



Universidade Estadual Paulista  
"Júlio de Mesquita Filho"  
Campus Ilha Solteira  
Departamento de Matemática

Marcia Terumi Cunita Lourenço

O ensino de geometria através da pavimentação do plano

Ilha Solteira - SP  
2014

Marcia Terumi Cunita Lourenço

O ensino de geometria através da pavimentação do plano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de Ilha Solteira.

Orientador: Prof. Dr. Luis Antonio Fernandes de Oliveira

Ilha Solteira - SP  
2014

Lourenço, Marcia Terumi Cunita.

O ensino de geometria através da pavimentação do plano /  
Marcia Terumi Cunita Lourenço.-- São José do Rio Preto, 2014  
120 f. : il.

Orientador: Luis Antonio Fernandes de Oliveira  
Dissertação(Mestrado profissional) – Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e  
Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino.2.Geometria- Estudo e ensino.  
3.Geometria plana - Estudo e ensino.4. Polígonos. 5. Mosaicos  
(Matemática)6. Matemática – Metodologia.I.Oliveira, Luis Antonio  
Fernandes de.II.Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita  
Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.Título.  
CDU –513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marcia Terumi Cunita Lourenço

O ensino de geometria através da pavimentação do plano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de Ilha Solteira.

Comissão examinadora:



Prof. Dr. Luis Antonio Fernandes de Oliveira  
UNESP – Campus de Ilha Solteira  
Orientador



Prof. Dra. Lilian Yuli Isoda  
UNESP – Campus de Ilha Solteira



Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva  
UFMS – Campus de Três Lagoas

Ilha Solteira - SP  
08 de dezembro de 2014

A Ademir, Eduardo, André e Ana Paula.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu esposo, companheiro e amigo que, nos momentos de fraqueza, me incentivou e acreditou no meu trabalho.

À minha família, que me apoiou na realização de um sonho.

Ao IMPA pela oportunidade de realização profissional e a CAPES pela bolsa recebida.

A todos os professores do PROFMAT de Ilha Solteira que, com paciência, souberam desenvolver nossas capacidades, em especial ao prof. Luís Antonio de Oliveira pela paciência e pelos conselhos na realização deste trabalho.

Aos meus colegas de sala, em especial a Rosilaine, Fernando, Vítor e Flor pelo companheirismo e pela amizade.

Ao colega José Luis Duarte pela generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

## **RESUMO**

O ensino de Geometria permite ao aluno a análise e conhecimento do mundo físico que o cerca, facilitando a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos e a resolução de problemas. Este trabalho apresenta uma proposta de ensino de Geometria Plana através dos mosaicos ou pavimentações do plano. O estudo e construção destes mosaicos, seus elementos, propriedades e classificações são abordados em currículos oficiais de Matemática por sua característica dinâmica, lúdica e estética contribuindo para o desenvolvimento de competências e habilidades em Geometria. Serão abordados: o contexto histórico, as pavimentações com polígonos regulares e irregulares, os mosaicos artísticos de Escher e Penrose e ao final, uma proposta de ensino utilizando o software Geogebra. Meu objetivo é demonstrar que é possível ensinar Geometria de maneira prazerosa, artística e simples, com atividades interessantes integradas com a realidade.

**Palavras Chave:** Pavimentação, Geometria, Artes e Aprendizagem.

## ABSTRACT

*The teaching of geometry allows the student to the analysis and understanding of the physical world around, facilitating the understanding and application of mathematical concepts and problem solving. This paper presents a proposal for teaching plane geometry through the tiles or tessellations of the plane. The study and construction of the mosaics, its elements, properties and classifications are discussed in official curricula of mathematics for its dynamic, playful aesthetic and contributing to the development of competencies and skills in geometry. Will be discussed: the historical context, tessellations with regular and irregular polygons, artistic mosaics Escher and Penrose, and ultimately a teaching proposal using Geogebra software. My goal is to demonstrate that it is possible to teach geometry pleasant, artistic and simple way, with interesting activities integrated with reality.*

**Keywords:** *Tessellations, geometry, arts and learning.*

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>MOSAICOS</b> .....	<b>11</b>
2.1	O que é mosaico? .....	11
2.2	Um pouco de história.....	11
2.3	Linha poligonal .....	13
2.4	Polígono.....	14
2.4.1	<i>Polígonos convexos e não convexos</i> .....	14
2.5	Pavimentações do plano.....	15
2.5.1	<i>Pavimentação parcial do plano</i> .....	15
2.5.2	<i>Pavimentação ideal</i> .....	15
2.5.3	<i>Elementos de uma pavimentação</i> .....	15
<b>3</b>	<b>TIPOS DE PAVIMENTAÇÕES DO PLANO</b> .....	<b>17</b>
3.1	Fórmula de Euler .....	17
3.1.1	<i>Descobrimo</i> .....	17
3.1.2	<i>Provando</i> .....	18
<b>4</b>	<b>PAVIMENTAÇÕES DO PLANO COM POLÍGONOS REGULARES</b> .....	<b>21</b>
4.1	Polígonos regulares .....	21
4.1.1	<i>Cálculo do ângulo interno de um polígono regular</i> .....	21
4.2	Quais polígonos regulares pavimentam o plano? .....	22
4.3	Abelhas inteligentes.....	24
4.4	Pavimentações com padrões regulares.....	27
4.4.1	<i>Pavimentações com as figuras-vértice dos padrões regulares</i> .....	29
4.5	Pavimentações com padrões duais .....	30
<b>5</b>	<b>PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS REGULARES DE TIPOS DIFERENTES</b> .....	<b>32</b>
5.1	Entendendo os arranjos .....	32
5.2	Descobrimo as configurações ao redor de um nó. ....	32
5.3	Quais configurações pavimentam o plano?.....	36
5.4	Possibilidades que apresentam uma só configuração .....	37
5.5	Possibilidades que apresentam mais de uma configuração ao redor de um ponto .....	39
5.5.1	<i>Possibilidade número 6</i> .....	39
5.5.2	<i>Possibilidade número 4</i> .....	40
5.5.3	<i>Possibilidade número 5</i> .....	41
5.5.4	<i>Possibilidade número 8</i> .....	43
<b>6</b>	<b>PAVIMENTAÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE ESPELHOS</b> .....	<b>45</b>
6.1	Reflexões em espelhos.....	45
6.2	Imagens geradas por dois espelhos planos inclinados .....	46
6.2.1	<i>Fórmula do número de imagens</i> .....	48
6.3	Polígonos .....	49
6.4	Pavimentação com uso do caleidoscópio.....	50
6.4.1	<i>Caleidoscópio modificado de três espelhos</i> .....	52
6.5	Bases geradoras e bases transformadas.....	53
6.5.1	<i>Bases na configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3)</i> .....	55
6.5.2	<i>Bases na configuração (4, 4, 4, 4)</i> .....	55
6.5.3	<i>Bases na configuração (6, 6, 6)</i> .....	56
<b>7</b>	<b>PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS IRREGULARES</b> .....	<b>58</b>
7.1	Pavimentação por triângulos .....	58
7.2	Pavimentação por quadriláteros .....	60
7.3	Pavimentação por trapézios.....	61

7.3.1	<i>Trapézios genéricos</i> .....	61
7.3.2	<i>Um trapézio versátil</i> .....	62
7.4	Pavimentação por paralelogramos.....	63
7.5	Pavimentação por losangos.....	64
7.6	Pavimentação por retângulos.....	65
7.7	Pavimentação por hexágonos.....	65
7.8	Pavimentação por pentágonos.....	69
<b>8</b>	<b>AS PAVIMENTAÇÕES ARTÍSTICAS</b> .....	<b>72</b>
8.1	Transformações geométricas no plano.....	72
8.1.1	<i>Simetria axial</i> .....	73
8.1.2	<i>Figuras enantiomorfas</i> .....	77
8.1.3	<i>Simetria rotacional</i> .....	77
8.1.4	<i>Figuras com estrutura simétrica rotacional</i> .....	78
8.1.5	<i>Simetria translacional</i> .....	80
8.1.6	<i>Simetria translacional refletida</i> .....	81
8.2	As pavimentações de Escher.....	81
8.2.1	<i>Estudo de algumas de suas obras</i> .....	84
8.3	As pavimentações de Penrose.....	86
8.3.1	<i>Primeiro conjunto de protoladrilhos</i> .....	86
8.3.2	<i>Segundo conjunto de protoladrilhos</i> .....	87
8.3.3	<i>Terceiro conjunto de protoladrilhos</i> .....	90
<b>9</b>	<b>PROPOSTA: PAVIMENTAÇÕES DO PLANO E O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA</b> .....	<b>91</b>
9.1	Tecnologia em sala de aula.....	91
9.2	O software Geogebra.....	91
9.3	O modelo dos Van Hiele desenvolvimento do pensamento geométrico.....	92
9.3.1	<i>Descrição dos níveis</i> .....	93
9.3.2	<i>Propriedades do modelo</i> .....	94
9.3.3	<i>Fases do aprendizado</i> .....	94
9.4	Explicando as atividades a serem aplicadas em sala de aula.....	96
9.4.1	<i>ATIVIDADE 1: Explorando o software Geogebra</i> .....	96
9.4.2	<i>ATIVIDADE 2: Construindo triângulos</i> .....	97
9.4.3	<i>ATIVIDADE 3: Construindo quadriláteros</i> .....	97
9.4.4	<i>ATIVIDADE 4: Conhecendo polígonos regulares</i> .....	98
9.4.5	<i>ATIVIDADE 5: Conhecendo as pavimentações do plano</i> .....	98
9.4.6	<i>ATIVIDADE 6: Construindo pavimentações com polígonos regulares de um só tipo</i> .....	98
9.4.7	<i>ATIVIDADE 7: Construindo pavimentações com polígonos de tipos diferentes</i> .....	99
9.4.8	<i>ATIVIDADE 8: Identificando as configurações de uma pavimentação</i> .....	99
9.4.9	<i>ATIVIDADE 9: Construindo pavimentações livres</i> .....	99
9.4.10	<i>ATIVIDADE 10: Descobrimo as transformações do plano</i> .....	100
9.4.11	<i>ATIVIDADE 11: Construção de pavimentações com auxílio das transformações isométricas</i> .....	100
9.4.12	<i>ATIVIDADE 12: Criar uma pavimentação do tipo Escher</i> .....	100
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>102</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>103</b>
	<b>APÊNDICE</b> .....	<b>105</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A dificuldade apresentada no domínio de conceitos geométricos, identificação e utilização de propriedades e perceber semelhanças e diferenças entre as figuras planas, tanto pelos alunos quanto pelos professores foi um dos motivadores deste trabalho. Segundo o PCN:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p.51).

Acreditando que a aplicação prática e manipulação de figuras planas aliada ao uso de tecnologia, em particular, o uso do Geogebra, facilita a compreensão de conceitos e fórmulas e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Este trabalho tem ênfase resgatar a aprendizagem de geometria proporcionando atividades práticas e motivadoras, desenvolvendo o raciocínio e a capacidade de resolver problemas.

Nos capítulos iniciais propõem-se um estudo das pavimentações do plano: definições, contexto histórico, elementos, tipos de pavimentações utilizando polígonos regulares e irregulares, as pavimentações com espelhos e as pavimentações artísticas. No capítulo nove será apresentada uma proposta de ensino utilizando o Geogebra visando o desenvolvimento dos níveis de aprendizado geométrico proposto pelo casal Van Hiele. Ao final, o apêndice contempla as atividades sugeridas aos alunos.

## **2 MOSAICOS**

### **2.1 O que é mosaico?**

Mosaico segundo o dicionário Aurélio é a arte de decorar pela reunião de pequenas peças de vidro, de pedra ou de outro material assentadas para formar um desenho sobre alguma superfície, em geral um piso, parede ou teto. As peças denominam-se tesselas ou ladrilhos.

Pavimentação do plano é o recobrimento de uma superfície com ladrilhos (peças) sem deixar espaços intermediários nem sobreposições, então podemos dizer que mosaico é o resultado de uma pavimentação.

Para a Matemática, o objetivo é busca de simetrias e padrões geometricamente possíveis. O estudo das pavimentações e a obtenção de padrões constituem atividades que, se trabalhadas adequadamente, constituirão uma imensa fonte de aprendizagem.

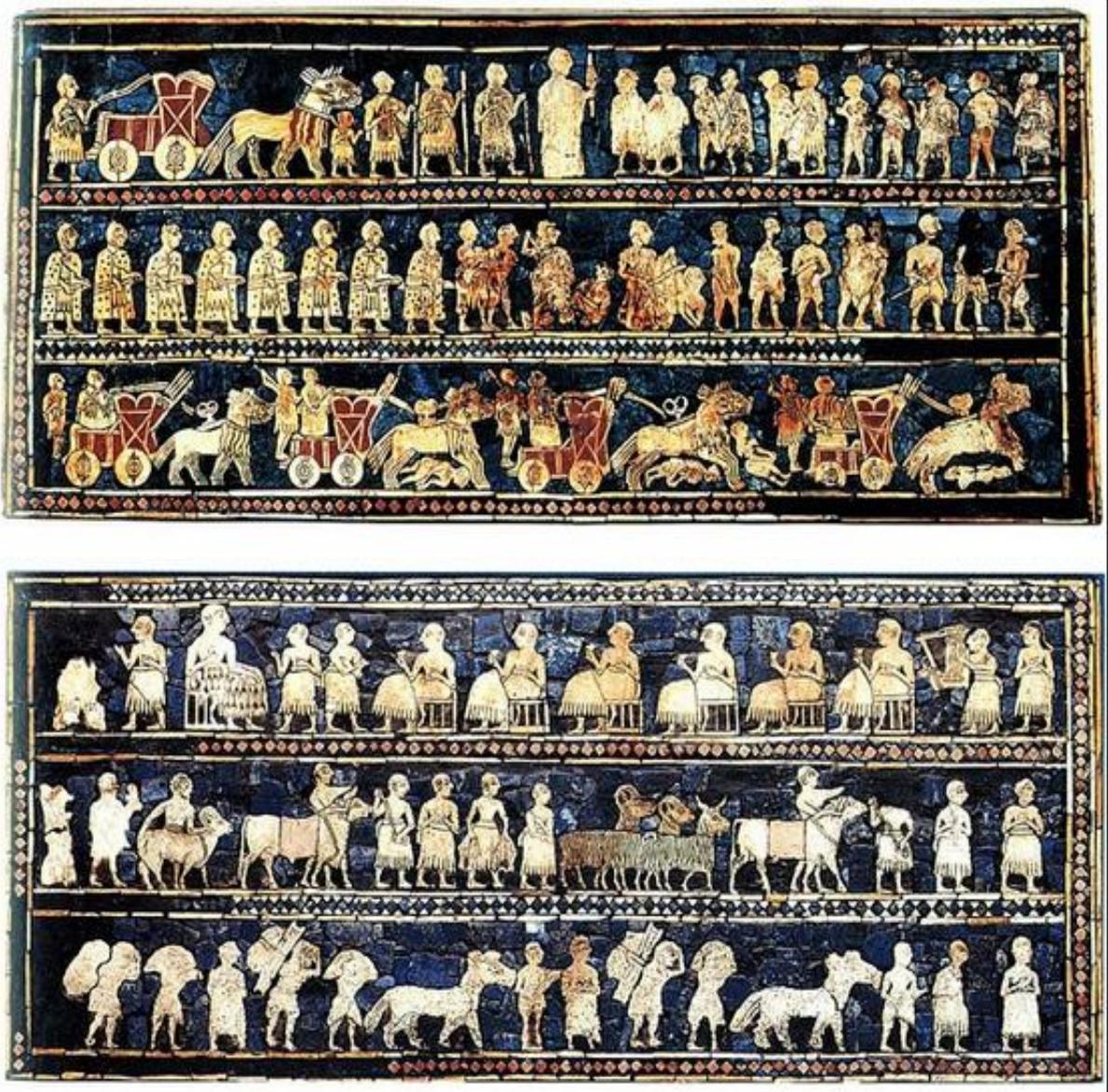
### **2.2 Um pouco de história**

Os padrões geométricos são observados na natureza em escamas de peixe, na casca do abacaxi, no casco da tartaruga e em favos de mel e são reproduzidas pelo homem desde a antiguidade.

Segundo Barbosa (1993) os mosaicos estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras e muitos desses trabalhos permanecem até os dias atuais.

Segundo Dacol (2008) a origem do mosaico é muito discutida. Na antiga cidade de Ur, atual Iraque, foram encontrados alguns mosaicos sumerianos que segundo o arqueólogo Leonard Wooley (1880 – 1960) pertencem ao período de aproximadamente 3500 aC. O assim chamado “Estandarte de mosaico de Ur” compõe-se de dois painéis retangulares de 55cm x 22,5 cm feitos de mármore, arenito avermelhado, lápis lázuli e conchas foi encontrado dentro de túmulo real e é considerado como o mosaico mais antigo que se tem conhecimento.

**Figura 1** - Estandarte de Mosaico de Ur



1

Fonte: Página do Museu Britânico na Wikipédia

No Brasil, a imperatriz Tereza Cristina mulher de D. Pedro II, enquanto cuidava de suas filhas em um dos jardins do Palácio de São Cristóvão, no Rio de Janeiro demonstrou um de seus dotes artísticos pessoais, o mosaico. Com conchas, recolhidas nas praias do Rio de Janeiro e com cacos das peças de serviço de chá da Casa Imperial ela revestiu os bancos, tronos, fontes (Figura 2) e paredes do Jardim das Princesas. Ela teria sido precursora da arte do mosaico no Brasil, fato pouquíssimo divulgado pelos historiadores e especialistas em arte (DACOL, 2008).

<sup>1</sup> Disponível em: < [http://pt.wikipedia.org/wiki/Museu\\_Brit%C3%A2nico](http://pt.wikipedia.org/wiki/Museu_Brit%C3%A2nico) > Acesso em 12 jun 2014

**Figura 2** - Mosaico do Palácio de São Cristóvão



Fonte: Site Mosaicos do Brasil <sup>2</sup>

Segundo Barbosa (1993), os pitagóricos (séc. VI a.C), da escola fundada por Pitágoras em Cretona, sabiam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e o valor dos ângulos internos de um polígono regular, tiveram conhecimento de que a pavimentação do plano só era possível com apenas três polígonos regulares: o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular. Do ponto de vista matemático, os primeiros trabalhos foram publicados pelo astrônomo germânico Johannes Kepler (1571 – 1630), no seu livro *Harmonic Mundi*, no ano de 1619. Além dessa obra, muito pouco sobre pavimentação, relativamente ao seu aspecto matemático, foi publicado antes do século XIX.

### 2.3 Linha poligonal

Linha poligonal é a união de um número finito de segmentos  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$ ,  $\overline{P_3P_4}$ , ...,  $\overline{P_nP_{n+1}}$  tais que três pontos consecutivos,  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  não sejam colineares. Uma linha poligonal será fechada simples se  $P_{n+1} = P_1$ . Caso contrário, diz-se que ela é aberta.

<sup>2</sup> Disponível em: < <http://mosaicodobrasil.tripod.com/id9.html> > Acesso em 12 jun 2014

**Figura 3** - Linhas Poligonais

**Fonte:** Elaborada pela autora <sup>3</sup>

## 2.4 Polígono

Uma linha poligonal será dita polígono se:

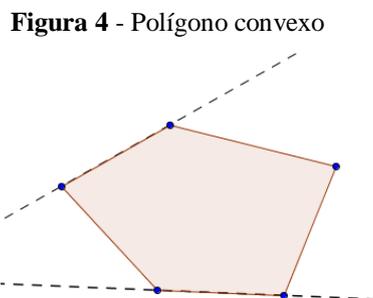
- i.  $P_{n+1} = P_1$ , isto é, é uma linha poligonal fechada simples;
- ii. Os lados da linha poligonal interceptam-se apenas em suas extremidades;
- iii. Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Uma linha poligonal fechada simples determina no plano três conjuntos de pontos: uma região interior, uma região exterior e a própria poligonal, à poligonal chamaremos de fronteira.

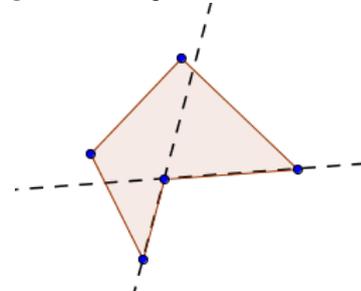
A união do interior com a fronteira chamaremos de polígono ou região poligonal simples fechada.

### 2.4.1 Polígonos convexos e não convexos

Um polígono é convexo se cada reta determinada por dois de seus vértices consecutivos não intersectar os seus outros lados.

**Figura 4** - Polígono convexo

**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 5** - Polígono não convexo

**Fonte:** Elaborada pela autora

<sup>3</sup> As figuras com a **Fonte:** Elaborada pela autora foram construídas utilizando o software GeoGebra 4.4.45.0

## 2.5 Pavimentações do plano

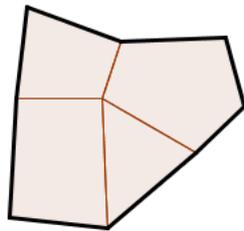
### 2.5.1 Pavimentação parcial do plano

Consideremos no plano um polígono e vamos justapondo outros polígonos sucessivamente, tomando cuidado para não haver superposição e nem vazios, cada vez que acrescentamos novos polígonos aumentamos a fronteira, ampliando a anterior, dizemos que se fez uma pavimentação parcial do plano ou que pavimentamos uma região poligonal simples fechada.

### 2.5.2 Pavimentação ideal

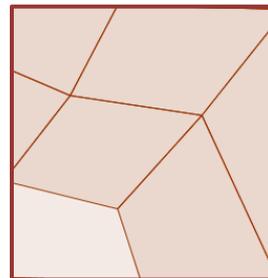
Consideremos uma pavimentação parcial do plano e vamos acrescentando indefinidamente polígonos, aumentando a sua superfície, mas continuando sem deixar vazios e nem cruzamentos, diremos que se terá uma pavimentação do plano. Na prática nunca a completaremos, mas podemos obtê-la **idealmente**. Na Figura 6 teríamos uma pavimentação de parte do plano representado pelo contorno irregular, já na Figura 7 o contorno uniforme representa a pavimentação completa do plano.

**Figura 6** - Pavimentação parcial do plano



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 7** - Pavimentação ideal do plano



**Fonte:** Elaborada pela autora

### 2.5.3 Elementos de uma pavimentação

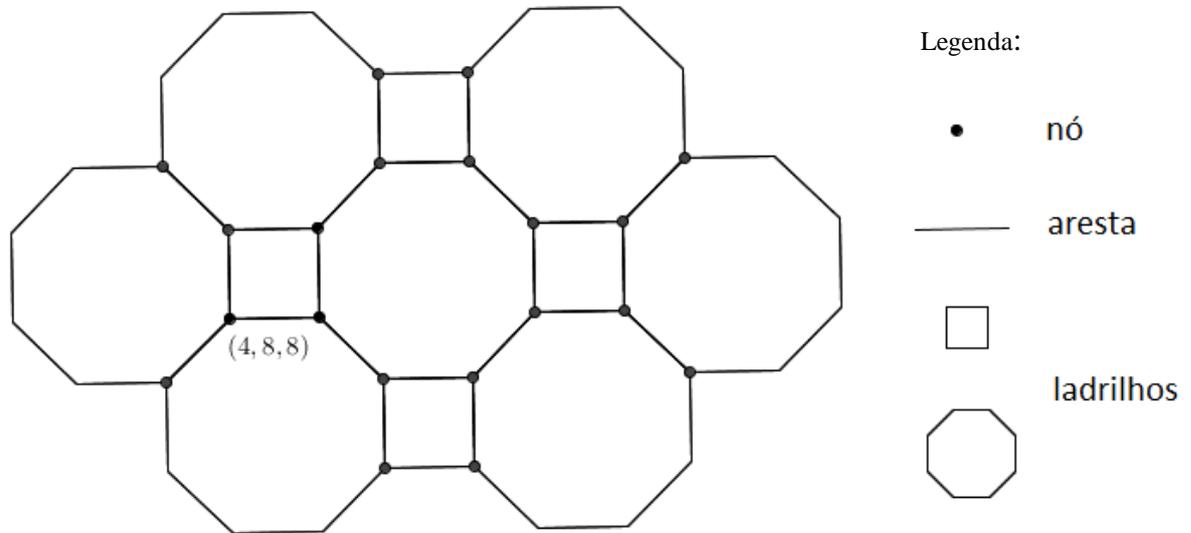
Segundo Barbosa (1993), um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e somente se, o conjunto de polígonos cobre sem cruzamentos o plano, isto é, todo ponto do plano pertence a pelo menos um polígono e toda intersecção de dois polígonos tem área nula. Numa pavimentação, encontramos:

**Nós:** são os vértices dos polígonos

**Arestas:** segmentos de reta que tem como extremos dois nós consecutivos

**Ladrilhos:** polígonos (peças) da pavimentação

**Figura 8** – Elementos da pavimentação



**Fonte:** Elaborada pela autora

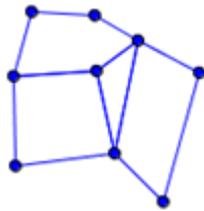
A configuração ordenada de polígonos ao redor de um nó é denominada **arranjo**. Na figura 8 observamos um arranjo que corresponde a um quadrado, um octógono e um octógono ao redor de cada nó da pavimentação, essa ordem de polígonos pode ser representada da seguinte maneira: (4, 8, 8).

### 3 TIPOS DE PAVIMENTAÇÕES DO PLANO

Barbosa (1993) classifica as pavimentações do plano em:

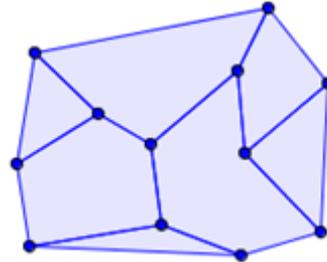
- **Lado a lado:** toda aresta é lado comum a dois polígonos, isto é, todo nó na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice do polígono.
- **Arquimediana:** os nós da pavimentação apresentam-se todos com o mesmo número de arestas concorrentes.
- **Uniforme:** todos os polígono ao redor de um nó sejam sempre os mesmo e na mesma posição.
- **Platônica:** todos os nós da pavimentação devem apresentar o mesmo número de arestas e todos os polígonos devem ter o mesmo número de lados

Figura 9 - Pavimentação lado a lado



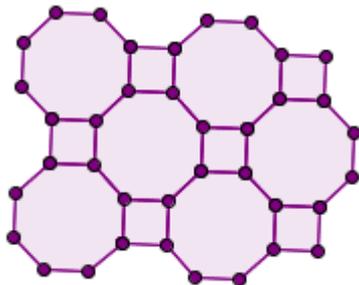
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 10 - Pavimentação arquimediana



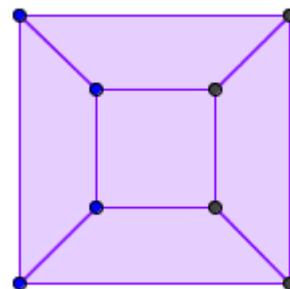
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 11 - Pavimentação uniforme



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 12 - Pavimentação platônica



Fonte: Elaborada pela autora

#### 3.1 Fórmula de Euler

##### 3.1.1 Descobrindo

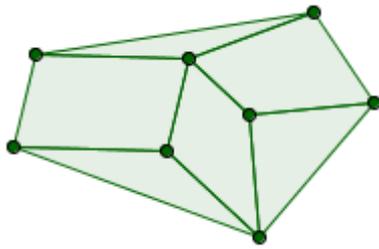
De cada figura abaixo obteremos  $P$  = número de polígonos;  $N$  = número de nós e  $A$  = números de arestas:

a) Na figura 13, uma planificação lado a lado encontramos  $P=6$ ,  $N=8$  e  $A=13$ , onde notamos que  $P + N - A = 1$ .

b) Na figura 14, agora uma planificação **não** lado a lado encontramos  $P=5$ ,  $N=10$  e  $A=14$  onde notamos que  $P + N - A = 1$ .

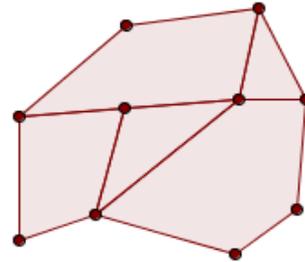
c) Na figura 15, uma planificação com polígonos não convexos encontramos  $P=7$ ,  $N=11$  e  $A=17$ , onde também notamos que  $P + N - A = 1$ .

**Figura 13** - Pavimentação lado a lado



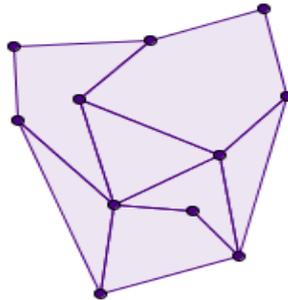
**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 14** - Pavimentação **não** lado a lado



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 15** - Pavimentação com polígonos não convexos



**Fonte:** Elaborada pela autora

Essa relação é verificada em qualquer exemplo de planificação e é conhecida como **Fórmula de Euler**.

### 3.1.2 *Provando*

Provaremos usando fases, em cada uma demonstrando que a expressão  $P + N - A$  é invariante e seu valor é igual a um.

Seja  $X = P + N - A$ .

Primeira fase:

Em cada polígono da pavimentação fazemos novas arestas, sem cruzamento, transformando todos em triângulos.

Observemos que em cada polígono (Figura 16a e 16b), se possui  $n$  arestas (ou  $n$  nós) podemos construir  $(n - 3)$  novas arestas, formando  $(n - 2)$  triângulos. Temos:

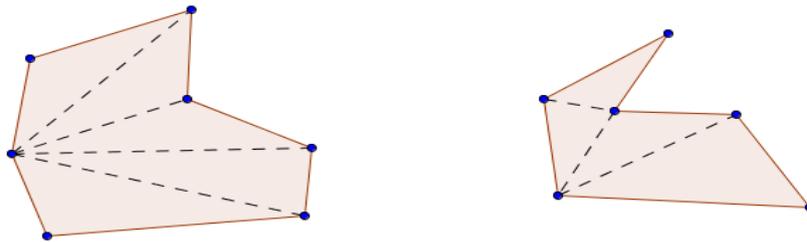
$$N' = \text{novo número de nós} = N$$

$$P' = \text{novo número de polígonos}$$

$$A' = \text{novo número de arestas}$$

Note que,  $P' - A' = P - A$ , pois o acréscimo de polígonos é compensado pelo aumento de arestas. Segue que  $X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$ .

**Figuras 16a e 16b** -  $(n-3)$  arestas dividindo os polígonos em  $(n-2)$  triângulos



**Fonte:** Elaborada pela autora

Segunda fase:

Eliminamos sucessivamente cada triângulo que tenha no máximo duas arestas na fronteira, mas sempre deixando uma fronteira poligonal simples fechada.

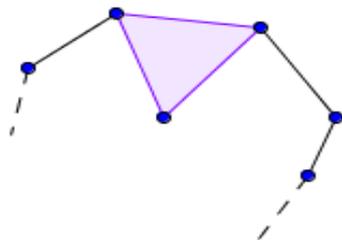
Caso 1: o triângulo tem apenas uma aresta na fronteira (Figura 17a)

$$\text{Temos } A' = A - 1, P' = P - 1 \text{ e } N' = N; \text{ logo } X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$$

Caso 2: o triângulo tem duas arestas na fronteira (Figura 17b)

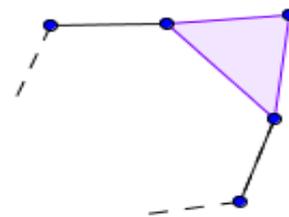
$$\text{Temos } A' = A - 2, P' = P - 1 \text{ e } N' = N - 1; \text{ logo } X' = P' + N' - A' = P + N - A = X$$

**Figura 17a:** polígono com **uma** aresta na fronteira



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 17b:** polígono com **duas** arestas na fronteira



**Fonte:** Elaborada pela autora

Terceira fase:

Continuando a eliminação de triângulos da fase 2, chegaremos necessariamente a um só triângulo, pois este terá três arestas na fronteira. Agora é só calcular o valor constante:

$$X' = X = P + N - A = 1 + 3 - 3 = 1$$

## 4 PAVIMENTAÇÕES DO PLANO COM POLÍGONOS REGULARES

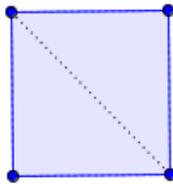
### 4.1 Polígonos regulares

Um polígono é regular se todos os ângulos internos tem a mesma medida e todos os lados são congruentes.

