Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho"
Campus Ilha Solteira
Departamento de Matemática

Victor Alonso Negro

A Cobweb e Recursão

Ilha Solteira - SP

2014

Victor Alonso Negro

A Cobweb e Recursão

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", câmpus de Ilha Solteira.

Orientador : Luciano Barbanti (MAT-FEIS-UNESP)

Ilha Solteira - SP

2014

Negro, Victor Alonso.
A cobweb e recursão / Victor Alonso Negro. -- São José do Rio Preto, 2014
47 f. : il.

Orientador: Luciano Barbanti
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Sequências recorrentes (Matemática) 3. Teoria de recursão. 4. Modelos matemáticos. 5. Matemática - Metodologia. I. Barbanti, Luciano. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.962.27

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Victor Alonso Negro

A Cobweb e Recursão

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", câmpus de Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luciano Barbanti
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. Edison Righeto
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. Jaqueline Godoy Mesquita
Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto / Universidade de São Paulo

Ilha Solteira - SP

08 de dezembro de 2014

RESUMO

Esse trabalho apresenta uma proposta relacionada ao ensino de alguns conceitos de equações recorrentes com um olhar voltado para a cobweb. Sua construção ajuda o aluno a pensar recursivamente, apoiado em um ponto de vista geométrico, num ambiente predominantemente “algébrico”. Serão apresentadas estratégias para a resolução de recorrências lineares de primeira e segunda ordem, buscando deixar para o professor do ensino médio a compreensão dos conceitos, para que ele possa aplicar em suas aulas. Ademais, o trabalho trata de pontos singulares e estabilidade, no caso não linear. No final, são dadas ideias para o tirocínio dos alunos em classe.

Palavras-chave: Recorrência. Cobweb. Modelagem matemática.

ABSTRACT

This work deals with the teaching of some concepts on recurrent equations taking in account the cobweb. The method used to construct the cobweb is easily assimilated, and has connection with topics of high school and helps students to think recursively with the support of a geometric point of view, in a predominantly "algebraic" environment .It will be presented strategies for solving linear recurrences of the first and second order, seeking to leave high school teachers to be understanding the concepts, allowing in this way applications in their classes. Furthermore, the work deals with singular points and stability in the non-linear case. Finally ideas are given for practical training of students in class.

Key Words: Recurrences. Cobweb. Mathematical modeling.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO GERAL 8

Capítulo 1: Conjuntos de números definidos recursivamente 9

1.1. Classificação de uma recorrência. 11

Capítulo 2: A Cobweb 12

Capítulo3: Recorrências lineares 15

3.1 Recorrências lineares de primeira ordem 15

3.1.1 Construção de fórmulas fechadas 15

3.1.2 Termo geral de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica 22

3.2 Recorrências Lineares De Segunda Ordem 25

Capitulo 4. Estabilidade das órbitas de uma recursão 30

4.1. Critérios de estabilidade em recorrências lineares de primeira ordem 30

Capitulo 5. Recorrências não lineares 36

Capitulo 6: Uma proposta para o ensino médio 41

6.1. Número de ouro de Fibonacci e de prata de Pell 41

6.2. Aplicabilidade de recursão (problemas que são comumente encarados como de "análise combinatória" e podem ser resolvidos mais facilmente com a ajuda de recorrências) 43

Capítulo 7 :Conclusão e foco de futura pesquisa 45

REFERÊNCIAS 46

1 INTRODUÇÃO GERAL

Entre as falhas observadas hoje no ensino médio, uma das relevantes é a falta de valorização do raciocínio recursivo. O seu ensino, infelizmente, não está sendo enfatizado nessa etapa. A ideia de recorrência é muito usada, por exemplo, nas linguagens de computadores, na demonstração de teoremas em estruturas axiomatizadas, na inferência de resultados futuros em processos evolutivos, etc. Entretanto, os livros didáticos não se adaptaram totalmente a essas novas tecnologias. Eles ainda estão escritos para um ambiente pré-computacional.

Além disto, temos que levar em conta que do ponto de vista do aluno, recursão, é por um lado, um tema de difícil compreensão, enquanto por outro lado, impacta fortemente a psicologia do adolescente, pois estes têm uma experiência prazerosa e estimulante em "descobrir fórmulas" (de recorrência). Navegando no meio destes dois antagonismos é que devemos situar a abordagem da recursividade para o ensino médio.

O pensamento recursivo consiste em buscar um padrão e usar instâncias particulares para tentar chegar a termos gerais na construção de conjuntos e sequências.

No ensino médio, a recursividade aparece em vários contextos como em matemática financeira (por exemplo: para encontrar o valor de um capital aplicado em *n* períodos), nas sequências (para encontrar o n-*ésimo* termo, como nas progressões geométricas e aritméticas).

Muitas vezes são apenas apresentadas fórmulas, omitindo o verdadeiro raciocínio recursivo por trás de sua construção. Buscaremos aqui mostrar técnicas que ajudem o aluno a pensar recursivamente para que possam, posteriormente, chegar à graduação com essas ideias amadurecidas.

Como esse trabalho, pretendemos dar elementos didáticos visando como usuário final o aluno do ensino básico, as provas, as buscas por padrões etc. Para isso serão trabalhados assuntos mais pertinentes a estes, tais como, progressões, geometria, matemática financeira e outros assuntos que estão em seus currículos.

2 CONJUNTOS DE NÚMEROS DEFINIDOS RECURSIVAMENTE

A ideia de recorrência (ou recursão) é muito usada nas linguagens de computadores, na demonstração de teoremas em estruturas axiomatizadas, na inferência de resultados futuros em processos evolutivos, etc.(ver [2,3,4,5]).

Podemos definir recursão de diversas maneiras, talvez porque a palavra seja especificamente expressiva na língua Portuguesa. *Recursão* é um procedimento que define um elemento a partir dos elementos anteriores segundo uma regra.

Uma sequência $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com $x(n) = x_n$ é *definida recursivamente* (ou *é uma recursão*) se ela for dada por uma regra (*recorrência*) que permite identificar um termo qualquer por meio de uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, do modo abaixo:

$$x_{n+1} = f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Esta expressão é também chamada de *fórmula de recorrência*. O conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é chamado de *conjunto das condições iniciais*. Durante toda esta dissertação suporemos que para todo $j \geq 0$,

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n})$$

sempre existe.

Uma *solução* desta (fórmula de) recorrência, em relação aos termos iniciais $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, é a determinação de qualquer termo da sequência em função da posição *n* que ele ocupa. Frequentemente, seguindo a literatura, daremos a solução, expressando cada termo segundo uma "fórmula fechada".

Observamos que ao longo do trabalho, em algumas ocasiões, vamos identificar a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como uma restrição a $\mathbb{N}$ de uma a função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (e que continuamos a denotar como *f*).

Exemplo 1: Na sequência dos números pares 0, 2, 4, 6, 8,..., cada termo é igual seu antecessor somado com o número 2, ou seja, o conjunto dos números pares é a solução da *fórmula de recorrência* (ou recursão):

$x_{n+1} = x_n + 2$, com $x_0 = 0$.

Note que essa recursão só se “realizou” univocamente quando foi fixada a condição inicial $x_0 = 0$. Caso contrário, qualquer progressão aritmética de razão 2 seria solução da relação $x_{n+1} = x_n + 2$.

Como vemos no Exemplo 1 acima, o conceito de condição inicial é crucial no processo de recursão. A regra $x_{n+1} = x_n + 2$ é a recursão. Para cada dado inicial x_0, temos uma realização deste procedimento recursivo.

O conjunto de números obtidos, usando a recursão, a partir de uma condição inicial $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, é chamado de uma *realização da recursão*, ou mais comumente, *órbita* do processo.

Exemplo 2: Uma sequência que é extremamente importante, desde que foi usada para determinação do número futuro de animais numa criação, por Leonardo de Pisa (o Fibonacci) em 1202 (ver [5]) é a sequência de Fibonacci, dada pela recursão $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, indicando que cada termo a partir do terceiro é igual à soma dos dois anteriores. Tomando a condição inicial $x_0 = x_1 = 1$, temos a seguinte solução:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \qquad n \in \{0,1,2,3,..\}.$$

Como vimos, nestes dois exemplos, as soluções da recursão, isto é, as fórmulas (fechadas) que indicam o termo em função da posição *n* que o número ocupa são respectivamente:

$$x_n = 2(n-1) + 2, \qquad \text{com } n \in \{0,1,2,3,..\} \qquad \text{e}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \text{ com } n \in \{0,1,2,3,..\}.$$

As órbitas determinadas pelas condições iniciais em cada caso são respectivamente $\{0,2,4,6,8,\dots\}$ e $\{1,1,2,3,5,\dots\}$.

Mostraremos, no decorrer deste capítulo, como chegar à fórmula fechada de uma relação recursiva. Mas antes, vamos classificar uma equação de recorrência, segundo suas características que ao longo do tempo foram consideradas as mais importantes.

2.1 Classificação de uma recorrência

Classificamos uma equação de recorrência (ver [6,7]) quanto à sua:

- Ordem,
- Homogeneidade,
- Linearidade.

A ordem: A *ordem* nos dá o número de termos anteriores do qual o termo geral depende. Por exemplo, um termo geral que depende só do termo anterior é dito uma recorrência de 1ª ordem; Por outro lado, a equação de recorrência que nos dá um termo em função de 2 termos anteriores é dito uma recorrência de 2ª ordem, e assim por diante.

A homogeneidade - A recursão é *homogênea*, quando não possuir o termo independente dos termos da forma x_j, e *não-homogênea*, caso contrário.

A linearidade - Uma recorrência é dita *linear* quando o expoente dos termos anteriores do termo geral são todos iguais a 1.Caso contrário, é dita *não-linear*.

Ao tratarmos com uma recorrência, vemos que a estrutura do conjunto de suas órbitas pode ser extremamente complexa. Neste sentido, podemos sempre procurar para entender a estrutura deste conjunto, especialmente alguns objetos estruturalmente relacionados comuns a toda recursão (ver [8]), e que são, a saber:

- Pontos fixos.
- Comportamento de uma órbita, quando *n* tende ao infinito.

3 A COBWEB

A *cobweb* (teia de aranha em inglês) em Matemática é um objeto no $\mathbb{R}^2$ e é uma construção essencialmente de cunho geométrico, usada para a interpretação e indicação de propriedades algébricas de funções envolvidas numa recursão, propiciando a observação logo de imediato da estrutura das órbitas desta mesma recursão (ver [9]).

