tomando a diferença entre o 1º valor (ml) e o 2º valor (ml) atribuídos a x, e o 2º e 3º valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?	Caracterizar intuitivamente o conceito de função linear e comparar com o conceito de grandezas diretamente proporcionais.
8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?	Compreender a variação de grandezas de natureza diferente.
9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?	Utilizar a representação analítica como forma de expressão de uma função linear.
10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:	Associar grandezas diretamente proporcionais com o conceito de função linear crescente.
11) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?	Calcular o valor numérico e validar através da atividade experimental.
12) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados?	Calcular o valor numérico e validar através da atividade experimental.
13) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:	Sistematizar os conceitos explorados e associar com as atividades realizadas.

Quadro 2: Atividades e objetivos da atividade didática. Fonte: o autor

As atividades acima descritas perpassam todas as etapas do processo de modelagem matemática, sendo que a última das cinco etapas sugeridas por Bassanezi, a modificação, não foi caracterizada na nossa proposta de atividade didática, pois entendemos que em casos de ajustes, esses são feitos durante o processo de modelagem, e como nosso intuito é introduzir o conceito de função linear, não iremos aprofundar o assunto com os alunos.

3.3 Desenvolvimento do Experimento da Atividade Didática

No primeiro encontro os alunos foram encaminhados ao laboratório de ciências da escola, onde receberam instruções sobre os aspectos gerais da atividade didática. Logo após, os alunos formaram duplas e tiveram contato com alguns materiais que seriam utilizados na primeira etapa da atividade de modelagem matemática, chamada experimentação. A proveta graduada, o recipiente de vidro em formato cilíndrico, o balde com líquido verde, as réguas e a fita métrica.

Foi explicado aos alunos que cada dupla deveria pegar a proveta e encher com certa quantidade de líquido (fixa) e despejar essa quantidade de líquido no recipiente, devendo também medir a altura que o líquido alcançou. E feito isso, o processo deveria ser repetido algumas vezes sendo que esses dados coletados deveriam ser registrados em folhas de ofício.

Nosso problema didático era entender a relação que havia entre as grandezas de capacidade (em mililitros) e de altura (em centímetros) a partir do experimento e com isso criar um modelo matemático que permitisse expressar a altura alcançada em função do ingresso de uma quantidade fixa de líquido.

Lançada a proposta, os alunos estavam ansiados em começar a fazer o experimento, logo no início questionaram qual a quantidade de líquido que deveriam coletar para colocar no recipiente. A orientação dada aos alunos foi que fizessem alguns testes a fim de verificar qual a quantidade de líquido que em mililitros (ml) proporcionaria uma medição em centímetros (cm) exata, a fim de facilitar o processo de experimentação.

Alguns alunos logo encheram a proveta de 200 ml e despejaram no recipiente cilíndrico, e ao medir a altura alcançada pelo líquido encontraram medidas exatas na régua. Porém outras duplas de alunos encheram a proveta com 100 ml, 150 ml, 130 ml, mas na hora de medir a altura alcançada pelo líquido no recipiente cilíndrico, ficava complicado de “contar os risquinhos” na régua conforme falou um aluno. Ou seja, ele quis dizer que ficava difícil de verificar uma medida exata em centímetros, isso poderia ser um complicador para o restante do processo. Obviamente coube nesse momento ao professor a reflexão sobre as unidades de medida. Observe na figura 11, que na régua escolar, cada centímetro está dividido, com traços menores, em 10 partes congruentes, os milímetros. Essa divisão é importante para medir segmentos que menores do que 1 cm, dando maior precisão à medida.

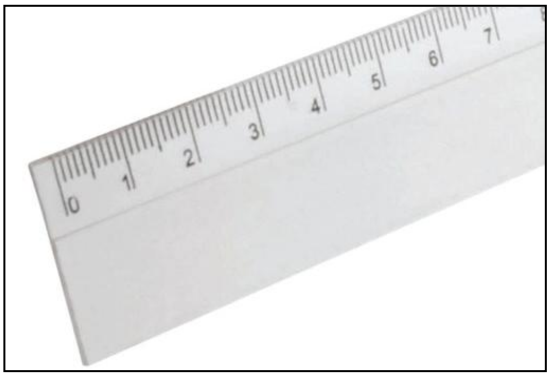


Figura 11: Régua Escolar. Fonte: o autor.

Outros grupos de alunos continuavam suas tentativas de encher suas provetas com o líquido verde, sendo que dois grupos encontraram que enchendo a proveta com 160 ml, o líquido alcançava a altura de 4 cm no recipiente. Logo todas as duplas entraram em consenso e decidiram coletar 160 ml para fazer o experimento.

Cabe ressaltar que uma dupla de alunos encontrou dificuldades ao fazer as medições com a régua, pois posicionavam a régua erroneamente, medindo também com a parte não graduada antes do zero (figura 11). Foi necessário interferir e explicar a dupla qual a maneira correta de “medir”.

Observamos que surgiram algumas dificuldades por parte de alguns alunos, tais dificuldades encontradas são citadas por Bassanezi como obstáculos para os estudantes, onde alguns alunos não conseguem relacionar os ensinamentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. Nos exemplos apresentados nas aulas “tradicionais” os alunos geralmente não fazem medições, apenas são apresentados cálculos envolvendo medidas quase sempre exatas, sendo assim não encontram problemas ao manipular uma régua para medir, ou em “contar os risquinhos”, os milímetros. Por isso a necessidade de mudança de metodologias de ensino. Nesse caso a modelagem possibilitou a manipulação de instrumentos de medição, que são de muita utilidade em nosso cotidiano.

Dando continuidade ao experimento, as duplas de alunos coletavam nas provetas as quantidades de 160 ml, despejavam no recipiente cilíndrico, mediam a altura alcançada pelo líquido e anotavam na folha de oficio. Todas as duplas repetiram o processo até quase encher o recipiente com capacidade de 1 litro. Cabe dizer que alguns alunos concluíram nesse momento que dava para despejar apenas 6 vezes a proveta com 160 ml no recipiente, conforme apontam na figura 12 os dados coletados pela dupla de alunos Alfa.

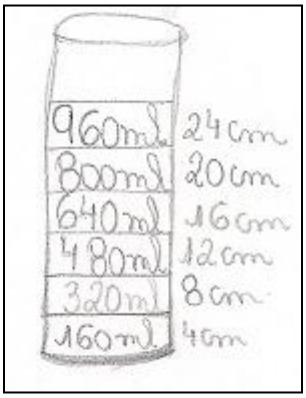


Figura 12: Dados coletados pela dupla Alfa

A seguir apresentamos o relato e análise de todas as atividades sequentes à atividade experimental realizada pelos alunos.

3.4 Relato e Análise

Os alunos foram orientados a coletar as informações, medindo e anotando todos os dados que entendessem ser importantes, e logo após foram desafiados a organizar esses dados de alguma forma. Destacamos a forma de organização dos dados da dupla Beta na figura 13.

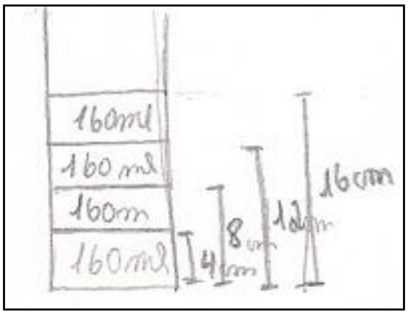
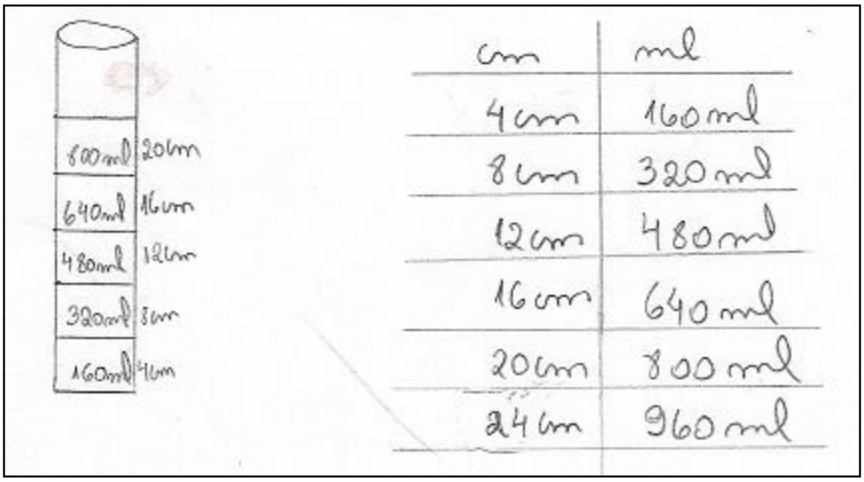


Figura 13: Dados coletados pela dupla Beta

Percebemos que as duplas fizeram alguma forma de registro com mesma conotação, ou seja, a cada acréscimo de 160 ml despejados no recipiente de vidro, a altura do líquido dentro do mesmo aumentava em 4 cm. Cabe ressaltar que logo após a coleta de dados, os alunos foram incentivados a organizar os mesmos através de tabelas, sendo que essa forma de organização de dados não foi solicitada antes, afim de valorizar as diferentes formas de registro por parte dos alunos. Conforme a figura 14, temos os dados coletados e organizados pela dupla Epilson.



cm	ml
4cm	160ml
8cm	320ml
12cm	480ml
16cm	640ml
20cm	800ml
24cm	960ml

Figura 14: Dados coletados e organizados em forma de tabela pela dupla Epilson

Com isso terminou-se nosso primeiro encontro, o qual se focou na primeira etapa da Modelagem Matemática, a experimentação que basicamente se resume na coleta de dados e registro.

No segundo encontro com os alunos, foram enfatizadas a abstração e a resolução, etapas e/ou procedimentos que levam à formulação dos modelos matemáticos, sendo que o modelo é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Para isso, foram feitos vários questionamentos para nortear essa formulação.