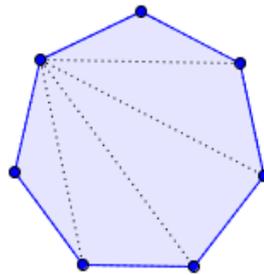
#### 4.1.1 Cálculo do ângulo interno de um polígono regular

A medida do ângulo interno de um polígono regular varia conforme o número de lados desse polígono. Ao traçarmos as diagonais que partem de um único vértice percebemos a divisão desse polígono em triângulos, se  $n$  é o número de lados,  $n - 2$  é quantidade de triângulos formados. Observe:

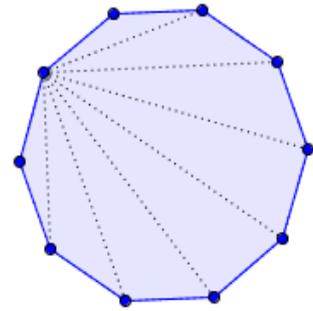
**Figura 18** - Quadrado: 4 lados e 2 triângulos



**Figura 19** - Heptágono Regular: 7 lados e 5 triângulos



**Figura 20** - Decágono Regular: 10 lados e 8 triângulos



**Fonte:** Elaborada pela autora

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , então para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono,  $S_n$ , basta multiplicarmos o número de triângulos formados por  $180^\circ$ , sendo assim,

$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ . Agora para calcularmos a medida de um ângulo interno ( $A_n$ ) dividimos a soma pelo número de lados de um polígono. Assim:  $A_n = \frac{(n - 2) \cdot 180}{n}$ , para um polígono qualquer de  $n$  lados.

Tomamos como exemplo o hexágono regular ( $n = 6$ ). Substituindo nas fórmulas encontramos:

$$S_n = (6 - 2) \cdot 180 = 720 \text{ e } A_n = \frac{720}{6} = 120. \text{ Logo, a soma dos ângulos internos de um}$$

hexágono regular é  $720^\circ$  e cada ângulo interno mede  $120^\circ$ . Aplicando o mesmo procedimento para os demais polígono regulares podemos preencher a seguinte tabela.

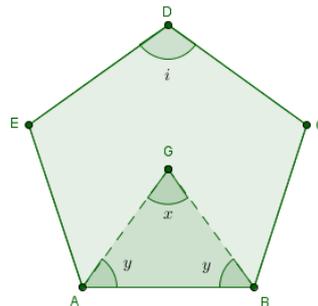
**Tabela 1:** Medida dos ângulos internos de polígonos regulares

Polígono	Número de lados (n)	Medida do ângulo interno ( $A_n$ )
Triângulo	3	$60^\circ$
Quadrilátero	4	$90^\circ$
Pentágono	5	$108^\circ$
Hexágono	6	$120^\circ$
Octógono	8	$135^\circ$
Decágono	10	$144^\circ$
...	...	...
n-ágono	n	$\frac{(n-2).180^\circ}{n}$

Fonte: a própria autora

## 4.2 Quais polígonos regulares pavimentam o plano?

Primeiro vamos calcular o valor do ângulo interno de um polígono regular da seguinte maneira. Analise a Figura 21:

**Figura 21** - Polígono com ângulo interno

Fonte: Elaborada pela autora

O ângulo central  $x$  de qualquer polígono regular, de  $n$  lados, é dado por  $x = \frac{360}{n}$ ,

sendo  $i = 2y$  temos:

$$\begin{aligned}
 x + 2y &= 180^\circ \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2y &= 180 - x \Rightarrow \\
 \Rightarrow i &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \\
 \Rightarrow i &= \frac{(n-2).180^\circ}{n}
 \end{aligned}$$

Note que para acontecer a pavimentação do plano com polígonos regulares, a soma de todos os ângulos internos ao redor de um nó deve ser  $360^\circ$ . Sabemos que, para haver a

pavimentação do plano, não se deve deixar espaços em branco entre os polígonos ou estes ficarem sobrepostos, fato que limita o número de polígonos que atendem a esse critério.

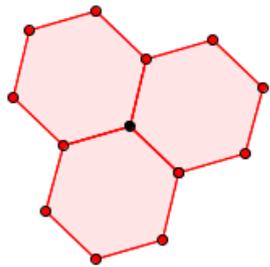
Segundo Correia (2013), se  $k$  o número de polígonos ao redor de um nó e  $i$  o valor do ângulo interno desse polígono, para acontecer a pavimentação devemos ter  $k.i = 360$  ou  $i$  divide  $360^\circ$ .

Vimos que o valor de um dos ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados é dada por  $i = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$ . Se  $k.i = 360^\circ$  ou  $k = \frac{360^\circ}{i}$ , então  $k = \frac{2n}{n-2}$ .

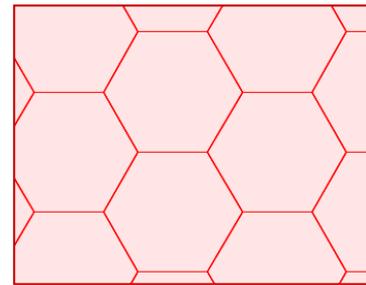
Sabendo que  $k \geq 3$ , pois não há pavimentação com 1 ou 2 polígono ao redor de um nó. Obtemos  $\frac{2n}{n-2} \geq 3$  ou  $n \leq 6$ , portanto os possíveis valores de  $n$  são 6, 5, 4 e 3. Verificando:

- Para  $n = 6$ , temos  $k = \frac{2.6}{6-2} = 3$ , logo, podemos dispor 3 hexágonos regulares contornando um nó.

**Figura 22a:** Três hexágonos regulares ao redor de um nó



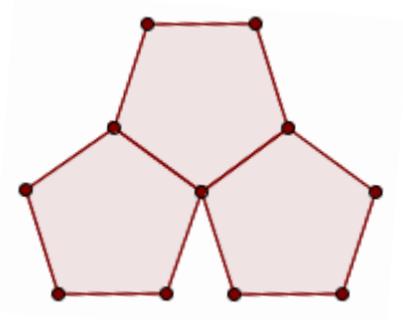
**Figura 22b:** Pavimentação por hexágonos



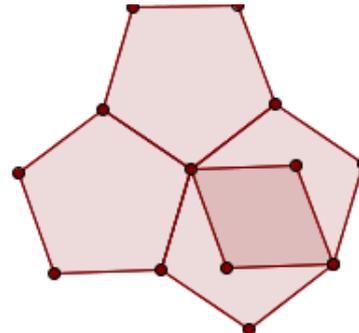
**Fonte:** Elaborada pela autora

- Para  $n = 5$ , temos  $k = \frac{2.5}{5-2} = 3,3333\dots$ , como  $k$  deve ser um número inteiro, concluímos que não podemos dispor pentágonos regulares a o redor de um nó sem haver espaços e nem sobreposições.

**Figura 23a:** Três pentágonos regulares ao redor de um nó não pavimenta o plano



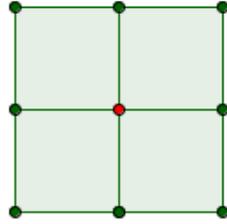
**Figura 23b:** Quatro pentágonos regulares ao redor de um nó não pavimenta o plano



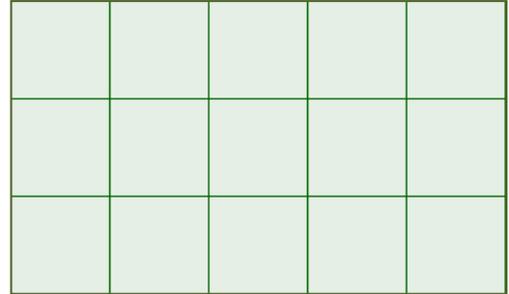
**Fonte:** Elaborada pela autora

- Para  $n = 4$ , temos  $k = \frac{2 \cdot 4}{4 - 2} = 4$ , logo, podemos dispor 4 quadrados contornando um nó.

**Figura 24a:** Quatro quadrados ao redor de um nó



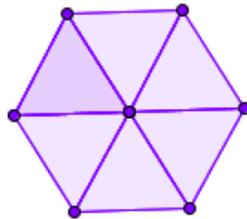
**Figura 24b:** Pavimentação por quadrados



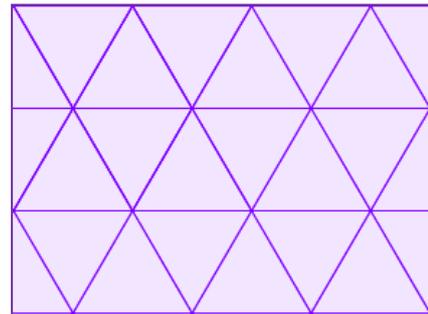
**Fonte:** Elaborada pela autora

- Para  $n = 3$ , temos  $k = \frac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 6$ , logo, podemos dispor 6 triângulos equiláteros contornando um nó.

**Figura 25a:** Seis triângulos equiláteros ao redor de um nó



**Figura 25b:** Pavimentação por triângulos equiláteros



**Fonte:** Elaborada pela autora

Concluimos que há somente três pavimentações com polígonos regulares de um só tipo; as que usam somente **triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares**. Estas pavimentações são arquimedianas, uniformes e platônicas.

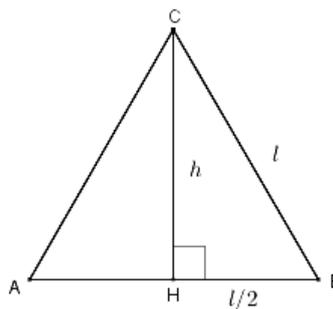
### 4.3 Abelhas inteligentes

Por que as abelhas constroem os favos de mel (Figura 26) com forma hexagonal e não quadrada ou triangular?

**Figura 26** - Favos de mel

**Fonte:** Blog Preservação Brasil <sup>4</sup>

Seja  $P$  o perímetro fixo do triângulo equilátero, quadrado e do hexágono regular e seja  $A$  a área desses polígonos em função de  $P$ .

**Figura 27:** Triângulo equilátero

**Fonte:** Elaborada pela autora

a) Triângulo equilátero

Se  $l$  é o valor do lado e  $h$  a sua altura, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \quad \rightarrow \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

A área do triângulo é determinada pela metade do produto da base pela altura. Assim:

$$A = \frac{l \cdot h}{2}$$

<sup>4</sup> Disponível em: <http://preservacaobrasil.blogspot.com.br/2013/08/segredo-das-formas-do-favo-de-mel.html>> Acesso em 11 jul 2014

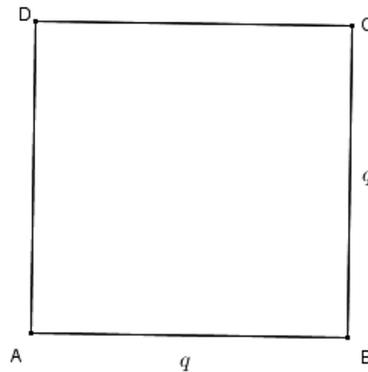
Sabemos que  $P = 3l$ , então  $l = \frac{P}{3}$ , logo a área é dada por:

$$A_T = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{P}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{36} P^2$$

b) Quadrado

Calculando a área do quadrado de mesmo perímetro  $P$ .

**Figura 28:** Quadrado



**Fonte:** Elaborada pela autora

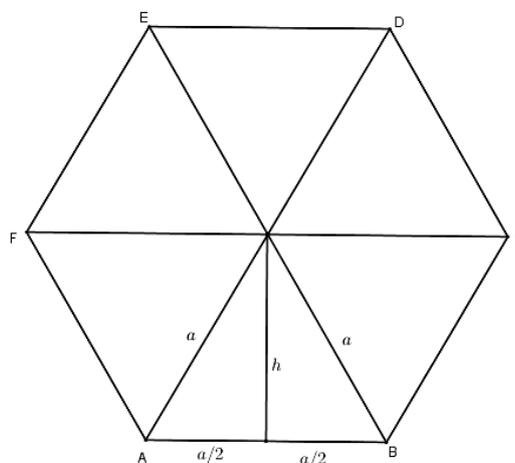
Sabendo que  $P = 4q$  e  $q = \frac{P}{4}$ , temos:

$$A_Q = q^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

c) Hexágono regular

Sendo  $P$  o perímetro comum, temos  $P = 6a$  e  $a = \frac{P}{6}$ .

**Figura 29 -** Hexágono Regular



**Fonte:** Elaborada pela autora

Sabendo que o hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros, sua área é dada por:

$$A_H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{6\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{P}{6}\right)^2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24} P^2$$

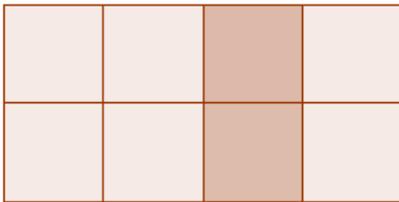
Comparando os valores das áreas do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular encontramos:  $\frac{\sqrt{3}}{36} P^2 < \frac{P^2}{16} < \frac{\sqrt{3}}{24} P^2$ . Portanto a área do hexágono regular é a maior mantendo o mesmo perímetro.

Verificamos que as abelhas otimizam os recursos conseguindo formar favos com a maior área possível utilizando a mesma quantidade de material.

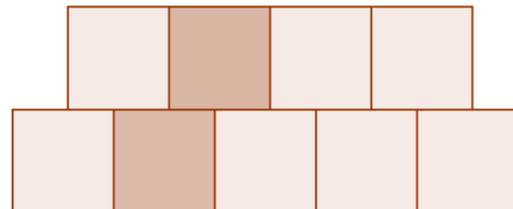
#### 4.4 Pavimentações com padrões regulares.

Observe as pavimentações com triângulos e quadrados, respectivamente.

**Figura 30a:** Pavimentação por quadrados lado a lado

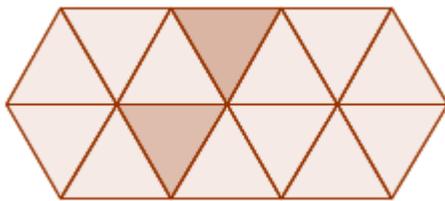


**Figura 30b:** Pavimentação por quadrados não lado a lado

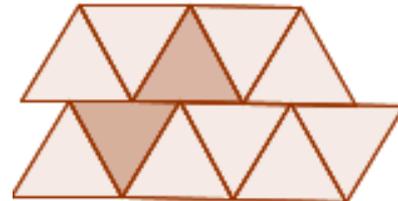


**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 31a:** Pavimentação por triângulos equiláteros lado a lado



**Figura 31b:** Pavimentação por triângulos equiláteros não lado a lado

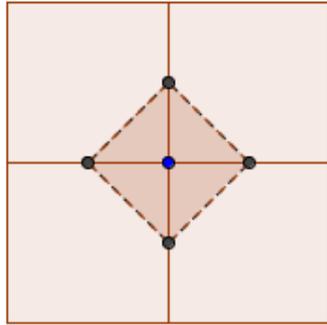


**Fonte:** Elaborada pela autora

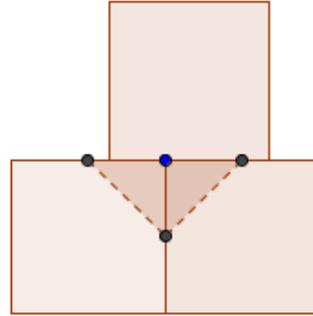
Nitidamente as figuras 30a e 31a representam pavimentações lado a lado e as figuras 30b e 31b são não lado a lado. As quatro representações configuram padrões regulares?

Primeiro vejamos o que significa uma figura-vértice. Marquemos a partir de um nó qualquer da pavimentação os pontos médios dos lados do polígono que concorrem naquele nó. A figura formada pelos pontos médios desses lados chamamos de figura-vértice. Observe as figuras:

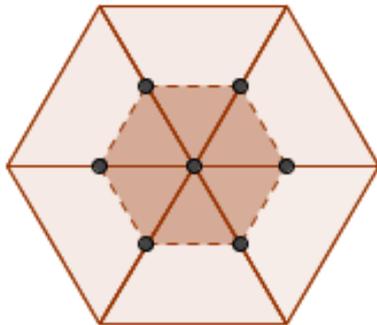
**Figura 32a:** Figura vértice é um quadrado



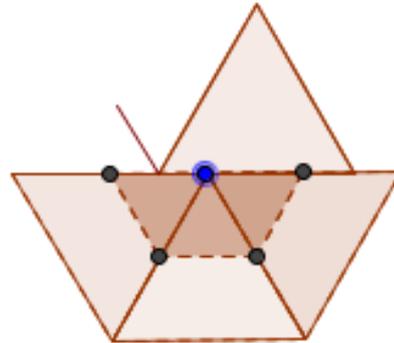
**Figura 32b:** Figura vértice é um triângulo isósceles



**Figura 33a:** Figura vértice é um hexágono regular



**Figura 33b:** Figura vértice é um trapézio



**Fonte:** Elaborada pela autora

Na figura 32a a figura vértice é um quadrado enquanto na figura 32b é um triângulo isósceles. Do mesmo modo, na figura 33a temos um hexágono regular como figura vértice e na figura 33b temos um trapézio. Note que nas configurações 32a e 33a, cujas pavimentações são lado a lado, as figuras vértices são polígonos regulares, este fato não é observado nas figuras cuja pavimentação não é lado a lado, figuras 32b e 33b.

Conceituamos então como pavimentação com padrão regular aquelas em que as figuras-vértices do padrão são também polígonos regulares.

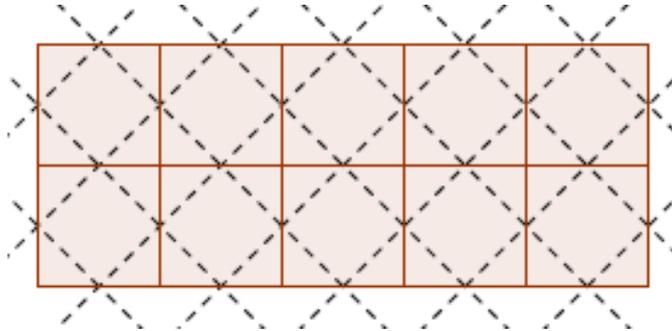
Em caso contrário diremos que o padrão não é regular.

Como visto nas figuras 32a e 33a, as pavimentações com triângulos equiláteros e com quadrados representam pavimentações com padrão regular. Realizado o mesmo trabalho na pavimentação com hexágonos regulares, obtemos como figura vértice um triângulo equilátero, portanto uma pavimentação com hexágonos regulares também representa uma pavimentação com padrão regular.

#### 4.4.1 Pavimentações com as figuras-vértice dos padrões regulares

- Fazendo todas as figuras-vértice no padrão regular com quadrados, obtemos uma nova pavimentação também com quadrados de padrão regular.

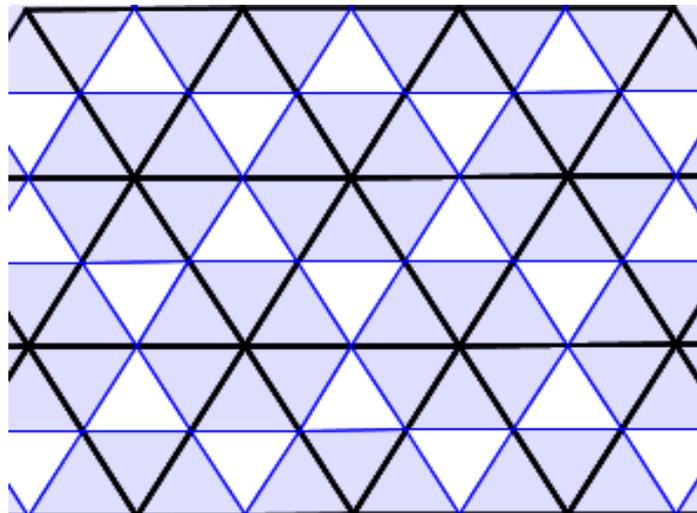
**Figura 34:** Figuras vértices no padrão regular com quadrados



**Fonte:** Elaborada pela autora

- Fazendo todas as figuras-vértice no padrão regular de triângulo equiláteros, obtemos uma nova pavimentação composta de triângulos equiláteros e hexágonos regulares.

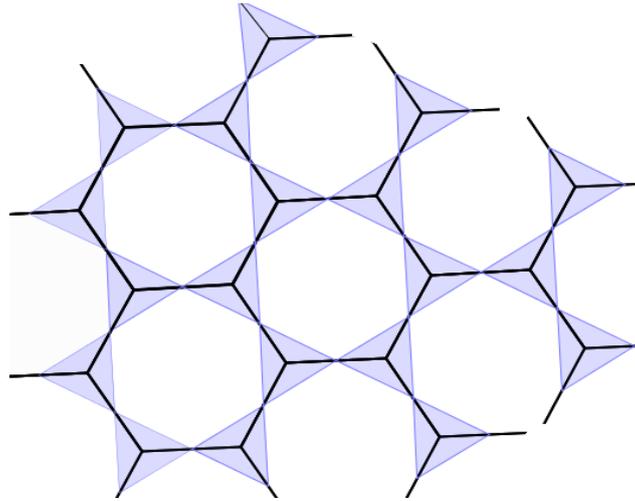
**Figura 35 -** Figuras vértices no padrão regular de triângulos equiláteros



**Fonte:** Elaborada pela autora

- Fazendo todas as figuras-vértice no padrão de hexágonos regulares obtemos também pavimentações com triângulos equiláteros e hexágonos regulares.

**Figura 36** - Figuras vértices no padrão regular de hexágonos regulares



**Fonte:** Elaborada pela autora

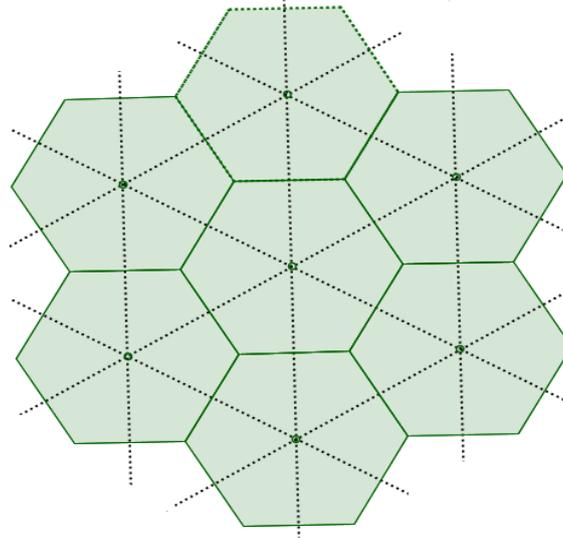
Consideramos que padrões regulares de triângulos equiláteros e hexágonos regulares são padrões *afins* pois as figuras-vértices desses padrões são respectivamente o hexágono regular e o triângulo equilátero. Os padrões regulares de quadrados são também quadrados, dizemos que esse tipo de padrão é *auto-afim*.

#### 4.5 Pavimentações com padrões duais

Considerando os padrões regulares com quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares e construindo os seus padrões duais, obtidos traçando-se as arestas correspondentes a cada dois pontos centrais contínuos, portanto perpendiculares aos lados, teremos:

- Do padrão regular, triângulos equiláteros, temos o padrão dual com hexágonos regulares.
- Do padrão regular, hexágonos regulares, temos o padrão dual com triângulos equiláteros, onde descobrimos que esses padrões são duais recíprocos. Veja a Figura 37.

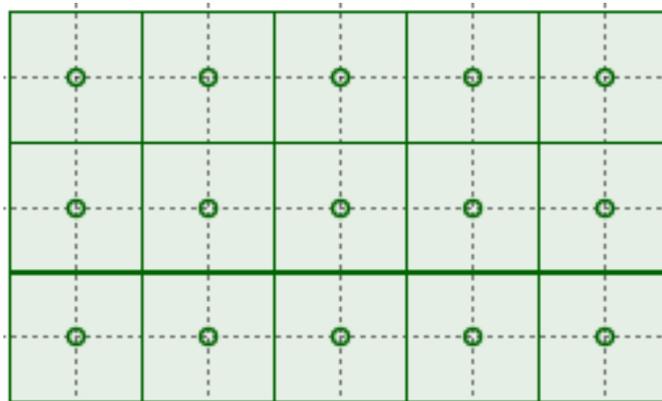
**Figura 37** - Padrão dual com triângulos equiláteros e hexágonos regulares



**Fonte:** Elaborada pela autora

- Do padrão regular com quadrados obtemos o padrão dual também com quadrados (Figura 38), esse padrão, portanto é auto-dual.

**Figura 38** - Padrão auto-dual com quadrados



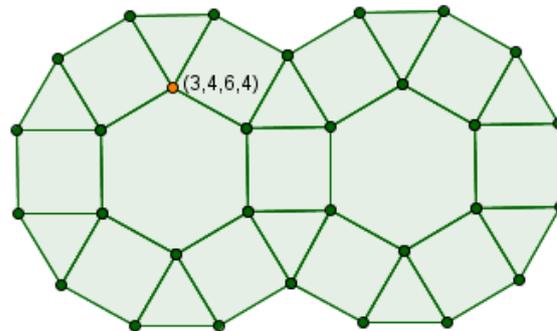
**Fonte:** Elaborada pela autora

## 5 PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS REGULARES DE TIPOS DIFERENTES

### 5.1 Entendendo os arranjos

Segundo Carvalho (2008), o arranjo de polígonos ao redor de um nó chamamos de **configuração** e a sua notação se deve ao número de lados dos polígonos que constituem esse arranjo. Por exemplo, a configuração (3, 4, 6, 4) significa que ao redor de um nó há um triângulo, um quadrado, um hexágono e um quadrado, nesta ordem e em qualquer nó dessa pavimentação. Veja figura 39.

**Figura 39** - Pavimentação com configuração (3, 4, 6, 4)



Fonte: Elaborada pela autora

### 5.2 Descobrimo as configurações ao redor de um nó.

Barbosa (1993) faz um estudo de todas as pavimentações ao redor de um ponto utilizando polígonos regulares. Sendo  $k$  o número desses polígonos e sendo  $60^\circ$  o menor ângulo interno de um polígono regular, então o maior valor de  $k$  é dado por  $\frac{360^\circ}{6} = 6$ , que corresponde a 6 triângulos equiláteros, conforme visto anteriormente, por outro lado,  $k \geq 3$ , logo  $3 \leq k \leq 6$ .

#### 1º caso: para $k = 3$ (3 polígonos regulares)

Sejam os polígonos regulares com o número de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente, a soma dos ângulos internos ao redor de um nó da pavimentação é dado por:

$$\frac{(a-2)180^\circ}{a} + \frac{(b-2)180^\circ}{b} + \frac{(c-2)180^\circ}{c} = 360^\circ \text{ de onde obtemos:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad (\text{I})$$

Supondo, sem perda de generalidade que,  $a \leq b \leq c$  e substituindo na (I)  $b$  e  $c$  por  $a$ , teremos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2} \text{ ou } a \leq 6$$

Como o menor valor de  $a$  se verifica para triângulos equiláteros ou  $a \geq 3$ , temos:

$$3 \leq a \leq 6 \text{ (II)}$$

Temos também que (I) fornece:  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{(a-2)}{2a}$  (III). Substituindo na (III)  $c$  por  $b$ ,

teremos:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{(a-2)}{2a} \text{ ou } b \leq \frac{4a}{a-2} \text{ (IV)}$$

Para obtermos todas as possíveis soluções de (I), estudemos os subcasos:

- Para  $a = 3$ , um dos polígonos é um triângulo equilátero.

$a$	$b$	$c$
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12

De (III) obtemos  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$  ou  $\frac{1}{c} = \frac{(b-6)}{6b}$ , que nos indica que ser  $b > 6$  para não

obtermos valores negativos ou valor nulo; mas pela (IV) temos que  $b \leq 12$ , portanto resulta intervalo  $7 \leq b \leq 12$ . Substituindo os possíveis valores de  $b$  e lembrando que  $c$  é inteiro, elaboramos a tabela com os resultados de  $a, b$  e  $c$ .

- Para  $a = 4$ , um dos polígonos é um quadrado.

Analogamente obtemos  $5 \leq b \leq 8$ , e lembrando que  $c$  é inteiro, elaboramos uma nova tabela com os resultados de  $a, b$  e  $c$ .

$a$	$b$	$c$
4	5	20
4	6	12
4	8	8

- Para  $a = 5$ , um dos polígonos é um pentágono regular.

Da (III) obtém-se  $b \geq 4$ , mas  $b \geq a$ ; então prevalece que  $b \geq 5$  e da (IV) encontra-se que  $b \leq 6$ , mas que fornece um único valor de  $c$ , expresso na tabela:

$a$	$b$	$c$
5	5	10

- Para  $a = 6$ , um dos polígonos é um hexágono regular.

Da (III) obtém-se  $b > 3$ , mas  $b \geq a$ , prevalece que  $b \geq 6$ . Pela (IV) temos  $b \leq 6$ , ou  $b = 6$ , cujo valor fornece também  $c = 6$ , conforme estudado anteriormente.

$a$	$b$	$c$
6	6	6

### 2º caso: para $k = 4$ (4 polígonos regulares)

A demonstração é semelhante ao caso  $k = 3$ , supondo os lados  $a, b, c$  e  $d$  obtemos as equação:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1 \quad (\text{V})$$

Supondo novamente sem perda de generalidade que  $a \leq b \leq c \leq d$  e substituindo  $b, c$  e  $d$  por  $a$ , obtemos  $a \leq 4$  e como  $a \geq 3$  ficamos com os dois únicos valores:  $a = 3$  ou  $a = 4$ .

$$\text{De (V) obtemos } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{(a-1)}{a} \quad (\text{VI})$$

Substituindo na (VI) os valores de  $c$  e  $d$  por  $b$ , teremos  $b \leq \frac{3a}{a-1}$  (VII), portanto se  $a = 3$ , termos  $b \leq 4$ , mas como  $b \geq a$ , segue  $b = 3$  ou  $4$ . Idem da (VII), para  $a = 4$ , termos  $b \leq 4$ , mas como  $b \geq a$ , segue que  $b = 4$ . Estudemos separadamente os subcasos:

- Para  $a = 3$  e  $b = 3$ , dois triângulos equiláteros.

Da (V) obtém-se  $c \geq 4$ , mas  $c \leq d$ , então trocando  $d$  por  $c$ , encontramos  $c \leq 6$ . Logo,  $4 \leq c \leq 6$ .

Como  $d$  é inteiro, obtemos as seguintes soluções na tabela a seguir:

$a$	$b$	$c$	$d$
3	3	4	12
3	3	6	6

- Para  $a = 3$  e  $b = 4$ , um triângulo equilátero e um quadrado.

Da (V) obtém-se  $c \geq 3$ , mas  $c \geq b$ , então prevalece que  $c \geq 4$ . Entretanto, como  $c \leq d$ , encontra-se  $c \leq 4$ , logo  $c = 4$ . Como  $d$  é inteiro, segue solução da tabela.

$a$	$b$	$c$	$d$
3	4	4	6

- Para  $a = b = 4$ , dois polígonos são quadrados.

Da (V), com  $c \leq d$ , obtém-se  $c \leq 4$ , mas como  $c \geq b$ , resulta  $c = 4$ , de onde calculamos o único valor de  $d = 4$ , que fornece configuração já mencionada. Segue a solução da tabela.