Em termos gerais, a *cobweb da função f(x), contínua, relativamente à função c(x), contínua, (base da cobweb)* é construída assim:

1-no plano cartesiano com coordenadas x e y (abscissas e ordenadas, respectivamente), são traçados os gráficos de $f(x)$ e $c(x)$.

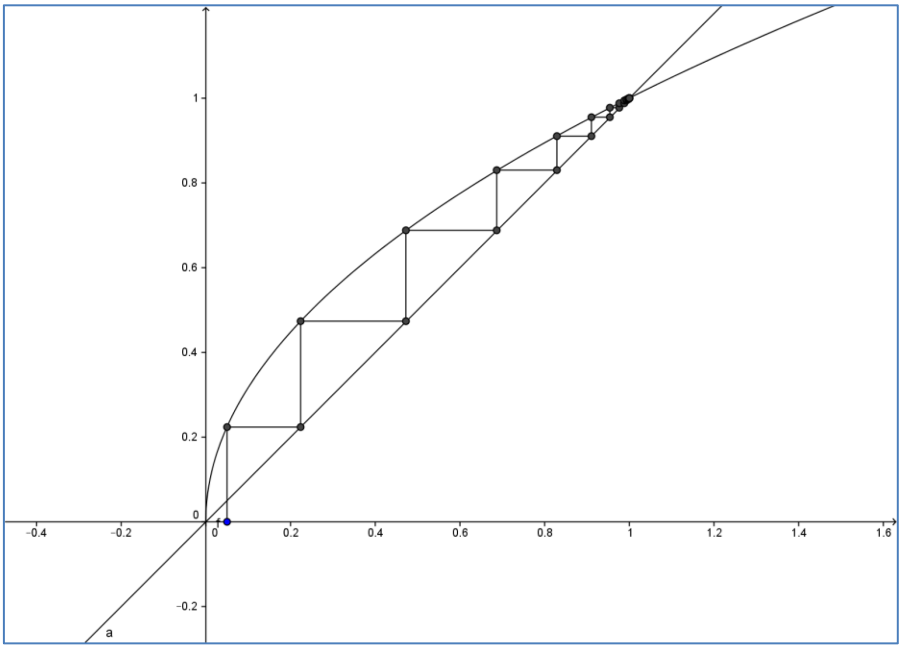
2-O processo do desenho da cobweb começa por um ponto x_0 no eixo horizontal. Traça-se uma reta paralela ao eixo y (na vertical) até encontrar a curva *Graf f* em $(x_0, f(x_0))$. A partir deste ponto, é traçada uma reta paralela ao eixo *x* até encontrar $Graf\ c$ em $(x_1, c(x_1) = f(x_0))$. Daí, novamente é traçada uma reta vertical até atingir a curva *Graf f*, repetindo-se à partir daí o procedimento indefinidamente. O diagrama assim obtido, é a cobweb.

Obs.: A cobweb como usada na literatura Matemática, considera sempre o caso $c(x) = x$. Modernamente, existem modelos de sistemas de evolução, com derivadas fracionárias, discretos em intervalos de tempo não uniformes onde c(x) difere da identidade.

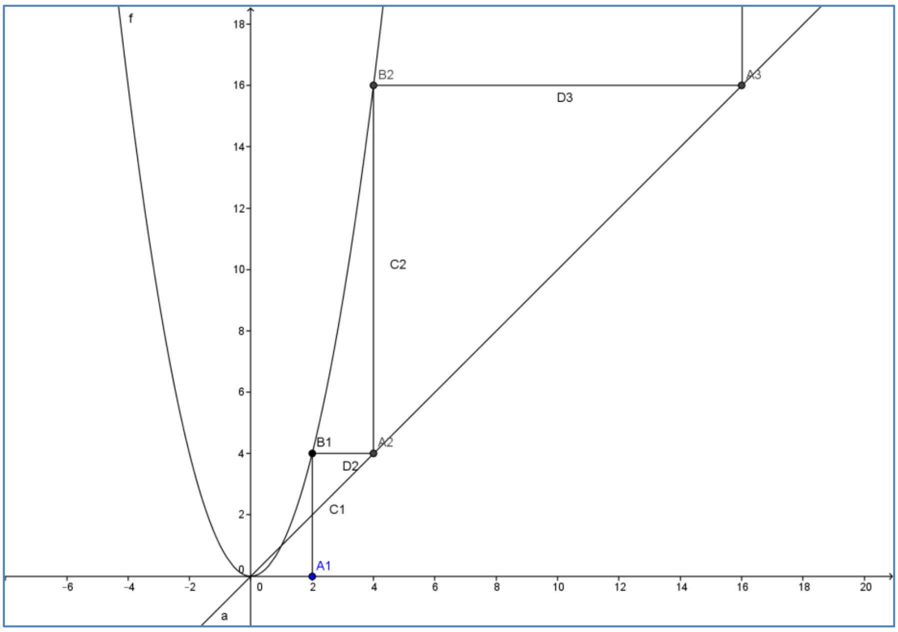
Doravante, neste trabalho, consideramos sempre $c(x) = x$.

Observe os exemplos abaixo:

Se $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0{,}05$, teremos a cobweb com a seguinte configuração:



Se $f(x) = x^2$, e $x_0 = 2$, teremos:



Observe no primeiro exemplo, segundo o sugerido pela cobweb, que a sequência recursiva

$$0{,}05;\, 0{,}47;\, 0{,}68;\, \ldots$$

tende a 1.

Já no segundo, após algumas interações, percebermos pela observação na cobweb que a sequência está tendendo para o infinito quando *n* tende ao infinito. Os pontos fixos de *f* são a intersecção dos gráficos de *f* e de c(x)=x, os pontos 0 e 1 em ambos os casos.

Vamos, no próximo capitulo, estabelecer métodos para a obtenção da solução (fórmula fechada) das formulas de recorrência linear de 1ª. e 2ª ordem. Nesta fase, ainda não necessitaremos de um uso essencial da cobweb. Mas, é no âmbito das recorrências não-lineares, que a cobweb mostrará sua potência na análise de pontos fixos e tendência das orbitas com o crescer da posição *n*.

4 RECORRÊNCIAS LINEARES

Vamos estudar, neste capítulo, em detalhes a solução de recorrências lineares de 1ª. e 2ª.ordem (ver [10,11,12]).

4.1 Recorrências lineares de primeira ordem

As recorrências lineares de primeira ordem são as sequências em que um termo qualquer a partir do segundo é definido por uma expressão que envolve o termo anterior, sem elevá-lo a um expoente maior do que 1. De forma geral, uma recorrência linear de primeira ordem pode ser expressa por

$$x_{n+1} = g(n)x_n + f(n),$$

onde *g(n)* e *f(n)* são funções reais de $n \in \mathbb{N}$.(ver [7]).

4.1.1 Construção de fórmulas fechadas

Começaremos com casos particulares, mas de uma forma geral, para encontrar a fórmula fechada, temos que primeiro reiterar a sequência algumas vezes começando por x_0 *e* x_1, conjecturar uma possível solução e verificar por indução matemática se a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esse último passo, vamos relembrar o princípio da indução matemática. (ver [13,14]).

Teorema 1 : *(Princípio da Indução Matemática).* Seja P(n) uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$. Suponha que:

(i) P(1) é verdadeira, e

(ii) qualquer que seja $n \in N$, sempre que P(n) é verdadeira, segue-se que P(n + 1) é verdadeira.

Então, P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos resolver o exemplo abaixo.

Exemplo 1: Resolver a recorrência $x_{n+1} = 4x_n$, com condição inicial $x_1 = 5$.

Obtendo os quatro primeiros termos da sequência, temos:

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 4x_1 = 4.5 = 20$$
$$x_3 = 4x_2 = 4.20 = 80$$
$$x_4 = 4x_3 = 4.80 = 320$$

Expressando x_4 em função de x_1, temos que $x_4 = 4x_3 = 4.4x_2 = 4.4.4x_1 = 4^3x_1$. Logo, é possível deduzir que $x_n = 4^{n-1}.x_1$, e como $x_1 = 5$, uma provável fórmula que representa a sequência ou solução da equação é $x_n = 4^{n-1}.5$, que aparentemente é a fórmula que nos permite escrever qualquer termo da sequência em função da posição *n* ocupada por ele. Porém, temos que provar essa hipótese.

Vamos usar o princípio da indução matemática para mostrar que para todo natural *n*, a solução $x_n = 4^{n-1}.5$ obtida para a recorrência $x_{n+1} = 4x_n$, com $x_1 = 5$ é válida.

Primeiro, tomamos a fórmula $x_n = 4^{n-1}.5$ e verificamos sua validade para
n = 1:

$$x_1 = 4^{1-1}.5 = 5$$

Observe que P(1) é verdadeira.
Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja:

$$x_n = 4^{n-1}.5$$

Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, logo devemos ter $x_{n+1} = 4^n.5$. Tomando a igualdade $x_n = 4^{n-1}.5$ (que, por hipótese, é verdadeira) e multiplicando por 4 ambos os lados, temos:

$$4x_n = 4.4^{n-1}.5 = 4^n.5.$$

Mas, pela equação de recorrência, temos que $x_{n+1} = 4x_n$, logo $x_{n+1} = 4^n.5$. Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) for verdadeira. Pelo Princípio da Indução Matemática, a fórmula é válida para todo número natural *n*.

A seguir, veremos um exemplo extraído de [1], p.69-71.

Exemplo 2: Vamos resolver a recorrência $X_{n+1} = nX_n$, onde $X_1 = 1$.

Escrevendo, os quatro primeiros termos da sequência, temos:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 1X_1 = 1.1 = 1$$
$$X_3 = 2X_2 = 2.1 = 2$$
$$X_4 = 3X_3 = 3.2 = 6$$

Expressando X_4 em função de X_1, então temos:

$$X_4 = 3X_3 = 3.2X_2 = 3.2.1X_1$$

Observamos que 3.2.1 = 3!. Logo X_4 = 3! X_1. Deduzimos que X_n = (n - 1)! X_1. Como $X_1 = 1$, conjeturamos que X_n = (n - 1)! é a provável solução da recorrência. Todavia, é necessário provar esta hipótese por indução. Primeiro tomamos X_n = (n - 1)! e verificamos a fórmula para n = 1: X_1 = (1 - 1)! = (0)! =1. (Por convenção, temos que (0)! = 1).
Observe que P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora que, para algum *n* natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, X_n = (n - 1)!. Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que X_{n+1} = n!. Tomando a igualdade X_n = (n - 1)! e multiplicando ambos os termos por n, então temos n X_n = n(n - 1)! = n!