Conforme aponta atividade número 2, descrita na seção 3.2 (Quadro 2), foi solicitado aos alunos que se fizesse um esboço gráfico dos dados coletados que foram registrados na tabela. Nesse momento percebeu-se certa insegurança dos alunos em começar a fazer a representação gráfica. Muitos perguntavam como começar. Prontamente ocorreu a intervenção do professor relembrando que um gráfico é representado por dois eixos, o eixo *x* da variável independente e o eixo *y* da variável dependente.

Os alunos iniciaram o esboço gráfico fazendo a construção dos eixos cartesianos, porém percebeu-se que muitos associavam o eixo *x* com a grandeza altura (cm). Novamente foi necessária a intervenção do professor, questionando aos alunos se era a altura que dependia da quantidade de mililitros ou se era ao contrário. Os alunos facilmente compreenderam a situação, conforme a fala de um aluno, "os centímetros vão no eixo *y* e os mililitros vão no eixo *x*".

Porém surgiu outro problema, todos os alunos ao fazer as escalas numéricas nos eixos, às faziam de unidade em unidade, logo questionaram como fariam para representar 160 ml, 320 ml e assim por diante. Foi necessária novamente a ajuda do professor, para explicar que as grandezas eram de escalas diferentes, logo nos eixos eles poderiam fazer intervalos do tamanho necessário para representar os dados da tabela.

Diante disso as duplas de alunos fizeram novas tentativas, sendo que a dupla Pi apresentou o seguinte esboço, conforme a figura 15.

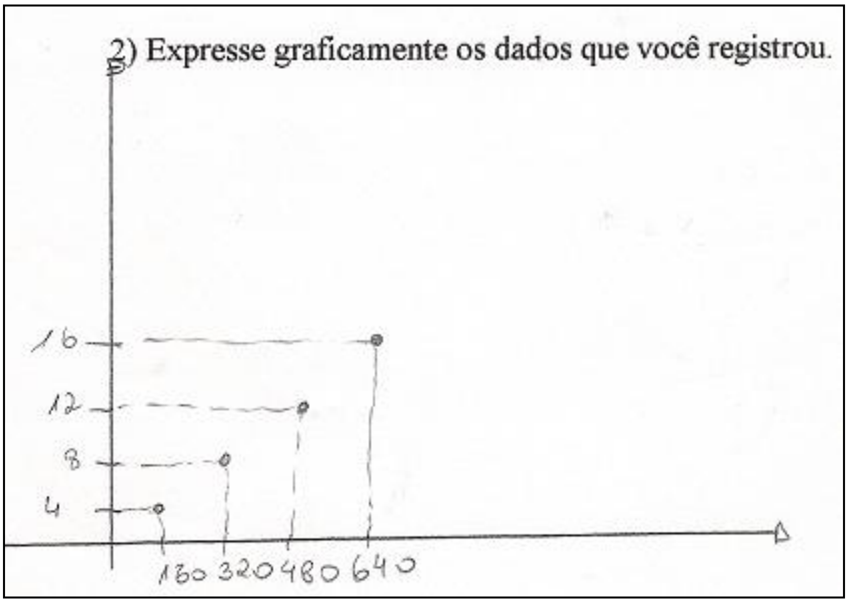


Figura 15: Esboço gráfico construído pela dupla Pi

Como os alunos marcaram os pontos correspondentes aos pares ordenados da tabela, propomos a eles que ligassem esses pontos através de segmentos. A dupla Epilson apresentou o seguinte resultado, conforme figura 16.

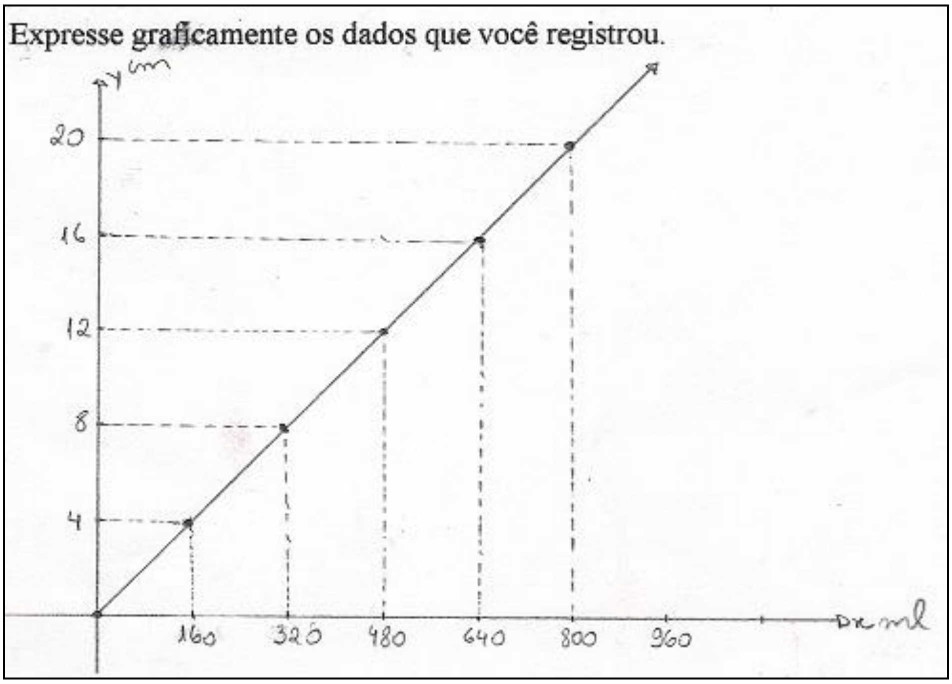


Figura 16: Esboço gráfico construído pela dupla Epilson

A atividade de representação gráfica demandou grande período de tempo, apareceram várias obstáculos para os alunos, que podemos associar aos obstáculos que Bassanezi aponta na modelagem. Tais obstáculos nos remetem a refletir sobre porque os alunos de 8º ano tinham tantas dificuldades na hora de representar graficamente os dados coletados por eles, sendo que esse conteúdo é trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém geralmente nas aulas "tradicionais" são construídos gráficos com grandezas de mesma ordem, ou seja, com escalas numéricas de valores que muitas vezes não retratam a realidade. Percebe-se então que a modelagem matemática contribui para os alunos desenvolverem a habilidade de representar dados do seu cotidiano através de gráficos.

Depois de realizada a representação gráfica da situação modelada, foi dada sequência as atividades e problemas descritos na seção 3.2 (Quadro 2), sendo que estes eram debatidos oralmente pelo grande grupo e logo após as duplas faziam o registro nas suas folhas de anotações.

A atividade 3 se refere à existência de regularidades no registro, o que de fato ficou bem claro para todos os alunos. Cita-se como exemplo o registro feito pela dupla de alunos Pi, (figura 17).

3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

Sim, observei que a cada 4 cm sobe 160 ml.

Figura 17: Registro da dupla Pi sobre a regularidade observada na atividade didática

Dando continuidade na proposta, a fim de construir o conceito de função linear, na atividade 4 perguntou-se aos alunos qual a relação existente entre a quantidade do líquido em ml e a altura atingida em cm. Foi possível perceber que os alunos conseguiram estabelecer relação entre um conteúdo aprendido anteriormente na escola, às grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Destaca-se a resposta dada pela dupla de alunos Gama conforme figura 18.

A cada 160 ml despejados no recipiente a altura aumenta em 4 cm. Sendo assim, também pode-se dizer que a cada 1 cm o volume aumenta em 40 ml. Há uma proporcionalidade direta entre as grandezas:

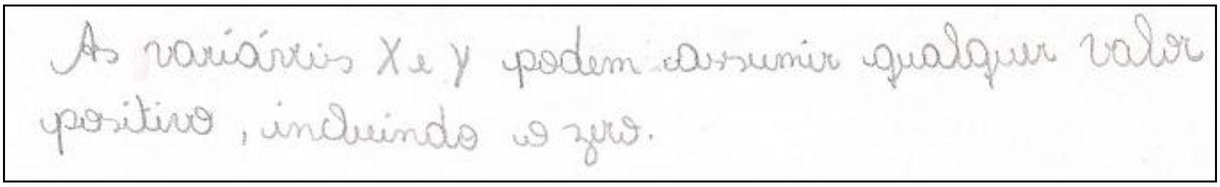
$+160$ 160 ml - 4 cm $+4$
320 ml - 8 cm

$$\overset{+160}{\frac{160}{4}} = \overset{+160}{\frac{320}{8}} = \frac{480}{12} = 40 \quad (+4 \quad +4)$$

Figura 18: Registro da dupla Gama sobre a relação existente na representação gráfica

A seguir, questionou-se sobre que valores que poderíamos ter para a variável *x*, que indicava a quantidade em ml, e para a variável *y*, que representava a altura do líquido dentro do recipiente em cm. Pode-se associar esse questionamento simples com a ideia de domínio e imagem de uma função. Os alunos ainda não tinham conhecimento da noção de função, porém os questionamentos estão conduzindo à ideia intuitiva de função.

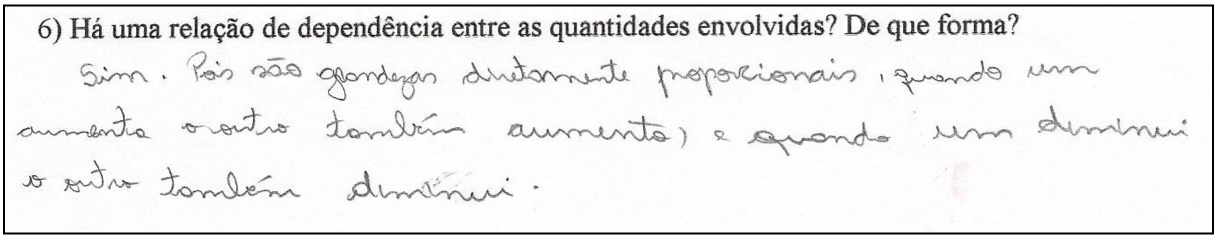
Discutiu-se entre o grupo por que não se pode associar valores negativos e a possibilidade das variáveis assumirem o valor zero. Os alunos observaram que os valores em centímetros e mililitros não poderiam assumir um valor que excedesse a capacidade do recipiente de vidro. Segue a resposta registrada pela dupla de alunos Alfa (figura 19).