$a$	$b$	$c$	$d$
4	4	4	4

### 3º caso: para $k = 5$ (5 polígonos regulares)

Sejam os polígonos regulares  $a, b, c, d$  e  $e$  lados respectivamente, obtemos a equação:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{2}$  (VIII).

Supondo  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$  de (VIII) obtemos:  $\frac{5}{a} \geq \frac{3}{2}$  ou  $a \leq \frac{10}{3}$  ou ainda  $a \leq 3$  e, como se deve ter também  $a \geq 3$ , concluímos que  $a$  só pode assumir o valor 3. Agora (VIII)

fornece:  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{7}{6}$ .

Trocando  $c, d$  e  $e$  por  $b$ , obtemos  $\frac{4}{b} \geq \frac{7}{6}$  ou  $b \leq \frac{24}{7}$  ou  $b \leq 3$  e novamente teremos que

$b = 3$  como único valor. Fazendo  $b = 3$ , obtemos:  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{6}$ .

Trocando  $d$  e  $e$  por  $c$ , obtemos  $\frac{3}{c} \geq \frac{5}{6}$  ou  $c \leq \frac{18}{5}$  ou ainda  $c \leq 3$  e mais uma vez o único valor  $c = 3$ .

Fazendo  $c = 3$ , encontramos:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{1}{2}$ . Trocando  $e$  por  $d$ , obtemos  $\frac{2}{d} \geq \frac{1}{2}$  ou  $d \leq 4$ , logo  $3 \leq d \leq 4$ , ou  $d = 3$  ou  $d = 4$ .

Para  $d = 3$ , encontramos  $\frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  ou  $e = 6$ .

Para  $d = 4$ , encontramos  $\frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  ou  $e = 4$ .

As soluções estão dispostas na tabela a seguir.

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

#### 4º caso: $k = 6$ (6 polígonos regulares)

Como já foi mencionado, esta configuração representa 6 triângulos equiláteros, portanto só de um tipo.

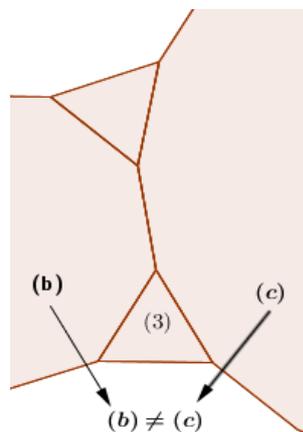
$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
3	3	3	3	3	3

### 5.3 Quais configurações pavimentam o plano?

Das configurações descritas no item anterior algumas não pavimentam o plano por completo. Vejamos:

- As configurações (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15) não pavimentam o plano por possuírem um triângulo equilátero, sendo dois números de lados  $b$  e  $c$  diferentes, termos a situação da Figura 40 que é absurda.

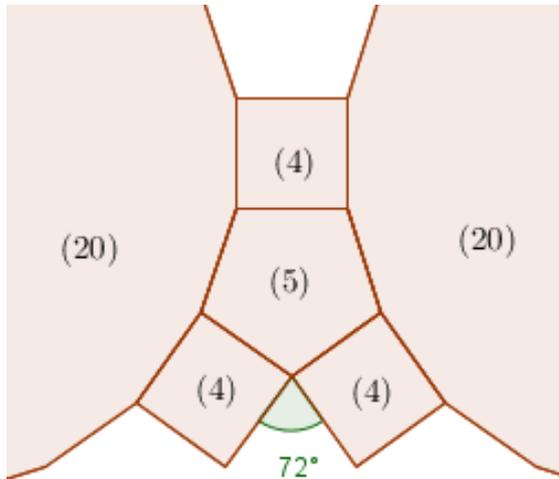
**Figura 40** – Configurações (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15)



Fonte: Correia (2013), p.73

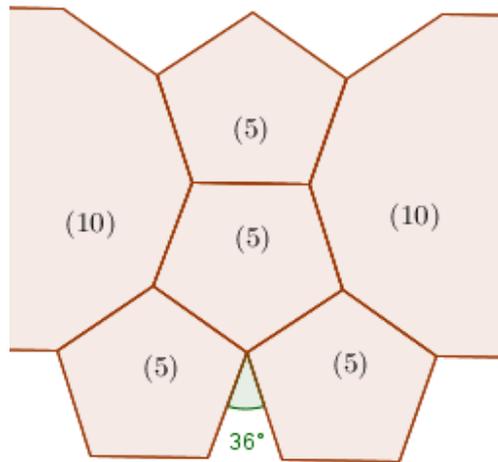
- As configurações (4, 5, 20) e (5, 5, 10) também não pavimentam o plano por completo por não manterem a mesma configuração em todos os nós da pavimentação, em dado momento é necessário  $72^\circ$  e  $36^\circ$  respectivamente como ângulo interno dos polígonos correspondentes.

**Figura 41** - Configuração (4, 5, 20) não pavimenta o plano por completo



Fonte: Barbosa (1993)

**Figura 42** - Configuração (5, 5, 10) não pavimenta o plano por completo



Fonte: Barbosa (1993)

Ficamos então com apenas 8 possibilidades de configurações que apresentam mais de um tipo de polígono<sup>5</sup>. Veja na tabela a seguir:

**Tabela 2:** Possibilidades de configurações com polígonos regulares de vários tipos

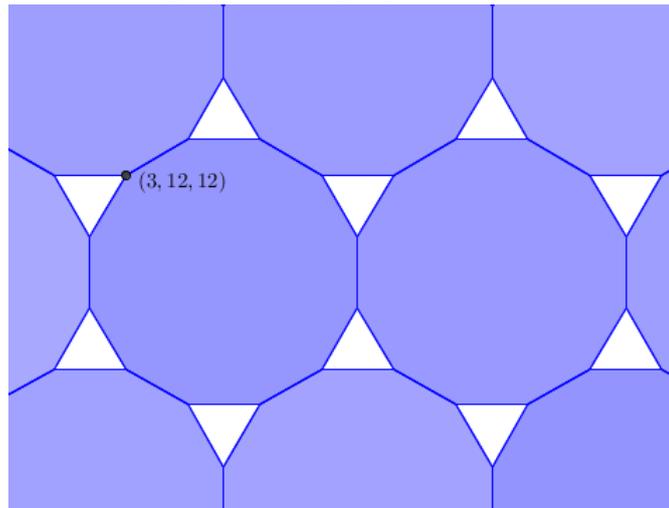
Nº	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<b>1</b>	3	12	12		
<b>2</b>	4	6	12		
<b>3</b>	4	8	8		
<b>4</b>	3	3	4	12	
<b>5</b>	3	3	6	6	
<b>6</b>	3	4	4	6	
<b>7</b>	3	3	3	3	6
<b>8</b>	3	3	3	4	4

Fonte: Barbosa (1993), p. 29

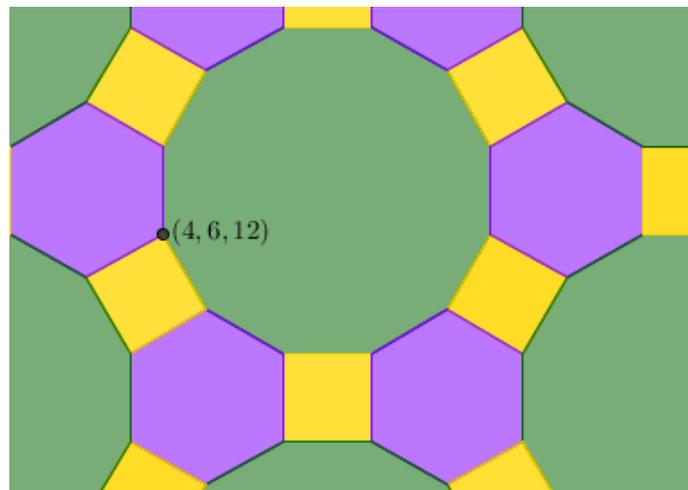
#### 5.4 Possibilidades que apresentam uma só configuração

As configurações das possibilidades 1, 2, 3 e 7 da Tabela 2 acima pavimentam o plano de maneira única como se verifica nas figuras a seguir.

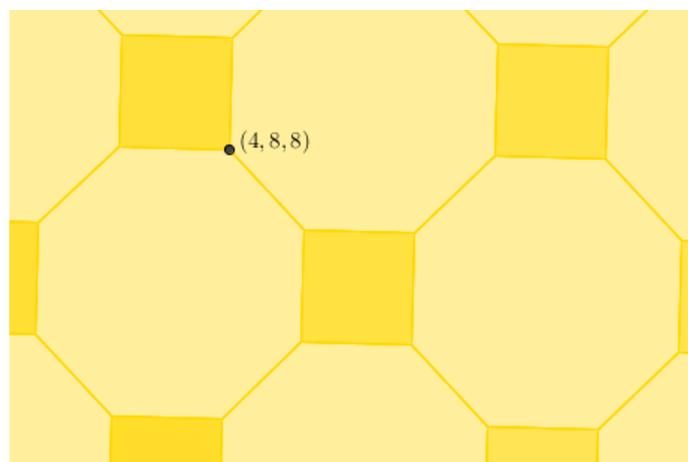
<sup>5</sup> As configurações com polígonos de um único tipo foram estudadas no capítulo anterior.

**Figura 43** - Configuração (3, 12, 12)

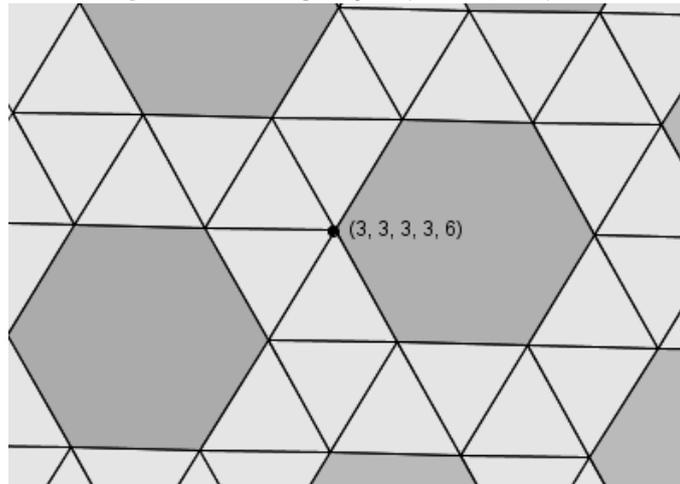
**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 45** - Configuração (4, 6, 12)

**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 44** - Configuração (4, 8, 8)

**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 46** - Configuração (3, 3, 3, 3, 6)

**Fonte:** Elaborada pela autora

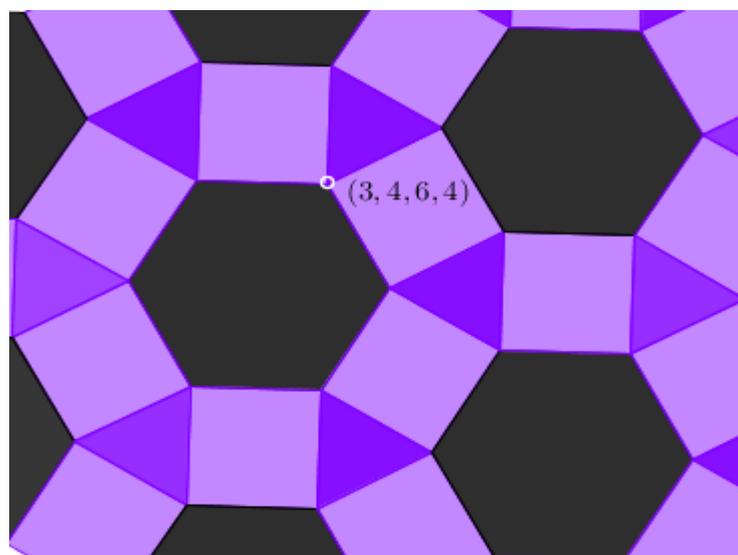
## 5.5 Possibilidades que apresentam mais de uma configuração ao redor de um ponto

### 5.5.1 Possibilidade número 6

Esse arranjo admite duas configurações diferentes ao redor de um ponto: (3, 4, 6, 4) e (3, 4, 4, 6).

#### a) Configuração (3, 4, 6, 4)

Essa configuração pavimenta o plano de maneira uniforme onde se observa que todos os nós apresentam a mesma disposição de polígonos. Ver figura 47.

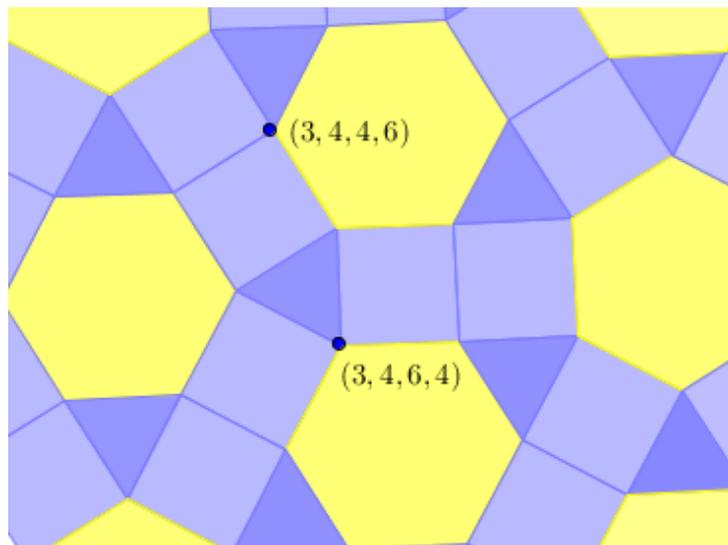
**Figura 47** - Configuração (3, 4, 6, 4)

**Fonte:** Elaborada pela autora

b) Configuração (3, 4, 4, 6)

Essa configuração não se mantém em todos os nós da pavimentação, há nós que se observa a configuração (3,4, 4, 6) em sentido horário e outros em sentido anti-horário, no entanto, há nós com a configuração (3, 4, 6, 4) indicando que essa configuração não pavimenta o plano sem combinar com a (3, 4, 6, 4). Esse tipo de pavimentação é chamada 2-uniforme.

**Figura 48** - Configurações (3, 4, 4, 6) e (3, 4, 6, 4)



**Fonte:** Elaborada pela autora

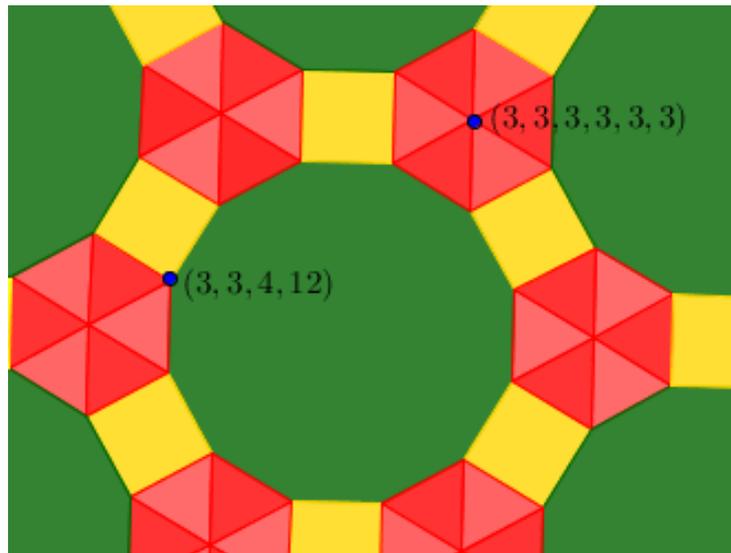
### 5.5.2 Possibilidade número 4

Esse arranjo admite duas configurações ao redor de um ponto: (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12)

a) Configuração (3, 3, 4, 12)

Essa configuração não pavimenta o plano sozinha, há necessidade de combiná-la com a configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3). Portanto é uma pavimentação 2-uniforme.

**Figura 49** - Configurações (3, 3, 4, 12) e (3, 3, 3, 3, 3, 3)

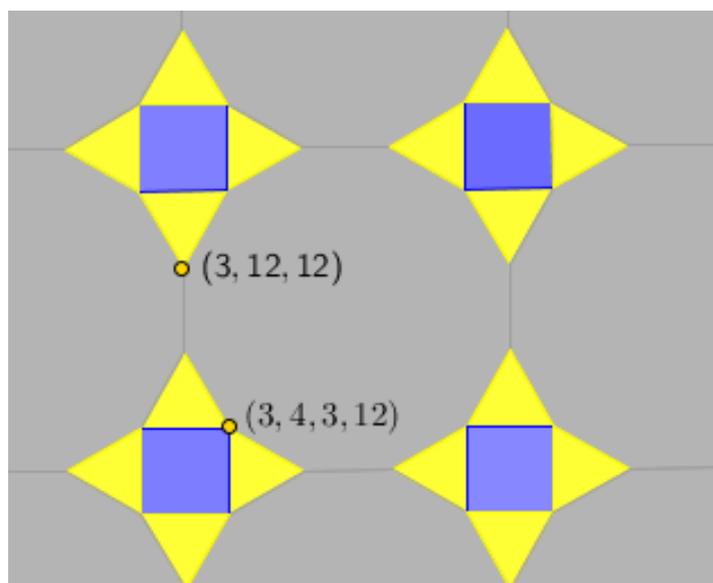


**Fonte:** Elaborada pela autora

b) Configuração (3, 4, 3, 12)

Essa configuração também não pavimenta o plano sozinha, há necessidade de combiná-la com outras configurações, no exemplo da figura foi combinado com (3, 12, 12). É uma pavimentação do tipo 2-uniforme.

**Figura 50** - Configurações (3, 12, 12) e (3, 4, 3, 12)



**Fonte:** Elaborada pela autora

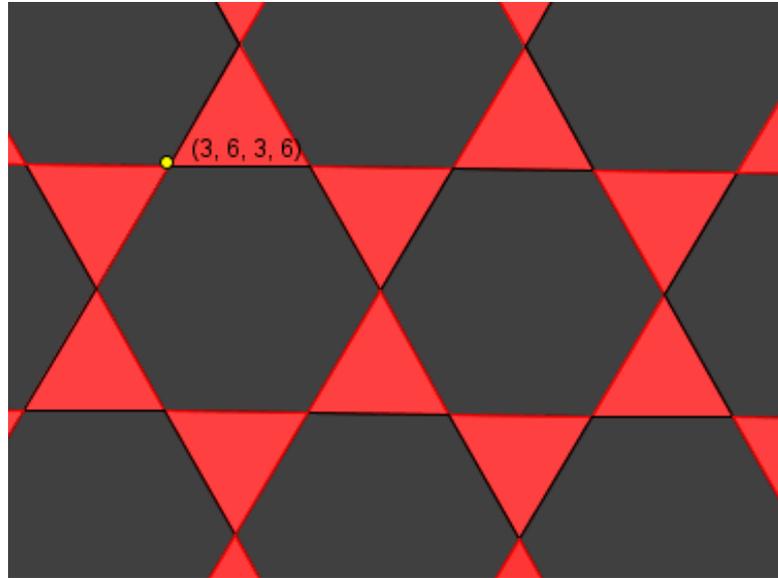
### 5.5.3 Possibilidade número 5

Esse arranjo admite duas configurações ao redor de um ponto: (3, 6, 3, 6) e (3, 3, 6, 6).

## a) Configuração (3, 6, 3, 6)

Essa disposição é observada em todos os pontos da pavimentação (ver figura 51), é, portanto, uma pavimentação uniforme.

**Figura 51** - Configuração (3, 6, 3, 6)

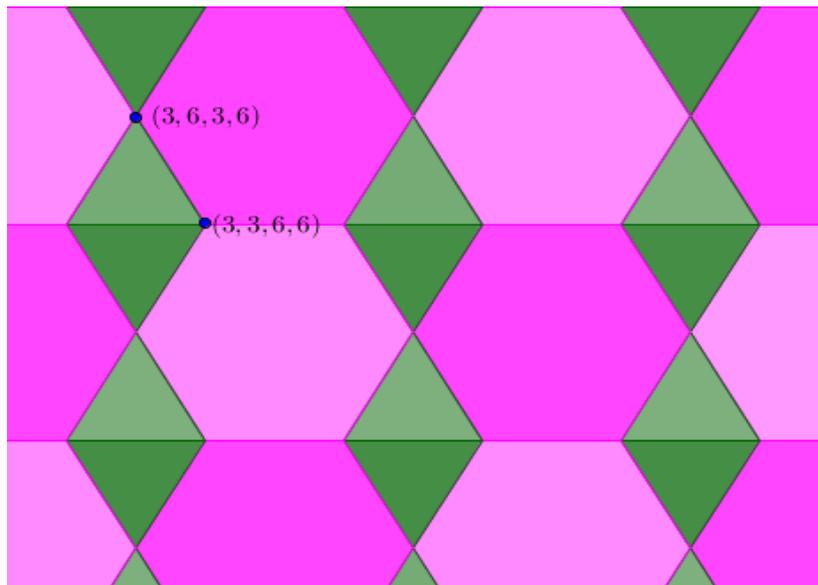


**Fonte:** Elaborada pela autora

## b) Configuração (3, 3, 6, 6)

Essa configuração não pavimenta o plano sozinha, há necessidade de combiná-la com outras configurações, por exemplo, com a configuração (3, 6, 3, 6). É uma pavimentação do tipo 2-uniforme. Veja a figura 52.

**Figura 52** - Configurações (3, 3, 6, 6) e (3, 6, 3, 6)

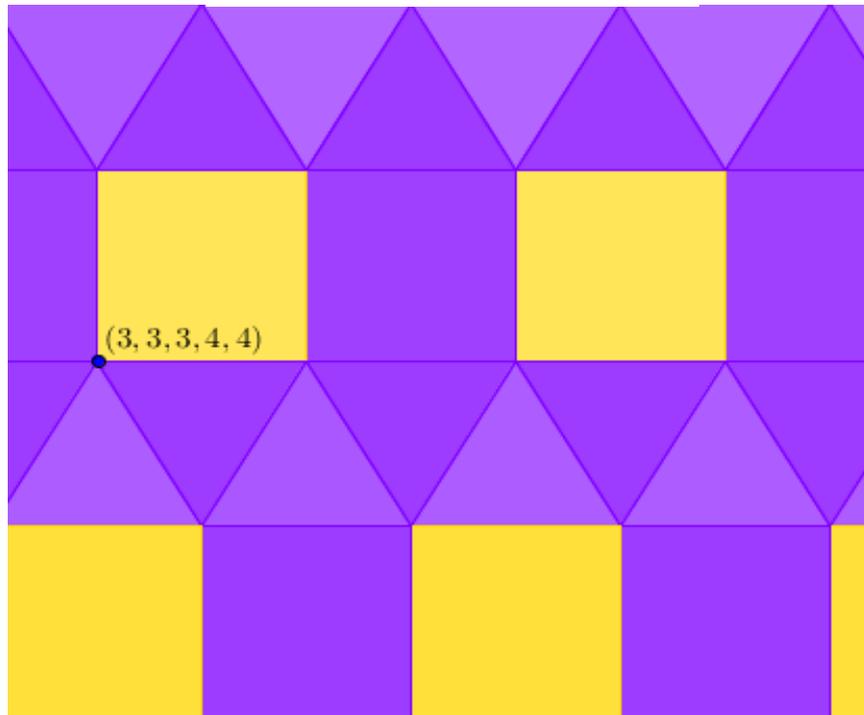


**Fonte:** Elaborada pela autora

### 5.5.4 Possibilidade número 8

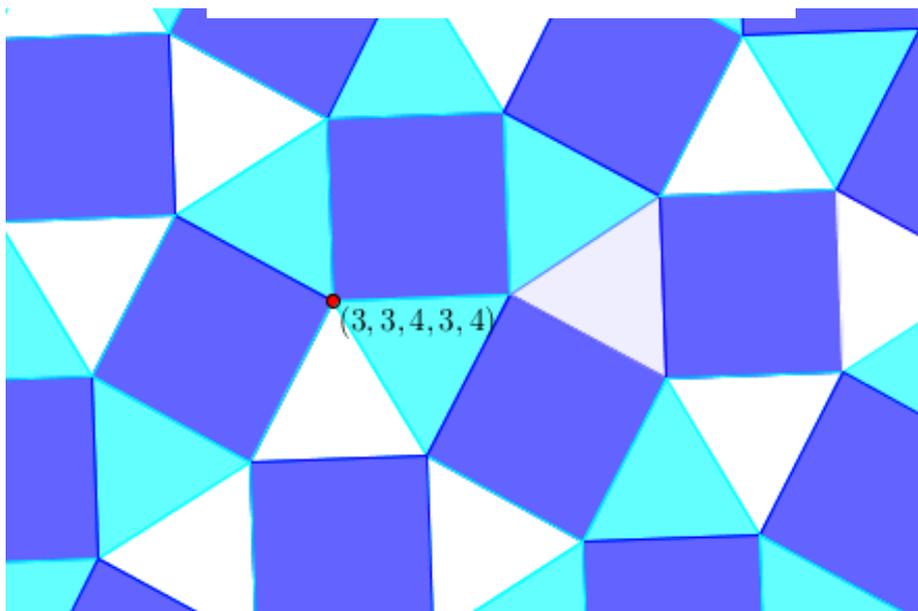
Esse arranjo também admite duas configurações ao redor de um ponto:  $(3, 3, 3, 4, 4)$  e  $(3, 3, 4, 3, 4)$ . Ambas pavimentam o plano de maneira uniforme. Ver figuras 53 e 54.

**Figura 53** - Configuração  $(3, 3, 3, 4, 4)$



**Fonte:** Elaborada pela autora

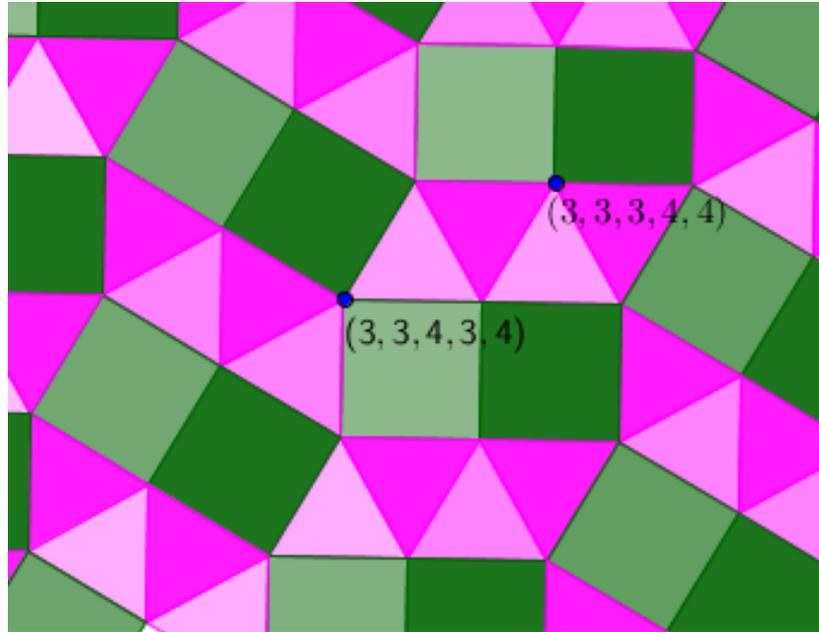
**Figura 54** - Configuração  $(3, 3, 4, 3, 4)$



**Fonte:** Elaborada pela autora

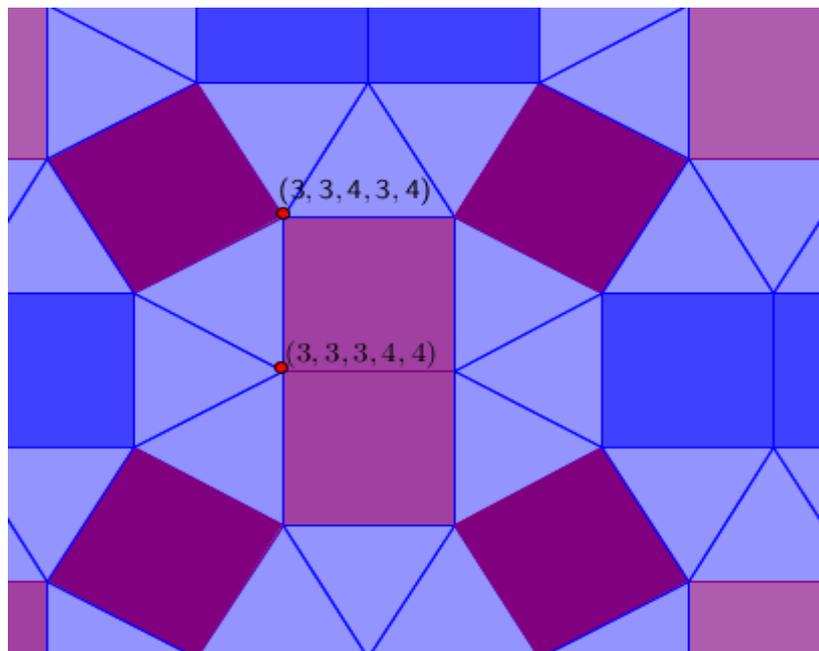
No entanto, podemos obter pavimentações do tipo 2-uniformes combinando as duas configurações, como observadas nas Figuras 55 e 56.

**Figura 55** - Configurações  $(3, 3, 3, 4, 4)$  e  $(3, 3, 4, 3, 4)$



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 56** - Configurações  $(3, 3, 3, 4, 4)$  e  $(3, 3, 4, 3, 4)$



**Fonte:** Elaborada pela autora

## 6 PAVIMENTAÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE ESPELHOS

### 6.1 Reflexões em espelhos

Segundo Batistela (2005) na Física, um espelho é qualquer superfície polida que divirja os raios de luz de acordo com as leis da reflexão. Ele pode ter superfície plana ou curvada. Para nosso estudo o mais adequado para se trabalhar os temas propostos de geometria utilizaremos os espelhos planos.

Para Barbosa (1993) a reflexão obedece a duas leis da ótica geométrica:

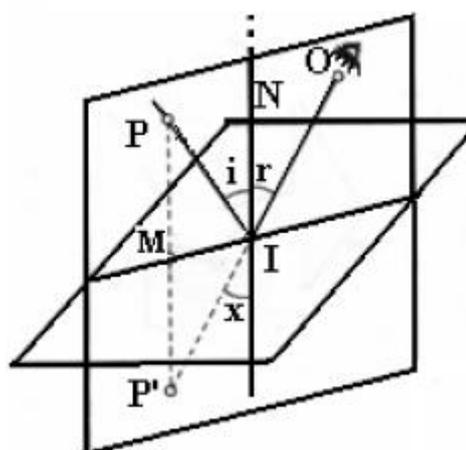
a) O raio incidente, à normal a superfície do ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano.

b) O ângulo de incidência  $i$  (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio refletido com a normal):  $i = r$

A imagem de um ponto, obtida através do espelho, é o encontro dos raios refletidos ou dos prolongamentos destes, sendo chamada de imagem virtual.

O esquema encontrado em Barbosa (1993) representa a reflexão de um espelho plano.

Figura 57 - Reflexão em espelho



Fonte: Barbosa (1993) p. 38

Um ponto-objeto  $P$  frente a um espelho plano sendo visto por um observador (olho)  $O$  através do espelho, parece ao observador estar em  $P'$ , atrás do espelho (sua imagem virtual), impressão causada pelo fato de  $O$ , o observador, receber o raio luminoso refletido, e que, vindo de  $P$ , incide no espelho e, segundo as duas leis dadas, reflete-se atingindo  $O$ , podendo assim ser visualizado. Em razão da primeira lei, os pontos  $P$ ,  $I$ ,  $O$  e  $P'$  estão num mesmo plano; e em razão da segunda, resulta que  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação à reta intersecção desse plano com o plano do espelho (Figura 57).

Desse modo se justifica a denominação simetria reflexional ou reflexão dada à simetria axial.

Essas considerações são encontradas também nas obras de Batistela (2005) e Reis (2006).