Mas, pela equação de recorrência, temos que $X_{n+1} = nX_n$, logo X_{n+1} = n!. Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Provamos, por indução, que a fórmula é válida para todo número natural n.

Resolveremos esse exercício de outra forma, e usaremos um método chamado de *produto telescópio,* ele será muito útil quando a equação de recorrência linear de primeira ordem for homogênea, ou seja, da forma $x_{n+1} = g(n)x_n$.

Sendo $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$, temos que:

$$x_2 = 1x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = (n-1)x_{n-1}$$

Assim, segue que:

$$x_2.x_3.x_4 \dots x_n = 1.2.3 \dots.(n-1)x_1.x_2.x_3 \dots x_{n-1}$$

E desde que os termos sejam não nulos, podemos simplificar a equação obtendo :

$$x_n = 1.2.3 \dots.(n-1).x_1 = (n-1)!\,x_1$$

que é a mesma fórmula fechada que chegamos anteriormente.

Quando a equação de recorrência for do tipo $x_{n+1} = x_n + f(n)$, ou seja, o coeficiente de x_n é igual a um, a resolução se torna simples se usarmos uma técnica chamada *soma telescópica*, que torna possível a simplificação dos termos, conforme podemos observar no exemplo a seguir:

Exemplo 3: Dada a recorrência $x_n = x_{n-1} + 3n,$ com $x_1 = 3$. Uma fórmula fechada para essa relação pode ser obtida pensando da seguinte maneira:

$$x_2 = x_1 + 3.2$$
$$x_3 = x_2 + 3.3$$
$$x_4 = x_3 + 3.4$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1} + 3.n$$

Adicionando as igualdades, temos:

$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$

Logo,

$$x_n = x_1 + 3\left(\frac{n^2 + n}{2} - 1\right)$$

E como $x_1 = 3$, temos:

$$x_n = 3 + \frac{3n^2 + 3n}{2} - 3$$

Então, conjecturamos que uma possível solução para a recorrência $x_n = x_{n-1} + 3n$, com $x_1 = 3$ é $x_n = \frac{3n^2+3n}{2}$. Vamos provar por indução matemática essa hipótese. Tomando $x_n = \frac{3n^2+3n}{2}$ e verificamos a fórmula para n=1: $x_1 = \frac{3.1^2+3.1}{2} = 3$. Observe que P(1) é verdadeira. Suponhamos agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira, ou seja, $x_n = \frac{3n^2+3n}{2}$. Queremos provar que P(n + 1) é verdadeira, ou seja, que $x_{n+1} = \frac{3(n+1)^2+3(n+1)}{2} = \frac{3n^2+9n+6}{2}$. Como $x_{n+1} = x_n + 3(n + 1)$. Tomamos a igualdade $x_n = \frac{3n^2+3n}{2}$ e somando $3(n + 1)$ a ambos os termos da igualdade, temos:

$$x_n + 3(n + 1) = \frac{3n^2+3n}{2} + 3n + 3 = \frac{3n^2+3n+6n+6}{2} = \frac{3n^2+9n+6}{2}.$$

Mas, pela equação de recorrência, temos que $x_{n+1} = x_n + 3(n + 1)$, logo x_{n+1}=$\frac{3n^2+9n+6}{2}$. Isso mostra que P(n + 1) é verdadeira toda vez que P(n) é verdadeira. Provamos por indução que a fórmula é válida para todo número natural n.

Na equação de recorrência linear de primeira ordem $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$, vimos que se $f(n)$ é nulo, resolvemos com o produto telescópico, e se $f(n)$ não for nulo, mas $g(n)$ for igual a um, podemos resolver com o produto telescópico, agora vamos mostrar como resolver uma recorrência linear de primeira ordem quando $g(n)$ for diferente de 1 e $f(n)$ não nulo.

Usando como exemplo a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 5$, percebemos que se usarmos a soma telescópica os termos não serão simplificados como no Exemplo 3, mas o que nos ajuda a resolver esse problema é o fato de podermos transformar uma recorrência do tipo $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$ em outra da forma $x_{n+1} = x_n + h(n)$ (fazendo isso, voltamos no caso do exemplo 3 e podemos resolver usando a soma telescópica) usando o seguinte teorema extraído de [15].

Teorema 2: Se a_n é uma solução não-nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$ em $y_{n+1} = y_n + f(n)[g(n).a_n]^{-1}$.

Demonstração: A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a igualdade $x_{n+1} = g(n)x_n + f(n)$ em $a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + f(n)$. Porém, sabemos que $a_{n+1} = g(n)a_n$, já que a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Então, a equação se transforma em:
$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + f(n)$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + f(n)[g(n).a_n]^{-1}$ □

Usando esse teorema, podemos resolver o exemplo dado acima.

Exemplo 4: Encontre a fórmula fechada da equação de recorrência
$x_{n+1} = 3x_n + 5$, com $x_1 = 2$.

Uma solução não-nula para a equação de recorrência homogênea $x_{n+1} = 3x_n$ é $x_n = 3^{n-1}$, ou qualquer outra progressão geométrica de razão 3. Assim substituindo $x_n = 3^{n-1}y_n$, obtemos $3^n y_{n+1} = 3.3^{n-1}y_n + 5$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 5.(3^{-n})$. Voltando para o caso do exemplo 3, como queríamos, usando a soma telescópica, temos:

$$y_2 = y_1 + 5.(3^{-1})$$
$$y_3 = y_2 + 5.(3^{-2})$$
$$y_4 = y_3 + 5.(3^{-3})$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + 5.\left(3^{-(n-1)}\right)$$

Somando as equações, temos:

$$y_n = y_1 + 5(3^{-1}.3^{-2} \dots .3^{-(n-1)}) = y_1 + 5(\frac{1 - 3^{(1-n)}}{2})$$

Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos que $y_1 = 2,$ e $y_n = 2 + 5\left(\frac{1-3^{(1-n)}}{2}\right)$. Disso, temos que:

$x_n = 3^{n-1}.\left[2 + 5\left(\frac{1-3^{(1-n)}}{2}\right)\right] = 2.3^{n-1} + \frac{5}{2}.3^{n-1} - \frac{5}{2} = \frac{3^{n+1}-5}{2}.$

Portanto, a fórmula fechada para a equação de recorrência é dada por:

$x_{n+1} = 3x_n + 5$, com $x_1 = 2$ é $x_n = \frac{3^{n+1}-5}{2}$.

(Resumo)

Para um aluno que teve pouco ou nenhum contato com esse tipo de raciocínio, é interessante que o professor trilhe o caminho que o aluno vai fazer para chegar a fórmula fechada de uma equação de recorrência. Com o tempo, o aluno se familiarizará com o conteúdo e passará a resolver de forma natural. A tabela abaixo mostra o caminho que o aluno deve seguir para resolver o exercício que envolva uma equação de recorrência linear de 1ª ordem:

Forma	**Como resolver**
$X_{n+1} = qX_n$	Produto telescópico
$X_{n+1} = X_n + f(n)$	Soma telescópica
$X_{n+1} = g(n)X_n + f(n)$	Teorema do algoritmo

Observação: Em qualquer um dos casos, pode se reiterar finitas vezes a recorrência e conjecturar uma possível solução.

Observamos que o Teorema do algoritmo citado na tabela acima é o procedimento usado para resolver equações recorrentes do tipo $X_{n+1} = g(n)X_n + f(n)$. Separando em quatro passos o caminho da resolução, temos:

Passo 1: Achar uma solução não nula da equação $X_{n+1} = g(n)X_n$.

Passo 2: Fazer a substituição $X_n = a_n y_n$, onde a_n é a solução não nula encontrada no passo 1.

Passo 3: Com a substituição feita no passo 2, chegar na equação $Y_{n+1} = Y_n + h(n)$, lembrando que $X_1 = a_n y_1$.

Passo 4: Voltar no passo 2 com a solução encontrada no passo 3.

4.1.2 Termo geral de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica

Analisando agora dois casos particulares de uma equação de recorrência linear de primeira ordem não homogênea, que são as progressões aritmética e geométrica, (ver [15]) já que estão na grade do ensino médio e podem ser usadas como exemplo para a introdução do pensamento recursivo para o aluno.

-Termo geral da progressão aritmética

Progressão aritmética é uma sequência em que qualquer termo a partir do segundo, é o anterior somado com uma constante chamada de razão. Dessa definição, concluímos que progressão aritmética é uma relação de recorrência linear de primeira ordem não homogênea cuja a equação é dada por $x_{n+1} = x_n + r$, com r constante. Vamos encontrar a fórmula fechada dessa equação:

$$x_2 = x_1 + r$$
$$x_3 = x_2 + r$$
$$x_4 = x_3 + r$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1} + r$$

Somando as equações temos que:

$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + (n-1)r$$

Logo, simplificando essa equação, obtemos:

$$x_n = x_1 + (n-1)r$$

que é a fórmula que encontra um termo qualquer de uma progressão aritmética em função da posição que ele ocupa.

A fórmula fechada para a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é facilmente encontrada usando o método de Gauss, que utiliza a propriedade das somas dos termos equidistantes de uma progressão aritmética serem constantes para ser conjecturada, e pelo uso frequente em sala de aula, os professores já estão familiarizados com esse método, e a validade da fórmula é também verificada por indução.

-Termo geral da progressão geométrica

Progressão geométrica é uma sequência em que qualquer termo a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante chamada de razão. Dessa definição, concluímos que progressão geométrica é uma relação de recorrência linear de primeira ordem homogênea cuja a equação é dada por $x_{n+1} = qx_n$ com q constante. Vamos encontrar a fórmula fechada dessa equação:

$$x_2 = qx_1$$
$$x_3 = qx_2$$
$$x_4 = qx_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = qx_{n-1}$$

Multiplicando as equações anteriores temos

$$x_2.x_3.x_4 \dots x_n = x_1.x_2.x_3 \dots x_{n-1}.q^{n-1}$$

Que simplificando a equação anterior, temos:

$$x_n = x_1.q^{n-1}$$

Logo, temos a fórmula fechada que encontra um termo qualquer de uma progressão geométrica em função da posição que ele ocupa.