As variáveis x e y podem assumir qualquer valor positivo, incluindo o zero.

Figura 19: Registro da dupla Alfa - possíveis valores que as variáveis poderiam assumir

Na atividade 6 (conforme quadro 2) os alunos foram questionados sobre a relação de dependência que havia entre as quantidades envolvidas. Esse questionamento vem de encontro conteúdo aprendido anteriormente por esses alunos, sobre grandezas proporcionais. Notamos que os alunos aprenderam bem tal conteúdo e conseguiram relacionar com a atividade didática. Segue a resposta dada pela dupla de alunos Epilson, na figura 20.

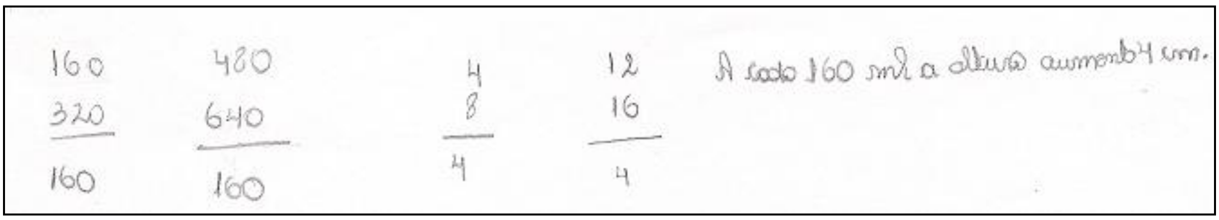


6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim. Pois são grandezas diretamente proporcionais, quando um aumenta o outro também aumenta, e quando um diminui o outro também diminui.

Figura 20: Registro da dupla Epilson

Logo após, já no intuito de conduzir à ideia de função linear, a atividade 7 remetia a uma análise dos valores registrados na tabela. Lançamos a atividade aos alunos: “Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a *x*, e o 2° e 3° valor atribuídos a *x*, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de *y* (cm), o que você observa?”. O registro feito pelos de alunos, é exemplificado nas figuras 21 e 22.



160	480	4	12	A cada 160 ml a altura aumenta 4 cm.
320	640	8	16	
160	160	4	4	

Figura 21: Registro feito pela dupla Gama

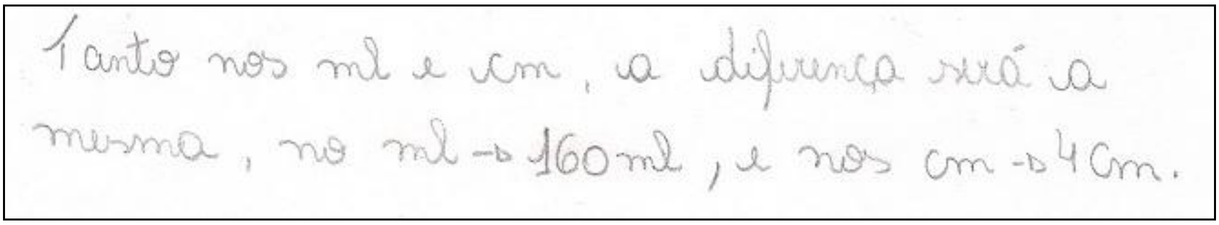

Tanto nos ml e cm, a diferença será a mesma, no ml -> 160ml, e nos cm -> 4 Cm.

Figura 22: Registro feito pela dupla Alfa

Existia a necessidade de expressar essa linguagem natural em uma linguagem mais formal. Segundo Bassanezi (2002, p.34), este processo na modelagem corresponde à resolução, “onde se substitui à linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente”.

Questionaram-se as duplas de alunos sobre como expressar matematicamente aquela relação que havia entre a altura e a quantidade do líquido. Nesse momento, apesar de vários alunos responderem que a cada 160 ml de líquido despejados a altura do líquido no vidro aumentava em 4 cm, eles não conseguiram generalizar. Coube então a intervenção do professor conduzindo uma explicação de como representar uma função, de encontrar a taxa que relacionava essas grandezas.

Muitos alunos quase encontraram a taxa que relacionava as grandezas, escrevendo que $160y = 4x$, ou seja, a cada y acréscimos de 160 ml, a altura aumentou 4 cm. Nesse momento, foram feitos alguns questionamentos adicionais conduzindo a encontrar relação existente entre as grandezas. Se despejarmos 80 ml, que altura o líquido alcança? E se despejarmos 40 ml? E com 10 ml? E com 1 ml? Os alunos facilmente respondiam, pois aplicavam a proporcionalidade, ou seja, para 80 ml a altura era de 2 cm e para 40 ml a altura era de 1 cm.

Nesse momento conversamos sobre a proporcionalidade envolvida na situação, retomando conceitos aprendidos. Então foi dada sequência ao processo, sendo que nosso objetivo era encontrar a altura que o líquido subiria em função da quantidade de líquido despejada no recipiente, ou seja, queríamos encontrar uma expressão matemática que nos desse a altura em centímetros para cada mililitro de líquido despejado no recipiente.

Continuando o processo de proporcionalidade, os alunos foram questionados pelo professor: “se para 40 mililitros a altura era de 1 centímetro, qual seria a altura para 1 mililitro?”. Os alunos resolveram a situação pela tradicional “regra de três”, encontrando a altura de 0,025 centímetros.

Nesse momento vários alunos questionaram o número encontrado, para o quê serviria aquilo, como iriam medir 0,025 centímetros na prática. Coube então a explicação do professor que esse número encontrado era a taxa de variação do problema, ou seja, que a cada 1 mililitro de líquido despejado no recipiente a altura aumentaria em 0,025 centímetros. Foi explicado também que na prática seria impossível medir com uma régua essa altura, mas que essa taxa nos permitiu criar uma função linear, a qual nos permitiria calcular algebricamente a altura para qualquer quantidade de líquido despejada no recipiente.

Os alunos se mostraram confusos com o número encontrado, achavam mais simples a linguagem natural e afirmavam preferir os números dos dados coletados do experimento. Porém esse processo de abstração era necessário, a explicação foi repetida pelo professor, e no final dela os alunos anotaram a função linear obtida. Segue o registro feito pela dupla de alunos Beta (figura 23).

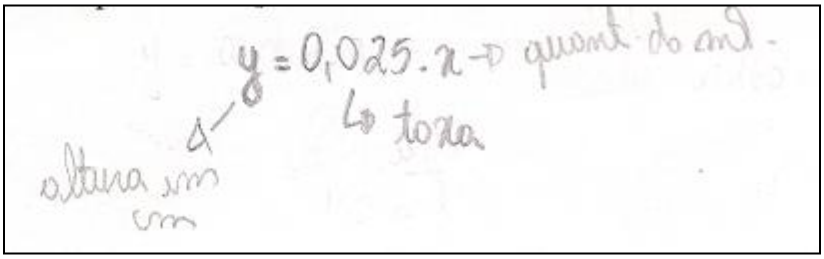
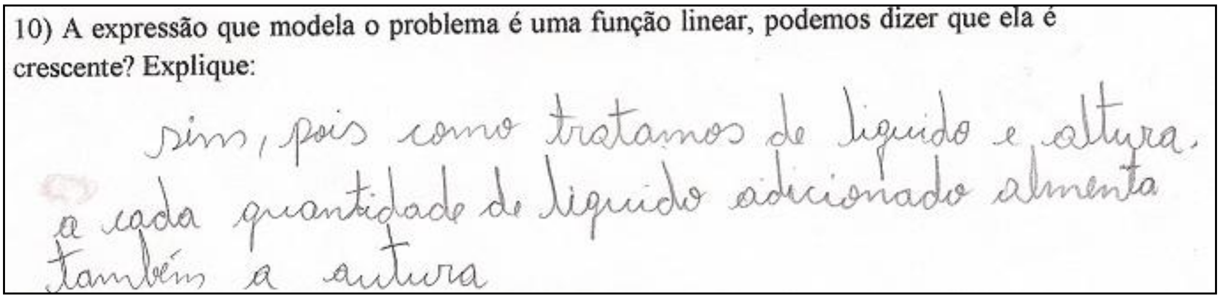


Figura 23: Registro feito pela dupla Beta sobre a expressão que modela o problema

O terceiro encontro serviu para dar continuidade ao processo de abstração e resolução, bem como para validação dos dados a partir do modelo proposto.

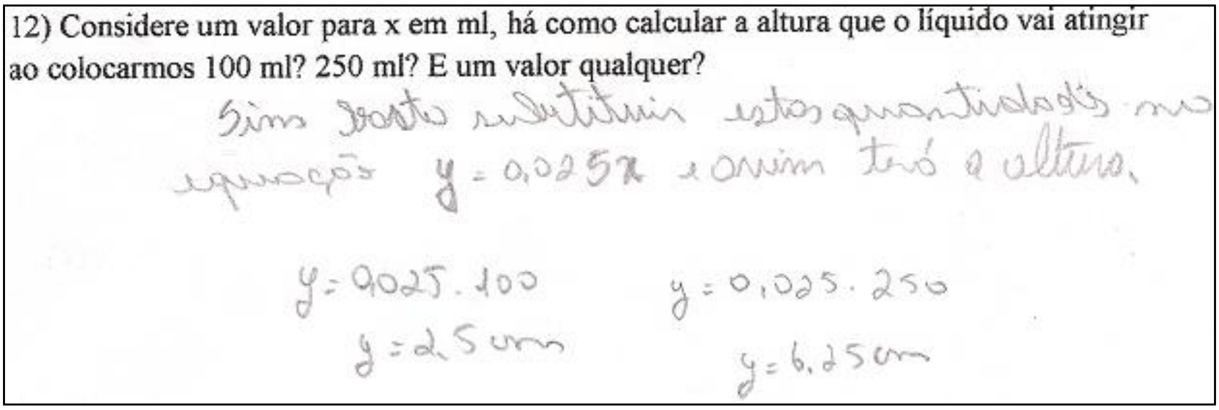
O próximo questionamento se relaciona com a verificação se a função linear encontrada era crescente ou decrescente, sendo que todos os alunos foram unânimes em dizer que era crescente, dado que se aumentasse a quantidade de líquido despejados no recipiente, a altura aumentaria proporcionalmente, pois as grandezas mencionadas são diretamente proporcionais, conforme registro da dupla Sigma, na figura 24.