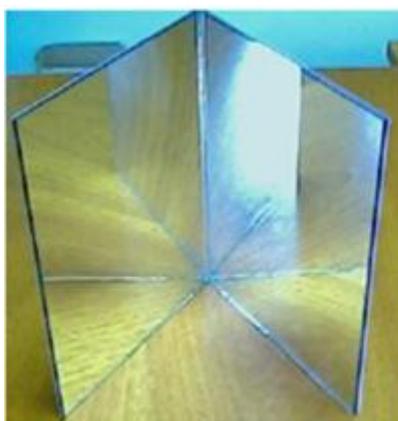
## 6.2 Imagens geradas por dois espelhos planos inclinados

Segundo Batistela (2005), quando se articulam dois espelhos planos, dependendo do ângulo entre os espelhos tem-se a repetição perfeita de imagens. Nesse caso, dizemos que eles formam um caleidoscópio ordinário, ainda que sejam apenas dois espelhos articulados temos a formação de imagens múltiplas, obtidas pela reflexão sucessiva de pontos-objeto postos entre os espelhos.

Para Alspaugh (1970) apud Batistela (2005), dois espelhos articulados como representado na figura 58 é chamado de *caleidoscópio geométrico* e diz que este é um interessante tipo de instrumento que oferece possibilidades de exploração de tópicos da geometria, tais como: polígonos regulares, coordenadas de pontos em um plano, reflexões e simetria. Ele afirma que a maioria das crianças participa dos trabalhos oferecidos pelo mesmo, o qual é muito útil para professores que desejam promover interesse e motivação pelo uso de novos materiais.

A construção é simples e acessível: são apenas dois espelhos unidos, por exemplo, por um pedaço de fita adesiva, o que possibilita a abertura de vários ângulos. Um interessante ponto sobre este incomum caleidoscópio é o aparente número ilimitado de conceitos matemáticos que podem ser ilustrados através da simples mudança dos ângulos entre os espelhos.

**Figura 58** - Caleidoscópio formado por dois espelhos planos articulados



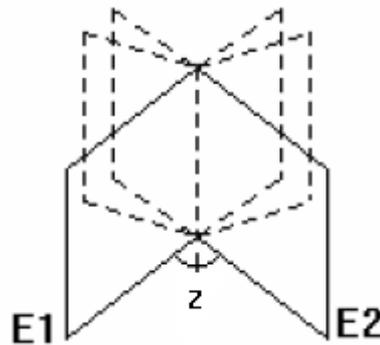
**Fonte:** Santos (2006) p. 41

Quando estes espelhos são colocados frente a alunos e professores, a maioria sente-se fascinada pelo mundo das imagens que lhe saltam aos olhos através das mudanças das figuras. Como exemplo das possibilidades da utilização deste, o autor apresenta atividades que exploram a questão dos ângulos formados entre os espelhos, e a obtenção até mesmo de círculos, quando se colocam arcos entre os espelhos.

Para Santos (2006) ao observarmos as imagens geradas em dois espelhos articulados entre si (Figura 58) visualizamos, devido à reflexão de um espelho no outro, espelhos virtuais que parecem refletir as imagens de objetos colocados entre os espelhos. Porém, é importante observar que as imagens geradas são sempre reflexões obtidas nos espelhos reais.

Ainda segundo Santos (2006) o número de imagens geradas é determinado pelo ângulo  $z$  de abertura entre os dois espelhos (Figura 59).

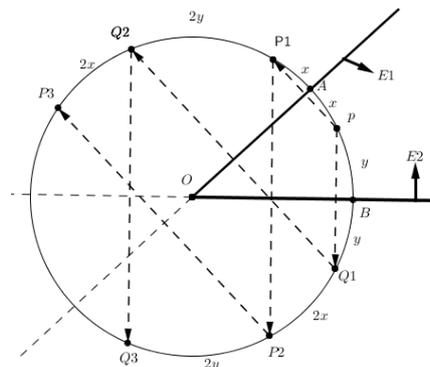
**Figura 59** - O ângulo  $z$  representa a abertura entre os espelhos



Fonte: Santos (2006) p. 41

Para Barbosa (1993) o ponto objeto e todas suas imagens produzidas por dois espelhos planos inclinados pertencem a uma circunferência de centro  $O$ . Esta circunferência determina nos espelhos os pontos  $A$  e  $B$ . Seja o arco  $AB = z$  de abertura dos espelhos, com  $PA = x$  e  $PB = y$  (Figura 60).

**Figura 60** - Esquema de reflexão de uma figura em dois espelhos

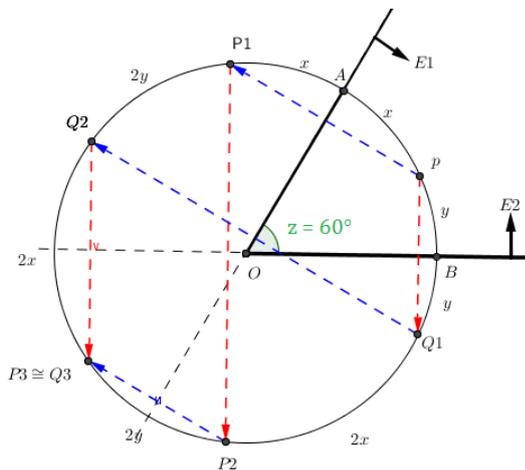


Fonte: Barbosa (1993), p. 41

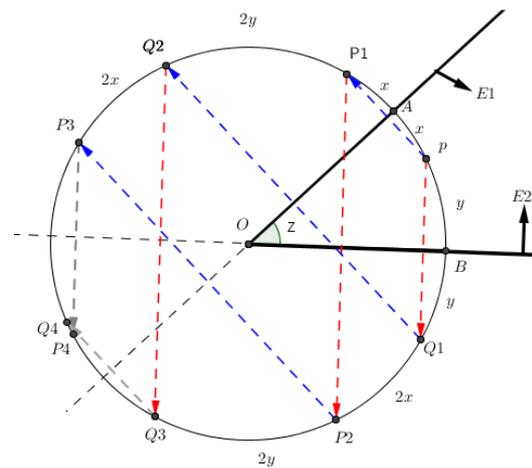
O ponto P fornece em  $E_1$  a imagem  $P_1$  e em  $E_2$  a imagem  $Q_1$ . A imagem  $P_1$  fornece em  $E_2$  a imagem  $P_2$ ; e como simetria reflexional é isometria, teremos  $Q_1P_2 = 2x$ . Analogamente,  $Q_1$  fornece em  $E_1$  a imagem  $Q_2$ , com  $Q_1P_2 = 2y$ . E novamente  $P_2$  fornece  $P_3$  com  $Q_2P_3 = 2x$  e  $Q_2$  fornece  $Q_3$  com  $P_2Q_3 = 2y$  e assim sucessivamente alternando  $2x$  e  $2y$  num sentido e  $2y$  e  $2x$  em sentido contrário (ver Figura 60).

Segue que cada vez que marcamos  $2x + 2y = 2(x+y) = 2z$ , o dobro do ângulo de abertura dos espelhos, obtemos duas imagens. Para que ocorra a repetição perfeita das imagens nos espelhos articulados é necessário que o dobro do ângulo de abertura entre os espelhos ( $2z$ ) divida  $360^\circ$  ou simplesmente  $z$  divida  $360^\circ$  (ver Figura 61). Caso contrário gerará imagens "atrás" dos espelhos que não podem ser visualizadas pelo observador (pontos  $P_4$  e  $Q_4$ ), quebrando a sequência de valores  $2x$  e  $2y$  (ver Figura 62).

**Figura 61** - O ângulo  $z = 60^\circ$  é divisor de  $360^\circ$ .



**Figura 62** - Os valores dos ângulos  $z$  e  $2z$  não são divisores de  $360^\circ$ .



**Fonte:** Barbosa (1993), p. 42

### 6.2.1 Fórmula do número de imagens

Barbosa (1993) afirma que a fórmula para o cálculo do número de imagens dada por:

$$n = \frac{360^\circ}{z} - 1, \text{ onde } n \text{ é o número de imagens e } z \text{ a abertura entre os espelhos, não é correta e,}$$

infelizmente, ainda é fornecida por alguns livros modernos, tanto nacionais como estrangeiros.

A fórmula correta é:  $n = \frac{(360^\circ - R)}{z} + n'$ , com  $R$  resto da divisão de  $360^\circ$  por  $2z$  e

$n' = -1, 0, 1$  ou  $2$ , conforme seguintes valores respectivos de  $R$ :  $R = 0$ ,  $0 < R < 2x$ ,  $2x < R < 2y$  ou  $2y < R < 2z$ .

### 6.3 Polígonos

Martins (2003) observa em seu trabalho se colocarmos uma fita, canudinho, etc, que represente um segmento de reta entre dois espelhos articulados de modo a formar um triângulo isósceles obteremos polígonos regulares pela reflexão desse segmento nos espelhos. Quanto maior o ângulo de abertura entre os espelhos menor é a quantidade de lados dos polígonos gerados pelos reflexos.

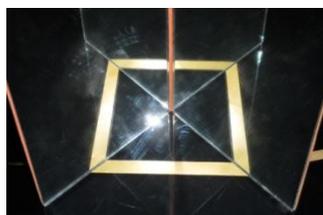
Observe que na Figura 63 o ângulo de abertura dos espelhos é de  $120^\circ$  e o polígono obtido é um triângulo equilátero, na Figura 64 o ângulo é  $90^\circ$  e o polígono é um quadrado e na Figura 65 o ângulo é  $60^\circ$  e o polígono é um hexágono regular.

**Figura 63** - Abertura de  $120^\circ$



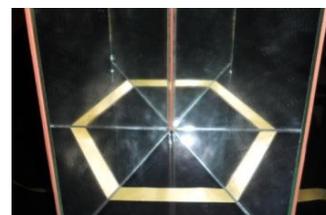
Fonte: a própria autora

**Figura 64** - Abertura de  $90^\circ$



Fonte: a própria autora

**Figura 65** - Abertura de  $60^\circ$



Fonte: a própria autora

Abaixo, temos uma tabela que relaciona o ângulo entre os espelhos com o número de imagens obtidas pelas reflexões e com as possíveis construções. O autor conta como "imagem" o próprio objeto.

**Tabela 3** : Número de imagens e possíveis construções

Ângulo	Imagens	Possíveis construções
$180^\circ$	2	Linhas paralelas, círculos.
$120^\circ$	3	Triângulos, círculos.
$90^\circ$	4	Quadrados, paralelogramos, linhas paralelas, círculos.
$72^\circ$	5	Pentágonos, círculos.
$60^\circ$	6	Hexágonos, triângulos, círculos.
$51 \frac{3}{7}^\circ$	7	Heptágonos, círculos.
$45^\circ$	8	Octógonos, quadrados, círculos.
$40^\circ$	9	Eneágonos, círculos.
$36^\circ$	10	Decágonos, pentágonos, círculos.

Fonte: Batistela (2005), p. 40

## 6.4 Pavimentação com uso do caleidoscópio

Para Batistela (2005) o caleidoscópio tem sido sempre uma fonte de mistério e fascinação. A reflexão de um espelho plano simples gera imagens idênticas, enquanto que diferentes e mais complexos padrões são produzidos com o uso de múltiplos espelhos. A combinação de espelhos produz o efeito da multiplicação da imagem, criando uma rede de imagens formadas pela conexão entre o ângulo dos espelhos e o número de imagens formadas

Barbosa (1993) define caleidoscópio como conjunto de 3 espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano, formando um prisma triangular com as faces espelhadas para o interior. Uma das bases é fechada com papel claro para passagem da luz e a outra possui orifício para observação.

O nome caleidoscópio foi dado por sir David Brewster, em 1819, em seu livro *A treatise on the kaleidoscope* a partir das palavras gregas kalos (belo), eidos (forma) e skopein (ver). Para o dicionário de língua portuguesa de Cândido de Oliveira, a forma preferível é calidoscópio.

Barbosa (1993) diz que quando dispomos de 3 espelhos planos, cada um dos ângulos deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de  $360^\circ$ , portanto sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  os ângulos dos espelhos, devemos ter  $\frac{180^\circ}{a} = n_1$ ,  $\frac{180^\circ}{b} = n_2$  e  $\frac{180^\circ}{c} = n_3$ , com  $n_1$ ,  $n_2$ , e  $n_3$  inteiros positivos. Segue de  $a + b + c = 180^\circ$  que a condição de  $n_1$ ,  $n_2$ , e  $n_3$  é dada por:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$$

Supondo que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ , com  $n_1 \geq 2$  para que exista triângulo, encontramos com a equação acima que  $n_1 \leq 3$ , portanto  $n_1$  é 2 ou 3.

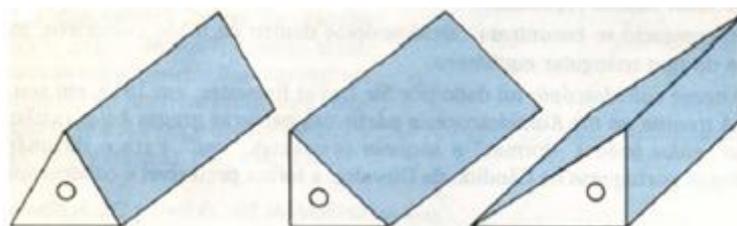
Estudando os casos:

a) Para  $n_1 = 2$ ,  $n_2$  no lugar de  $n_3$ , obtemos  $n_3 \leq 4$ ; portanto  $n_2$  é 3 ou 4, uma vez que dois daria uma impossibilidade, com os quais temos respectivamente os valores 6 e 4 para  $n_3$ .

b) Para  $n_1 = 3$ , de maneira análoga, obtém-se  $n_2 \leq 3$ , mas  $n_1 \leq n_2$ , então  $n_2$  é 3, que fornece  $n_3 = 3$ .

Portanto, os três ternos possíveis para  $n_i$  são: (3, 3, 3), (2, 4, 4) e (2, 3, 6) que correspondem às seguintes três formas triangulares para caleidoscópios, fornecendo imagens coincidentes em repetição: ( $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ), ( $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ) e ( $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ). Conforme Figura 66.

**Figura 66** - Figuras dos caleidoscópios individuais



Fonte: Barbosa (1993), p. 44

Esses caleidoscópios permitem a visualização de pavimentações uniformes do plano por meio de bases colocadas no seu interior cuja construção envolve inúmeros conceitos matemáticos possibilitando um trabalho diferenciado para o estudo da Geometria.

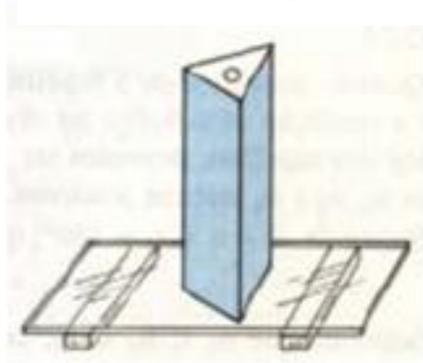
Barbosa (1993) ainda sugere a construção dos caleidoscópios conforme a seguir:

Adquira num vidraceiro 9 lâminas de espelho retangulares com as medidas:

- ✓ 5 lâminas de 30cm por 6 cm
- ✓ 1 lâmina de 30 cm por 8,48 cm (8,5)
- ✓ 1 lâmina de 30 cm por 8 cm
- ✓ 1 lâmina de 30 cm por 4 cm
- ✓ 1 lâmina de 30 cm por 6,92 cm (7)

Monte os três caleidoscópios fixando as lâminas com fita gomada, durex ou esparadrapo, etc., com os espelhos voltados para o interior, envolva-os com "contact" ou outro material para evitar a entrada de luz pelas laterais. Construa as bases superiores, por exemplo, com cartolina, contendo um pequeno orifício. As bases inferiores ficarão provisoriamente abertas e serão substituídas conforme necessidade.

As bases substituíveis devem ser adequadas a cada caleidoscópio e para não sair da posição correta, pode ser trocada por um apoio único construído de um vidro plano colocado em cima de dois suportes de madeira, possibilitando a entrada de luminosidade por baixo. Colocam-se as bases triangulares sobre o vidro e o caleidoscópio correspondente será disposto perpendicularmente ao vidro de modo que, depois com a observação por várias pessoas, o resultado obtido não se altere (Figura 67).

**Figura 67** - Caleidoscópio individual

**Fonte:** Barbosa (1993), p. 44

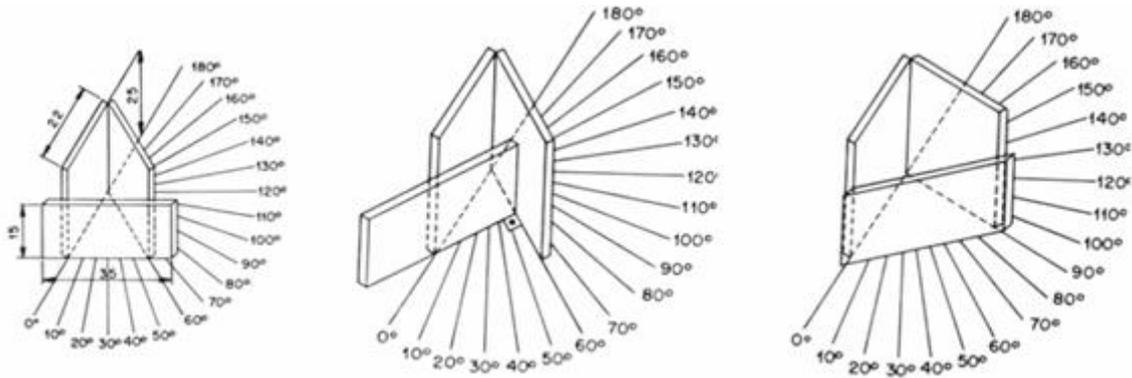
#### 6.4.1 *Caleidoscópio modificado de três espelhos*

Murari (1999) recomenda para uso educacional a utilização o caleidoscópio modificado composto de três espelhos, com ele é possível obter os três tipos de caleidoscópios: o equilátero, o isósceles e o escaleno. Possui a vantagem de poder ser utilizado em grupo o que facilita a análise das pavimentações.

**Figura 68** - Caleidoscópio modificado educacional

**Fonte:** a própria autora

**Figura 69** - Ângulos do caleidoscópio modificado equilátero, escaleno e isósceles



Fonte: Batistela (2005), p.61

Cada tipo de caleidoscópio é utilizado para visualização das pavimentações, conforme tabela a seguir:

**Tabela 4:** Visualização das configurações nos tipos de caleidoscópios

Tipo de caleidoscópio	Configuração visualizada no caleidoscópio
Equilátero	(3, 3, 3, 3, 3, 3); (6, 6, 6); (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4); (4, 6, 12) e (3, 12, 12)
Isósceles	(4, 4, 4, 4) e (4, 8, 8)
Escaleno	(3, 3, 3, 3, 3, 3); (6, 6, 6); (3, 6, 3, 6); (3, 4, 6, 4); (4, 6, 12) e (3, 12, 12)

Fonte: Martins (2003), p. 90

Apenas a pavimentação (3, 3, 3, 3, 6) não pode ser visualizada por nenhum tipo de caleidoscópio, pois não apresenta linhas de simetria que possibilitam a construção de bases para visualização.

Para visualizar as pavimentações (3, 3, 4, 3, 4) e (3, 3, 3, 4, 4) é necessário um caleidoscópio de base quadrada ou retangular.

## 6.5 Bases geradoras e bases transformadas

No interior dos caleidoscópios são colocados padrões (que denominamos bases substituíveis) construídos graficamente com segmentos adequados, de modo que suas reflexões nos espelhos forneçam a pavimentação pretendida.

As bases substituíveis podem ser extraídas de uma determinada porção da pavimentação, considerando as linhas de simetria dos polígonos que a formam. Relacionando-as, obtêm-se as bases geradoras e as bases transformadas.

Almeida (2003) em seu trabalho descreve os 3 métodos de obtenção das bases geradoras e bases transformadas das pavimentações num trabalho desenvolvido por Murari (1999), apresentados a seguir:

#### Método I:

Sabendo de antemão qual o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, podemos construir a base substituível com os segmentos apropriados para que nas simetrias reflexionais possamos obter, através das regiões delimitadas por estes segmentos, os polígonos regulares desejados.

Quando nos utilizamos deste método, nosso objetivo é o desenvolvimento da percepção espacial por parte dos alunos, com exploração de simetrias e construções geométricas adequadas na determinação das bases.

#### Método II:

Trabalhando, por exemplo, com três régua ou três esquadros para formação de triângulos sobre o desenho de uma pavimentação, podemos “visualizar” (descobrir) as bases substituíveis que geram esta pavimentação, pois réplicas triangulares da figura serão reproduzidas por todo o plano, contendo os mesmos segmentos da base encontrada.

Para utilização deste método, as régua que formarão os triângulos devem ser posicionadas a partir do centro dos polígonos da pavimentação em estudo; isto é, os vértices do triângulo formado pelas régua corresponderão ao centro de três polígonos, ocorrendo isto na maioria das vezes, mas não sendo uma regra geral (observar que, para algumas pavimentações, serão utilizadas quatro régua).

#### Método III:

O autor chama a atenção para o fato de que existem pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos.

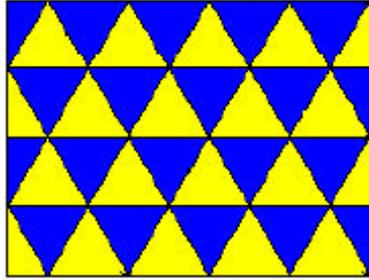
Por este fato Murari (1999) propõe um novo meio de obtenção de bases: para encontrá-las devemos traçar as linhas de simetria da pavimentação que são linhas de simetria dos polígonos regulares. Este método tem o nome de “**algoritmo**” e é o que mais usamos em nosso estudo.

Martins (2003) afirma que numa pavimentação visualizada em caleidoscópio possui bases geradoras e bases transformadas. As bases geradoras não contêm nenhuma outra base e as bases transformadas provêm de bases geradoras.

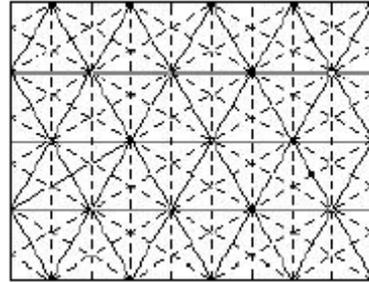
### 6.5.1 Bases na configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3)

Observe que a base transformada é constituída por quatro bases geradoras.

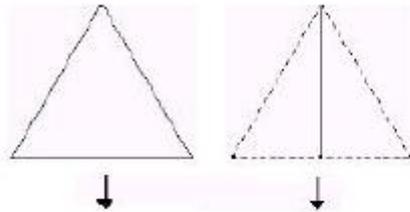
Pavimentação por triângulos equiláteros



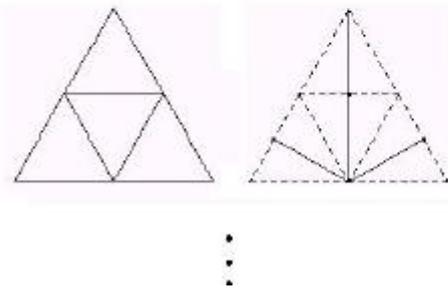
Algoritmo



*BASES GERADORAS*



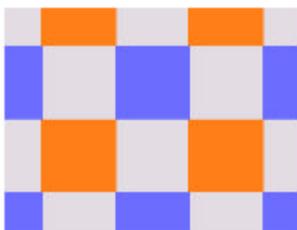
*BASES TRANSFORMADAS*



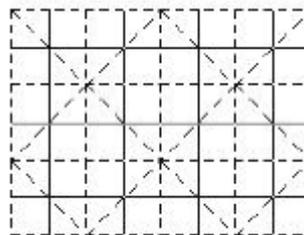
Fonte: Martins (2003), p. 91

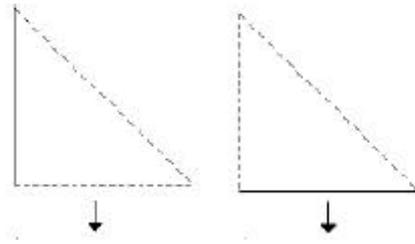
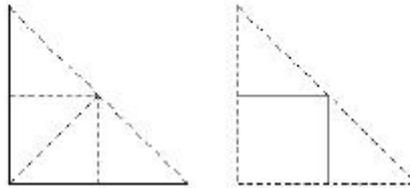
### 6.5.2 Bases na configuração (4, 4, 4, 4)

Pavimentação por quadrado



Algoritmo

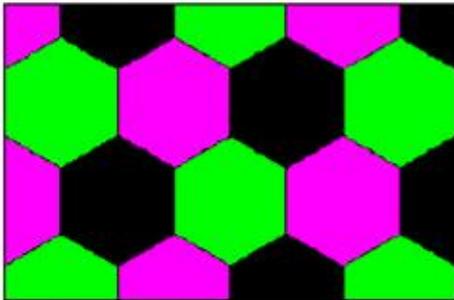


*BASE GERADORA**TRANSFORMADAS*

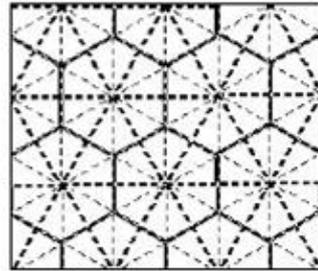
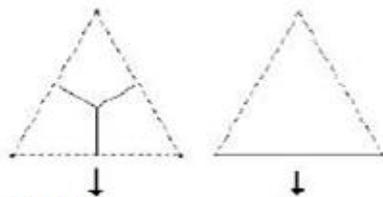
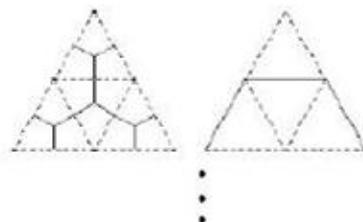
Fonte: Martins (2003), p. 98

### 6.5.3 Bases na configuração (6, 6, 6)

Pavimentação por hexágonos regulares



Algoritmo

*BASES GERADORAS**BASES TRANSFORMADAS*

Fonte: Martins (2003), p. 92

Almeida (2003) destaca que quanto maior o número de regiões das bases transformadas maior o número de cores dessa pavimentação, aumentando o potencial estético e vislumbrante das pavimentações por caleidoscópios.

## 7 PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS IRREGULARES

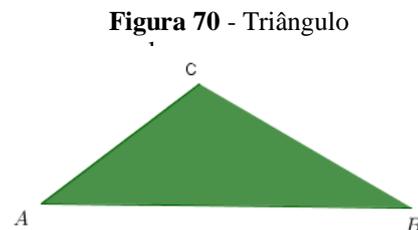
Mosaicos que se formam com polígonos irregulares são classificados como mosaicos unicelulares pois é formado de um único tipo de ladrilho que se replicam em cópias idênticas chamadas células (CARDOSO e GANDULFO, 2013). Todo triângulo e todo quadrilátero, convexo ou não-convexo, podem pavimentar o plano. Este fato não se estende aos outros polígonos irregulares.

### 7.1 Pavimentação por triângulos

Vimos, em capítulo anterior, que é possível pavimentar o plano com triângulos equiláteros (pavimentação com polígonos regulares de um só tipo) agora vejamos o caso dos triângulos isósceles e escaleno.

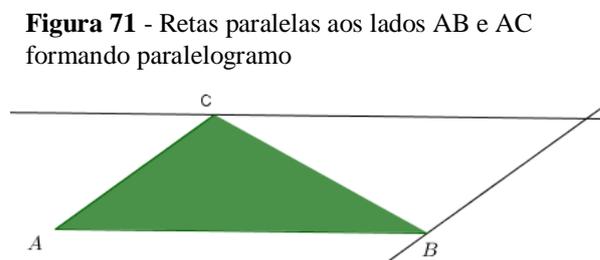
Castro (2008) e Barbosa (1993) demonstram que toda pavimentação por triângulos é possível, veja:

i) Seja ABC o triângulo abaixo:



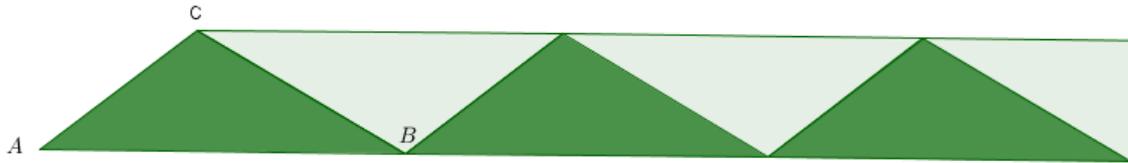
Fonte: Barbosa (1993)

ii) Por C, traçar uma reta paralela ao lado AB e por B traçar uma reta paralela ao lado AC, formando um paralelogramo.



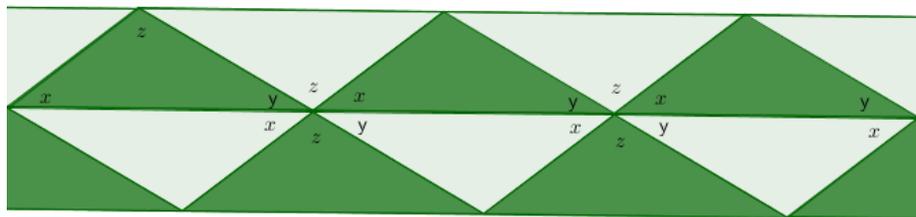
Fonte: Barbosa (1993)

iii) Efetuando as translações desse paralelogramo na direção do vetor AB obtemos uma pavimentação lado a lado e por faixas. A ocorrência desse padrão se dá com triângulos isósceles ou escalenos.

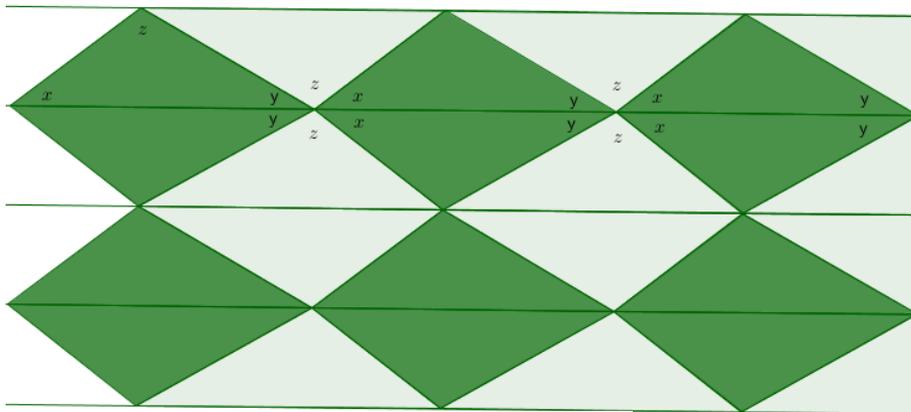
**Figura 72** - Faixa de paralelogramos

Fonte: Barbosa (1993)

iii) Efetuando-se a translação da faixa anterior pelo vetor  $CA$ , obtemos a pavimentação desejada. Podemos também obter a pavimentação se usarmos a reflexão da faixa pela reta  $AB$ .

**Figura 73** - Reflexão da faixa de paralelogramos

Fonte: Barbosa (1993)

**Figura 74** - Pavimentação por triângulos

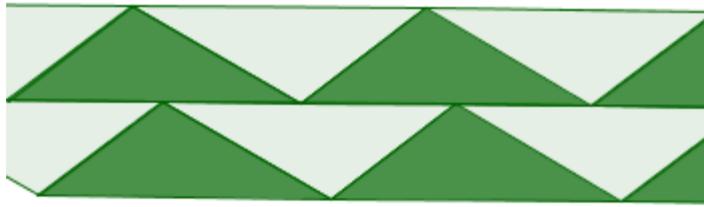
Fonte: Barbosa (1993)

Pela observação dos dois padrões apresentados, notamos que em cada nó da pavimentação podem ser dispostos seis ângulos, tal que se verifique a soma

$2(x + y + z)$ , como  $x + y + z = 180^\circ$ , soma dos ângulos internos de um triângulo, temos, então, que  $2(x + y + z) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ .

Considerando as pavimentações com triângulos se faz por faixas, não podemos deixar de mencionar que pode ocorrer a pavimentação **não** lado a lado. Observe:

**Figura 75** - Pavimentação por triângulos não lado a lado



**Fonte:** Barbosa (1993)

Concluimos que qualquer triângulo, seja isósceles, equilátero ou escaleno, pavimenta o plano sem deixar espaços vazios e nem sobreposições.

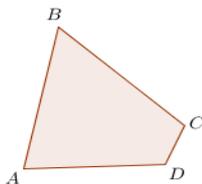
## 7.2 Pavimentação por quadriláteros

Todos os quadriláteros convexos ou não convexos pavimentam o plano, as pavimentações podem ser lado a lado ou não lado a lado.

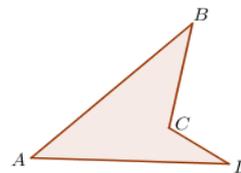
Apresentaremos a seguir a demonstração para um quadrilátero qualquer, um convexo outro côncavo.

- i) Considere um quadrilátero convexo ou côncavo ABCD.

**Figura 76** - Quadrilátero Convexo



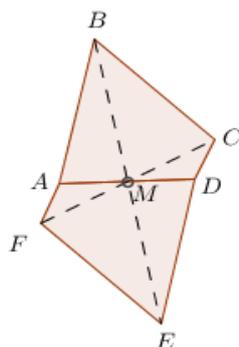
**Figura 77** - Quadrilátero côncavo



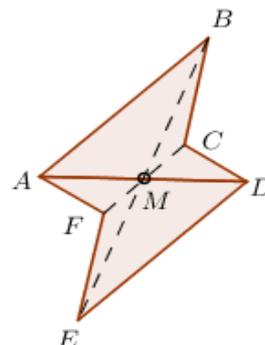
**Fonte:** Elaborada pela autora

- ii) Marquemos o ponto médio de AD e por simetria central (rotação de  $180^\circ$ ) no ponto M obtemos um quadrilátero justaposto ADEF.

**Figura 78** - Rotação do quadrilátero convexo no ponto M



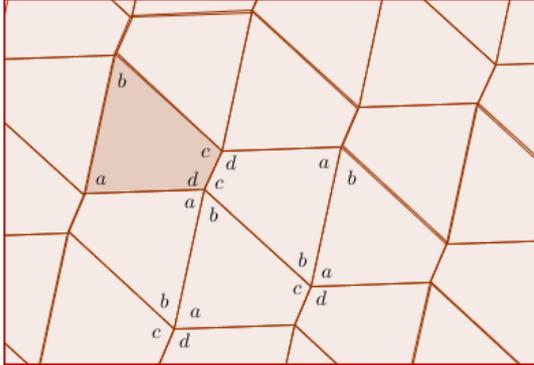
**Figura 79** - Rotação do quadrilátero côncavo no ponto M



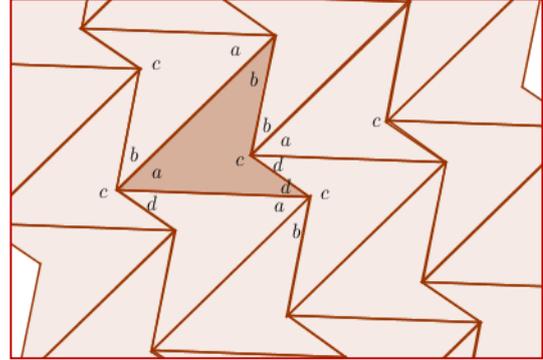
**Fonte:** Elaborada pela autora

iii) Fazendo as translações de maneira adequada em três direções, das figuras acima, obtemos a pavimentação ideal do plano.

**Figura 80** - Pavimentação por quadriláteros convexos



**Figura 81** - Pavimentação por quadriláteros côncavos



**Fonte:** Elaborada pela autora

Note que em cada nó da pavimentação observamos que ocorre a soma dos ângulos  $a + b + c + d = 360^\circ$ , que corresponde a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero.

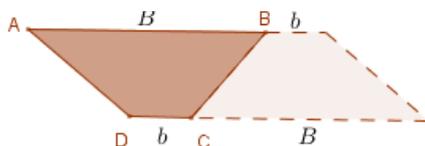
### 7.3 Pavimentação por trapézios

Trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados paralelos. Vimos que todo quadrilátero pavimenta o plano, as pavimentações com trapézios possibilitam a obtenção de inúmeros padrões, seja na obtenção de padrões hexagonais ou por faixas decorativas (BARBOSA, 1993).

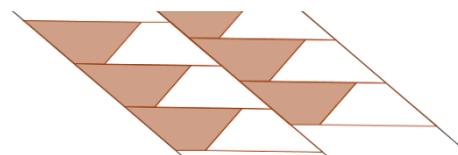
#### 7.3.1 Trapézios genéricos

Considere o trapézio ABCD, prolongando as bases (lados paralelos) em medidas iguais e de maneira alternada e ligando as extremidades, obtemos um paralelogramo (Figura 82), como visto na pavimentação por triângulos, este pavimenta o plano por faixas (Figuras 83, 84, 85 e 86).

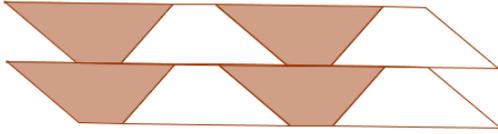
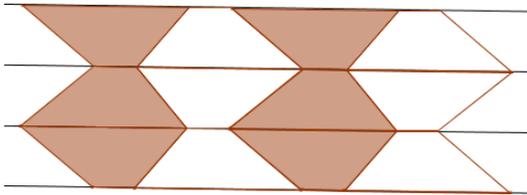
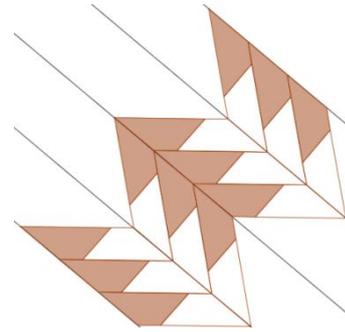
**Figura 82** - Paralelogramo formado por dois trapézios



**Figura 83** - Pavimentação por faixa de trapézios (1)



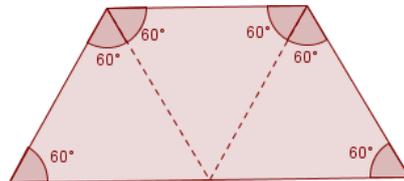
**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 84** - Pavimentação por faixa de trapézios (2)**Figura 85** - Pavimentação por faixa de trapézios (3)**Figura 86** - Pavimentação por faixa de trapézios (4)

Fonte: Elaborada pela autora

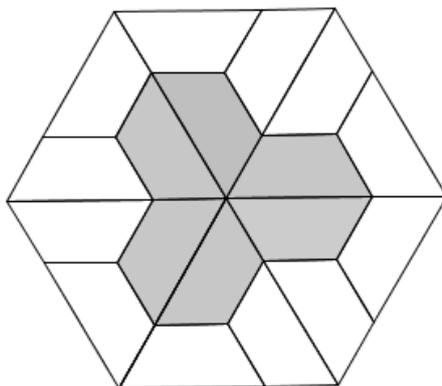
### 7.3.2 Um trapézio versátil

Considere um trapézio formado por três triângulos equiláteros (Figura 87), sendo dois ângulos de  $120^\circ$  e dois ângulos de  $60^\circ$  os valores dos ângulos internos, podemos obter com esse tipo de trapézio um grande número de padrões.

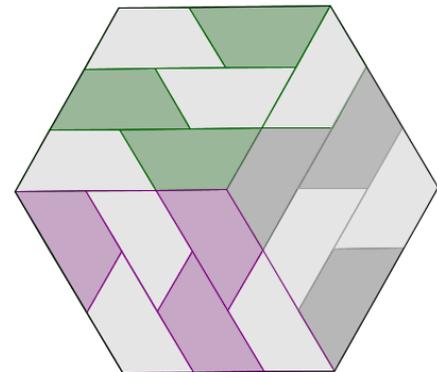
**Figura 87** - Trapézio genérico

Fonte: Elaborada pela autora

Dispondo vários desses trapézios convenientemente, podemos formar pavimentações parciais na forma de hexágonos regulares e como o hexágono pavimenta plano, basta repetir o padrão hexagonal. Ver figuras 88, 89, 90, 91 e 92.

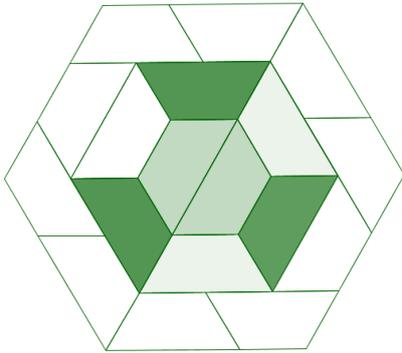
**Figura 88** – Pavimentação por trapézio genérico (1)

Fonte: Elaborada pela autora

**Figura 89** – Pavimentação por trapézio genérico (2)

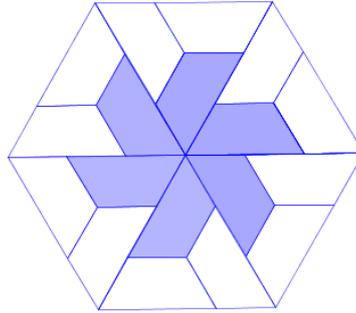
Fonte: Elaborada pela autora

**Figura 90** - Pavimentação por trapézio genérico (3)



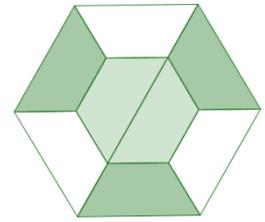
**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 91**- Pavimentação por trapézio genérico (4)



**Fonte:** Elaborada pela autora

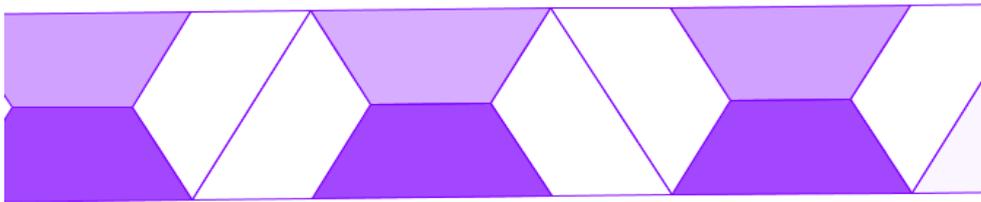
**Figura 92** – Pavimentação por trapézio genérico (5)



**Fonte:** Elaborada pela autora

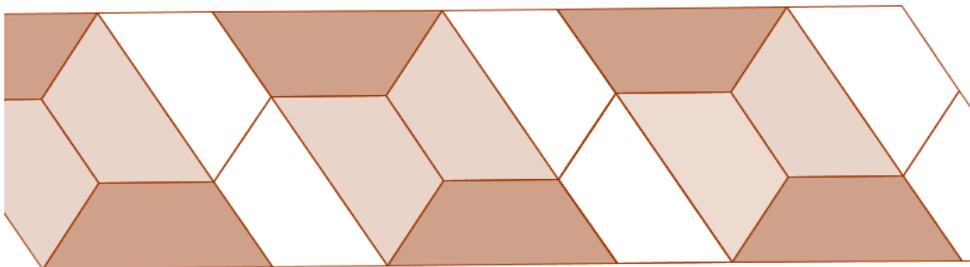
A versatilidade desse tipo de trapézio permite a obtenção de inúmeras faixas decorativas como mostradas nas figuras 93 e 94.

**Figura 93** - Faixa decorativa com trapézios (1)



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 94** - Faixa decorativa com trapézios (2)

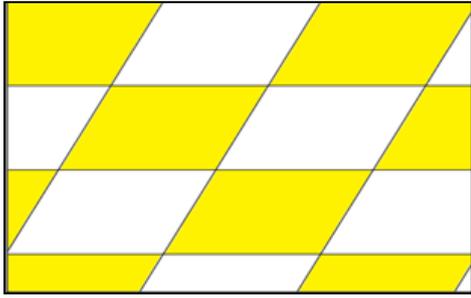


**Fonte:** Elaborada pela autora

## 7.4 Pavimentação por paralelogramos

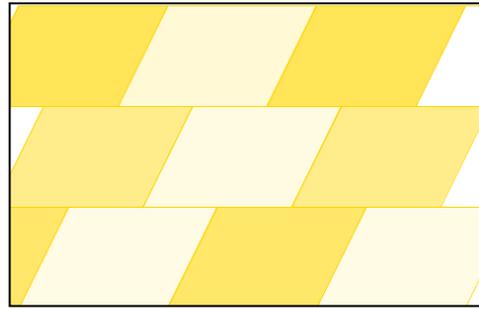
O paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos, em decorrência dessa propriedade seus lados e ângulos opostos são congruentes. Os paralelogramos assim como os trapézios, pavimentam o plano lado a lado e por faixas que se transladam em duas direções permite a obtenção de inúmeras pavimentações também não lado a lado.

**Figura 95** - Pavimentação por paralelogramos lado a lado



Fonte: Elaborada pela autora

**Figura 96** - Pavimentação por paralelogramos não lado a lado

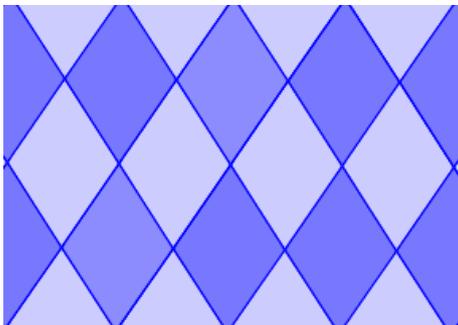


Fonte: Elaborada pela autora

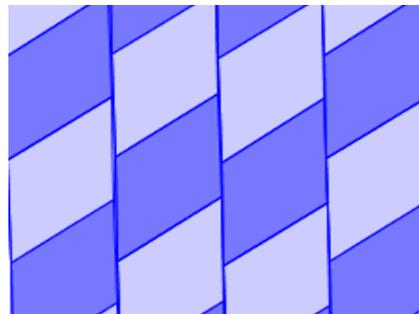
## 7.5 Pavimentação por losangos

Losango é um paralelogramo cujos quatro lados são congruentes, as pavimentações possíveis com o paralelogramo também são possíveis com o losango. Entretanto, há um losango especial, cujos ângulos internos são  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $120^\circ$  que fornece um padrão lado a lado não por faixas. Este padrão apresenta cubos em perspectiva e dependendo da coloração, apresenta padrão estrelado (BARBOSA, 1993).

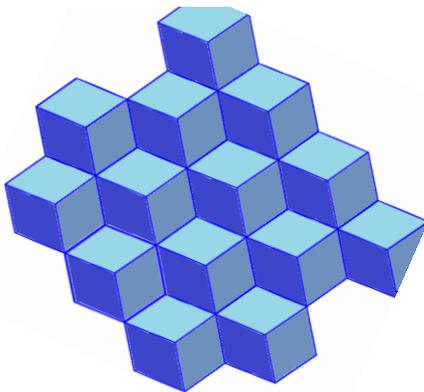
**Figura 97** - Pavimentação por losangos lado a lado



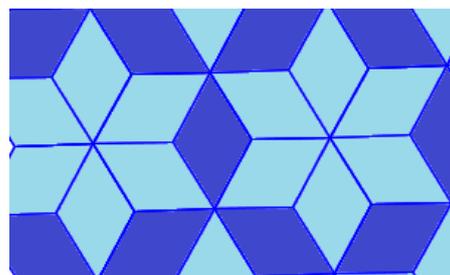
**Figura 98** - Pavimentação por losangos não lado a lado



**Figura 99** - Pavimentação por losangos, cubos em perspectiva



**Figura 100** - Pavimentação por losangos, padrão estrelado

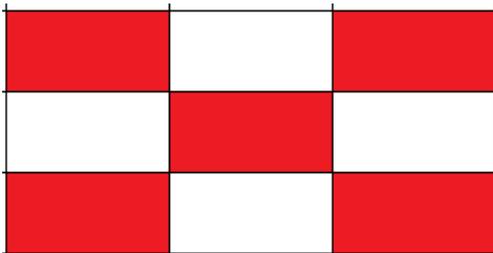


Fonte: Elaborada pela autora

## 7.6 Pavimentação por retângulos

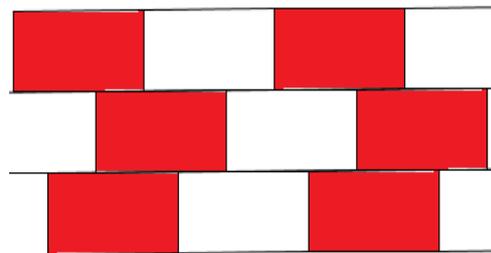
Retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos retos. Pavimenta o plano lado a lado e por faixas que se transladam em duas direções podem também apresentar pavimentação não lado a lado.

**Figura 101** - Pavimentação por retângulos lado a lado



**Fonte:** Elaborada pela autora

**Figura 102** - Pavimentação por retângulos não lado a lado



**Fonte:** Elaborada pela autora

## 7.7 Pavimentação por hexágonos

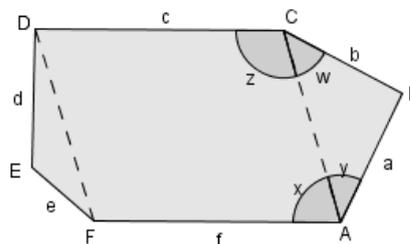
K. Reinhardt, em 1918, provou a existência de apenas três tipos de hexágonos que pavimentam o plano, num trabalho apresentado à Universidade de Frankfurt.

Considere o hexágono ABCDEF, com lados  $a, b, c, d, e, f$  indicados a partir de A em ordem cíclica, os ângulos serão indicados com a mesma letra dos vértices (BARBOSA, 1993).

*1º tipo – Hexágono que possui um par de lados paralelos e congruentes.*

Pela condição dada temos  $c = f$  e  $c // f$ .

**Figura 103** - Hexágono que pavimenta o plano (1º tipo)



**Fonte:** Elaborada pela autora

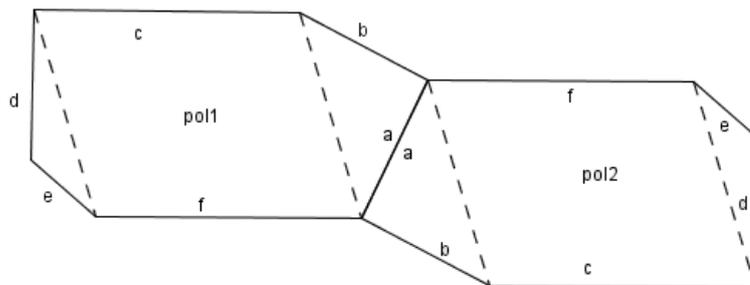
Traçando os segmentos AC e DF, determinamos em A os ângulos  $x$  e  $y$  e em C os ângulos  $z$  e  $w$ , sendo  $c // f$  temos que  $x + z = 180^\circ$  e  $w, B$  e  $y$  são ângulos internos do triângulo ABC. Assim:  $A + B + C = x + z + w + B + y = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

Como a soma dos ângulos internos de um hexágono é  $720^\circ$ , temos que  $D + E + F = 360^\circ$

Segue que ACDF é um paralelogramo ou que  $AC \parallel FD$  e  $AC = FD$ .

Tomando o hexágono ABCDEF e nomeando-o polígono 1, obteremos o polígono 2 pela rotação de  $180^\circ$  do polígono 1 pelo ponto médio do lado AB.

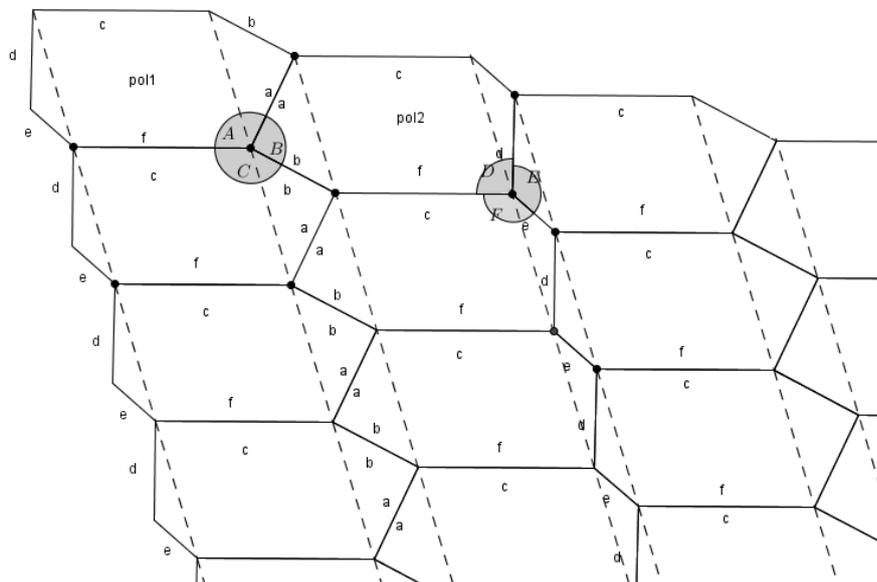
**Figura 104** – Polígono 1 e polígono 2



**Fonte:** Elaborada pela autora

Fazendo as translações sucessivas do polígono 1 e do polígono 2 (Figura 104), fazendo coincidir os lados  $c$  com  $f$ , obteremos a pavimentação do plano (Figura 105). Observe que em cada nó da pavimentação obtemos  $A + B + C = 360^\circ$  ou  $D + E + F = 360^\circ$ .

**Figura 105** - Pavimentação por hexágonos (1º tipo)



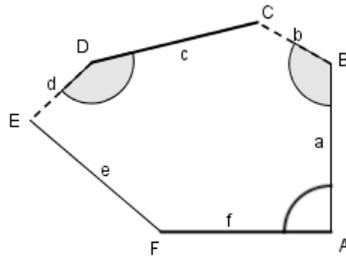
**Fonte:** Elaborada pela autora

*2º tipo – Hexágono com 2 pares de lados congruentes e três ângulos cuja soma é  $360^\circ$*

Pela condição dada, escolhemos  $c = f$ ,  $b = d$  e  $A + B + D = 360^\circ$ .

Seja o hexágono ABCDEF, e nomeando-o polígono 1.

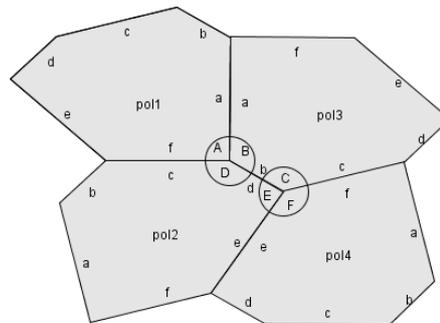
**Figura 106** - Hexágono que pavimenta o plano (2º tipo)



**Fonte:** Elaborada pela autora

Por rotação, translação e reflexão encaixamos os polígono 2, 3 e 4 no polígono 1 (Figura 107) de modo que haja coincidência dos lados  $c$  com  $f$  e  $b$  com  $d$  e que em cada nó da pavimentação seja observada a soma  $A + B + D = 360^\circ$  e  $C + E + F = 360^\circ$ , obtemos a pavimentação parcial do plano.

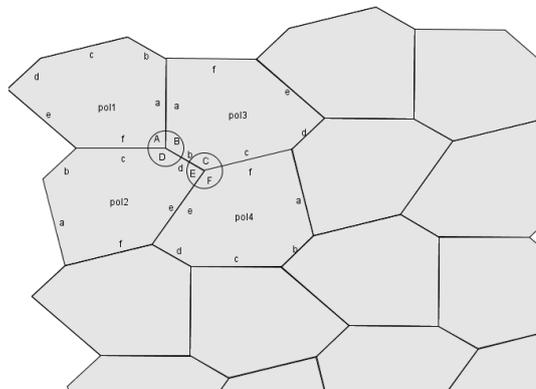
**Figura 107** – Domínio fundamental da pavimentação



**Fonte:** Elaborada pela autora

Segundo Castro (2008), estes 4 polígonos (Figura 107) constituem o domínio fundamental da pavimentação e a pavimentação ideal do plano ocorre pela translação sucessiva deste domínio fundamental.

**Figura 108** - Pavimentação por hexágonos (2º tipo)

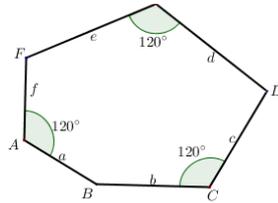


**Fonte:** Elaborada pela autora

3º tipo - Hexágono com 3 pares de lados congruentes e três ângulos de  $120^\circ$

Pela condição dada temos  $a = f$ ,  $b = c$ ,  $d = e$  e  $A = C = E = 120^\circ$ .

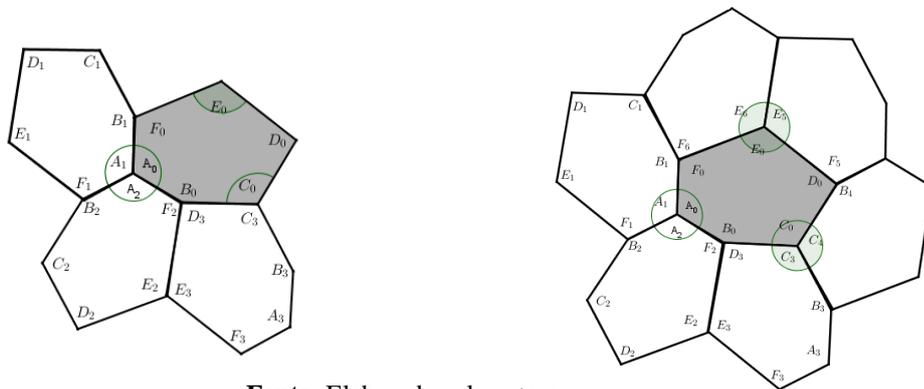
**Figura 109** - Hexágono que pavimenta o plano (3º tipo)



**Fonte:** Elaborada pela autora

Sendo o hexágono  $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$  congruente ao hexágono ABCDEF a pavimentação do plano se dá por duas rotações sucessivas de  $120^\circ$  pelos vértices  $A_0$ ,  $C_0$  e  $E_0$ , isto é, pelos vértices cujo ângulo interno mede  $120^\circ$ .

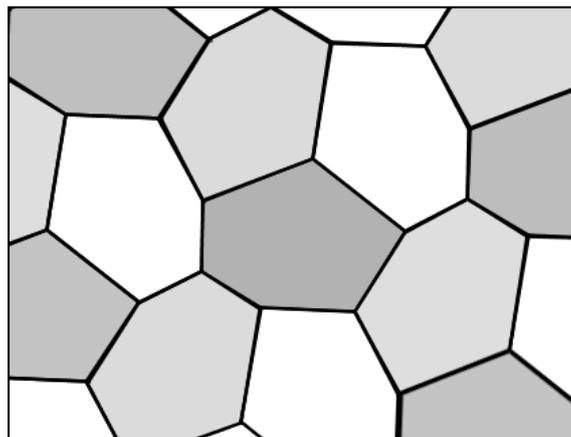
**Figuras 110 e 111** - Rotações do hexágono (3º tipo)



**Fonte:** Elaborada pela autora

Continuando sucessivamente as rotações obteremos a pavimentação ideal do plano (Figura 112).

**Figura 112** - Pavimentação por hexágonos (3º tipo)



**Fonte:** Elaborada pela autora

## 7.8 Pavimentação por pentágonos

Os trabalhos com pavimentações por pentágonos não está acabado, a lista consta, atualmente, 14 pentágonos que pavimentam o plano, sua história é bastante interessante e foi extraída do livro de Barbosa (1993) e no trabalho de Castro (2008).

Os estudos com pentágonos foram iniciados com Karl Reinhardt , em 1918 , em sua tese de doutorado pela universidade de Frankfurt, ele apresentou um conjunto com 5 tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano. Acreditava ser os únicos até que, em 1968, Richard Brandon Kershner da universidade John Hopkins, publicou um trabalho acrescentando mais 3 tipos de pentágonos, totalizando 8 tipos, mas não forneceu as provas de que estes eram os únicos tipos.

Em 1975, Martin Gardner publica na revista *Scientific American* um artigo com os resultados de Kershner, comentando que esta lista poderia não estar completa. Com grande repercussão, seu artigo chamou a atenção de Richard James, um cientista de computadores que leu o início do artigo e começou a procurar por um pentágono que pavimentasse o plano, quando obteve esse pentágono voltou ao artigo de Gardner e não o encontrou na lista de Kershner. Enviou sua descoberta a Gardner, sugerindo que Kershner podia ter esquecido de mencionar aquele tipo. O próprio Gardner comunicou a descoberta a Kershner que recebeu a notícia com bom humor. Estava descoberto o 9º tipo.

O mais curioso está por vir, uma leitora da coluna dessa revista, Marjorie Rice, de San Diego (Califórnia), amadora e dona de casa, natural da Flórida, se deixou contagiar pelo problema. Marjorie tinha apenas o cursado o que corresponde ao ensino médio no Brasil, concluído em 1939, aos 16 anos. Estudiosa e determinada, começou sua pesquisa na busca por pentágonos que pavimentasse o plano e em 1976 enviou sua descoberta a Gardner, comentando que acreditava ser diferente dos tipos listados. Marjorie conseguiu encontrar mais três tipos de pentágonos ampliando a lista para 13 tipos.

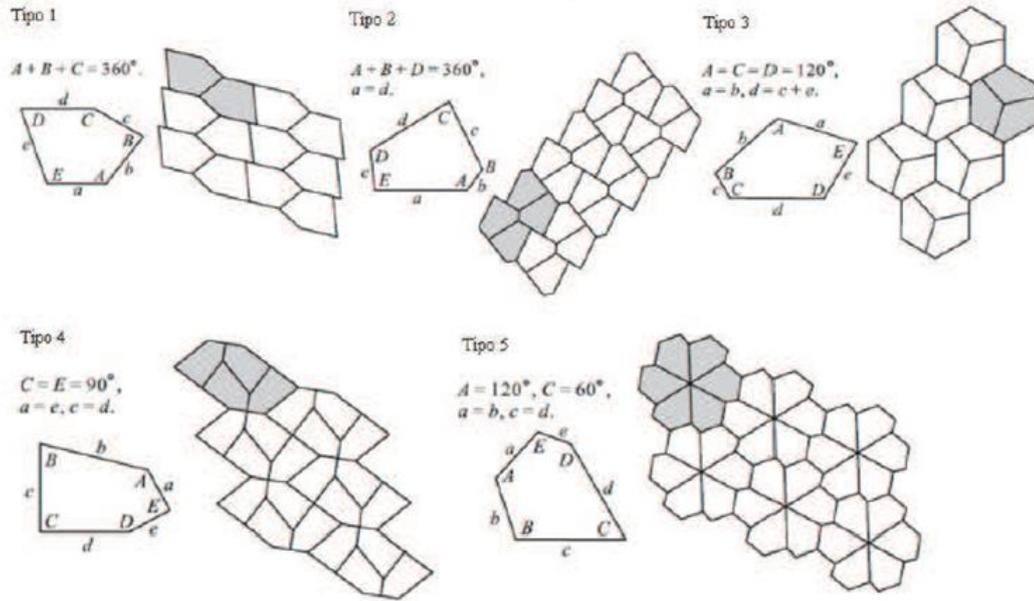
Somente em 1985 o décimo quarto tipo foi encontrado por um estudante de matemática da Universidade de Dortmund, na Alemanha, Rolf Stein publicou sua descoberta na capa da revista *Mathematics Magazine*, daquele mesmo ano.