Outra forma de encontrar a fórmula fechada de uma progressão geométrica (aritmética também) é reiterando os termos e conjecturando uma possível solução, e prová-la por indução finita.

Vamos ver o exemplo extraído de [16]:

(a) Defina progressão geométrica de primeiro termo *a* e razão *q* ($q \neq 0$ e $q \neq 1$).

(b) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de *a*, *n* e *q*. Em seguida, prove essa fórmula por indução de n.

(c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de *a*, *n* e *q*. Em seguida, prove essa fórmula por indução em *n*.

(d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para S_n em função de a, a_n e q.

Resolução:

(a) Progressão geométrica com primeiro termo a e razão q é uma sequência numérica que o primeiro termo da sequência é a e cada termo a partir do segundo é o anterior multiplicado pela razão q

(b) Pela definição de progressão geométrica, temos que $a_n = a_{n-1}q$, para $n \geq 2$ e $a_1 = a$. Então, temos que:

$$a_2 = a_1 q = aq$$
$$a_3 = a_2 q = aq.q = aq^2$$
$$a_4 = a_3 q = aq^2 q = aq^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = aq^{n-1}\text{, para todo } n \geq 1.$$

Vamos provar essa conjectura por indução em n.
Para $n = 1$ temos $a_1 = aq^{1-1} = a$. Portanto, verdadeiro.
Agora, suponhamos que o resultado é válido para algum $n = k \geq 1$. Temos $a_k = aq^{k-1}$ e para $n = k+1$, segue que $a_{k+1} = a_{k-1+1}.q = a_k.q = aq^{k-1}q = aq^k$ e, portanto, está provada a conjectura.

(c) Como $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$... e $a_n = aq^{n-1}$, temos que $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$ e multiplicando os dois lados da igualdade por q segue que $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$. Logo, temos que $S_n - qS_n = a - aq^n$, ou seja, $S_n(1-q) = a(1-q^n)$ e concluímos que $S_n = \frac{a(1-q^n)}{(1-q)}$, para todo $n \geq 1$. Para provar esse resultado, usaremos indução em n. Para n=1 temos $S_1 = \frac{a(1-q)}{(1-q)} = a$. Portanto, verdadeiro. Agora suponhamos que o resultado é válido para algum $n = k \geq 1$. Temos $S_{k+1} = a + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a(1-q^k)}{(1-q)} + aq^k = \frac{a - aq^k + aq^k - aq^{k+1}}{1-q}$ $= \frac{a(1-q^{k+1})}{(1-q)}$, e, portanto, está provada a conjectura.

(d) $S_n = \frac{a(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{a-q^n}{(1-q)} = \frac{a-a_{n+1}}{(1-q)} = \frac{a-a_nq}{(1-q)}$.

4.2 Recorrências Lineares De Segunda Ordem

As recorrências lineares de segunda ordem são as sequências em que um termo qualquer a partir do terceiro é definido por uma expressão que envolve os dois termos anteriores, sem elevá-los a um expoente maior do que um. De forma geral, uma recorrência linear de segunda ordem pode ser expressa por:

$$x_{n+2} = g(n)x_{n+1} + f(x)x_n + h(n)$$

onde $g(n), f(n) e\ h(n)$ são funções reais para $n \in \mathbb{N}$.

Nesse trabalho, estudaremos um caso particular da recorrência linear de segunda ordem, as homogêneas e de coeficientes constantes. Sua equação de recorrência será do tipo

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$$

onde p e q são constantes e $q \neq 0$, se q fosse igual a zero, obteríamos numa recorrência linear de primeira ordem. Sem perda de generalidade, vamos escrever essa equação na forma

$$x_{n+2} = -px_{n+1} - qx_n$$

que implica:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Para que uma recorrência do tipo acima nos defina uma sequência, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais. Até agora não tem muita novidade se compararmos com a recorrência linear de primeira ordem, porém a dificuldade começa quando se tenta encontrar uma solução desse tipo de equação, nas recorrências de primeira ordem. Quando íamos reiterando os primeiros termos, era possível conjecturar uma solução, mas esse método se mostra ineficiente quando utilizamos nas equações de segunda ordem. Vamos mostrar agora um método para obter a solução desse tipo de recorrência.

Se o coeficiente q fosse nulo, a solução da recorrência seria uma progressão geométrica. Portanto é natural então conjecturarmos uma solução não nula do tipo $x_n = ab^n$ para essa recorrência linear de segunda ordem, e fazendo isso vamos conseguir a solução para essa equação, como será mostrado abaixo:

Considere a equação da recorrência homogênea de segunda ordem dada abaixo:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Substituindo $x_n = ab^n$ na equação acima temos:

$$ab^{n+2} + pab^{n+1} + qab^n = 0.$$

E colocando ab^n em evidência

$$ab^n(b^2 + pb + q) = 0$$

Como ab^n é não nulo, temos que $(b^2 + pb + q) = 0$, e, portanto, para encontrarmos o coeficiente b de $x_n = ab^n$, basta resolver esta equação do segundo grau denominada *equação característica.*

O teorema abaixo que pode ser encontrado em [1] prova que se as raízes da equação característica $b^2 + pb + q = 0$ são $r_1 \; e \; r_2, com \; r_1 \neq r_2$, a solução da equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ é dada por:

$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com $C_1 \; e \; C_2$ constantes.

Teorema 1: Se as raízes de $b^2 + pb + q = 0$ são $r_1 \; e \; r_2, com \; r_1 \neq r_2$, então x_n é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ se, e somente se $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com $C_1 \; e \; C_2$ constantes.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer valores das constantes $C_1 \; e \; C_2$.

Substituindo $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando convenientemente os termos, temos:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n =$$
$$C_1 r_1{}^{n+2} + C_2 r_2{}^{n+2} + p(C_1 r_1{}^{n+1} + C_2 r_2{}^{n+1}) + q(C_1 r_1{}^{n} + C_2 r_2{}^{n}) =$$
$$C_1 r_1^n (r_1{}^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2{}^2 + pr_2 + q)$$

Como $r_1 \; e \; r_2$ são raízes de $b^2 + pb + q = 0$, logo

$$C_1 r_1^n . 0 + C_2 r_2^n . 0 = 0$$

A segunda parte do teorema mostra que se $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência tem a forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$.

Sendo y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinando as constantes $C_1 \; e \; C_2$ como soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1{}^2 + C_2 r_2{}^2 = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \; e \; C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

que é possível, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 {r_1}^n - C_2 {r_2}^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - C_1 {r_1}^n (r_1^2 + p r_1 + q) - C_2 {r_2}^n (r_1^2 + p r_1 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero pois y_n é solução de $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$, enquanto os dois últimos parênteses são iguais a zero porque $r_1 \; e \; r_2$ são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então, $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos que $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$. Então $z_n = 0$ para todo n. □

Com isso, conseguimos obter uma fórmula fechada para a sequência de Fibonacci ($x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, com $x_0 = x_1 = 1$), que foi levantada no começo capítulo 1. Como sua equação característica é $b^2 = b + 1$, então $b^2 - b - 1 = 0$, calculando suas raízes obtemos, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Utilizando o teorema dado acima, temos:

$$x_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Como $x_0 = x_1 = 1$, então para encontrar as constantes C_1 e C_2, basta resolver os sistema abaixo:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Chegando em $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \; e \; C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, e substituindo na solução, obtemos:

$$x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

isto é,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Esse teorema pode ser usado, pois temos $r_1 \neq r_2$. Agora, para resolvermos uma recorrência homogênea de segunda ordem, onde as raízes $r_1\ e\ r_2$ são iguais, teremos que usar um método diferente. Para isso, utilizaremos os seguintes teoremas extraídos de [15].

Teorema 2: Sendo as raízes da equação característica $b^2 + pb + q = 0$ iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $x_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer valores das constantes $C_1\ e\ C_2$.

Demonstraçao: Usando as relações de Girard, temos que as raízes são iguais a $-\frac{p}{2}$. Substiuindo $x_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

Obtemos:

$$[C_1 r_1{}^{n+2} + C_2(n+2) r_2{}^{n+2}] + p[C_1 r_1{}^{n+1} + C_2(n+1) r_2{}^{n+1}] + q[C_1 r_1{}^{n} + C_2 n r_2{}^{n}]$$

Fazendo $r_1 = r_2 = r$, e agrupando os termos

$$C_1 r^n(b^2 + pb + q) + C_2 n r^n(b^2 + pb + q) + C_2 r^n r(2r + p)$$

Como $r = -\frac{p}{2}$ e é raíz de $b^2 + pb + q = 0$, temos:

$C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r 0 = 0,$

O que implica que $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para $x_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$, provando o resultado desejado.

Teorema 3: Se as raízes de $b^2 + pb + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluçoes da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n$, com $C_1\ e\ C_2$ constantes.

Demonstração: Sendo y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinando as constantes $C_1\ e\ C_2$ como soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = y_1 \\ C_1 r^{\,2} + 2C_2 r^2 = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2}\ e\ C_2 = \frac{y_2 - r y_1}{r^2}$$

que é está bem definido, pois $r \neq 0$, por hipótese.

Afirmamos que $x_n = C_1 r_1^n + nC_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r^{\ n} - C_2 n r^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r^{\ n}(r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 n r^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r^n r(2r - p)$.

O primeiro parêntese é igual a zero, porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, enquanto o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $b^2 + pb + q = 0$, e finalmente o último é igual a zero, pois $r = -\frac{p}{2}$. Então, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r + C_2 r = y_1$ e $C_1 r^2 + C_2 r^2 = y_2$, temos que $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n natural. $\square$

5 ESTABILIDADE DAS ÓRBITAS DE UMA RECURSÃO

Nas fórmulas de recorrência, podemos ter as soluções dadas numa forma fechada, como para os casos lineares vistos no capítulo anterior, mas no geral as soluções, se expressas, podem ser de difícil manuseio e a estrutura das órbitas da recursão (e a possibilidade de previsões) não se declararem (ver [17]). Uma das questões fundamentais no contexto das recursões vistas como um sistema dinâmico (com o termo n em x_n, transcorrendo) é o comportamento de uma órbita quando n cresce indefinidamente. Estruturalmente, este comportamento está intimamente ligado ao comportamento de uma orbita x^* que tem todos os valores constantes (este valor é chamado de *ponto fixo*), quanto à sua estabilidade ou não.