10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

sim, pois como tratamos de liquido e altura. a cada quantidade de liquido adicionado almenta também a autura

Figura 24: Registro feito pela dupla Sigma

Logo após isso, destacou-se a importância de validar a função linear que modela o problema. Para isso foram feitos primeiramente alguns questionamentos sobre a altura que o líquido iria atingir se colocássemos 100 ml no recipiente, e se colocássemos 250 ml. As duplas foram incentivadas a calcular essa altura, sendo que algumas fizeram tabelas de proporcionalidade partindo da ideia inicial que a cada 160 ml de líquido despejado no recipiente a respectiva altura aumentaria em 4 cm e outras duplas usaram o processo de regra de três. Por fim foram motivados a usar a função linear modelada, como registrado pela dupla de alunos Beta, na figura 25.


12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

Sim basta substituir estas quantidades na equação $y = 0,025x$ e assim terá a altura.

$y = 0,025 . 100$ $y = 0,025 . 250$

$y = 2,5$ cm $y = 6,25$ cm

Figura 25: Registro da dupla de alunos Beta

Logo após efetuarem corretamente os cálculos, foi proposto que os alunos validassem os resultados de forma prática, ou seja, coletando 100 ml e depois 250 ml com a proveta e despejando o conteúdo no recipiente. Medindo a altura do líquido encontraram valores aproximados, a 2,5 cm e 6,25 cm respectivamente, até porque com a fita métrica ou régua não temos uma precisão nas medidas em virtude da subdivisão do centímetro.

A última situação prática lançada aos alunos foi descobrir quantos mililitros seriam necessários despejar no recipiente cilíndrico para encontrar uma altura de 25 cm. Novamente os alunos se sentiram desafiados e queriam primeiramente encher o recipiente com 25 cm de altura para descobrir a quantidade de mililitros despejados. E assim fizeram, encontrando facilmente a quantidade de 1000 ml, que correspondiam a 5 provetas de 200 ml cheias.

Seguindo, foram questionados de como encontrar essa medida usando a função linear que havíamos modelado. Porém a grande maioria dos alunos num primeiro momento errou ao substituir a medida 25 cm na variável *x* que representava a altura em mililitros, mas com a intervenção do professor, logo perceberam que deveria ser ao contrário, como no registro da dupla de alunos Pi, (figura 26).

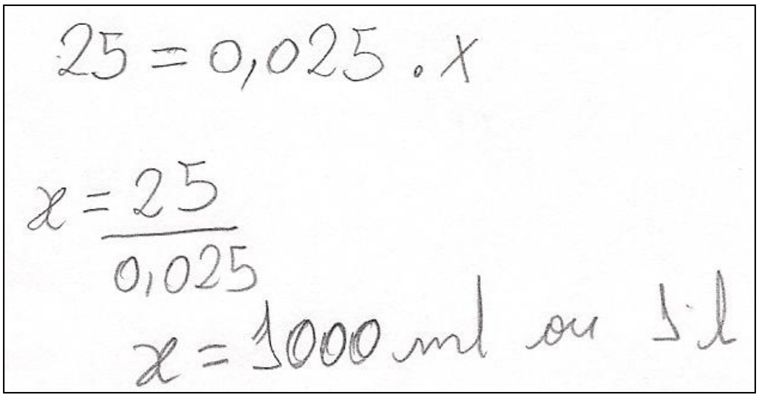

$$25 = 0,025 \cdot x$$
$$x = \frac{25}{0,025}$$
$$x = 1000 \text{ ml ou } 1 \text{ l}$$

Figura 26: Registro da dupla Pi

No final do encontro fizemos uma breve retomada de todo o processo da modelagem, retomando alguns conceitos e características da função linear. E como proposta final, encaminhamos a última atividade aos alunos, o desafio de explicar com as suas palavras o que seria uma função linear e quais suas características. Destaca-se o relato da dupla de alunos Pi, na figura 27.

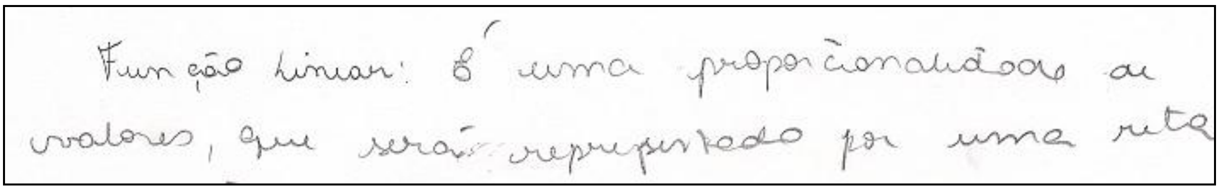

Função linear: é uma proporcionalidade ao valores, que serão representado por uma reta

Figura 27: Registro da dupla de alunos Pi

3.5 Discussões dos resultados

A atividade didática, por meio da modelagem matemática, propiciou aos alunos de 8° ano uma maneira lúdica, atrativa e prazerosa de aprender.

Além disso, a Modelagem Matemática contribuiu para a contextualização da matemática, atribuindo significados à ideia inicial de função linear.

O cenário permitiu aos estudantes desenvolverem outras habilidades com a atividade de experimentação, tais como: fazer medições, registrar dados, gerar hipóteses e apresentar suas descobertas e conclusões aos pares.

Apesar dos obstáculos encontrados no desenvolvimento da atividade didática, tais como o não domínio da representação gráfica, a dificuldade de trabalhar com grandezas de ordem diferente, a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática, destacamos que certamente a atividade de modelagem contribuiu para de certa forma rever esses conteúdos, contribuindo de fato para que o aluno atribua significado ao que esta aprendendo.

Destacamos a viabilidade de trabalhar funções lineares com alunos desta faixa etária, pois todos conseguiram relatar alguns tópicos importantes deste conteúdo, conseguiram registrar os dados graficamente chegando à conclusão que a situação modelada era representada por uma reta. Também conseguiram entender que a proporcionalidade existente entre as grandezas era direta, ou seja, se o valor de uma variável aumentava o valor da outra também aumentava, e a isso relacionamos a ideia de função crescente. Mesmo que de forma simplificada, foi possível caracterizar uma função linear, encontrar a taxa de variação da situação didática modelada, entre outros.

Esta atividade didática que se deu através do processo de modelagem matemática. Sugerimos uma proposta de sequência com o uso de tecnologias (uso do *software* GeoGebra). Também é pertinente que o professor faça uma formalização do conceito de função linear relacionando com o conhecimento prévio dos alunos de 8º ano sobre proporcionalidade.

Conforme afirma Bassanezi (2002), as escolas possuem um programa de conteúdos pré-determinado pela matriz curricular, sendo que estes devem ser trabalhados completamente pelos professores nos 200 dias letivos e 800 horas destinados a cada ano da etapa escolar. A modelagem como metodologia é aliada para introdução de vários conteúdos, colaborando para o processo de ensino e aprendizagem, porém pode ser um processo muito demorado, o que diminuiria o tempo de trabalho dos outros conteúdos.

Como os alunos do 8º ano em questão, já haviam aprendido o conteúdo de proporcionalidade, buscamos introduzir o conteúdo de função linear, no intuito de dar sequência aos conceitos explorados. Apesar de serem dois conteúdos geralmente trabalhados em anos distintos, proporcionalidade e função linear são conteúdos que se complementam, abrindo assim a possibilidade de dar sequência e não trabalhar conteúdos isoladamente. Os conteúdos matemáticos em nossa opinião se dão em um processo contínuo de construção, onde um conceito pode ser complementado com outro, havendo assim a interligação entre conteúdos, ou seja, é preciso aprender proporcionalidade para estudar função linear.

Obviamente caberá ao professor regente da turma decidir sobre a viabilidade de explorar mais conceitos, devendo levar em conta a importância de se trabalhar e dar continuidade as atividades, respeitando a grade de conteúdos da escola.

3.6 Proposta de Sequência de atividade com o GeoGebra

A utilização de recursos tecnológicos computacionais em sala de aula tem se tornado prática constante em escolas de Educação Básica. Na matemática, em particular, o uso de *softwares* vem contribuído para processo de aprendizagem dos alunos, pois esta metodologia de ensino é uma nova estratégia para atrair a concentração dos mesmos.

O GeoGebra é um *software* matemático gratuito, que permite trabalhar conteúdos de geometria e álgebra de uma maneira lúdica e prazerosa. Esse *software* permite fazer construções de pontos, retas, gera equações, gráfico e valores numéricos, desde que se dêem os comandos corretos. É um recurso que permite aos alunos testar seus conhecimentos, validar seus cálculos e conferir hipóteses criadas.

No decorrer dessa proposta, serão abordadas as principais ferramentas de ajuda do GeoGebra, relacionadas ao estudo de funções lineares, para que se possa explorar os dados coletados a atividade didática de modelagem matemática.

Figura 28: Tela inicial do GeoGebra

Na figura 28, está representada a tela inicial do GeoGebra. A entrada de comandos é o espaço destinado para inserir os comandos do programa, já a janela algébrica é onde aparecem os comandos dados e a janela gráfica é o espaço onde aparecem de fato os pontos, retas, e gráficos.