Até os dias atuais, nenhum pentágono convexo que pavimenta o plano foi descoberto e ainda não está demonstrado que a lista contendo os quatorze tipos esteja fechada.

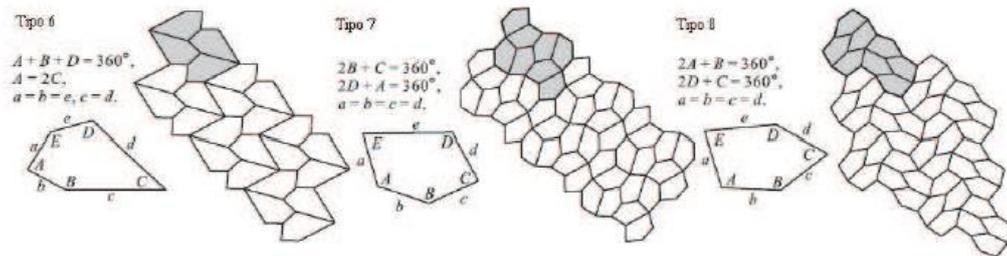
Finalizando, apresentamos os quatorze tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano (Figura 113), estas figuras foram extraídas de Castro (2008).

Figura 113 - Os 14 tipos de pavimentações por pentágonos irregulares

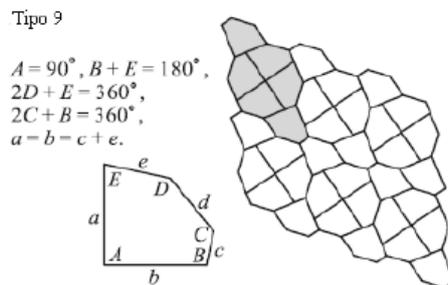
**OS CINCO TIPOS DE KARL REINHARDT, 1918:**



**OS TRÊS TIPOS DE RICHARD KERSHNER, 1968:**



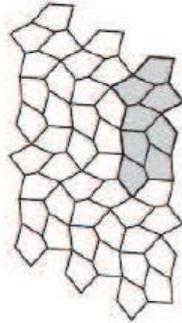
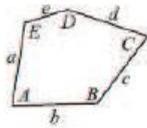
**O EXEMPLO DE RICHARD JAMES, 1975:**



**OS QUATRO TIPOS DE MARJORIE RICE, 1976-1977:**

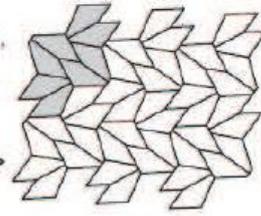
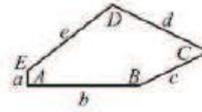
Tipo 10

$$\begin{aligned} 2E + B &= 360^\circ, \\ 2D + C &= 360^\circ, \\ a &= b = c = d. \end{aligned}$$



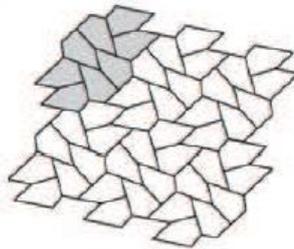
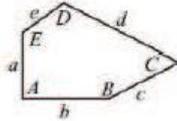
Tipo 11

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, C + E = 180^\circ, \\ 2B + C &= 360^\circ, \\ d &= e = 2a + c. \end{aligned}$$



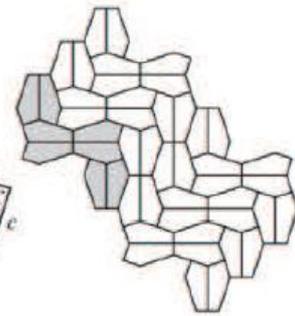
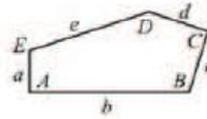
Tipo 12

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, C + E = 180^\circ, \\ 2B + C &= 360^\circ, \\ 2a &= d = c + e. \end{aligned}$$



Tipo 13

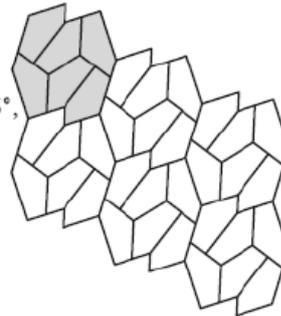
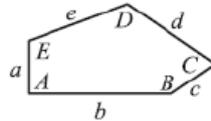
$$\begin{aligned} A &= C = 90^\circ, \\ 2B &= 2E = 360^\circ - D, \\ 2c &= 2d = e. \end{aligned}$$



**O EXEMPLO DE ROLF STEIN, 1985:**

Tipo 14

$$\begin{aligned} A &= 90^\circ, B \approx 145.34^\circ, \\ C &\approx 69.32^\circ, D \approx 124.66^\circ, \\ E &\approx 110.68^\circ, \\ 2a &= 2c = d = e. \end{aligned}$$



Fonte: Castro (2008), p. 28-29

## 8 AS PAVIMENTAÇÕES ARTÍSTICAS

Artistas como Escher e Penrose usaram as pavimentações do plano como inspiração em seus trabalhos, com auxílio da matemática criaram trabalhos magníficos. O PCN enfoca o uso de trabalhos artísticos no ensino da matemática desenvolve no aluno percepções estéticas propiciando um trabalho pedagógico diferenciado. Segundo o PCN:

A educação em arte propicia o desenvolvimento do pensamento artístico e da percepção estética, que caracterizam um modo próprio de ordenar e dar sentido à experiência humana: o aluno desenvolve sua sensibilidade, percepção e imaginação, tanto em realizar formas artísticas quanto na ação de apreciar e conhecer as formas produzidas por ele e pelos colegas, pela natureza e nas diferentes culturas (BRASIL, 1997, p. 19).

### 8.1 Transformações geométricas no plano

Segundo Rossi (2009), as transformações geométricas no plano são um vasto assunto, significativo na natureza e na arte. Esse conceito desempenha um papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria pelo seu caráter intuitivo e informal, dando uma visão de forma e movimento.

Ainda segundo Rossi (2009) em uma transformação geométrica, cada ponto inicial da figura é levada a um outro ponto da figura transformada, sendo representada por uma função onde o domínio e o contradomínio são conjuntos de pontos do plano e que mudam unicamente a posição da figura, mas não a sua forma nem o seu tamanho.

Tais transformações geométricas do plano euclidiano, que conservam as distâncias entre os pontos, são denominadas *Isometrias*.

Para Rossi (2009), as isometrias são transformações no plano que não distorcem as formas e nem o tamanho, por isso são conhecidas também por *movimentos rígidos*. Pertencem a essa categoria todos os movimentos que conservam as distâncias e os ângulos (BARBOSA, 1993).

Uma isometria  $T: \alpha \rightarrow \alpha$  possui as seguintes propriedades:

- i) A transformação  $T$  leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $T(B)$  está entre  $T(A)$  e  $T(C)$ .
- ii) A transformação  $T$  preserva medidas de ângulos, ou seja, qualquer ângulo  $\theta$ ,  $T(\theta) = \theta$ .
- iii) A transformação  $T$  preserva paralelismo entre retas, ou seja, se  $r$  e  $s$  são paralelas então  $T(r)$  e  $T(s)$  também são paralelas.

São isometrias no plano euclidiano:

- a) Simetria reflexional ou axial

- b) Simetria rotacional
- c) Simetria translacional
- d) Simetria translacional refletida

### 8.1.1 Simetria axial

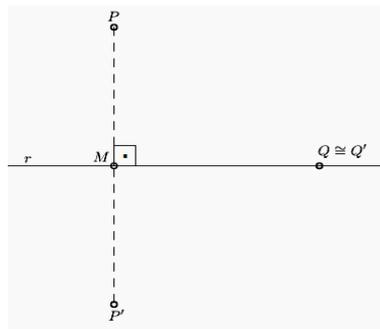
Barbosa (1993) assim conceitua simetria axial:

"Consideremos uma reta  $r$  e um ponto qualquer  $P$  não pertencente a reta (Figura 114). Marquemos um ponto  $P'$  na perpendicular por  $P$  à reta  $r$  em  $M$ , mas no semiplano oposto ao de  $P$ , tal que  $P'M = PM$ ."

Dizemos que:

$P'$  é simétrico de  $P$  em relação ao eixo  $r$  e que a simetria é axial. Em particular, se um ponto  $Q$  pertence ao eixo, diremos que seu simétrico  $Q'$  coincide com o próprio ponto  $Q$ .

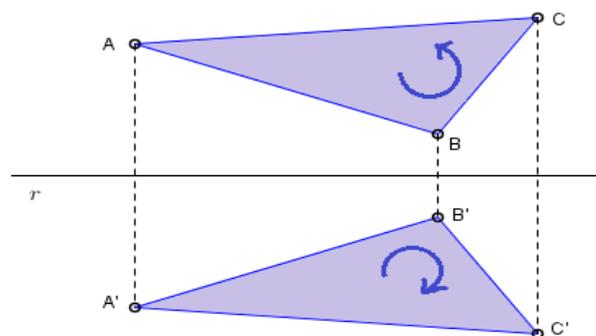
**Figura 114** - Reflexão dos pontos  $P$  e  $Q$  sobre a reta  $r$



**Fonte:** Elaborada pela autora

A simetria axial é uma isometria, pois conserva a forma e as medidas da figura, entretanto inverte os sentidos, observe a Figura 115, no sentido horário temos os vértices, em ordem alfabética, como  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mas no triângulo simétrico a leitura dos vértices, em ordem alfabética, tem sentido anti-horário.

**Figura 115** - Reflexão do triângulo  $ABC$  sobre a reta  $r$

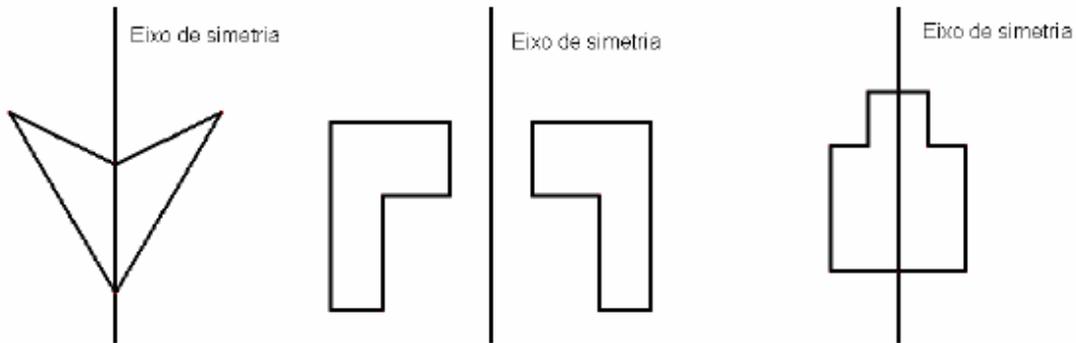


**Fonte:** Elaborada pela autora

A reta  $r$  representa um espelho e o triângulo  $A'B'C'$  representa o reflexo do triângulo  $ABC$ , por esse motivo dizemos que este tipo de simetria é também chamada de *reflexional*.

Barbosa (1993) define figura simétrica aquela que podemos traçar uma reta (eixo) que a divide em duas partes congruentes (Figura 116), esta reta é chamada *eixo de simetria*. De maneira informal, se pudéssemos fazer uma dobra no eixo de simetria as duas partes ficariam exatamente sobrepostas.

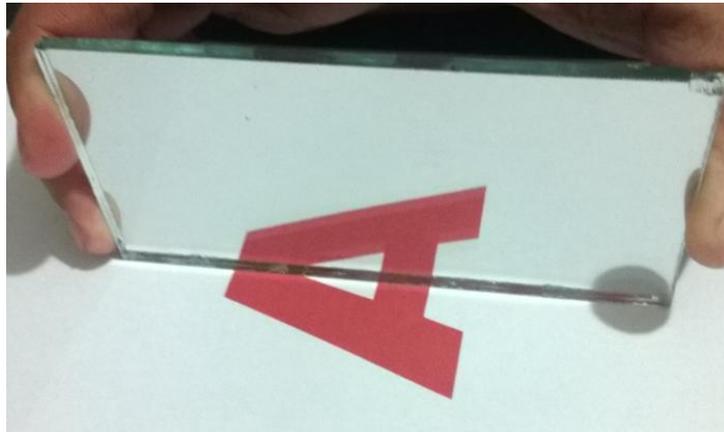
**Figura 116** - Figuras simétricas



**Fonte:** Elaborada pela autora

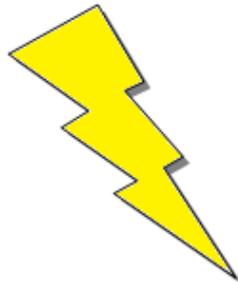
Podemos contar o número de eixos de simetria usando pequenos espelhos planos pela observação direta se há ou não coincidência da imagem com a outra parte da figura, isto é, parte da figura e imagem mantêm a estrutura integral da figura (teste do espelho).

**Figura 117** - Possui apenas um eixo de simetria



**Fonte:** A própria autora

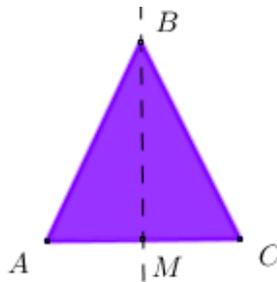
As figuras que **não** apresentam estrutura simétrica reflexional são assimétricas, isto é, não apresentam eixo de simetria (Figura 118).

**Figura 118** - Figura sem eixo de simetria

Fonte: Elaborada pela autora

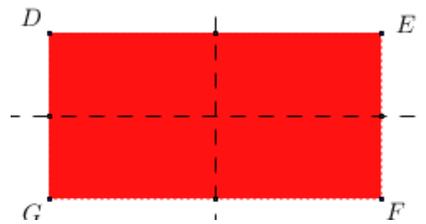
Vejamos o caso de alguns polígonos:

No triângulo isósceles ABC, o eixo de simetria é a própria mediatriz da base AC, os triângulos ABM e CBM são congruentes e simétricos em relação à mediatriz.

**Figura 119** - Eixo de simetria do triângulo isósceles

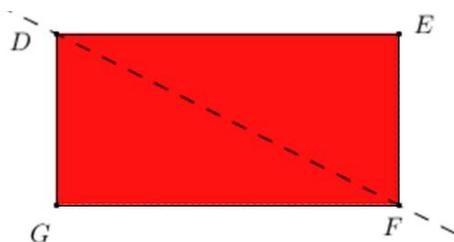
Fonte: Elaborada pela autora

O retângulo possui dois eixos de simetria que passam exatamente pelos pontos médio dos lados.

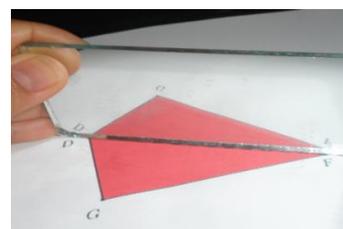
**Figura 120** - Eixos de simetria do retângulo

Fonte: Elaborada pela autora

De maneira equivocada, há quem pense que as diagonais de um retângulo podem representar os eixos de simetria pois dividem em duas partes congruentes. Façamos o teste do espelho.

**Figura 121** - Diagonal DF do retângulo DEFG

Fonte: Elaborada pela autora

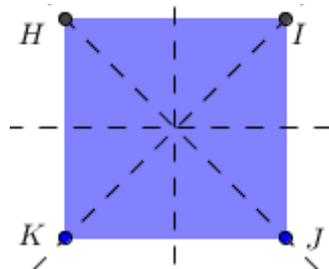
**Figura 122** - Diagonal DF do retângulo DEFG não representa eixo de simetria

Fonte: Elaborada pela autora

De fácil visualização, o reflexo não mantém a estrutura do retângulo.

O quadrado é simétrico em relação a quatro eixos de simetria, as duas bissetrizes dos ângulos internos e as duas mediatrizes dos lados.

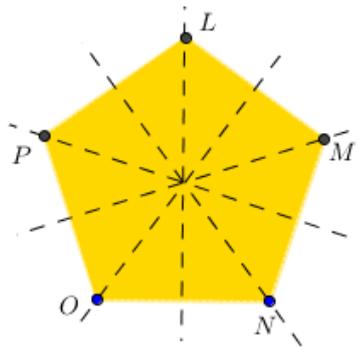
**Figura 123** - Eixos de simetria do quadrado



Fonte: Elaborada pela autora

O pentágono regular possui 5 eixos de simetria que correspondem às bissetrizes dos ângulos internos.

**Figura 124** - Eixos de simetria do pentágono regular



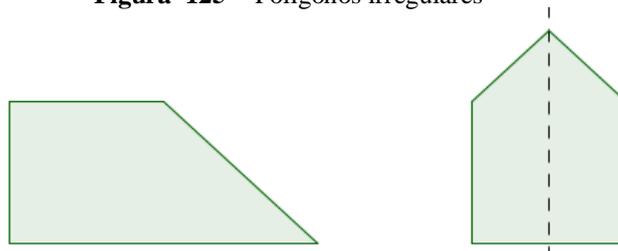
Fonte: Elaborada pela autora

Os polígonos regulares de  $n$  lados e o número de eixos de simetria  $s$  apresentam algumas relações interessantes:

- O número de lados é sempre igual ao número de eixos de simetria, então,  $n = s$ .
- Se  $n$  é ímpar, os eixos de simetria são bissetrizes dos ângulos internos.
- Se  $n$  é par,  $\frac{n}{2}$  eixos de simetria são bissetrizes dos ângulos internos e  $\frac{n}{2}$  eixos de simetria são mediatrizes dos lados

Os polígonos irregulares podem apresentar estrutura simétrica ou não (Figura 125).

**Figura 125** - Polígonos irregulares

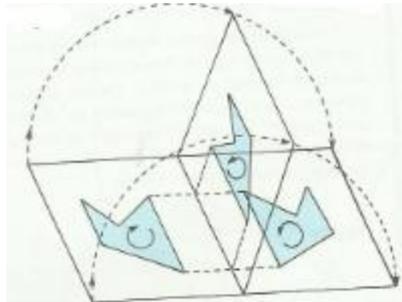


Fonte: Elaborada pela autora

### 8.1.2 Figuras enantiomorfas

Considere figuras assimétricas, isto é, figuras que não possuem simetria reflexional. Quando refletimos estas imagens no espelho, a figura e a figura-imagem possuem as mesmas formas e medidas, porém não podemos deslocar a figura no plano para fazer coincidir com sua imagem sem retirar a figura do plano e virá-la, para conseguirmos sobrepô-la na imagem. Consideramos que a figura e a figura-imagem possuem isometrias opostas, ou que são figuras inversamente congruentes ou enantiomorfas.

**Figura 126** - Figura enantiomorfa

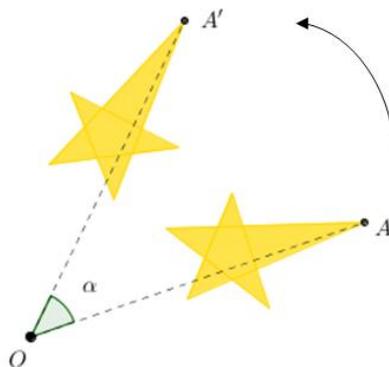


**Fonte:** Barbosa (1993), p. 40

### 8.1.3 Simetria rotacional

Para Rossi, a rotação é a transformação do plano caracterizada pelo giro. Ao fixar o ponto  $O$  e escolhido o ângulo  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 360^\circ$ , a imagem  $A'$  de cada ponto  $A$  é obtida quando  $A$  descreve um arco de circunferência de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$ , no sentido escolhido como mostra a figura 127.

**Figura 127** - Rotação

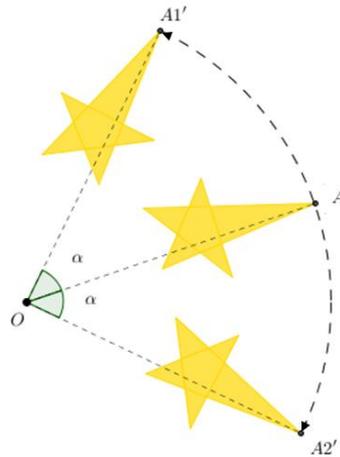


**Fonte:** Elaborada pela autora

Na figura,  $A'$  é o simétrico de  $A$  por simetria rotacional ao redor de  $O$  de ângulo  $\alpha$ . Ao ponto  $O$  chamamos de centro de rotação ou rotocentro e a  $\alpha$  de ângulo de rotação ou de giro (BARBOSA, 1993). O centro de rotação pode estar na figura ou fora dela (ROSSI, 2009).

Na prática se diz dar uma rotação ao ponto, como  $OA = OA'$  resulta que A e A' pertencem a uma circunferência de centro O. Cada ponto A corresponde a dois pontos por simetria rotacional de mesmo ângulo  $\alpha$ , de onde torna-se conveniente orientar o ângulo: sentido horário ou anti-horário (figura 128).

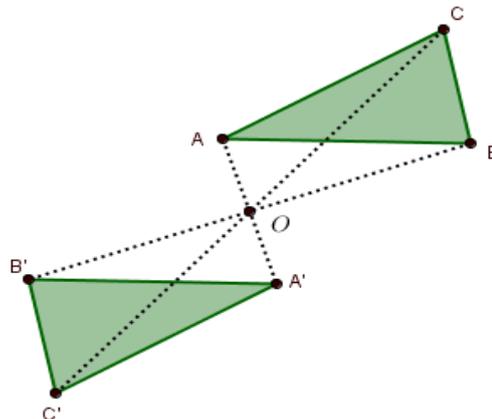
**Figura 128** - Rotação em sentido horário e anti-horário



**Fonte:** Elaborada pela autora

Barbosa (1993) afirma que se  $\alpha = 180^\circ$ , isto é, rotação de meia volta ou meio giro, dizemos que a simetria é central. Esta denominação se deve ao fato que o centro de rotação ser ponto médio do segmento  $PP'$ , qualquer que seja o ponto P.

**Figura 129** - Simetria Central



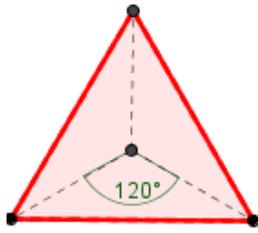
**Fonte:** Elaborada pela autora

#### 8.1.4 Figuras com estrutura simétrica rotacional

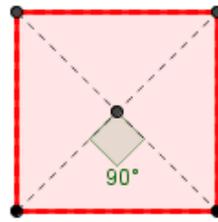
Considere um polígono regular de n lados, o valor do ângulo central  $\theta$  é dado por  $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ , então qualquer rotação com ângulo de giro igual ao ângulo central obtemos o mesmo polígono. Então dizemos que os polígonos regulares possuem estrutura simétrica rotacional de ângulo central. Assim o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular

possuem estrutura simétrica rotacional de  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $72^\circ$  respectivamente (Figuras 130, 131 e 132).

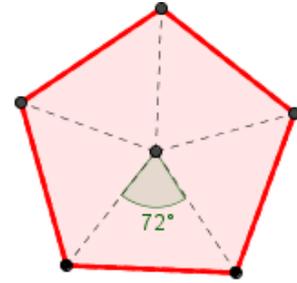
**Fig.130** - Triângulo Equilátero



**Fig.131** - Quadrado



**Fig.132** - Pentágono Regular



**Fonte:** Elaborada pela autora

Na natureza também encontramos elementos com estrutura simétrica rotacional, veja o caso das flores de primavera, da hortênsia e da violeta que possuem respectivamente 3, 4 e 5 pétalas igualmente dispostas.

**Figura 133** - Flor de primavera, simetria rotacional de  $120^\circ$



**Fonte:** Blog Pássaros e flores<sup>6</sup>

**Figura 134** - Flor de Hortênsia, simetria rotacional de  $90^\circ$



**Fonte:** Blog Young Blood<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Disponível em: <<http://pathellpassaros.blogspot.com.br/2011/12/bouganville-ou-primavera-branca.html>> Acesso em 08 ago 2014.

<sup>7</sup> Disponível em: <<http://www.youngblood.blog.br/2013/06/hortensias.html>> Acesso em 08 ago 2014.

**Figura 135** - Flor de violeta, simetria rotacional de  $72^\circ$



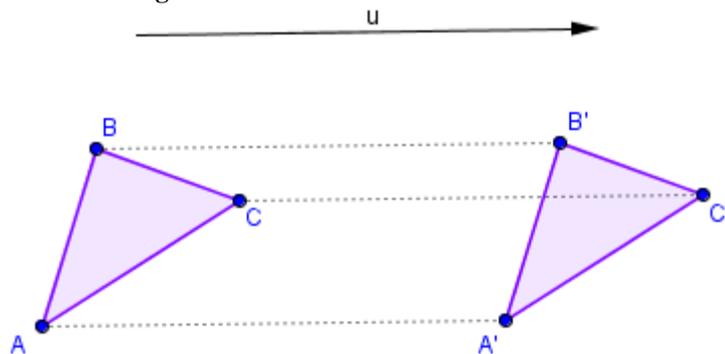
Fonte: Blog Flores<sup>8</sup>

### 8.1.5 Simetria translacional

Considere um ponto  $A$  qualquer do plano e um segmento de tamanho  $u$ , se deslizarmos  $A$  numa reta paralela a  $u$  obtemos um ponto  $A'$ , tal que  $AA' = u$ . Dizemos  $A'$  é simétrico de  $A$  por simetria translacional na direção e módulo de  $u$ . Analogamente a  $A$ , todos os pontos do triângulo  $ABC$  foram deslocados.

Essa transformação geométrica é uma *translação* de vetor  $\vec{u}$ .

**Figura 136** - Simetria translacional



Fonte: Elaborada pela autora

Rossi (2009) diz que a translação é uma isometria na qual se desloca todos os pontos da figura original por um vetor, sendo assim, é necessário fixar a direção, o sentido e a

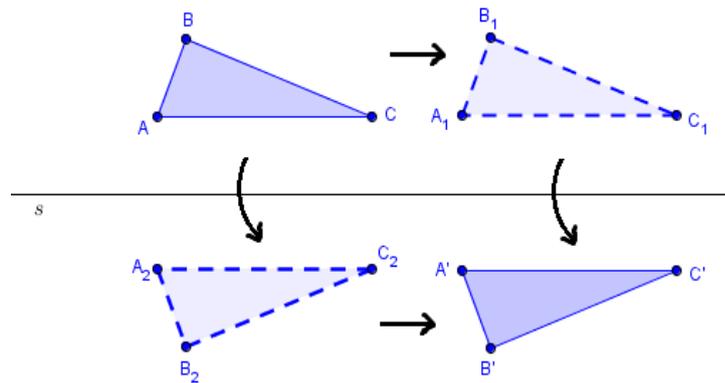
<sup>8</sup> Disponível em: <<http://flores-fotos.blogspot.com.br/2012/01/violeta-significado-da-violeta-e-fotos.html>> Acesso em 08 ago 2014.

amplitude do deslocamento e que preserva todas as medidas como ângulos, comprimentos e áreas.

### 8.1.6 Simetria translacional refletida

Barbosa (1993) diz que a simetria translacional refletida é a união de duas simetrias, a translação e a reflexão e que possui propriedade comutativa, isto é, podemos inverter a ordem. Ver Figura 137.

**Figura 137** - Simetria Translacional Refletida



**Fonte:** Elaborada pela autora

Considere um ponto A qualquer o plano e aplicamos uma simetria translacional de reta  $s$ , obtendo  $A_1$ , em seguida uma simetria reflexional de eixo  $s$ , obtendo o ponto  $A'$ . Invertendo a ordem, aplicamos uma simetria reflexional e obtemos  $A_2$ , depois uma translação de reta  $s$ , obtendo o mesmo ponto  $A'$ .

Essa transformação do plano produz figuras enantiomorfas, já citadas anteriormente.

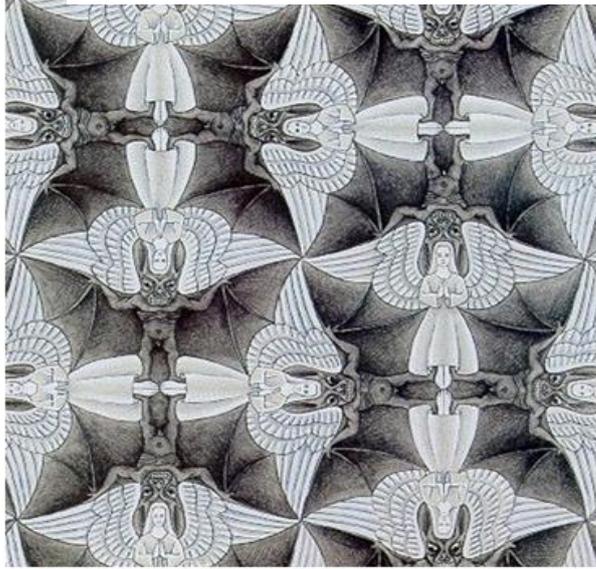
## 8.2 As pavimentações de Escher

Em 17 de junho de 1898 nascia na cidade de Leeuwarden, Holanda, o menino Maurits Cornelis Escher que viria a encantar o mundo das Artes e da Matemática com seus mosaicos.

Estudou arquitetura, mas seu grande talento eram as artes gráficas. Este talento foi descoberto pelo seu professor Samuel Jeressum Mesquita com quem estudou e trabalhou.

Quando terminou os estudos fez várias viagens para Itália e Espanha onde conheceu em Alhambra, Granada, os azulejos mouros. Este contato com a arte árabe está na base do interesse de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se repetem e refletem pelas pavimentações. Escher substituía as figuras abstrato-geométricas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, répteis e outros.

**Figura 138** - Angel - Devil (n° 45), 1941



<sup>9</sup>

Fonte: Site oficial – M.C. Escher

**Figura 139** - Two Fishes (n° 59), 1942



Fonte: Site oficial - M. C. Escher <sup>9</sup>

**Figura 140** - Lizard (n° 25), 1939

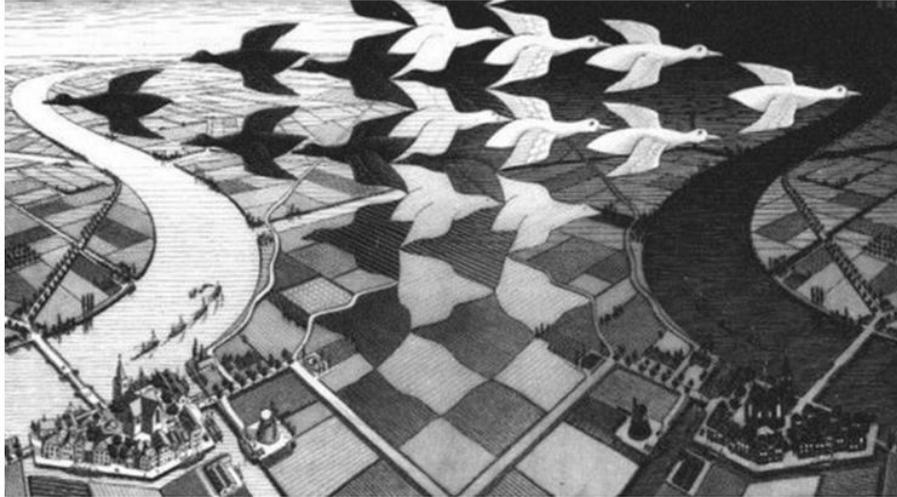


Fonte: Site oficial - M. C. Escher <sup>9</sup>

<sup>9</sup> Disponível em: < <http://www.mcescher.com/gallery/> > Acesso em 25 set 2014.

Escher, sem conhecimento matemático prévio, mas através do estudo sistemático e da experimentação, descobre todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é brilhantemente utilizada na xilografia "Day and Night", uma das obras mais emblemáticas de sua carreira.

**Figura 141** - Day and Night, 1938



Fonte: Site da Faculdade de Lisboa<sup>10</sup>

Aos poucos, Escher, vai sendo cada vez mais ousado e para além da “dança” com a geometria, vai também ao encontro do infinito. A divisão regular da superfície aparece misturada a formas tridimensionais, geralmente num ciclo sem fim, onde uma fase se dilui na outra. A litografia "*Reptiles*" é um bom exemplo disso.