Dizemos que uma orbita x^* que tem todos os valores constantes (este valor é chamado de ponto fixo, e por abuso de linguagem usa-se o termo ponto fixo com tal órbita da recursão), é *estável* se: para todo $\in > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se o valor inicial x_0 de uma órbita satisfizer $|x_0 - x^*| < \delta$ então $|x_n - x^*| <\in$.
Se x^* não é estável, será denominado *instável*.

5.1 Critérios de estabilidade em recorrências lineares de primeira ordem

A equação aqui está na forma $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$, com α e β constantes, e associando-a com a função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, teremos os seguintes critérios de estabilidade do ponto fixo (ver [12]):

i) $|a| < 1$: A sequência converge para o ponto fixo

ii) $|a| > 1$: A sequência diverge do ponto fixo

iii) $a = 1$ e $b \neq 0$: Não vai existir ponto fixo, a sequência tenderá ao infinito para qualquer condição inicial.

iv) $a = 1$ e $b = 0$: Existirão infinitos pontos fixos.

v) $a = -1$: A solução (sequência) forma um ciclo em torno do ponto fixo.

Esses critérios de estabilidade derivam do fato da solução x_n da equação de recorrência $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$, com α e β constantes, ser:

$$x_n = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

Pois $x_{n+1} = f(x_n) = \alpha x_n + \beta$, com α e $\beta \in \mathbb{R}$ implica:

$$x_1 = f(x_0) = \propto x_0 + \beta$$

$$x_2 = f(x_1) = \propto x_1 + \beta = \propto (\propto x_0 + \beta) + \beta = \alpha^2 x_0 + \beta(1 + \alpha)$$

$$x_3 = f(x_2) = f\big(f(x_1)\big) = f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) = \alpha x_2 + \beta = \alpha\big(\alpha^2 x_0 + \beta(1 + \alpha)\big) + \beta \Rightarrow$$
$$x_3 = \alpha^3 x_0 + \beta(1 + \alpha + \alpha^2)$$

E, podemos determinar x_n em função da condição inicial x_0.

$$x_n = f(x_{n-1}) = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow$$
$$x_n = \alpha(x_{n-2} + \beta) + \beta = \alpha^2 x_{n-2} + \beta(1 + \alpha)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1})$$

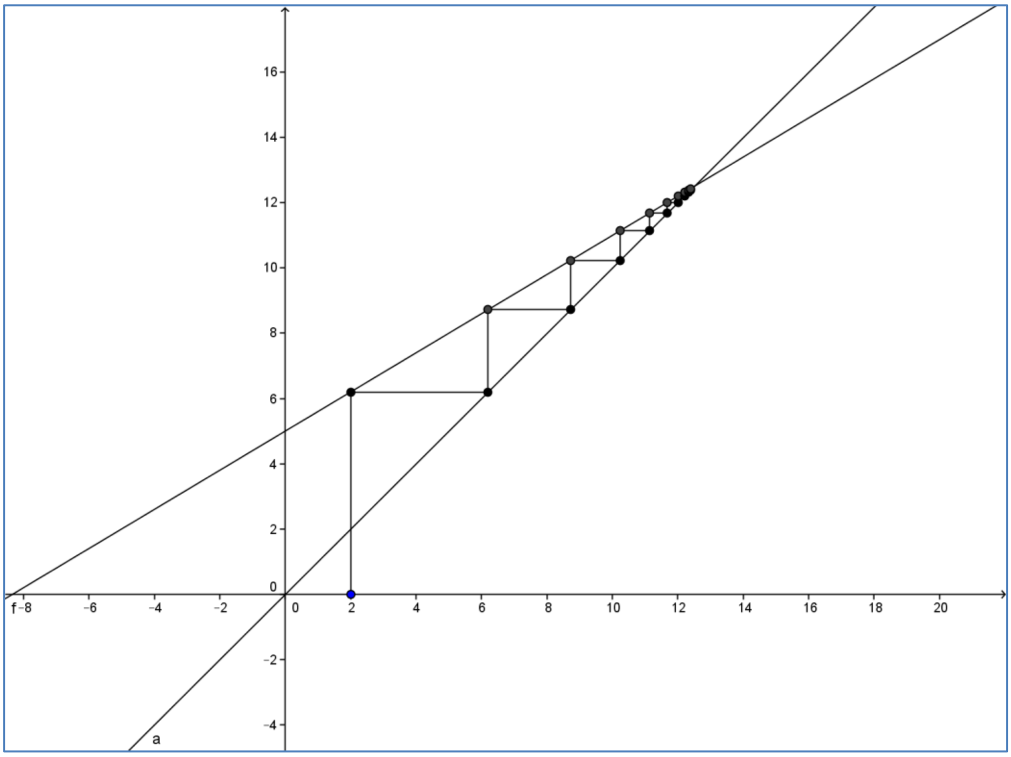
Na última equação, vemos que o fator que multiplica β é a soma dos termos de uma progressão geométrica de termo inicial um e razão α, então temos que: $x_n = \alpha^n x_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} \Rightarrow x_n = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha - 1}$, como queríamos.

Se $|\alpha| < 1$, as potências sucessivas irão gerar termos cada vez menores, se n tender a infinito, α^n vai tender a zero e x_n tenderá a $-\frac{\beta}{\alpha - 1}$·, **independentemente da condição inicial**, que será nosso ponto fixo. Porém, se $|\alpha| > 1$, as potências sucessivas terão termos cada vez maiores e teremos α^n tendendo ao infinito, ou seja, a_n vai divergir. Caso $\alpha = 1$, não haverá ponto fixo, pois as retas serão paralelas. E se $\propto = -1$, e fazendo $k = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ teremos uma orbita em torno do ponto fixo pois como α^né igual a 1 se n for par e igual a -1 se n for impar, temos:

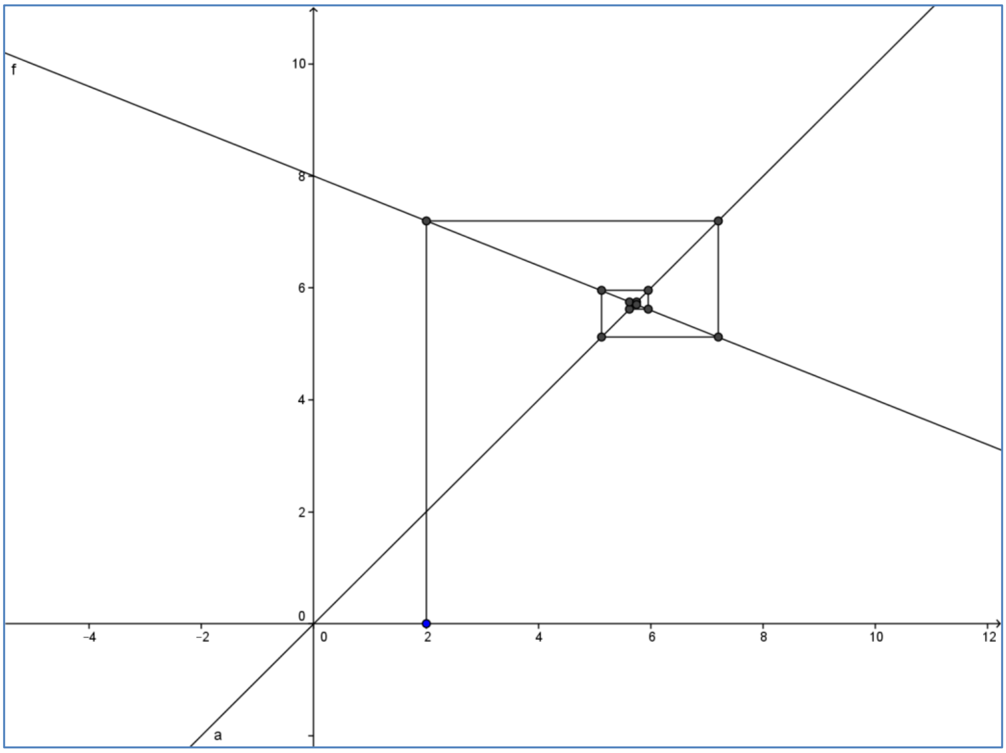
$$x_{2n+1} = (x_0 + k)(-1^{2n+1}) - k = -x_0 - 2k \text{ , } com\ n \in N$$

$$x_{2n} = (x_0 + k)(-1^{2n}) - k = x_0 \text{ , } com\ n \in N$$

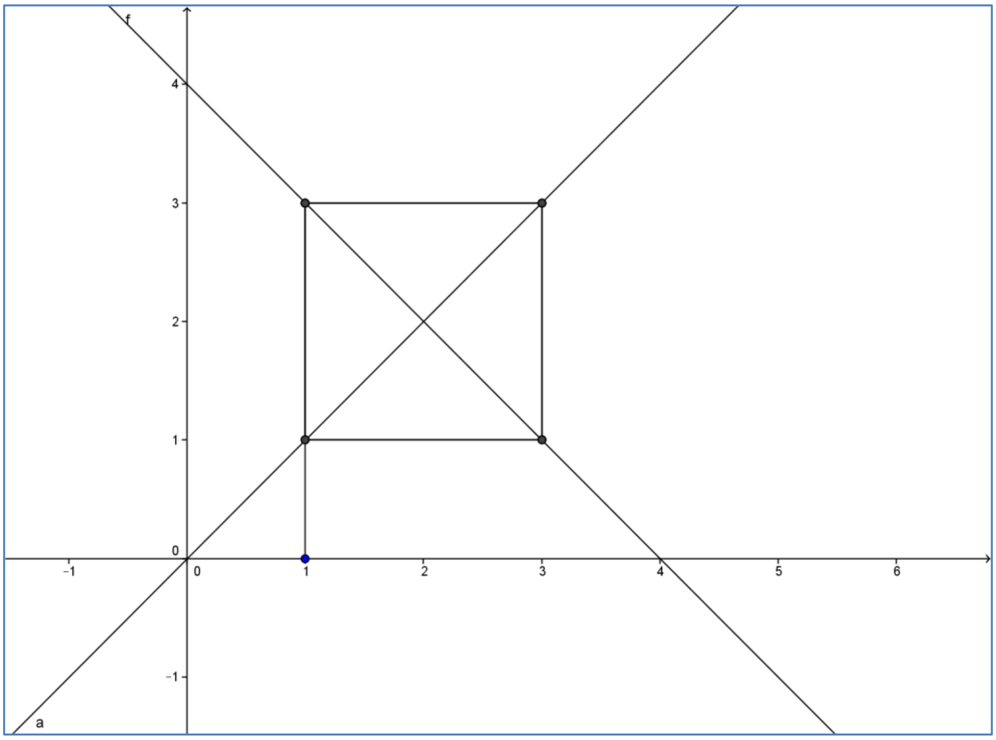
Vejamos agora, alguns exemplos de cobweb para recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.