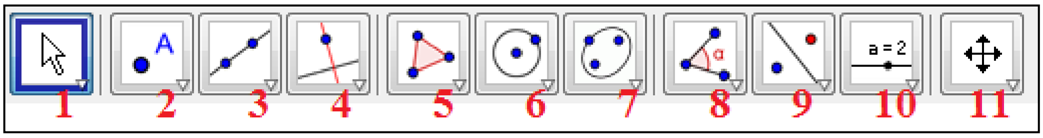


Figura 29: Barra de Ferramentas GeoGebra com botões numerados

Já na figura 29 temos a barra de ferramentas que se encontram os principais botões que facilitam alguns comandos.

Para trabalhar com funções lineares é necessário saber como marcar pontos pertencentes ao gráfico utilizando os comandos do *software* GeoGebra. Porém nos dados da atividade experimental de modelagem, conforme mostram as anotações dos alunos da dupla Gama, temos grandezas de escalas diferentes.

(x) ml	cm
160	4
320	8
480	12
640	16

Figura 30: Dados da atividade experimental

Então antes de inserirmos os pares ordenados, temos que ajustar os eixos *x* e *y* no GeoGebra. Para isso basta clicar com o botão direito na janela de visualização (conforme mostra a figura 31), e na opção *EixoX : EixoY*, selecionar a escala 20 : 1. Com o comando *Ctrl menos* dado no teclado ajustamos a escala para que fiquem em conformidade com os dados experimentais.

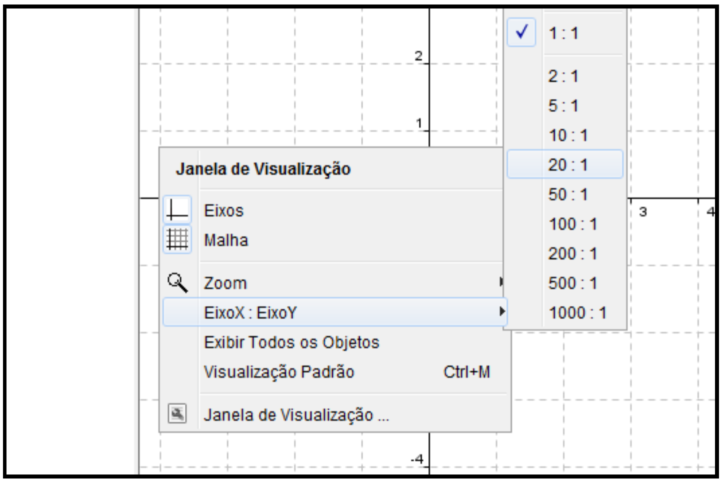


Figura 31: Formatação dos eixos no GeoGebra

Para inserirmos os pontos no GeoGebra, temos duas opções para serem trabalhadas com os alunos. Na primeira o aluno com intermédio do professor deve localizar na malha quadriculada localizada na janela gráfica os pontos conforme os dados obtidos na atividade experimental. Seguem as instruções:

a) Clique no **botão 2** e selecione **"Novo ponto"**. Clique, na janela gráfica, no local do ponto que deseja inserir. Observe que na janela algébrica aparece na aba de **Objetos Livres** o ponto **A** e suas coordenadas.

b) Repita o procedimento anterior e marque um ponto **B** qualquer, observe suas coordenadas.

A outra opção é de que o alunos use diretamente a entrada de comandos do GeoGebra, como segue:

a) Clique na barra de entrada de comando e digite, **C = (4,160).** Esse ponto será marcado na janela gráfica e suas coordenadas aparecem na janela algébrica.

b) Repita o procedimento anterior e marque outro ponto **D = (8,320)**.

Para traçar a reta devemos usar novamente a barra de ferramentas do GeoGebra:

a) Clique no **botão 3,** escolher a opção "SemiReta definida por dois pontos", e clicar sobre os pontos **A** e **B**. A reta aparece na janela gráfica e na janela algébrica aparece, indicada por uma letra minúscula, a equação cartesiana da reta definida.

b) Faça o mesmo e trace a reta definida pelos pontos **C** e **D**. Observe a equação na janela algébrica.

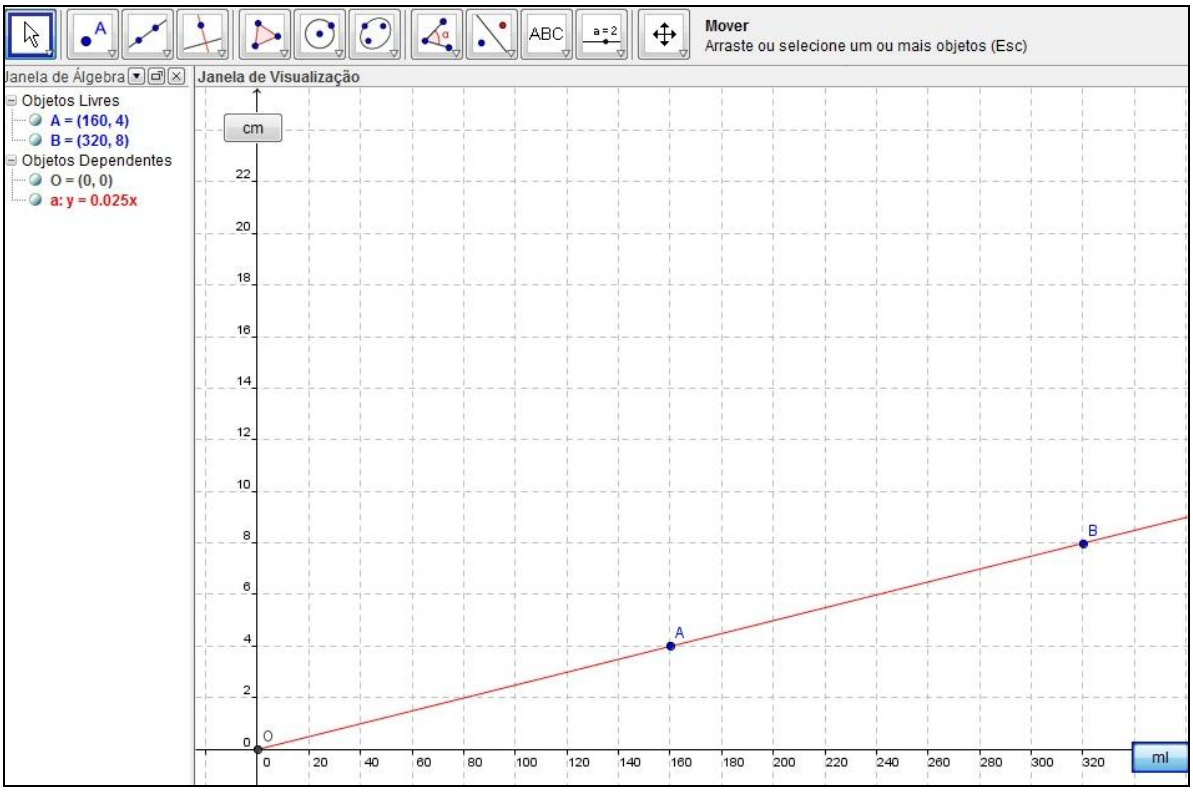


Figura 32: Gráfico obtido depois de inseridos os pares ordenados

Podemos observar na simulação da atividade, através da figura 32, que o gráfico obtido no GeoGebra é semelhante ao obtido pelos alunos na atividade didática. Além disso, o aplicativo GeoGebra fornece na janela algébrica a função linear que modela a situação.

Também é possível que o professor crie um gráfico dinâmico no GeoGebra (figura 33). Com a ferramenta do controle deslizante o aluno pode simular a quantidade de líquido despejado no recipiente, sendo que ao lado aparece o recipiente com a variação de altura conforme o aluno muda a quantidade de líquido.

No exemplo da figura 33, temos o controle deslizante indicando a quantidade de 320 ml e consequentemente o líquido alcança a altura de 8 cm conforme ilustração do recipiente.

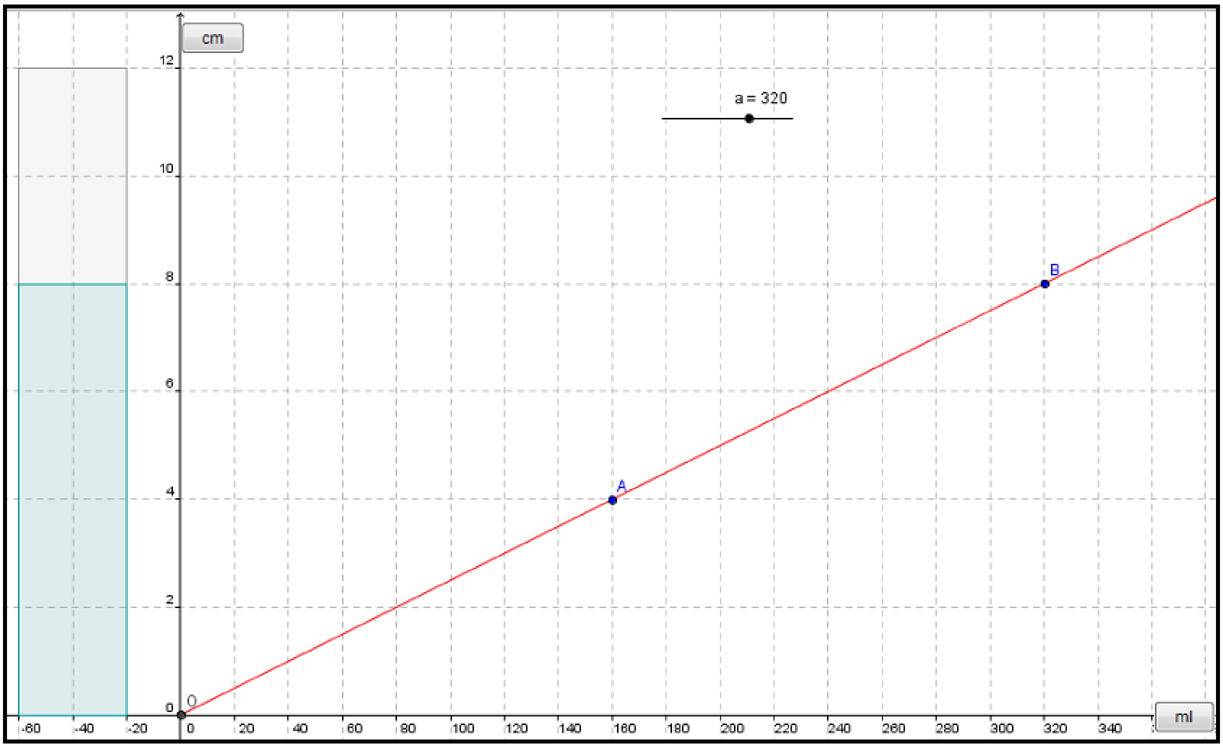


Figura 33: Gráfico dinâmico

Essa proposta de atividade poderá contribuir para que o aluno tenha uma melhor compreensão da atividade e modelagem, assim como pode facilitar o processo de esboço gráfico, fato que gerou insegurança na atividade de modelagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar atividades para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções lineares em turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, com a utilização da Modelagem Matemática como principal ferramenta de ensino.