**Figura 142** - Reptiles, 1943



Fonte: Site da Faculdade de Lisboa<sup>10</sup>

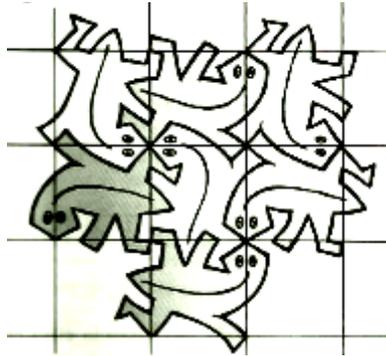
<sup>10</sup> Disponível em: < <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Escher2.htm> > Acesso 10 ago 2014.

### 8.2.1 Estudo de algumas de suas obras

Nas figuras abaixo, Barbosa (1993) descreve a construção de alguns mosaicos de Escher. Sem dúvida os mosaicos mouros de Alhambra contribuíram para o uso de duplos contornos, a repetição de figuras geométricas e a divisão do plano com animais imaginários.

Na Figura 143 nota-se o aproveitamento de uma pavimentação com quadrados, mas como os seus nós possuem 4 arestas concorrentes, Escher utiliza dois tipos de nós, um dos tipos com 4 patas, uma de cada réptil e em outra, duas cabeças e dois joelhos.

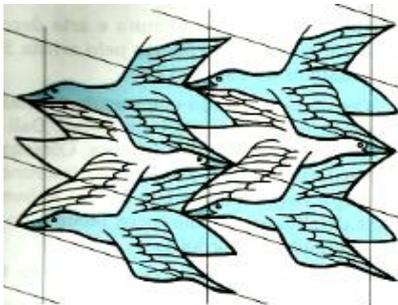
**Figura 143** – Répteis na pavimentação com quadrados



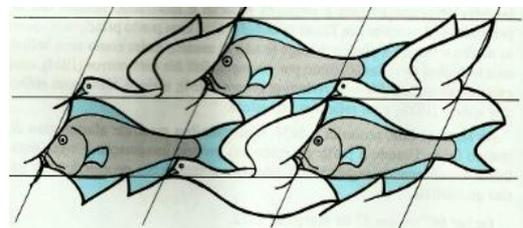
Fonte: Barbosa (1993), p.110

Nas Figuras 144 (pássaros) e 145 (pássaros e peixes) observa-se o emprego de uma pavimentação com paralelogramos e a genialidade no acerto de contornos duplos. A dificuldade das quatro arestas em cada nó é superada nos pássaros com inclinação diagonal para o bico, balanceada pela cauda do outro. Em pássaros e peixes continua a empregar a inclinação diagonal, mas para os nós faz acertos com a asa ou então com uma barbatana adicional.

**Figura 144** - Pássaros



**Figura 145** – Pássaros e peixes



Fonte: Barbosa (1993), p. 110

Na Figura 146 vemos o uso de uma pavimentação hexagonal regular com répteis, e como seus nós são de três arestas observa o emprego de nós para três cabeças, nó para duas patas e um rabo e nó para três patas.

**Figura 146** – Répteis na pavimentação hexagonal

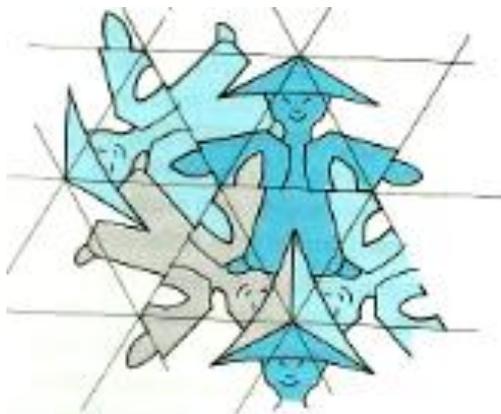


Fonte: Barbosa (1993), p. 111

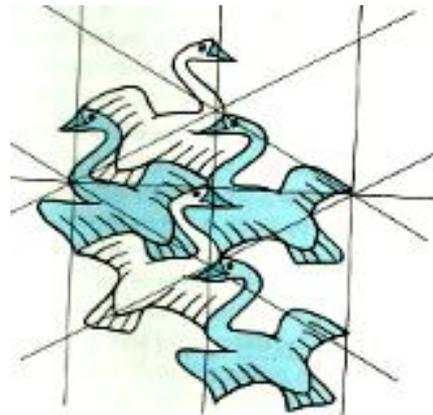
Na Figura 147 verificamos o curioso efeito com o menino chinês numa pavimentação de triângulos equiláteros lado a lado, mas a possível dificuldade das seis arestas concorrentes nos nós é contornada brilhantemente com três chapéus (isósceles) formando um triângulo equilátero adicional cujas bissetrizes até o incentro transformam o nó de seis em três.

Já na Figura 148 é utilizada uma pavimentação também de triângulos equiláteros, mas com deslocamento por faixa Escher ajusta seus cisnes.

**Figura 147** – Menino chinês



**Figura 148** - Cisnes



Fonte: Barbosa (1993), p. 111

### 8.3 As pavimentações de Penrose

Nascido em 1931, na Inglaterra, Roger Penrose é um importante matemático e físico que dedicou grande parte de sua vida à matemática recreativa e, em particular, as pavimentações. Investigou a existência ou não de um conjunto de ladrilhos que pavimentassem o plano, mas sem gerar um padrão repetido. Conseguiu criar 3 conjuntos de ladrilhos com essa característica, os chamados protoladrilhos de Penrose.

Chamamos de protoladrilhos os ladrilhos que pavimentam o plano e estes geram pavimentações periódicas ou aperiódicas.

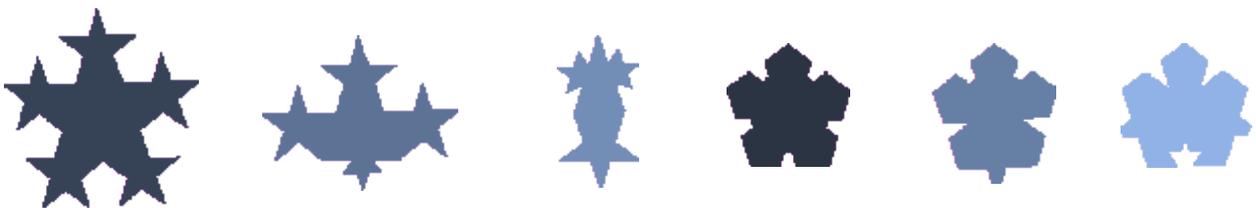
Pavimentações Aperiódicas são pavimentações que não gera padrão repetido cobrindo o plano sem espaços vazios nem sobreposições.

A mais importante propriedade das pavimentações de Penrose é que cada porção finita de uma pavimentação está contida infinitas vezes em cada uma das outras pavimentações geradas a partir do mesmo conjunto de protoladrilhos. Este fato comum nas pavimentações periódicas não é tão óbvio nas pavimentações não periódicas. Esta propriedade implica em:

- Não há conjunto finito de ladrilhos que determina o resto da pavimentação, ou seja, não repetição de padrão.
- Não é possível determinar a qual pavimentação pertence um conjunto de ladrilhos.
- Só é possível diferenciar as pavimentações no seu limite infinito.

#### 8.3.1 Primeiro conjunto de protoladrilhos

**Figura 149** - Primeiro conjunto de protoladrilhos

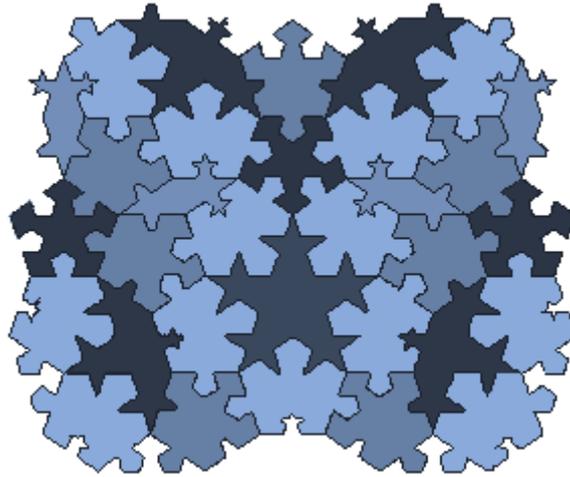


**Fonte:** Página da Internet da Faculdade de Ciências de Lisboa <sup>11</sup>

Observe a pavimentação aperiódica formada por este conjunto de protoladrilhos (Figura 150).

<sup>11</sup> Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/index.html>> Acesso em 10 jun 2014.

**Figura 150** - Pavimentação aperiódica do primeiro conjunto de protoladrilhos

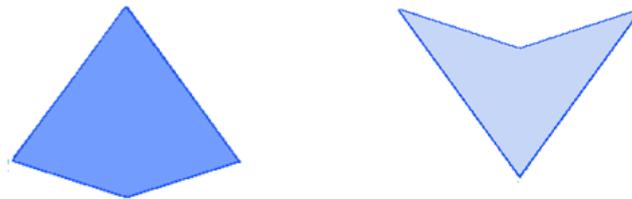


**Fonte:** Página da Internet da Faculdade de Ciências de Lisboa

<sup>12</sup>

### 8.3.2 Segundo conjunto de protoladrilhos

**Figura 151** - Segundo conjunto de protoladrilhos

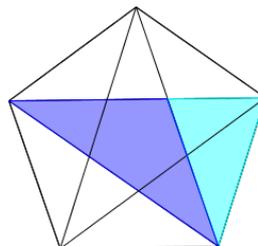


**Fonte:** Elaborada pela autora

Este é o mais notável conjunto do protoladrilhos de Penrose, com este conjunto é possível obter inúmeras pavimentações periódicas e aperiódicas. São chamados de kites (papagaio) e dart (seta).

Santos (2006) em seu trabalho faz um estudo minucioso sobre estes dois protoladrilhos, ela destaca que o kite e dart são obtidos pela junção de dois triângulos áureos formados pelas diagonais de um pentágono regular.

**Figura 152** - Pentágono regular e suas diagonais



**Fonte:** Elaborada pela autora

<sup>12</sup> Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/primeiroprot.htm>> Acesso em 10 jun 2014.

Triângulo áureo é aquele em que o lado menor é segmento áureo do lado maior, ou seja, a razão entre eles corresponde a  $\phi = 1,618\dots$  (número de ouro). Seus ângulos internos são múltiplos de  $36^\circ$ , sendo  $(36^\circ, 36^\circ, 108^\circ)$  as medidas dos ângulos internos do triângulo áureo obtusângulo e  $(36^\circ, 72^\circ, 72^\circ)$  as do triângulo áureo acutângulo.

Figura 153 - Triângulo áureo acutângulo



Figura 154 - Triângulo áureo obtusângulo



Fonte: Elaborada pela autora

O kite é formado por dois triângulos áureos acutângulos (Figura 153) e dart por dois triângulos áureos obtusângulos unidos pelo lado menor (Figura 154).

Figura 155 - Kite

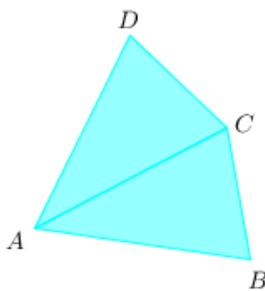
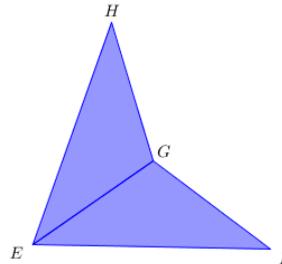


Figura 156 - Dart

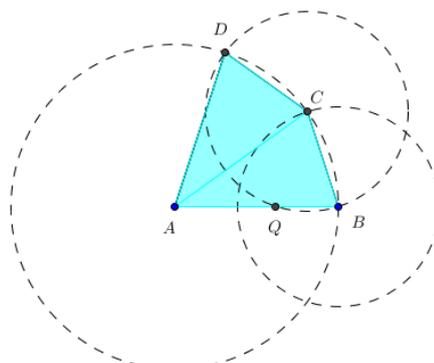


Fonte: Elaborada pela autora

### 8.3.2.1 - Construção do kite e do dart

Sendo  $AB$  um dos lados de maior medida do kite e  $Q$  o ponto que divide  $AB$  na razão áurea. Podemos determinar o vértice  $C$ , pois  $AC = AB$  e  $BC = AQ$  e o vértice  $D$ , pois  $AD = AB$  e  $CD = AQ$  (Figura 157).

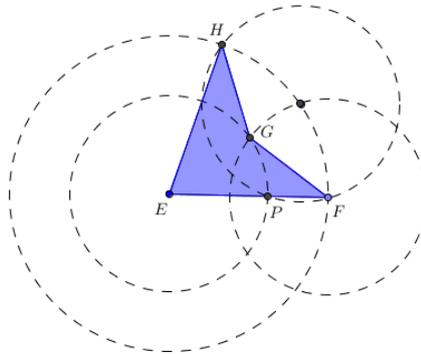
Figura 157 - Construção do kite



Fonte: Santos (2006), p.57

Analogamente, sendo  $EF$  um dos lados de maior medida do dart e  $P$  o ponto que divide  $EF$  na razão áurea, podemos determinar o vértice  $G$ , pois  $FG=EP=EG$  e o vértice  $H$ , pois  $GH=EP$  e  $EH=EF$  (Figura 158).

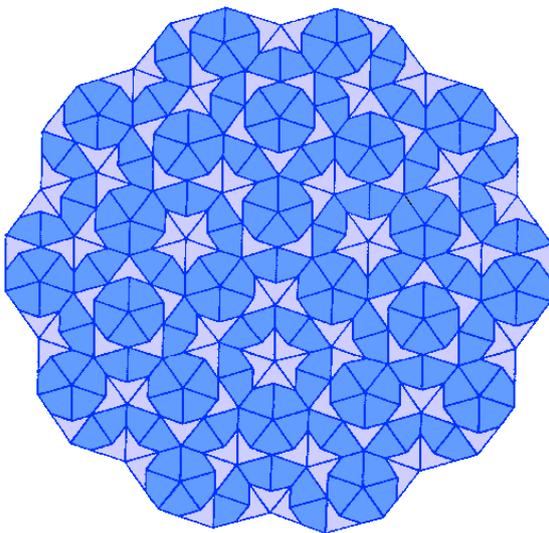
**Figura 158** - Construção do dart



Fonte: Santos (2006), p.57

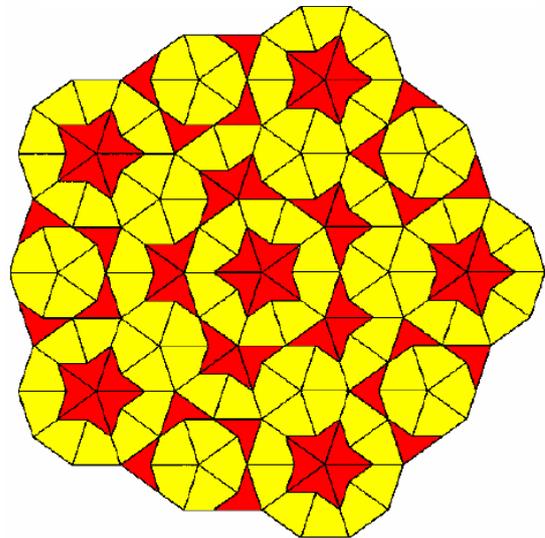
Para que a pavimentação ocorra é imprescindível que  $AB=EF$  e  $BC=FG$ . Para obter as pavimentações aperiódicas é necessário unir vértices com a mesma letra. Vejamos algumas pavimentações aperiódicas usando kites e darts.

**Figura 159** - Pavimentação por kites e darts denominada cartwheel



Fonte: Página da Internet da Faculdade de  
Ciência de Lisboa <sup>13</sup>

**Figura 160** - Pavimentação por kites e darts obtida a partir de um arranjo na forma de sol



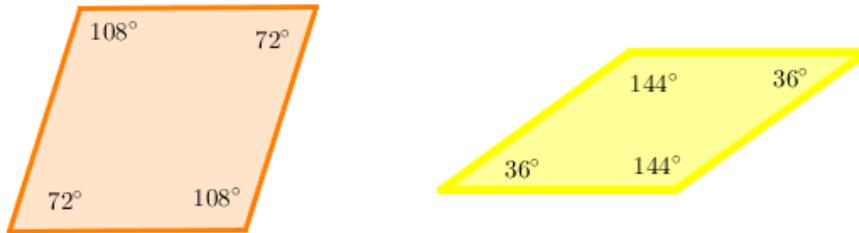
Fonte: Santos (2006), p.58

Segundo Santos (2006), quanto mais a pavimentação se estende, mais a razão entre kites e darts se aproxima da razão áurea.

<sup>13</sup> Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/segundoprot.htm>> Acesso em 12 jun 2014.

### 8.3.3 Terceiro conjunto de protoladrilhos

**Figura 161** - Terceiro conjunto de protoladrilhos



Fonte: Elaborada pela autora

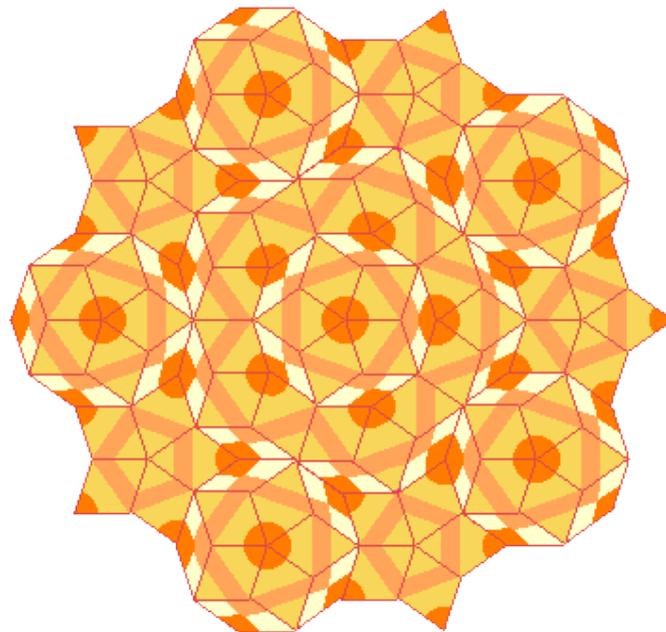
Estes protoladrilhos são designados por rombos aperiódicos. É um conjunto formado por dois losangos que marcados como mostrados nas Figuras 162 e 163 formam pavimentações aperiódicas, mas nenhuma periódica.

**Figuras 162 e 163** - Losangos com marcações



Fonte: Elaborada pela autora

**Figura 164** - Pavimentação aperiódica formada com losangos do terceiro conjunto de protoladrilhos



Fonte: Página da Internet da Faculdade de Ciência de Lisboa <sup>14</sup>

<sup>14</sup> Disponível em: < <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/terceiroprot.htm> > Acesso em 12 jun 2014.

## **9 PROPOSTA: PAVIMENTAÇÕES DO PLANO E O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA**

### **9.1 Tecnologia em sala de aula**

Vivemos em um mundo cercado de computadores, celulares, tablets, etc. A cada dia são criados novos aparelhos e desenvolvidos softwares que estão a nossa disposição. Nesse sentido não podemos "fechar os olhos" e ignorar essa realidade, devemos propor o uso dessa tecnologia tão presente na vida de nossos alunos e usufruir das vantagens que ela proporciona no desenvolvimento de habilidades cognitivas dos educandos de modo a torná-los mais autônomos e colaborativos.

Para isso é necessário que educadores estejam em constante atualização e buscar uma melhor formação profissional, é preciso que o educador repense as práticas pedagógicas buscando alternativas inovadoras no processo ensino aprendizagem agindo como facilitador no desenvolvimento intelectual dos alunos (VALENTE, 1995).

Uma mudança qualitativa no processo ensino aprendizagem acontece quando conseguimos inserir as tecnologias de modo significativo, favorecendo a aprendizagem dos alunos. Assim, é necessário que educadores tenham domínio dessas ferramentas para que possam diversificar as formas de dar aulas, de realizar atividades e de avaliar (MORAN, 2000).

Conforme PCN (1998) "o recurso à tecnologias da comunicação constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas."

Sobre a relação entre professores e alunos o PCN (1998) dispõe que o uso das tecnologias

podem levar ao estabelecimento de uma nova relação entre professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de se considerar um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar sua formação permanente ao longo de sua vida profissional (BRASIL, 1998, p.44).

Não só os professores devem repensar sobre suas práticas, mas também os alunos devem estar conscientes de seu papel, reorganizando sua forma de aprender, pois professores e alunos devem fazer uso do raciocínio de forma diferente daquele usado com lápis e papel.

### **9.2 O software Geogebra**

As atividades realizadas num ambiente de informática proporcionam aprendizagens efetivas, estimulantes e inovadoras na medida em que possibilitam a construção e a manipulação de objetos. Além disso, a análise de alterações e invariantes nas propriedades de uma figura é potencializada nesse ambiente proporcionando desafios à imaginação e ao raciocínio.

Silveira e Cabrita (2013), especificam algumas potencialidades dos referidos ambientes:

- Possuem ferramentas para construções e medições rigorosas de configurações geométricas (de pontos, segmentos, semirretas, retas, arcos, circunferências, cônicas);
- Permitem que determinadas transformações (translações, reflexões e rotações) ajam sobre figuras ou parte dessas figuras;
- Possuem componentes para a conexão da geometria sintética com a Geometria Analítica, criando sistemas de coordenadas e gráfico de funções;
- Podem ser utilizados na aula de Matemática e, especialmente em Geometria como um processo de visualização adaptando-se perfeitamente à exploração, à descoberta e à investigação;
- Provocam uma convicção forte que pode motivar o desejo de uma demonstração pela evidencia experimental que fornece;
- Permitem a simulação de variadas situações e produção de micromundos.

A geometria ativa e investigativa encontra no Geogebra, software matemático dinâmico abrangendo as três grandes áreas da Matemática - a Geometria, a Álgebra e o Cálculo, um excelente recurso para o estudo da Geometria, possibilitando a interação entre a zona algébrica e a zona gráfica na qual a representação dos entes matemáticos torna-se particularmente importante no tópico das transformações geométricas isométricas, possibilitando ao aluno visualizar, conjecturar, validar e compreender os conceitos e propriedades de uma forma interativa e atrativa.

Este software é gratuito e é disponibilizado para download no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), sendo de fácil instalação e manuseio.

### **9.3 O modelo dos Van Hiele desenvolvimento do pensamento geométrico**

Para Crowley (1994) o modelo dos Van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutorado de Dina van-Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, finalizados simultaneamente na universidade de Utrecht.

### 9.3.1 Descrição dos níveis

#### a) Nível 0 (nível básico): visualização

Neste estágio o aluno percebe o espaço apenas como algo que existe em torno dele. Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, não como entidades que tem características ou atributos. Alguém neste nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e, dada uma figura, consegue reproduzi-la. Por exemplo, consegue identificar quadrados e retângulos ilustrados em um quadro, mas não reconheceria que possuem ângulos retos e lados paralelos.

#### b) Nível 1: análise

No nível 1, começa uma análise dos conceitos geométricos. Através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem as propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim reconhecem que as figuras tem partes, e as figuras são conhecidas por suas partes. Dada uma rede de paralelogramos, os alunos colorando ângulos iguais poderiam estabelecer que ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, podem fazer generalizações para a classe dos paralelogramos, no entanto não são capazes de explicar relações entre as propriedades, não veem inter-relações entre figuras e não entendem definições.

#### c) Nível 2: dedução informal

Neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quanto entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Assim são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições tem significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são muitas vezes usados em conjunto com técnicas de dedução. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não sabem alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares.

#### d) Nível 3: dedução

Neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica num contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível a pessoa é capaz de construir demonstrações e não apenas

memorizá-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreender a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

e) Nível 4: rigor

Neste nível o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, pode estudar geometria não euclidiana e comparar com sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato, sem a necessidade de recorrer a modelos concretos

### 9.3.2 *Propriedades do modelo*

Esse modelo descreve 5 propriedades:

1 – Sequencial: o aluno deve necessariamente passar pelos vários níveis, o sucesso em um determinado nível pressupõe a assimilação das estratégias dos níveis anteriores.

2 – Avanço: a progressão em um nível para outro depende mais de um conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade.

3 – Intrínseco e extrínseco: os objetos inerentes a um nível tornam-se objetos de estudo no nível seguinte.

4 – Linguística: cada nível tem seus próprios símbolos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos.

5 – Combinação inadequada: se o aluno está em um nível e o professor, material, conteúdos, vocabulário e assim por diante, estiverem em um nível mais alto que o aluno, este não é capaz de acompanhar os processos de pensamento que estarão sendo empregados e o aprendizado e o progresso podem não ocorrer.

### 9.3.3 *Fases do aprendizado*

Para Crowley (1994), os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou da maturidade. Portanto o método e a organização do curso, assim como o conteúdo e o material usados, são importantes áreas de preocupação pedagógica. Para tratar estas questões, os Van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizado: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Afirmam que a instrução desenvolvida de acordo com essa sequência promove a aquisição de cada um dos níveis.

a) Fase 1: Interrogação/informação

Nesta etapa inicial os alunos conversam e desenvolvem atividades envolvendo os objetos de estudo do respectivo nível. Fazendo-se observações, levantam-se questões e

introduz-se um vocabulário específico do nível. Por exemplo, o professor pergunta aos alunos: “O que é um losango? Um quadrado? Um paralelogramo? O que tem de semelhante? De diferente? Um quadrado pode ser um retângulo? O propósito desta atividade é duplo: (1) o professor fica sabendo os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tópico, e (2) os alunos ficam sabendo em que direção os estudos avançarão.

b) Fase 2: Orientação dirigida

Os alunos exploram os tópicos de estudos através do material que o professor cuidadosamente ordenou em sequência. Estas atividades deverão revelar gradualmente aos alunos as estruturas características desse nível. Assim, grande parte do material será pequenas tarefas com o objetivo de suscitar respostas específicas. Por exemplo, o professor poderia pedir aos alunos que usassem o geoplano para construir um losango de diagonais iguais, para construir outro maior e para construir outro menor. Outra atividade seria construir um losango com quatro ângulos retos, depois com três ângulos retos, dois ângulos retos, um ângulo reto...

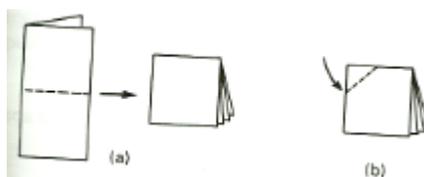
c) Fase 3: Explicação

Baseando-se em suas experiências anteriores, os alunos expressam e trocam suas visões emergentes sobre as estruturas que foram observadas. Além de orientar os alunos no uso de uma linguagem precisa e adequada, o papel do professor é mínimo. É durante esta fase que começa a tornar-se evidente o sistema de relações entre os níveis. Prosseguindo com o exemplo do losango, os alunos poderiam discutir entre si e com o professor que figuras e propriedades emergiram das atividades precedentes.

d) Fase 4: Orientação livre

O aluno vê-se diante de tarefas mais complexas – tarefas com muitos passos que podem ser concluídas de diversas maneiras e tarefas de final aberto. “Eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver as tarefas. Orientam-se a si mesmos no campo da pesquisa, muitas relações entre os objetos de estudo tornam-se explícitas para os alunos”.

Por exemplo, os alunos poderiam completar uma atividade como a seguinte: “Dobre uma folha de papel ao meio e depois outra vez ao meio, como mostra a Figura 165. Tente imaginar que tipo de figura você obterá se cortasse o canto formado pelas dobras. Justifique sua resposta antes de efetuar o corte. Que tipo(s) de figura(s) você obterá se cortar segundo um ângulo um ângulo de  $30^\circ$ ? E segundo um ângulo de  $45^\circ$ ? Descreva os ângulos no ponto de intersecção das diagonais. O ponto de intersecção estará em que ponto das diagonais? Por que a área do losango é dada como metade do produto das duas diagonais?

**Figura 165** – Sequência de dobras de uma folha de papel

Fonte: Crowley (1994), p. 7

#### e) Fase 5: Integração

Os alunos reveem e resumizam o que aprenderam com o objetivo de formarem uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode auxiliar nessa síntese, fornecendo apanhados globais do que os alunos aprenderam. É importante, porém, que este sumário não apresente nada de novo. As propriedades do losango que emergiram seriam sumariadas e suas origens revistas.

No final da quinta fase, os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte.

## 9.4 Explicando as atividades a serem aplicadas em sala de aula

Com os alunos em duplas, antes de iniciar as atividades será pedido às duplas que criem uma pasta na área de trabalho de seu computador com o nome da dupla, nesta pasta os alunos serão instruídos a salvar as atividades realizadas. Será explicado também como baixar o programa em casa e uma breve explicação sobre o Geogebra.

As atividades a serem entregues aos alunos estão no apêndice.

### 9.4.1 ATIVIDADE 1: Explorando o software Geogebra.

#### Objetivo: Conhecer as ferramentas do software.

Para que os alunos se familiarizem com o software Geogebra, bem como a relação entre a janela algébrica e a geométrica serão propostas algumas atividades de manuseio dos botões de comando (Figura 166).

**Figura 166** - Barra de ferramentas do Geogebra

Fonte: Página principal do Geogebra 4.4.45.0

Nas primeiras atividades o passo a passo das atividades é bem explicado, já nas últimas atividades espera-se que o aluno já crie procedimentos próprios para realizar as tarefas. Como na atividade i) que pede para construir um ângulo de medida qualquer, o passo a passo não é dado, a dupla deve discutir entre si e pensar na melhor maneira de fazê-la.

O professor pode mencionar que no Geogebra cada ferramenta abre uma janela que indica as condições para se realizar as construções. Como mostra a Figura 167.

**Figura 167** - Janela com comandos



**Fonte:** Página principal do Geogebra 4.4.45.0

Nas aulas seguintes, com os alunos dispostos em duplas, as atividades serão inseridas de modo a provocar a capacidade investigativa dos alunos, desse modo o trabalho com grupos (duplas) se torna mais produtivo, despertando o espírito colaborativo que estas atividades proporcionam. O professor por sua vez através da análise das conjecturas dos alunos poderá auxiliá-los na busca de melhores estratégias, relembrar algumas propriedades estudadas anteriormente, atuará como orientador do processo e intervirá apenas nos momentos que houver extrema necessidade.

#### 9.4.2 ATIVIDADE 2: Construindo triângulos.

**Objetivo: Desenvolver a capacidade investigativa na construção de triângulos.**

Será proposto a construção de triângulos escalenos, isósceles e equiláteros, os grupos discutirão ao melhor forma de concluir a atividade. A intenção é explorar a capacidade de investigação na construção de triângulos uma vez que há várias maneiras de construção.

#### 9.4.3 ATIVIDADE 3: Construindo quadriláteros.

**Objetivo: Obter as propriedades essenciais dos principais quadriláteros.**

Nesta atividade os alunos serão instruídos a construir os quadriláteros notáveis e movimentando os vértices, os quadriláteros não devem perder suas características principais. Cada quadrilátero tem características que o definem, os alunos devem pensar em estratégias de como "amarrar" essas características de modo fixo.

É uma atividade trabalhosa, exigirá o uso de várias ferramentas do Geogebra e muita paciência na execução dos trabalhos.

#### 9.4.4 ATIVIDADE 4: *Conhecendo polígonos regulares.*

**Objetivo: Conhecer a nomenclatura dos polígonos e determinar um método para obter o valor dos ângulos internos de cada polígono regular.**

A atividade permite a familiarização com o nome dos polígonos regulares e a obtenção dos ângulos internos importantes na determinação das pavimentações em atividades seguintes.