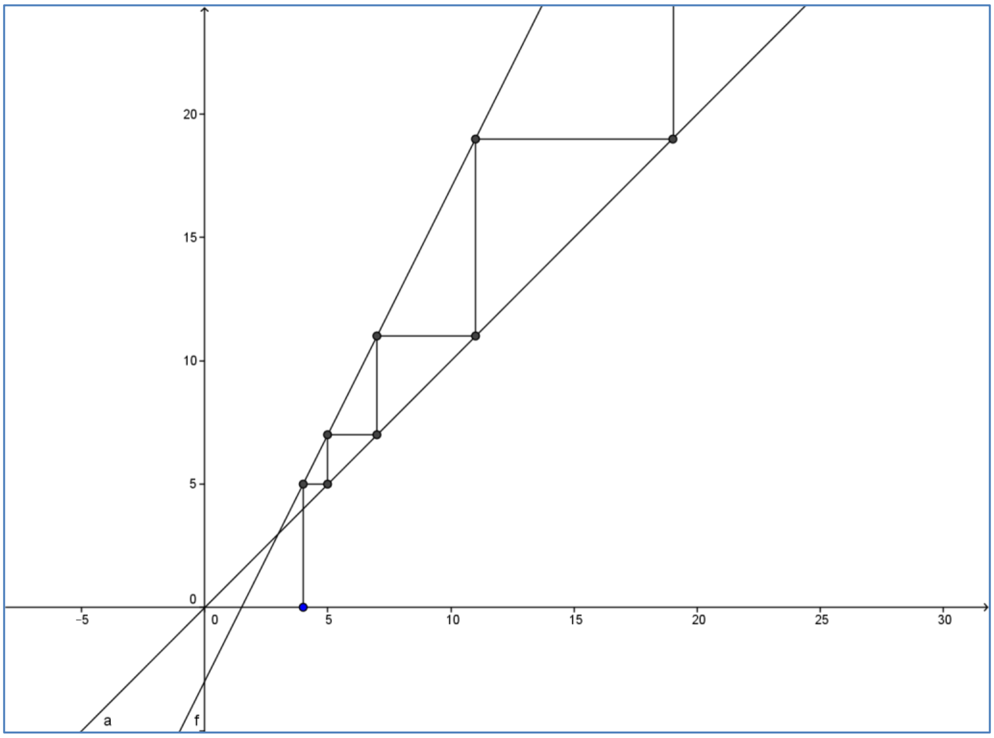
$f(x) = 0{,}6x + 5\ e\ x_0 = 2$



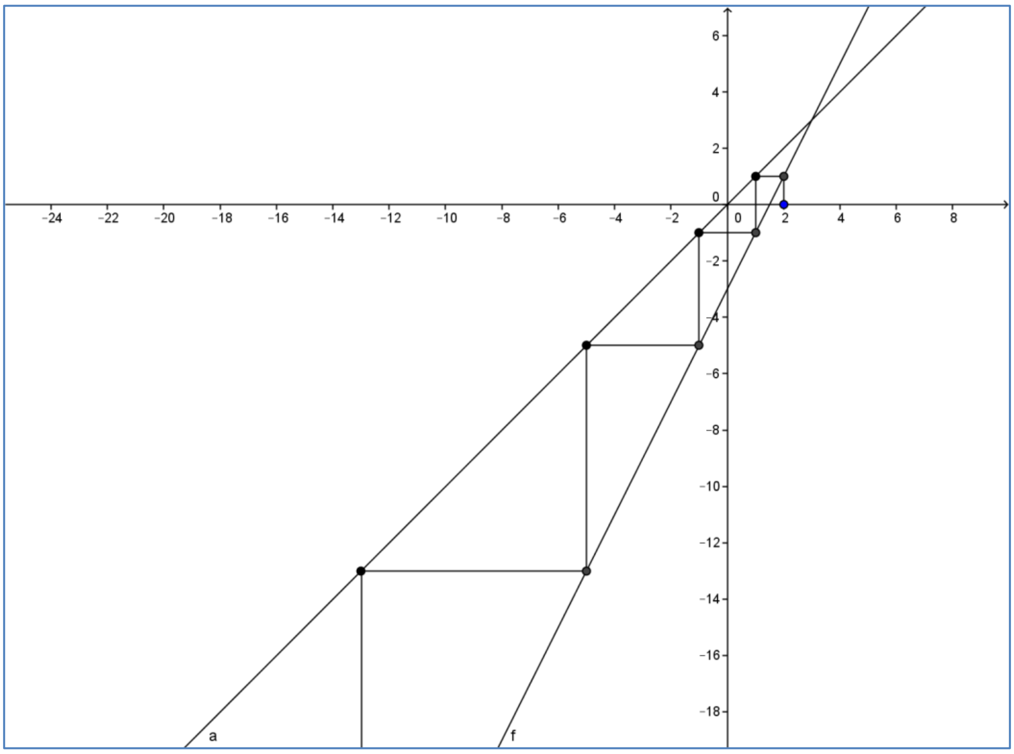
$f(x) = -0{,}4x + 8 \; e \; x_0 = 2$



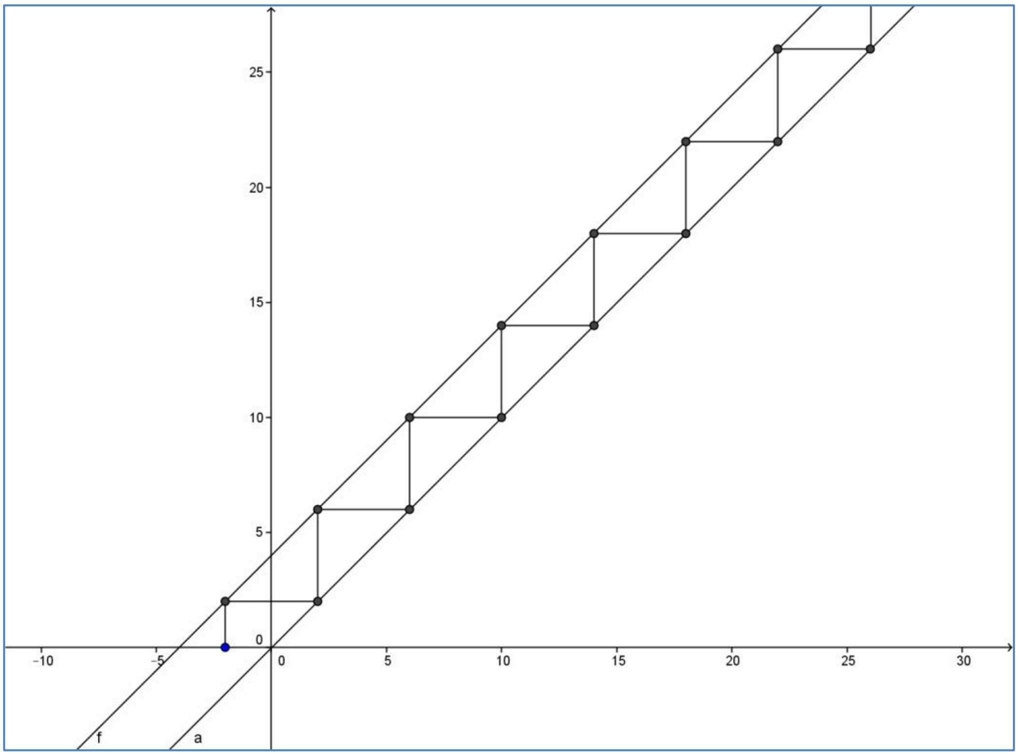
$f(x) = -x + 4 \; e \; x_0 = 1$



$f(x) = 2x - 3 \; e \; x_0 = 4$



$f(x) = 2x - 3 \; e \; x_0 = 4$



$f(x) = x + 4 \ e \ x_0 = -2$

6 RECORRÊNCIAS NÃO LINEARES

Mesmo a cobweb mostrando o comportamento de uma órbita, ela não é uma ferramenta tão poderosa nas recorrências lineares, pois a fórmula fechada é facilmente encontrada usando os métodos mostrados anteriormente. Porém, isso não acontece nas recorrências não lineares, onde não temos um método geral para resolvê-la (ver [17,19]).

No caso da estabilidade de uma recorrência linear de 1ª ordem, observamos que os critérios que definiam a estabilidade do ponto fixo dependiam unicamente do coeficiente angular da reta. O que faremos aqui é encontrar o ponto fixo e "linearizar" os pontos que estão próximos a ele. Essa reta formada será a mesma que a reta tangente ao gráfico no ponto fixo.

Vamos usar o seguinte teorema extraído de [12].

Teorema 1: Suponha x^* um ponto de equilíbrio para a equação $x_{n+1} = f(x_n)$ em que f é diferenciável em x^* e f' é contínua em x^*. Então:

a) O ponto x^* é estável se $|f'(x^*)| < 1$.
b) O ponto x^* é instável se $|f'(x^*)| > 1$.
c) Se $|f'(x^*)| = 1$, nada podemos afirmar.