Para tanto, levamos em consideração referências teóricas de vários autores sobre o ensino e aprendizagem de funções lineares, as quais demonstraram que as deficiências na compreensão dos conceitos referentes a este assunto podem estar relacionadas à maneira como o estudo de funções lineares é abordado em sala de aula. Isso confirma a necessidade de um ensino da matemática mais significativo, voltado à participação do aluno na construção de seus conhecimentos.

Acreditamos que a atividade didática aqui apresentada atende a estas necessidades e poderá contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático por partes dos alunos. Esta crença pode ser fundamentada nas escolhas metodológicas e no modo como as atividades foram elaboradas. A escolha da Modelagem Matemática possibilitou uma maior exploração dos aspectos relacionados ao estudo de funções lineares de um modo dinâmico e significativo.

O caráter diferenciado da atividade didática pode ser comprovado em cada uma das atividades, principalmente em relação ao modo como os saberes são introduzidos. As questões vão delineando um caminho que leva, gradativamente, à formulação de conceitos e definições.

Apesar de a atividade didática ter características diferenciadas e sua abordagem possibilitar uma maior compreensão dos conceitos relacionados ao estudo de funções lineares, esta não pode ser concebida como uma receita que garante a aprendizagem. O processo de ensino e aprendizagem depende de muitas variáveis, a forma como o professor conduzirá as atividades, por exemplo, é crucial para que os objetivos da atividade didática sejam completamente atendidos.

Retomando o questionamento norteador: “Como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito da função linear?”, cremos que uma possível e eficaz resposta é a sequência apresentada neste trabalho, pois os alunos demonstraram não apenas compreensão durante as atividades, bem como interesse em aprender mais a respeito do assunto, seja através dos questionamentos que surgiram ou das descobertas por eles apresentadas.

Através da análise dos resultados pode-se observar que foram alcançados todos os objetivos específicos em relação aos alunos, visto que, foram criadas condições para que os alunos aprendessem a coletar dados através da experimentação, formular modelos matemáticos e resolvê-los, e por fim fazer a validação.

No decorrer dos encontros com os estudantes, foi possível relacionar vários aspetos da atividade prática de modelagem sobre função linear com os conteúdos afins, tais como regra de três e proporcionalidade, e percebeu-se que isto fez sentido para os estudantes, na medida em que eles conseguiam fazer as relações e concluir sobre as indagações feitas à medida que a atividade de modelagem era desenvolvida. Com certeza, ficaram lacunas em função do tempo e da quantidade de trabalho que havia sido programado para cada encontro. Apesar disso, o trabalho foi satisfatório e decisivo.

O desempenho dos estudantes durante os encontros e os resultados por eles apresentados no final da sequência de atividades, mostrou que a proposta desenvolvida é válida e adequada para a faixa etária em questão, bem como que através da Modelagem Matemática ocorreu uma melhor compreensão da Matemática envolvida no trabalho.

Para que o professor trabalhe as ideias intuitivas de funções lineares e proporcionalidade direta, é necessário que ele domine esses conceitos e que perceba a necessidade de ampliar os horizontes do ensino da matemática, para a aplicação e para a utilização dos recursos disponíveis para melhor desenvolver suas atividades. Acredita-se que programas como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que investe na formação dos professores, representa um grande avanço para a melhoria da qualidade do ensino de matemática na Educação Básica do país.

Por fim, destaca-se que este trabalho tem por objetivo fornecer ideias, dar sugestões para introduzir o estudo de funções lineares no Ensino Fundamental, as quais possam servir de inspiração para professores, no momento do planejamento de suas atividades. O professor que desejar, pode fazer uso das atividades aqui sugeridas conforme sua necessidade para o desenvolvimento de suas aulas de matemática. Um possível desdobramento do que está sendo proposto pode ser feito e aplicado a outras funções, ou ainda, pode-se aplicar essas atividades ou outras, com objetivos semelhantes, e acompanhar o desempenho dos estudantes de uma turma regular do Ensino Fundamental na execução das mesmas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. ***Razões, proporções e regra de três*.** In: Revista do Professor de Matemática, n°8, 1º semestre, 1986.

BASSANEZI, Rodney Carlos. ***Temas & modelos*.** 1. ed. Campinas : UFABC, 2012.

BASSANEZI, Rodney. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BIGODE, A. J. L. **Matemática Hoje é Feita Assim.** Obra em 4 volumes para alunos do 6º ao 9º ano. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais-Matemática 5ª a 8ª série**. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio –** Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: SEB, 2006.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática.** Obra em 4 volumes para alunos do 6º ao 9º ano. 1ª Ed – São Paulo: Ática, 2012.

IEZZI, G. **Matemática e Realidade: 8ª série**. 5ª ed, São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, N. J. **Muitos termômetros, poucos remédios.** Revista Carta na Escola, nº 86 maio de 2014, Ed. Confiança.

MATEMÁTICA. **Matemática em Ação 9**. Disponível em http://www.raizeditora.pt. Acesso em 23 de julho de 2014. Raiz Editora.

PONTE, J. (2010). **Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6.º ano.** In *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (CDROM). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

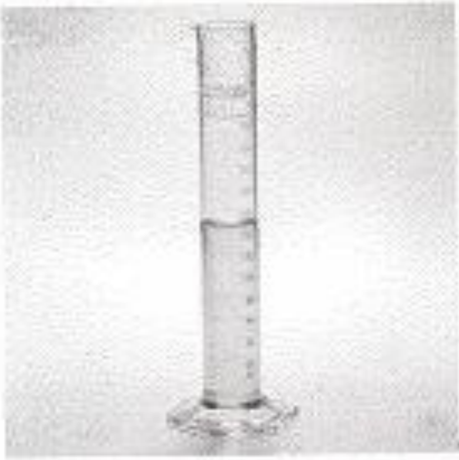
ROSSINI, R. **Uma proposta para o ensino de função linear fundamentada na abordagem antropológica.** Encontro Nacional de Educação Matemática, Pernambuco, 2006.

SAJKA, M. (2003). **A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study.** Educational Studies in Mathematics 53, p. 229-254.

VILLARREAL, M.; MINA, M. Modelagem na formação inicial de professores de matemática. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2013, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: CUF, 2013, CD-ROM.

ANEXOS

Anexo A – Dupla de alunos Alfa



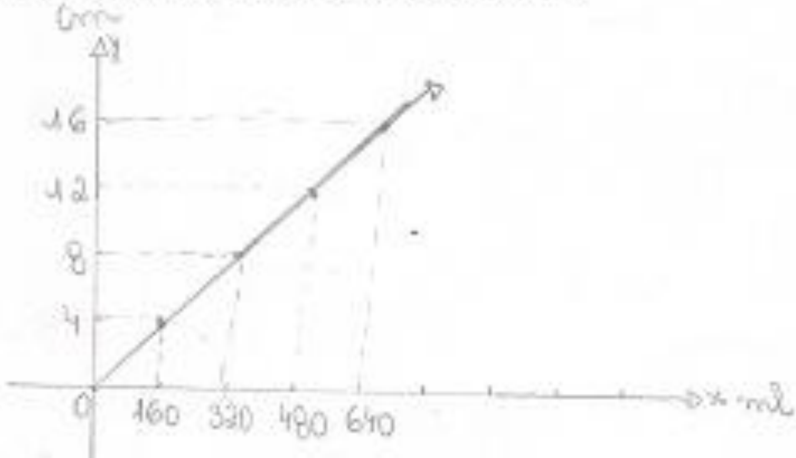
(figura 1)

(figura 2)

1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse liquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o liquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.

cm	ml
4	160
8	320
12	480
16	640
20	800
24	960

2) Expresse graficamente os dados que você registrou.



3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

Sim. No momento de como aumenta os cm, aumenta na mesma proporção os ml.

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

A relação é que aumenta na mesma proporção os cm e os ml.

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

As variáveis X e Y podem assumir qualquer valor positivo, incluindo o zero.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim. Como os cm e ml aumenta proporcionalmente também diminuem proporcionalmente

7) Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a x, e o 2° e 3° valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

Tanto nos ml e cm, a diferença será a mesma, no ml -> 160ml, e nos cm -> 4Cm.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

Sim. Diretamente proporcionais.

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$Y = 0{,}025 . X$

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

Sim. Porque quanto maior o valor de X aumentará a resposta.

11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

Aumentaria a altura do líquido no recipiente.

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

O ângulo ficaria mais inclinado

$Y = 3 . 320$ $\quad$ $Y = 5 . 320$

$Y = 960$ $\quad$ $Y = 1600$

12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

Sim. Pois deverá ser multiplicado pela taxa.

$$y = 0{,}025 \cdot 100$$

$$\boxed{y = 2{,}5\ cm}$$

13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados? Sim.

$$y = 0{,}025 \cdot x$$

$$25 = 0{,}025 \cdot x$$

$$x = \frac{0{,}025}{25} \quad \boxed{x = 1000\ ml}$$

14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

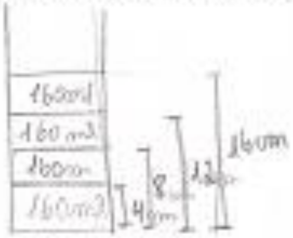
Função linear: É representado por uma reta, o ângulo varia de acordo com a taxa, se aumenta a taxa de variação, mais inclinado será o ângulo, nesse caso a reta seria crescente pois aumenta os centímetros.