#### 9.4.5 ATIVIDADE 5: *Conhecendo as pavimentações do plano.*

**Objetivo: Identificar uma pavimentação do plano e seus elementos.**

Nesta atividade serão visualizadas num data-show algumas pavimentações encontradas na natureza, no dia a dia, nas artes. Este conteúdo embora se pareça mais com a arte está mais relacionada à matemática. Quais as condições para que se tenha uma pavimentação. Chamaremos a atenção sobre os elementos das pavimentações como arestas, nós e ladrilhos.

Como exercício será dado aos alunos algumas imagens para que identifiquem se representam pavimentações do plano e determinar o tipo de ladrilho (polígono) utilizado para construção.

Espera-se que os alunos identifiquem com facilidade as não pavimentações com sobreposições e espaços vazios e os ladrilhos utilizados, pois foram alvo de estudo em atividade anterior.

#### 9.4.6 ATIVIDADE 6: *Construindo pavimentações com polígonos regulares de um só tipo.*

**Objetivo: Determinar a condição para que haja uma pavimentação do plano.**

Com a pergunta "Qualquer polígono regular pavimenta o plano sem que haja espaços vazios nem sobreposições?" propomos uma investigação sobre quais polígonos regulares já estudados pavimentam o plano, isto é, com um só tipo de polígono.

Espera-se que os alunos cheguem a conclusão que para haver pavimentação a soma dos ângulos internos ao redor de um nó seja  $360^\circ$ .

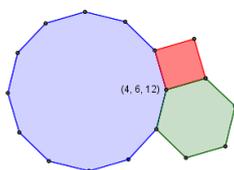
#### 9.4.7 ATIVIDADE 7: Construindo pavimentações com polígonos de tipos diferentes.

**Objetivo: Determinar qual a condição para se pavimentar o plano com polígonos de tipos diferentes e encontrar o máximo de configurações possíveis.**

Com a pergunta "É possível pavimentar o plano com polígonos regulares de tipos diferentes?" pretendemos investigar as possíveis pavimentações semirregulares.

Daremos como exemplo algumas configurações possíveis e pediremos para que eles determinem as outras configurações, ao final socializaremos as soluções encontradas para verificar se todas foram descobertas.

Exemplo 2: Nesta configuração a notação foi feita no sentido horário iniciando pelo polígono de menor número de lados ao redor de um nó da pavimentação.



Espera-se que os alunos utilizem a tabela da atividade 4 com os valores dos ângulos internos dos polígonos regulares e que utilizem o fato da soma dos ângulos ao redor de um nó seja  $360^\circ$ .

Para facilitar a atividade dividimos em três tabelas, configurações utilizando 3 polígonos, 4 polígonos e 5 polígonos.

É possível que as 21 configurações estudadas no capítulo 5 não sejam encontradas, como a configuração (3, 7, 42), por exemplo, pelo elevado número de lados do polígono 3.

#### 9.4.8 ATIVIDADE 8: Identificando as configurações de uma pavimentação.

**Objetivo: identificar a configuração de uma pavimentação e ser capaz de reproduzi-la.**

Serão fornecidas parte de pavimentações do plano, será pedido para identificar a configuração em torno de um nó e continuar o processo de pavimentação do plano. Salvar a página do Geogebra numa pasta.

Pode acontecer que algumas pavimentações apresentadas foram feitas pelos alunos na atividade anterior. O objetivo da atividade será alcançado se os alunos conseguirem identificar o nó da pavimentação antes de construí-lo no Geogebra.

#### 9.4.9 ATIVIDADE 9: Construindo pavimentações livres.

**Objetivo: criar configurações conforme as regras estudadas**

Nesta atividade os alunos serão instigados a usar a imaginação e criar as suas pavimentações, espera-se que os alunos criem pavimentações diferentes das estudadas nas atividades anteriores.

#### *9.4.10 ATIVIDADE 10: Descobrimo as transformações do plano.*

**Objetivo: Identificar as transformações do plano: simetria axial, rotacional e translacional.**

No Geogebra os alunos usarão as ferramentas para descobrirem as propriedades das simetrias reflexional, rotacional e translacional bem como o termo isometria analisando o que ocorre com a figura após cada movimento. Espera-se que os alunos descubram que numa isometria a forma e as medidas se mantém alterando apenas a posição da figura no plano.

#### *9.4.11 ATIVIDADE 11: Construção de pavimentações com auxilio das transformações isométricas.*

**Objetivo: Utilizar as transformações isométricas para construir pavimentações do plano.**

Nesta atividade aos alunos utilizarão a reflexão, a rotação e a translação para construir as pavimentações com polígonos regulares de um só tipo. O fato de utilizarem apenas as transformações geométricas para pavimentar o plano fará com que os alunos tracem estratégias e elaborem plano de ação contribuindo para a sua formação pessoal e intelectual.

#### *9.4.12 ATIVIDADE 12: Criar uma pavimentação do tipo Escher.*

**Objetivo: usar a criatividade e criar uma pavimentação do tipo Escher**

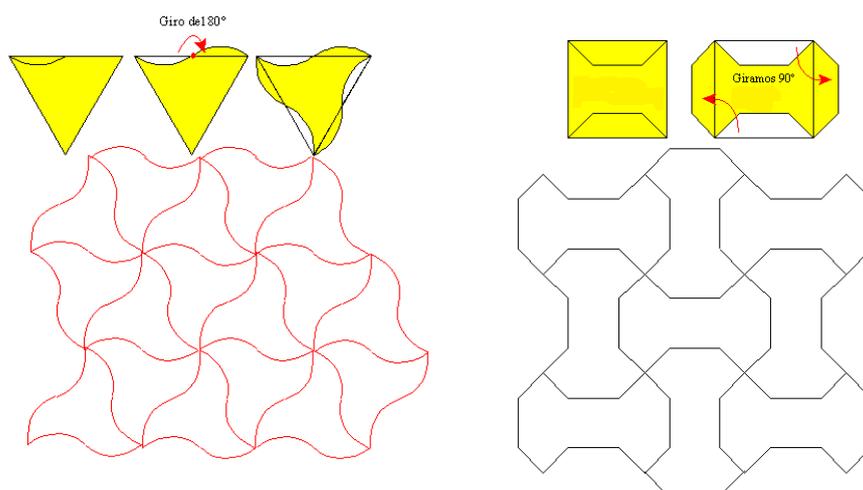
Nesta atividade os alunos serão desafiados a fazer uma pavimentação do tipo Escher, se os alunos são capazes de utilizar a técnica para reproduzir mosaicos. Espera-se que sejam identificadas as transformações do plano como ferramenta para construção desses mosaicos.

Primeiramente será exposto num data-show quem foi Escher e algumas de suas obras. Depois será estudada a técnica utilizada em algumas de suas pavimentações visitando o site <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Escher.htm>

Depois será apresentado um site com a técnica de Escher:

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463>

A primeira atividade será uma oficina manual. Para facilitar a construção do mosaico será oferecido aos alunos triângulos equilátero, quadrados e hexágonos regulares já recortados. A técnica é bastante simples como ilustra a imagem a seguir.



<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/maticas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm>

Na segunda atividade será proposto aos alunos construírem um mosaico tipo Escher no Geogebra. Esta tarefa exigirá dos alunos domínio das ferramentas do Geogebra e raciocínio na elaboração das estratégias.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que esta proposta possa contribuir para o ensino da Matemática, tornando mais interessante e participativa a aprendizagem de alguns conceitos de Geometria Plana.

Nos trabalhos analisados durante a pesquisa, notamos que o tema proposto foi desenvolvido de diversas maneiras, o que tinham em comum era o uso de materiais manipulativos como os espelhos, as faixas e frisos e os softwares como Cabri e Geogebra. A preocupação dos autores com a Geometria era evidente em seus trabalhos, buscando alternativas para preencher as falhas causadas pelo abandono do ensino da Geometria em décadas passadas.

Durante os estudos compreendemos que o aprofundamento nos conteúdos se faz necessária pelo professor, para transmitir segurança quando se ensina. O professor não é o detentor de todo o conhecimento, é um componente importante para direcionamento da aprendizagem dos alunos. Pretendemos que se desenvolva um trabalho colaborativo e que os níveis do pensamento geométrico dos alunos sejam desenvolvidos.

**BIBLIOGRAFIA**

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópio e o software Cabri Géometre II**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista(UNESP), Rio Claro, SP, 2003.

ALVES, S.; DALCIN, M. **Mosaicos no plano**. Revista do Professor de Matemática, nº 40, 1999. Disponível em : <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/rpm-40-mosaicos-do-plano.pdf>>. Acesso em: 02 mar 2014.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo Padrões em Mosaicos**. São Paulo, Atual. 1993.

BATISTELA, R. F. **Um kit de espelhos planos para o ensino de Geometria**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

CARVALHO, M. J. **A utilização do laboratório de informática para o ensino de Geometria no ensino fundamental**. Cascavel: Secretaria de Educação do Paraná, 2009.

CASTRO, R. F. C. R. **Pavimentações do Plano Euclidiano**. Monografia - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2008.

CORREIA, N. **Estudo das pavimentações do plano utilizando um objeto de aprendizagem**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2013.

CROWLEY, M. L.. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual. 1994 p. 1-20.

DACOL, M. R. **Caderno pedagógico. Abordagens do mosaico no ambiente escolar**. Curitiba: Secretaria do Estado do Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1539-6.pdf>. Acesso em: 03 jun 2014.

ESCHER, M. C. **Entre a arte e a matemática**. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/prosto.html> . Acesso em 15 de julho de 2014.

ESCHER, M. C. **Site oficial**. Disponível em <http://www.mcescher.com/> . Acesso em: 15 jul 2014.

FAORO, T. C. **A geometria das abelhas**. Trabalho de Conclusão de Curso –Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, MS, 2010.

GARCIA, V. C. **Reflexão e Pesquisa na Formação de Professores de Matemática**. Porto Alegre: Evangraf: UFRGS, 2011.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos mosaicos**. São Paulo: Scipione.2005.

LIMA, G. C. **Pavimentação do plano com polígonos regulares**. Artigo – Universidade Católica de Brasília. Brasília, DF, 2011.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo o uso de caleidoscópios, sólidos geoméricos e softwares educacionais**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista(UNESP). Rio Claro, SP, 2003.

MORAN, J. M. **O uso das novas tecnologias da informação e da comunicação na EAD - uma leitura crítica dos meios**. Portal do MEC. Disponível em:  
<http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/T6%20TextoMoran.pdf>. Acesso em: 12 out. 2014.

MURARI, C. **Ensino- Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries via caleidoscópio**. Tese de Doutorado – Universidade Estadual Paulista (UNESP). Rio Claro, SP, 1999.

NEVES, P. R. **O uso de caleidoscópio no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP, 2011.

REIS, J. D. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP, 2006.

ROSSI, G. R. **O ensino e aprendizagem de polígonos e transformações geométricas no plano: relacionando a arte e a matemática por meio de frisos e dos ladrilhos**. Dissertação de Mestrado Profissionalizante – Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS, 2009.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano: Um estudo com professores de Matemática e Arte**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro,SP, 2006.

SERRA, A; BARATA, D; SACRAMENTO, S. **Pavimentações aperiódicas**. Disponível em:  
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/index.html> . Acesso em: 10 jun 2014.

SILVEIRA, A.; CABRITA, I. O Geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. **Indagatio Didactica**, Universidade de Aveiro, Portugal, v. 5, n. especial, p. 149-170, 2013.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP, 1993.

## APÊNDICE

As páginas seguintes contemplam as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos explorando o software GeoGebra. Cada dupla ou grupo receberá uma folha impressa para leitura das atividades e responder as perguntas. As atividades do dia serão enviadas por e-mail também. Na área de trabalho de cada computador será criada uma pasta com o nome da dupla ou grupo na qual serão salvas as atividades.

### **ATIVIDADE 1: Explorando o software GeoGebra**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

Na área de trabalho de seu computador crie uma pasta com seu nome, salve cada atividade do Geogebra nesta pasta, cada arquivo deve ser nomeado com o número da atividade.

#### **Exercícios**

- a) Na janela geométrica exibir a malha quadriculada e os eixos. Crie dois pontos quaisquer e movimente-os. Há relação entre as duas janelas? Quais?
- b) Desative a malha e os eixos e movimente novamente os pontos. O que você percebeu?
- c) Construa uma reta passando pelos dois pontos criados. Movimente os pontos e a reta utilizando a ferramenta mover. Comente a observação.
- d) Em outra parte da tela, selecione a opção *segmento* de reta definido por dois pontos e construa o segmento. Movimente os pontos e comente a observação.
- e) Marque o ponto médio do segmento. Movimente os pontos e comente a observação.
- f) Trace uma reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto médio. Depois outra reta perpendicular passando por um dos pontos extremos do segmento. Que relação existe entre estas retas?
- g) Traçar retas paralelas ao segmento construído. Que relação há entre estas retas paralelas ao segmento e as retas construídas no item f?
- h) Apague as retas e os segmentos traçados, inclusive os pontos. (selecione os objetos clicando sobre eles, botão direito do mouse, selecione apagar).
- i) Construir um ângulo de medida qualquer. Descreva os procedimentos adotados.

**ATIVIDADE 2 - Construindo triângulos**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

**Exercícios**

a) Construa um triângulo qualquer, trace uma das alturas. Meça cada segmento do triângulo e determine o perímetro e a área. Determine uma fórmula para calcular a área de um triângulo.

b) Construa um triângulo isósceles de lados 4 cm e 6cm e um dos ângulos internos medindo  $50^\circ$ . Essa construção é única? Desenhe todas as opções de construção, se houver.

c) Construa um triângulo equilátero de lado 5 cm. Descreva os passos utilizados.

### ATIVIDADE 3 - Construindo quadriláteros

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

#### Exercícios

a) Construir os quadriláteros abaixo de modo que ao movimentar os vértices da figura as propriedades principais se mantêm.

Obs. Relembrar quadriláteros notáveis.

<b>QUADRILÁTERO</b>	<b>CARACTERÍSTICA PRINCIPAL</b>
<b>Trapézio</b>	
<b>Paralelogramo</b>	
<b>Losango</b>	
<b>Retângulo</b>	
<b>Quadrado</b>	

## ATIVIDADE 4 - Conhecendo polígonos regulares

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções ser salvas na pasta com o seu nome.

### Exercícios

- a) Usando a ferramenta polígono regular, construir os polígonos de acordo com o número de lados, determinar a medida de cada ângulo interno e a soma dos ângulos internos e completar a tabela abaixo:

Número de lados do polígono (n)	Nome do polígono	Soma dos ângulos internos ( $S_i$ )	Valor de cada ângulo interno ( $a_i$ )
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

- b) De cada polígono construído, traçar todas as diagonais a partir de **um único vértice** dividindo o polígono em triângulos. Preencha a tabela a seguir e responda a perguntas:

Número de lados do polígono regular (n)	Quantidade de triângulos formados a partir de um vértice	Soma de todos os ângulos dos triângulos
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
...	...	...
n		

c) Responda as questões:

- i) Existe relação entre o número de lados do polígono e a quantidade de triângulos formados? Qual?
- ii) Existe relação entre a soma dos ângulos dos polígonos da tabela 1 e a soma dos ângulos dos triângulos da tabela 2? Qual?
- iii) Determine a fórmula da soma dos ângulos internos de acordo com o número de lados do polígono?
- iv) Como você faria para determinar o valor de cada ângulo interno de um polígono regular?

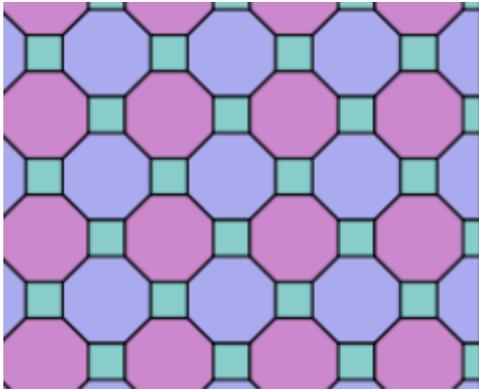
## ATIVIDADE 5 - Conhecendo as pavimentações do plano.

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

### Exercícios

Pavimentação é o recobrimento do plano de modo a não haver espaços vazios e nem sobreposições. O recobrimento é feito através de polígonos chamados de ladrilhos.

Dentre as imagens a seguir, identifique as que representam pavimentações do plano e os polígonos que a compõe. Em caso negativo justifique sua resposta.



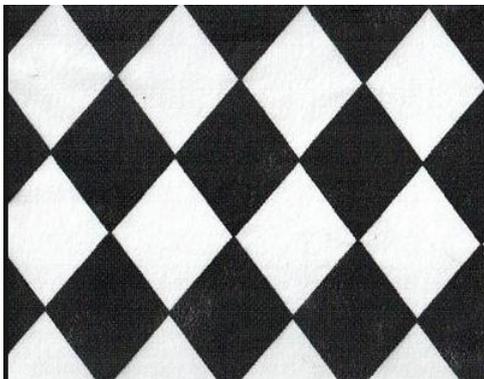

---



---



---



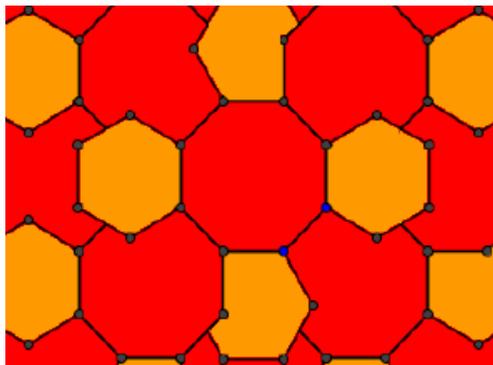

---



---



---



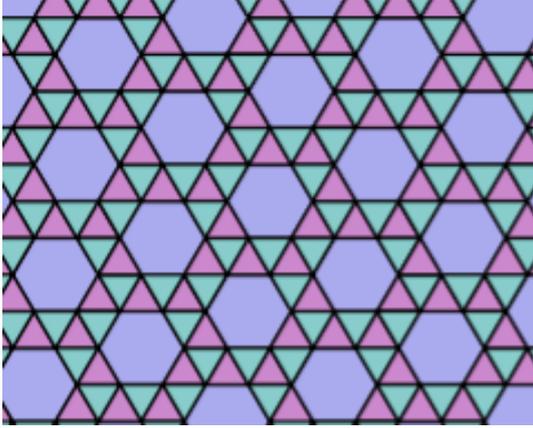

---



---



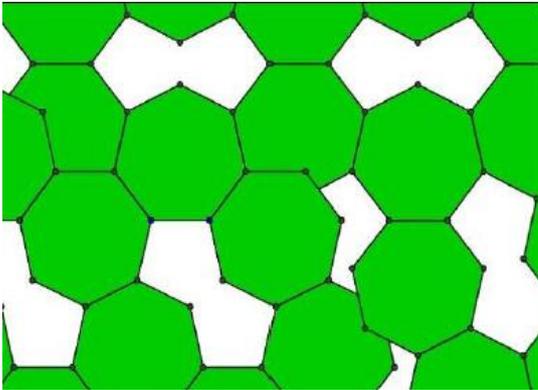
---



---

---

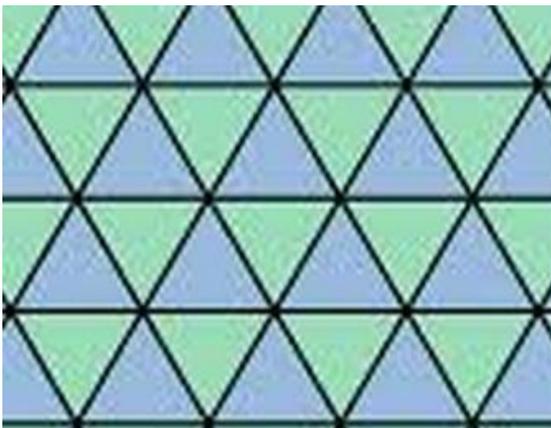
---



---

---

---



---

---

---

## ATIVIDADE 6: Construindo pavimentações com polígonos regulares de um só tipo.

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

### Exercícios

I) *Qualquer polígono regular pavimenta o plano sem que haja espaços vazios nem sobreposições?*

Utilizando a ferramenta polígono regular verifique se os polígonos abaixo pavimentam o plano, lembre-se que devemos utilizar polígonos de um só tipo em cada construção. Preencher a tabela com os resultados.

Polígono Regular	Número de lados	Pavimentam o plano?	
		Sim	Não
Triângulo equilátero			
Quadrado			
Pentágono regular			
Hexágono regular			
Heptágono regular			
Octógono regular			
Eneágono regular			
Decágono regular			
Undecágono regular			

II) Responder as perguntas seguintes:

- Quais polígonos regulares pavimentaram o plano?
- Quantos polígonos foram utilizados para dar a volta completa ao redor de um nó da pavimentação?
- Qual o valor da soma de todos os ângulos ao redor de um nó?
- Qual o valor de cada ângulo interno dos polígono que pavimentaram o plano?
- Existe relação entre a soma dos ângulos ao redor de um nó e o valor de cada ângulo do polígono que pavimentou o plano?

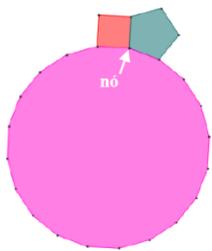
## ATIVIDADE 7 – Construindo pavimentações com polígonos de tipos diferentes

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

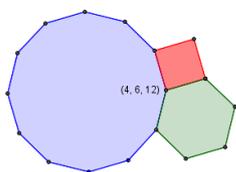
As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

### Exercícios

É possível pavimentar o plano com polígonos regulares de tipos diferentes?



Exemplo 1: Na figura temos uma pavimentação utilizando quadrado, pentágono e icosaedro, chamaremos essa configuração de (4, 5, 20) que corresponde ao número de lados dos polígonos ao redor de um nó.



Exemplo 2: Nesta configuração a notação foi feita no sentido horário iniciando pelo polígono de menor número de lados ao redor de um nó da pavimentação.

- 1) Utilizando 3 tipos de polígonos regulares em torno de um nó, quais configurações seriam possíveis? Preencha a tabela com os resultados encontrados.

Polígono 1	Polígono 2	Polígono 3
4	5	20
4	6	12

- a) Qual critério você utilizou para encontrar as pavimentações do plano?
- b) Continuando o processo de pavimentação, quais das configurações formam pavimentações do plano?
- c) Analisando os outros nós da pavimentação, essa configuração se mantém?

- d) Para aquelas que não pavimentaram o plano, que razão você daria para esse insucesso?
- 2) Utilizando 4 tipos de polígonos regulares em torno de um nó, quais configurações seriam possíveis? Preencha a tabela com os resultados encontrados.

<b>Polígono 1</b>	<b>Polígono 2</b>	<b>Polígono 3</b>	<b>Polígono 4</b>

- a) Qual critério você utilizou para encontrar as pavimentações do plano?
- b) Continuando o processo de pavimentação, quais das configurações formam pavimentações do plano?
- c) Analisando os outros nós da pavimentação, essa configuração se mantém?
- d) Para aquelas que não pavimentaram o plano, que razão você daria para esse insucesso?

- 3) Utilizando 5 tipos de polígonos regulares em torno de um nó, quais configurações seriam possíveis? Preencha a tabela com os resultados encontrados.

<b>Polígono 1</b>	<b>Polígono 2</b>	<b>Polígono 3</b>	<b>Polígono 4</b>	<b>Polígono 5</b>

- a) Qual critério você utilizou para encontrar as pavimentações do plano?
- b) Continuando o processo de pavimentação, quais das configurações formam pavimentações do plano?
- c) Analisando os outros nós da pavimentação, essa configuração se mantém?
- d) Para aquelas que não pavimentaram o plano, que razão você daria para esse insucesso?

## ATIVIDADE 8 – Identificando as configurações de uma pavimentação.

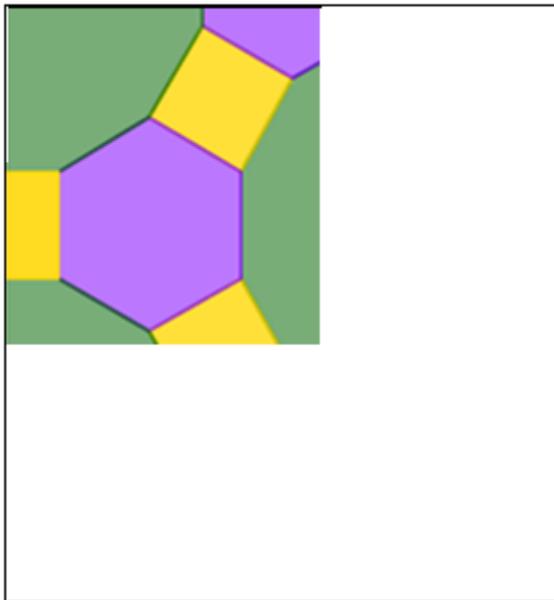
Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

### Exercícios

A seguir temos parte de pavimentações formadas por polígonos regulares, responda as perguntas e depois utilizando as ferramentas do Geogebra reproduza a pavimentação completando o quadro.

i)

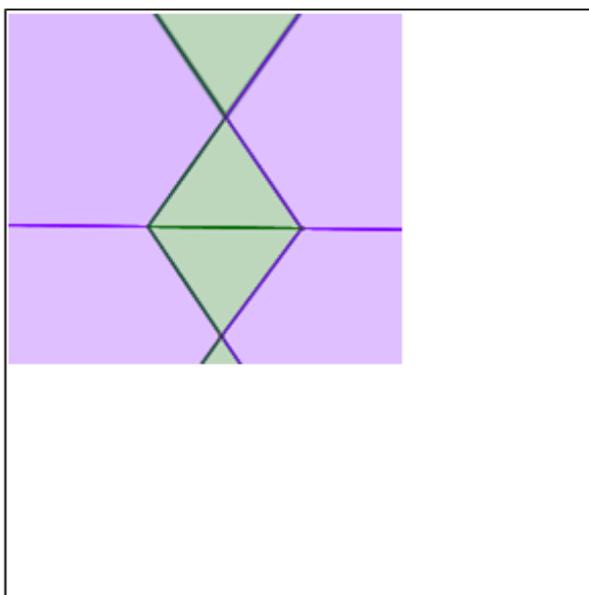


a) Quais polígonos compõem esta pavimentação?

b) Qual estratégia você utilizou para descobrir qual tipo de ladrilho foi utilizado nesta pavimentação?

c) Qual o tipo de configuração presente em cada nó dessa pavimentação?

II)

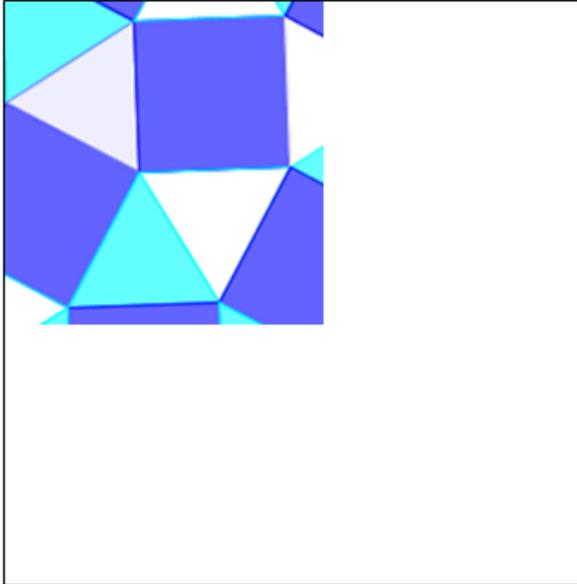


a) Quais polígonos compõem esta pavimentação?

b) Qual estratégia você utilizou para descobrir qual tipo de ladrilho foi utilizado nesta pavimentação?

c) Qual o tipo de configuração presente em cada nó dessa pavimentação?

III)

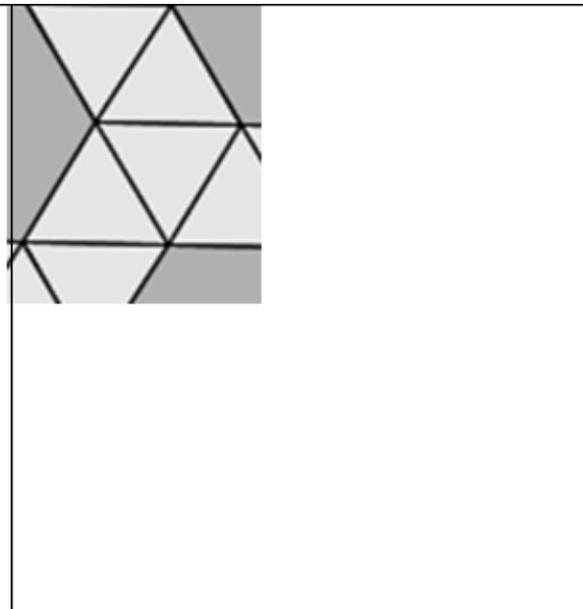


a) Quais polígonos compõem esta pavimentação?

b) Qual estratégia você utilizou para descobrir qual tipo de ladrilho foi utilizado nesta pavimentação?

c) Qual o tipo de configuração presente em cada nó dessa pavimentação?

IV)



a) Quais polígonos compõem esta pavimentação?

b) Qual estratégia você utilizou para descobrir qual tipo de ladrilho foi utilizado nesta pavimentação?

c) Qual o tipo de configuração presente em cada nó dessa pavimentação?

**ATIVIDADE 9 - Construindo pavimentações livres**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

Utilizando as ferramentas do Geogebra construa uma pavimentação usando a sua criatividade. Ficarà a seu critério utilizar polígonos regulares ou não regulares.

**ATIVIDADE 10 – Descobrimdo as transformações do plano**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

Utilizar as ferramentas do Geogebra.

1) Construa um polígono qualquer, de preferência um polígono irregular. Trace uma reta qualquer ao lado da figura. Use a ferramenta *reflexão em relação a uma reta*, selecione o polígono e depois clique na reta. Responda:

a) A imagem refletida manteve a mesma forma e tamanho da figura original?

b) Qual a característica você pode observar nesse tipo de simetria?

2) A reta traçada na atividade anterior recebe o nome de eixo de simetria, ela divide a figura em duas partes exatamente iguais. Há polígonos que possuem um ou mais eixos de simetria ou nenhum. Desenhe polígonos que possuam um, dois e nenhum eixo de simetria. Trace os eixos de simetria.

3) Desenhe novamente um polígono qualquer. Marque um ponto qualquer fora da figura. Utilize a ferramenta *rotação em torno de um ponto*, clique sobre a figura, depois no ponto, escolha o ângulo de  $90^\circ$ . Responda:

a) O que aconteceu com a figura?

b) A nova figura manteve forma e tamanho da figura inicial?

c) Se continuarmos a rotacionar a figura da mesma maneira indicada ela retornará ao seu ponto inicial? Quantos procedimentos iguais ao primeiro seriam necessários?

4) Desenhe outro polígono qualquer, desenhe um vetor, utilize a ferramenta *translação por um vetor*, clique na figura depois no vetor. Responda:

a) O que aconteceu com a figura?

b) A nova figura manteve forma e tamanho da figura inicial?

5) Quando uma figura é deslocada de sua posição inicial mantendo a forma e as medidas dizemos que se trata de uma transformação isométrica ou apenas isometrias. Quais são as isometrias estudadas nesta atividade?

**ATIVIDADE 11 – Construção de pavimentações com auxílio das transformações isométricas.**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

**Exercícios**

I) Com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos construa as três pavimentações com polígonos de um só tipo utilizando a reflexão, a rotação ou a translação.

Explique a técnica utilizada descrevendo os comandos usados na pavimentação.

**ATIVIDADE 12 - Criar uma pavimentação do tipo Escher**

Aluno(s) \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_.

As construções devem ser salvas na pasta com o seu nome.

**Exercícios**

a) Utilizando a técnica de Escher, construa um mosaico usando como base um triângulo equilátero, um quadrado ou um hexágono regular. Use sua imaginação e se sinta um artista.

b) Reproduza o mosaico construído na atividade anterior utilizando o Geogebra