Demonstração: Vamos supor que existe um $M > 0$ tal que $|f'(x^*)| < M < 1$. Teremos, então, um intervalo $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ contendo x^* tal que $|f'(x)| < M < 1$, para todo $x \in J$. De fato: supondo por contradição que para cada intervalo aberto $I_n = (x^* - 1/n, x^* + 1/n)$, com n suficientemente grande, exista um ponto $x_n \in I_n$ tal que $|f'(x_n)| > M$. Note que se $n \to \infty$, então $x_n \to x^*$. Como f' é uma função contínua em x^*, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x^*),$$

E teremos:

$$M \leq \lim_{n\to\infty} |f'(x_n)| = |f'(x^*)| < M,$$

que é uma contradição, provando nossa afirmação. Para $x_0 \in J$, temos:

$$|x(1) - x^*| = \left|f\big(x(0)\big) - f(x^*)\right|$$

Pelo teorema do Valor Médio, existe ε entre $x(0)$ e x^* tal que:

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\varepsilon)|.|x_0 - x^*|$$

Então, temos:

$$|f(x_0) - f(x^*)| \leq M.|x(0) - x^*| < |x_0 - x^*|.$$

E, portanto,

$$|x_1 - x^*| < |x_0 - x^*|.$$

Sendo $M < 1$, a última desigualdade mostra que x_1 está mais próximo de x^* que x_0. Consequentemente $x_0 \in J$. Por indução, concluímos que:

$$|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*| < M|x_0 - x^*|,$$

pois $M < 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tal que se $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|x_n - x^*| < \varepsilon$ para todo $n > 0$. Esta conclusão prova a estabilidade. Além disso, $\lim_{n\to\infty}|x_n - x^*| = 0$ e então $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x^*$, o que nos permite concluir que a estabilidade é assintótica.

No item b, temos:

Supondo que $|f'(x^*)| > M > 1$. Teremos então um intervalo $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ contendo x^* tal que $|f'(x)| > M > 1$, para todo $x \in J$. Seja $x(0) = x_0$ pertencente a J. Mostraremos que existe algum número k tal que x_k não está no intervalo J, e ainda, se afasta de J.

Mostraremos primeiro que $|x_1 - x^*| > |x_0 - x^*|$, ou seja, que x_1 está mais afastado que x^* do que x_0. Utilizando o Teorema do Valor Médio, encontraremos mais uma vez que :

$$|x(1) - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\varepsilon)|.|x_0 - x^*|.$$

Porém, sabemos que $|f'(\varepsilon)| > M > 1$ e portanto:

$$|x_1 - x^*| = |f'(\varepsilon)|.|x_0 - x^*| > M|x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|$$

E por indução, temos que: Ou algum $x(k)$ não está em J ou $|x(k) - x^*| > M^n|x(0) - x^*|$.

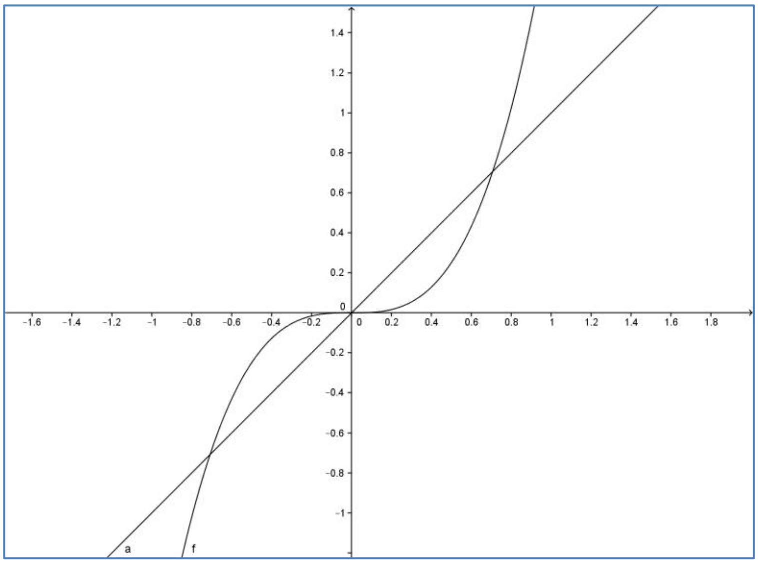
Supondo que $|x(k-1) - x^*| > M^{k-1}|x(0) - x^*|$. Assim,

$$|x(k) - x^*| = \left|f\big(x(k-1)\big) - x^*\right| = \left|f\big(x(k-1)\big) - f(x^*)\right| = |f'(\varepsilon)|.|x(k-1) - x^*|$$
$$> M|x(k-1) - x^*| > M.M^{k-1}|x(0) - x^*| > M^k|x(0) - x^*|.$$

Se J é um intervalo finito e M^k tende para o infinito, com k tendendo para o infinito, então algum ponto $x(k)$ deve estar fora do intervalo J. Logo, x^* é instável.

Exemplo 1: Vamos analisar a recorrência $x_{n+1} = 2x_n^3$ em função do valor inicial.

Esboçando o gráfico da função g associada a essa equação de recorrência e a função $f(x) = x$, visualizamos os pontos fixos nas intersecções:



Para encontrá-los, bastar fazer $g(x^*) = x^*\cdot$, ou seja, $2{x^*}^3 = x^*$e teremos os pontos fixos $x = 0,\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Analisando o critério de estabilidade em $x = 0$, temos:

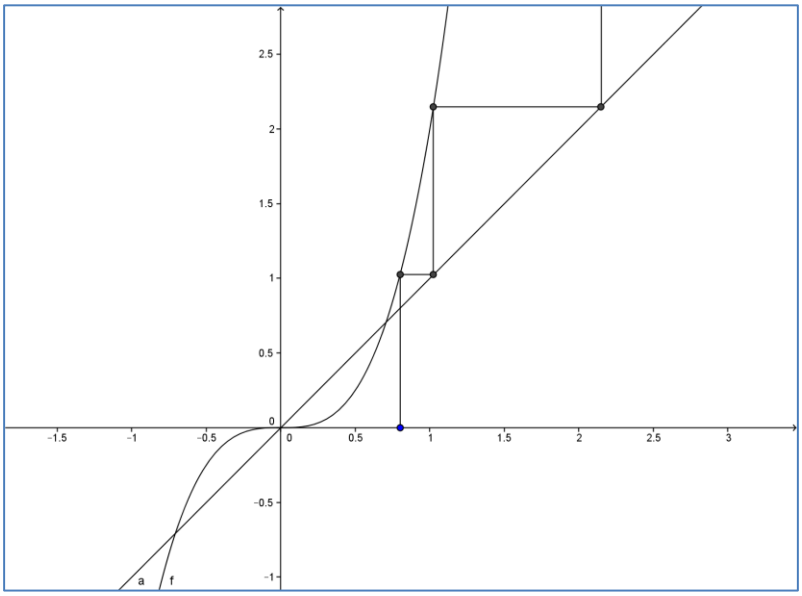
$f'(0) = 6.0^2 = 0.$

Portanto, $x = 0$ é estável, pois $|f'(0)| < 1$.

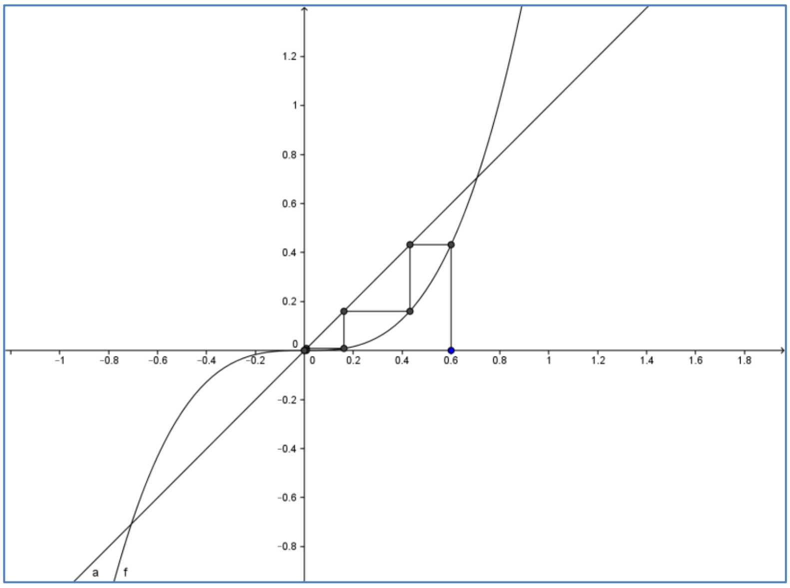
Agora para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, teremos instabilidade, já que:

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6.\frac{1}{2} = 3 > 1$$

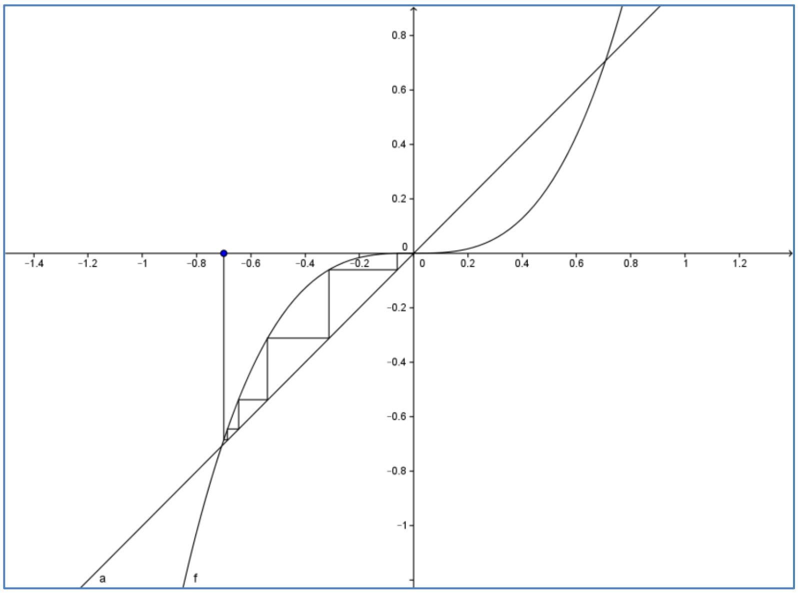
Vamos verificar essas condições aplicando alguns valores para a condição inicial:


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
a
f

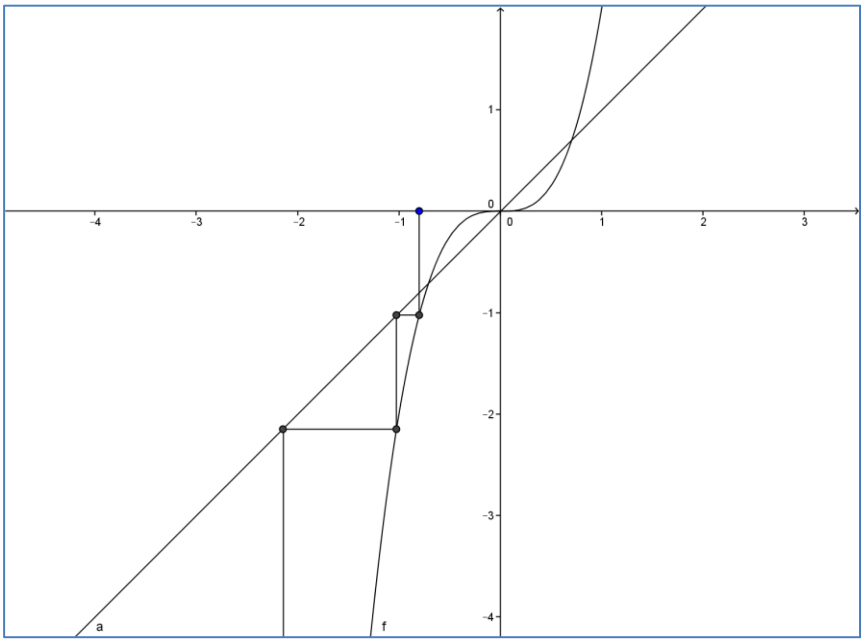
$x_0 = 0{,}8$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
a
f

$x_0 = 0{,}6$



$x_0 = -0{,}7$



$x_0 = -0{,}8$

Observemos que se $-1 < x_0 < 1$, então a sequência converge para zero. Se x_0 igual a um dos pontos fixos, a sequência é constante e, do contrário, ela diverge.