Anexo B – Dupla de alunos Beta


(figura 1)


(figura 2)

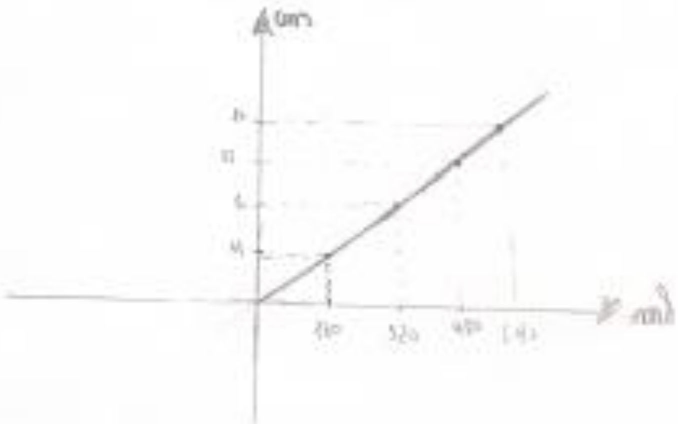
1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse líquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o líquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.



1	160	4cm
2	160	8cm
3	160	12cm
4	160	16cm

160	4cm
320	8cm
480	12cm
640	16cm

2) Expresse graficamente os dados que você registrou.



3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

A cada 160 ml colocado no recipiente A, sua medida aumenta em 4 cm.

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

Quanto mais ml de água, maior a altura em cm

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

x pode assumir valores de 0 ao infinito.
y " " " de 0 ao infinito.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim, a cada 160 ml colocados, a altura aumenta em 4. mas isso serve para quaisquer medidas usadas.

7) Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a x, e o 2° e 3° valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

As diferenças de mls serão sempre a 160 ml, a medida usada, e a diferença de valores de y, em cm, serão sempre 4 cm, a medida dos 160 ml pedida.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

Sim, porque o valor de y em cm, esta em razão ao valor de x em ml

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$y = 0{,}025 \cdot x \to$ quant. de ml.

taxa

altura em cm

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

Sim, aumentando a quantidade em ml consequentemente a altura em cm aumentará.

11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

A altura em relação à quantidade seria maior.

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

vai alterar, supondo por exemplo a taxa como 0,5 a reta, que representa a relação altura quantidade, terá um menor ângulo com o eixo y, ou seja esta ficará mais inclinada.

12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

Sim basta substituir estas quantidades na equação $y = 0{,}025x$ e assim terá a altura.

$y = 0{,}025 . 100$ $\quad$ $y = 0{,}025 . 250$

$y = 2{,}5$ cm $\quad$ $y = 6{,}25$ cm

13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados? Sim mesmo caso substituir na equação

$y = 0{,}025x$

para uma altura de 25 cm.

$25 = 0{,}025x$

$x = \frac{25}{0{,}025} = 1000$ ml

14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

Anexo C – Dupla de alunos Pi

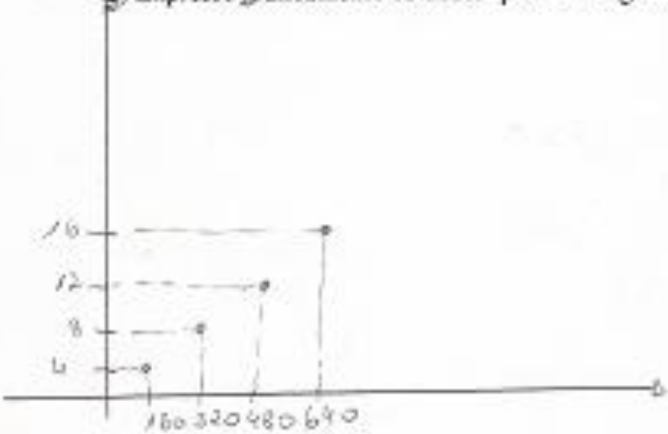
(figura 1)

(figura 2)

1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse liquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o liquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.

x ml	cm
160	4
320	8
480	12
640	16

2) Expresse graficamente os dados que você registrou.



3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

Sim, observei que a cada 4cm sobe 160ml.

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

De acordo com a quantidade de ml sobre a quantidade de cm no grafico

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

x e y podem assumir valores com a quantidade correta de valores que sejam gradativamente do mesmo metodo do grafico.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim depende da quantidade de ml para a quantidade de cm aumentar

7) Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a x, e o 2° e 3° valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

Se diminuimos os valores vemos que a mesma quantida, pois são gradativamente somados os valores iguais.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

sim.

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$y = 0,025 . x$

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

Sim. Porque a cada passo aumenta o líquido do recipiente.

11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

aumentaria

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

sim, pois a cada 4 cm sobe as 16

12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

Sim.

$$y = 0,025 \cdot x$$
$$y = 0,025 \cdot 100$$
$$\boxed{y = 2,5 \text{ cm}}$$

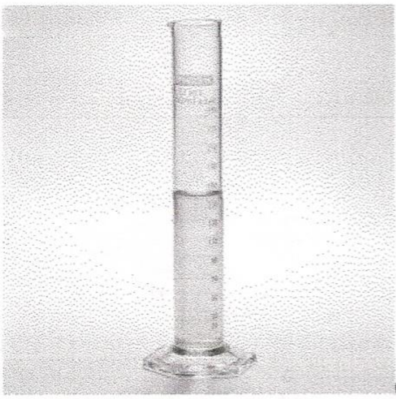
13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados?

$$y = 0,025 \cdot x$$
$$25 = 0,025 \cdot x$$
$$x = \frac{0,025}{25}$$
$$x = 1000 \text{ ml}$$

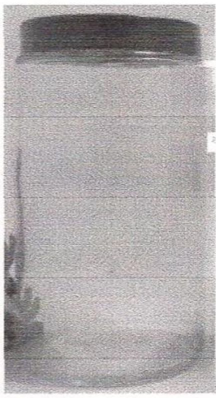
14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

Função Linear: É uma proporcionalidade a valores, que serão representado por uma reta e que não pode ser da 90° pois aí será uma função contínua.

Anexo D – Dupla de alunos Gama



(figura 1)



(figura 2)

1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse líquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o líquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.

4 cm

x	y
ml	cm.
40	1
160	4
200	5
240	6
280	7
320	8
480	12.

160 ml = 4 cm

40 ml = 1 cm

160 |4

40

2) Expresse graficamente os dados que você registrou.

3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

A cada 160 ml despejados no recipiente a altura aumenta em 4 cm. Sendo assim, também pode-se dizer que a cada 1 cm o volume aumenta em 40 ml. Há uma proporcionalidade direta entre as grandezas:

+160 +160

$$\frac{160}{4} = \frac{320}{8} = \frac{480}{12} = 40$$

+4 +4

+160 160 ml - 4 cm +4

320 ml - 8 cm

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

A relação é que a cada 160 ml, a altura do líquido cresce 4 cm. Se despejarmos mais 160 ml por exemplo, o volume passa a ser 320 ml e a altura 8 cm.

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

Tanto x quanto y, podem assumir qualquer valor ≥ 0.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim. Grandezas diretamente proporcionais. Quando o volume aumenta a altura também. Quando diminuímos o volume também a altura diminui.

7) Tomando a diferença entre o 1º valor (ml) e o 2º valor (ml) atribuídos a x, e o 2º e 3º valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

A cada 40 ml a altura aumenta 1 cm.

160 − 200 = 40 ; 240 − 280 = 40 ; 4 − 5 = 1 ; 6 − 7 = 1

160 − 320 = 160 ; 480 − 640 = 160 ; 4 − 8 = 4 ; 12 − 16 = 4

A cada 160 ml a altura aumenta 4 cm.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

Sim. A cada 40 ml temos 1 cm.

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$\boxed{y = 0{,}025 \cdot x}$

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

Sim. Pois é uma grandeza diretamente proporcional.

11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

Aumentaria a altura do líquido no recipiente.

$y = 0{,}025 \cdot 320$

$y = 8$

$y = 3 \cdot 320$

$y = 960$

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

Sim. O gráfico será mais inclinado. O ângulo em relação ao eixo x será maior.

12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

$y = 0{,}025 \cdot x$

$y = 0{,}025 \cdot 100$ $y = 0{,}025 \cdot 250$

$y = 2{,}5$ cm $y = 6{,}25$ cm

Sim. Utilizando-se da fórmula identificada no exercício 10. / Devemos multiplicar pela taxa.

13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados?

$y = 0{,}025 \cdot x$

$25 = 0{,}025x$

$x = 0{,}625$

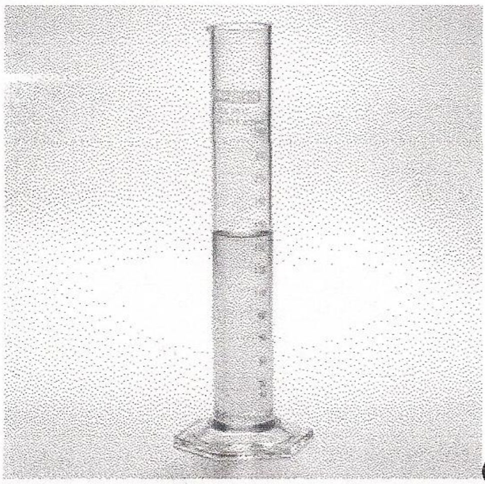
Sim. Utilizando-se da fórmula identificada no exercício 10. / Devemos dividir pela taxa.

14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

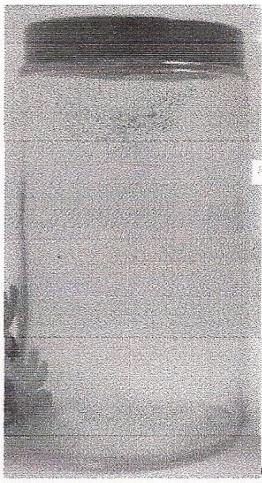
Função Linear:

- Seu gráfico é representado por uma reta.
- Seu ângulo varia conforme a taxa, nunca sendo = a 30°.
- Neste caso a reta é crescente, pois trata-se de volume e não existe volume negativo.

Anexo E – Dupla de alunos Sigma



(figura 1)

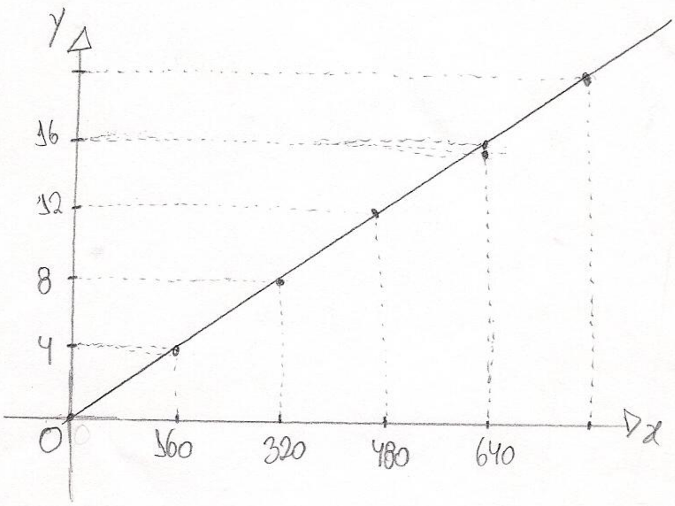


(figura 2)

1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse líquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o líquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.

x → ml	y → cm
160	4
320	8
480	12
640	16

2) Expresse graficamente os dados que você registrou.



3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

sim a cada 160 ml colocados aumentam 4 cm.

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

assim como no anterior assim como sobe os ml os ml sobem gradativamente

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

x e y podem assumir valores positivos a partir do zero.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

sim, para cada 4 cm de altura precisamos de 160 ml.

7) Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a x, e o 2° e 3° valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

é observado que a diferença dá a mesma de um para outro, tanto para ml como para cm.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

sim

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$\boxed{y = 0{,}025 \cdot x}$

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

sim, pois como tratamos de liquido e altura. a cada quantidade de liquido adicionado almenta também a autura

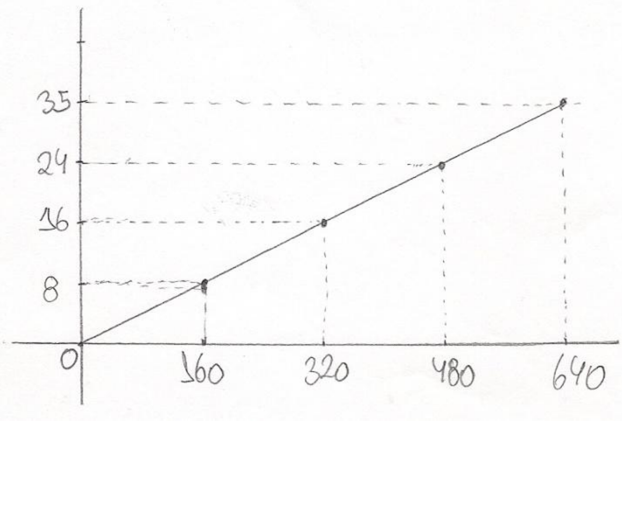
11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

sim

y=8



12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

sim

$y = 0{,}025 \cdot 30$

$y = 0{,}75$ cm

$y = 0{,}025 \cdot 100$

$y = 2{,}5$ cm

$y = 0{,}025 \cdot 250$

$y = 6{,}25$ cm

13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados?

sim

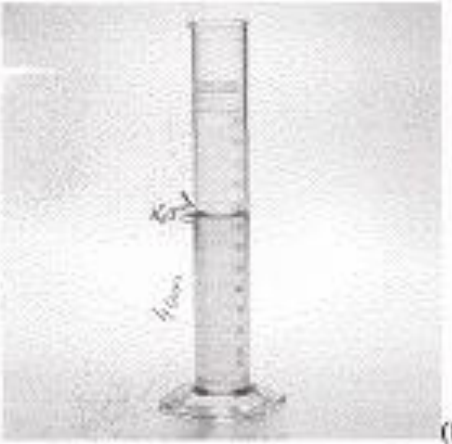
$25 = 0{,}025 \cdot x$

$x = \dfrac{25}{0{,}025}$

$x = 1000$ ml ou 1 l.

14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

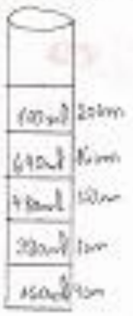
Anexo F – Dupla de alunos Epilson



(figura 1)

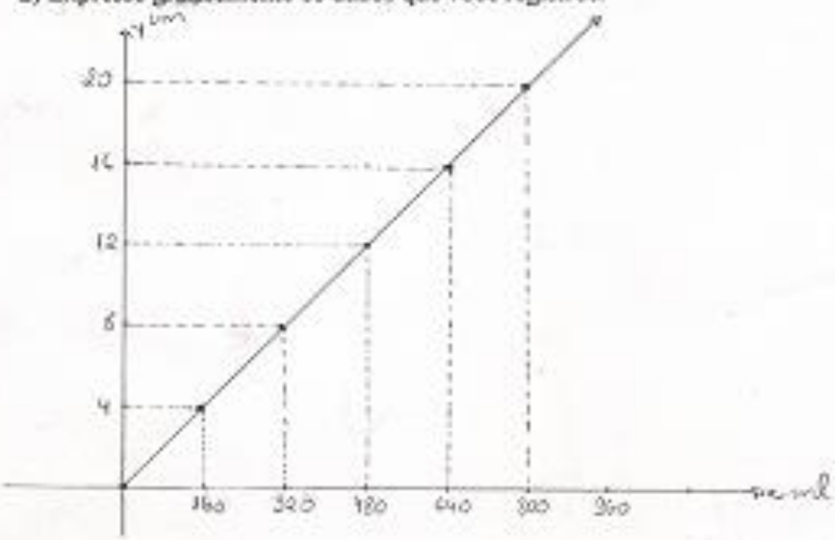
(figura 2)

1) Agora você deve encher a proveta até 160 ml (ou outra graduação qualquer), e deverá despejar esse liquido no recipiente A (figura 2), devendo também medir a altura em que o liquido se encontra, anotar esses dados e repetir o processo algumas vezes.



cm	ml
4cm	160 ml
8 cm	320 ml
12cm	480 ml
16cm	640 ml
20cm	800 ml
24 cm	960 ml

2) Expresse graficamente os dados que você registrou



3) Sobre o registro, você observou alguma regularidade? Qual? Tente explicar:

Sim, no momento que aumenta os milímetros, na mesma proporção aumenta os centímetros.

4) No gráfico construído, qual a relação que existe entre a quantidade do líquido (ml) e a altura do líquido (cm)?

A relação é que quando aumenta os milímetros, aumenta também os centímetros na mesma proporção.

5) Sendo x a variável que representa os **ml** e y a variável que representa os **cm**, que valores x pode assumir? E que valores y pode assumir?

Podem assumir qualquer valor positivo, incluindo o zero.

6) Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?

Sim. Pois são grandezas diretamente proporcionais, quando um aumenta o outro também aumenta, e quando um diminui o outro também diminui.

7) Tomando a diferença entre o 1° valor (ml) e o 2° valor (ml) atribuídos a x, e o 2° e 3° valor atribuídos a x, o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de y (cm), o que você observa?

Observa-se que a quantidade é a mesma, tanto em centímetros como milímetros. Em centímetros sempre vai ser 4 e em milímetros sempre vai ser 160.

8) Se uma sequência de valores atribuídos a x estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores de y?

Sim, diretamente proporcionais

9) Como podemos expressar matematicamente a situação que você acabou de modelar?

$\boxed{y = 0{,}025 \cdot x}$

10) A expressão que modela o problema é uma função linear, podemos dizer que ela é crescente? Explique:

Sim, porque quanto maior o x, maior será o y.

11) O coeficiente associado ao valor de x é a taxa de variação da função.

a) O que aconteceria se aumentarmos esse valor da taxa de variação? O que isso representa no experimento?

Aumenta a altura do líquido no recipiente.

b) O gráfico da função modelada vai alterar? Simule um novo valor para essa taxa de variação, e explique o que acontecerá com o novo gráfico?

O ângulo em relação a reta x será maior.

$y = 2 \cdot 320$ $\quad$ $y = 3 \cdot 320$

$y = 640$ $\quad$ $y = 960$

12) Considere um valor para x em ml, há como calcular a altura que o líquido vai atingir ao colocarmos 100 ml? 250 ml? E um valor qualquer?

Sim, devemos multiplicar pela taxa.

$y = 0{,}025 \cdot 100$ $\quad$ $y = 0{,}025 \cdot 250$

$y = 2{,}5\,cm$ $\quad$ $\boxed{y = 6{,}25\,cm}$

13) E se agora temos a altura que o líquido atingiu, há como calcular a quantidade de líquido em ml colocada no recipiente? Se a altura for de 25 cm, quantos ml foram despejados? Sim.

$y = 0{,}025 \cdot x$

$25 = 0{,}025\,x$

$\frac{25}{0{,}025} = x$

$\boxed{x = 1000\,ml}$

14) Explique com suas palavras o que é uma função linear e dê algumas de suas características:

Função linear é representada por uma reta, a inclinação duma reta é de acordo com a taxa de variação, ou seja quanto maior a taxa maior a inclinação. Nunca o ângulo vai ser de 90°.

Nesse caso a reta é crescente, porque quanto mais líquido aumenta o centímetro