7 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

7.1 Número de ouro de Fibonacci e de prata de Pell

Um exemplo comum usado por professores é o da criação de coelhos proposto por Fibonacci por volta de 1202. Nele, coloca-se um casal de coelhos em um ambiente propício para procriação, e supõe que a partir do segundo mês de vida, cada casal de coelhos dará origem a um novo casal de coelhos. E a pergunta feita é: Quantos casais de coelhos estarão nesse ambiente no final de *n* meses?

Observemos que os objetos do exemplo são coelhos, mas é paradigma para uma crescente tendência, desde 1960, de aplicabilidade, principalmente, em Mercado Financeiro.

Resolvendo esse problema, vemos que a sequência do número de coelhos em cada mês é a mesma que a sequência de Fibonacci:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...,

que foi resolvida no primeiro capítulo. Logo, o número de coelhos no final de *n* meses é dado pela fórmula:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

onde x_n é o número de coelhos no final do mês *n*. Desta sequência, obtemos o famoso número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Usando uma ideia semelhante à de Fibonacci, vamos apresentar um número um pouco menos conhecido, o número de prata ou número de Pell.

Considere o seguinte problema: Coloca-se um casal de coelhos em um ambiente propício para procriação. Ao final de um mês, esse casal morre após dar cria a outro casal de coelhos. A partir do segundo mês, nenhum coelho morre, e cada casal de coelhos dá cria a:

$$\begin{cases} um\ casal\ de\ coelhos, se\ tiverem\ \ apenas\ um\ \text{mês}\ de\ vida \\ dois\ casais\ de\ coelhos\ se\ tiverem\ mais\ de\ um\ \text{mês}\ de\ vida \end{cases}$$

Quantos casais de coelhos nascerão nesse ambiente no final de *n* meses?

Para entender a forma com que o número de coelhos cresce, vamos analisar a tabela abaixo.

Tempo em meses	Casais de coelhos com mais de um mês de idade	Casais de coelhos com um mês de idade	Casais de coelhos recém- nascidos	Total de casais de coelhos que nasceram
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	1	2
3	1	1	3	5
4	2	3	7	12
5	5	7	17	29
6	12	17	41	70
7	29	41	99	169

Observando a última coluna, vemos a sequência $x_n = \{0,1,2,5,12,29,70,169,...\}$. Analisando-a, percebe-se que cada termo a partir do terceiro, é o dobro do antecessor somado com o antecessor do antecessor. Isto é, $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$. Essa recorrência homogênea linear de segunda ordem pode ser resolvida utilizando o método mostrado no terceiro capítulo.

Sua equação característica é $x^2 - 2x - 1 = 0$, e resolvendo, temos as raízes $1 \pm \sqrt{2}$. A raiz positiva é a constante prateada. Logo, a solução dessa recorrência é $x_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n$, onde C_1 e C_2 são constantes. Como $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, temos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ (1+\sqrt{2})C_1 + (1-\sqrt{2})C_2 = 1 \end{cases} \rightarrow C_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \; e \; C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

E encontramos a fórmula fechada para a sequência de Pell dada por:

$x_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$.

7.2 Aplicabilidade de recursão (problemas que são comumente encarados como de “análise combinatória” e podem ser resolvidos mais facilmente com a ajuda de recorrências)

- Quantas são as sequências de 4 termos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois zeros consecutivos? Você consegue generalizar o problema para sequências de n termos pertencentes a $\{0,1,2\}$?

- Ao subir a escada de seu prédio, José às vezes sobe dois degraus de uma vez e às vezes sobe um de cada vez. Sabendo que a escada tem 8 degraus, de quantas maneiras diferentes José pode subir a escada? Você consegue generalizar para o caso de uma escada com n degraus?

- Qual o número máximo de regiões em que 10 retas podem dividir um plano? Generalize para *n* retas.

- Quantas são as sequências de *n* termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero.

- Quantas são as sequências de *n* termos, todos pertencentes a $\{0,1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

- Determine o número máximo de regiões em que *n* retas podem dividir um plano.

- A torcida do Fluminense tem hoje p_0 membros. A taxa anual de natalidade é *i,* a de mortalidade é *j* e, além disso, todo ano um número fixo de *R* torcedores desiste de ser Fluminense. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a *n* anos. A torcida está condenada a extinção?

- Um círculo foi dividido em *n* ($n > 1$) setores. De quantos modos podemos colorir, cada setor com uma só cor, se dispomos de *k* ($k > 2$) cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

- Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano.

- Durante a guerra de judeus e romanos, Josephus estava entre 11 rebeldes judeus encurralados em uma caverna pelos romanos. Preferindo o suicídio a captura, os rebeldes decidiram formar um círculo e, contando ao longo deste, suicida-se uma pessoa sim, uma não, até não sobrar ninguém. Determine qual posição Josephus deveria escolher para sair ileso desse círculo malígno.

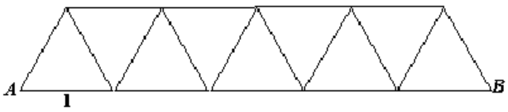
- Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1,2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

- Determine o número de maneiras diferentes de se cobrir um tabuleiro 2x2 com dominós 2x1 iguais.

- Prove que $\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$ é inteiro para todo natural n.

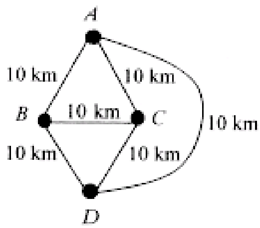
- Prove que a parte inteira de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ é sempre par.

- Caminhando pelos segmentos unitários da figura abaixo, determine quantas são as maneiras de ir de A até B sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.

- 

- (Banco IMO 87) Quantas são as sequências de comprimento n que podem ser formadas com os números $\{0,1,2,3,4\}$ com dígitos vizinhos diferindo de 1 (em módulo)?

- Quatro cidades A, B, C, D são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:



Exatamente 50 km?

10.n km?

8 CONCLUSÃO E FOCO DE FUTURA PESQUISA

A Cobweb como definida no Capítulo 2 acima, considerada com $c(x) = x,$ é bastante difundida na literatura Matemática, principalmente na área de aplicações de intervalos neles mesmos e equações diferença.

Com a difusão de derivadas que generalizam a usual de Newton/Leibniz, principalmente as derivadas em escalas temporais (de Hilger) e as derivadas fracionárias (de Caputo), é necessário considerar processos de recursão mais complexos que os usuais (exatamente os casos em que a cobweb relativa a $c(x)$ que não é a identidade). É do que trata por exemplo, [18].

Então, uma área foco de futuras pesquisas em recursões é exatamente a consideração dos casos gerais de $c(x)$.

Neste sentido, o complemento/continuação desta dissertação no PROFMAT é um trabalho voltada à tradução para o nível fundamental, básico e ensino médio dos resultados destas pesquisas.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.1.

[2] MOREIRA, C. G. *Sequências recorrentes.* Notas Leitura complementar de MA12, Unidade 9.

[3] GRAHAM, R.; KNUTH, D.; PATASHNIK, O. *Matemática concreta:* fundamentos para a ciência da computação. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995. Tradução de Concrete mathematics. A Foundation for Computer Science; Addison-Wesley, 1994.

[4] ROSEN, K. *Discrete Mathematics and its Applications*. 4th. ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 1998.

[5] Boyer, C. B. *História da Matemática.* 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[6] GASTON, J. Memoirs sur l'iteration des fonctionnes rationnelles. *J. Math.*, Paris, v.7, p.47-245, 1918.

[7] LAUWERIER, H. A. *One dimensional iterative maps.* In: CHAOS, A.; V. HOLDEN (Ed.). Princeton: Princeton University Press, 1986. p.39-58.

[8] Collet, P.; Eckmann, J.P. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.* Boston: Birkhauser, 1980.

[9] Aarts, R. M. "Cobweb Equation." *From MathWorld - A Wolfram Web Resource,* created by Eric W. Weisstein. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/CobwebEquation.html>. Acesso em: 11 dez. 2014.

[10] Scheinerman, E. R. *Matemática Discreta:* uma introdução. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

[11] Bassanezi, R. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.* 5.ed. Rio de Janeiro: Contexto, 2002.

[12] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations.* Springer, 2005.

[13] Hefez,A. *Indução Matemática*– PIC – OBMEP/ SBM Usado em MA12, Unidades 2, 3, 4 e 26.

[14] Lima, E. L. *Indução Matemática*– Notas Usadas em MA12, Unidade 5.

[15] LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.2.

[16] AV1-MA12- *Matemática Discreta*-2014.

[17] BAK, P. The devil's staircase. *Phys. Today*, St Louis, v.39, n.12, p.38-45, 1986.

[18] BARBANTI, L.; NEGRO,V. A; DAMASCENO, B. C. *Cobweb generalizada e escalas temporais*. 2015. No prelo.