UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JOSÉ NATAN LIMA FILHO

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE 1ª E 2ª ORDEM: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

BELÉM – PARÁ

2014

JOSÉ NATAN LIMA FILHO

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE 1ª E 2ª ORDEM: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – ICEN como requisito parcial para obtenção do grau de MESTRE no MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT pela Universidade Federa do Pará – UFPA.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM – PARÁ

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Lima Filho, José Natan , 1977-
Sequências e progressões aritméticas de 1ª e 2ª ordem: uma abordagem para o ensino médio / José Natan Lima Filho. - 2014.

Orientador: Mauro de Lima Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Séries aritméticas. 3. Sequências (Matemática). I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

TERMO DE APROVAÇÃO

JOSÉ NATAN LIMA FILHO

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE 1ª E 2ª ORDEM: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso profissional de Matemática, na Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

CONCEITO: APROVADO.

BELÉM – PA, 02 DE DEZEMBRO DE 2014

Dedico esta dissertação à Deus, meus pais, meus sogros, minha esposa e meu amado filho Caio, que sempre me ajudaram e alegram-se com minhas vitórias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele eu nada seria. Pelas conquistas alcançadas, pela força nos momentos difíceis e pela vontade de sempre lutar e acreditar que ainda posso ir além de tudo o que já conquistei.

Agradeço ao meu querido pai José Natan Lima (*in memoriam*), pelos ensinamentos de valores, perseverança e por ter me ensinado a adentrar nos espaços da vida pisando sempre com “o pé direito”. À minha doce mãezinha Ana Celi Fiel de Araújo Lima (*in memoriam*), por sempre ter me mostrado o quanto devo ser responsável na forma de conduzir a vida, a respeitar meus professores, ser leal com meus colegas, a tratar com afeição todas as pessoas, a estender a mão para ajudar os que de mim precisam e principalmente, me ensinou a dobrar os joelhos para agradecer sempre a Deus pelo dom da vida e pelas graças alcançadas.

Aos meus sogros Carlos Alberto Sousa e Valderez Borges de Freitas Sousa. Ele, pelos exemplos de disciplina e responsabilidade que sempre me arrastaram e ela pelas palavras corretas nas horas certas e pelo carinho a mim dispensado.

Aos meus irmãos Marcelo Fiel de Araújo Lima e Marcos Fiel de Araújo Lima, por se orgulharem de mim fazendo-me sentir grande.

Aos meus colegas de Mestrado pela união, por nunca terem reclamado do meu cafezinho e pela amizade. No grupo não posso esquecer de fazer um agradecimento especial a dois colegas: Fernando Colares, pela sua notável importância no grupo, por sua destacada inteligência e humildade na hora de ajudar a todos; e Dionísio Sá, pela sua liderança e experiência, conquistando assim o respeito e admiração de todos.

Aos professores do IMPA e da UFPA, que se empenharam em nos ensinar, usando para isso dedicação e criatividade.

Aos funcionários da UFPA, por tornarem o nosso ambiente de estudo salutar e agradável.

À minha querida esposa Mara Lygia Borges Sousa Lima, por ser minha companheira em todos os momentos, por me ensinar a ser uma pessoa melhor, pelo amor a mim dispensado, pelos “puxões de orelha”, pelos conselhos acertados, pelo carinho, pela convivência de tantos anos, pela dedicação dispensada a mim e à nossa família.

Ao meu único filho Caio Borges Sousa Lima, por me fazer achar que sou um super-herói, por ser meu companheiro de aventuras no mundo da imaginação, por me fazer, por muitas vezes voltar a ser criança e por outras tantas me fazer lembrar que já não sou mais criança. Por ter me ensinado a amar de forma incondicional e ter tornado o meu mundo melhor desde o dia que lhe vi pela primeira vez.

Obrigado!

Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

RESUMO

A proposta dessa dissertação é o estudo de sequências e progressões aritméticas de primeira e segunda ordem, fazendo uma abordagem voltada para o ensino médio. No trabalho é utilizada a história da matemática para mostrar que o tema já permeava a mente dos grandes matemáticos do passado. As progressões aritméticas são abordadas de forma contextualizada, utilizando situações que estimulam a compreensão das definições. O estudo de progressões aritméticas de primeira ordem é feito conectado com as funções polinomiais do primeiro grau (afim) e o estudo das progressões aritméticas de segunda ordem, conectado com as funções polinomiais do segundo grau. Na abordagem dos assuntos houve a preocupação de utilizar a matemática elementar para, dessa forma tornar o trabalho acessível aos estudantes do ensino médio.

Palavras-chave: Sequências, progressões aritméticas de primeira ordem, progressões aritméticas de segunda ordem.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is the study of sequences and arithmetical progression of first and second order, making a focused approach to high school. Work in the history of mathematics is used to show that the theme has permeated the minds of the great mathematicians of the past. Arithmetic progressions are addressed in context, using situations that foster understanding of definitions. The study of arithmetic progressions of the first order is made connected with polynomials of the first degree (order) and the study of arithmetic progressions second order polynomial functions connected with the High School. In addressing the issues we were concerned with using elementary mathematics to thus make the work accessible to high school students

Keywords: Sequences, arithmetic progression of first order, second order arithmetic progression.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SÍMBOLOS

|N*	Conjunto dos números naturais excluindo o zero
|N	Conjunto dos números naturais
ϵ	Pertence
|R	Conjunto dos números reais
∀	Para todo
$<$	Desigualdade: Menor do que
≤	Desigualdade: Menor do que ou igual
$>$	Desigualdade: Maior do que
≥	Desigualdade: Maior do que ou igual
!	Fatorial
∑	Somatório
∆	Delta

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática nos últimos tempos tem passado por grandes transformações. Aquela matemática exibida nos livros didáticos do passado, conteudista, carregada de fórmulas complexas, muitas vezes desprovidas de aplicações, sustentadas por processos mecânicos, vem dando lugar a uma nova matemática rica em aplicações, contextualizada e interdisciplinar, onde o aluno tem resposta aquela velha pergunta: “*Para que serve a matemática?*”

A prova dessa mudança pode ser facilmente percebida nos livros didáticos atuais onde saiu aquele banco numeroso de questões mecânicas e sem aplicações e entraram questões contextualizadas e interdisciplinares, onde o aluno consegue enxergar a matemática dentro do seu cotidiano, nas mais diversas disciplinas, mostrando as aplicações dessa tão importante ciência. Isso fica bem claro quando lemos sobre as relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas no PCN+.

> Reconhecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas Ciências Humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, ou ainda agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia (PCN +, pg.117)

Quando decidi dissertar meu trabalho sobre sequências e progressões aritméticas de primeira e segunda ordem, pensei em abordar esse tema seguindo didaticamente essa que chamo, na minha opinião, de *“matemática atual”*, onde encontramos aplicações do tema no nosso cotidiano, os exemplos são na sua maioria contextualizados e interdisciplinares, porém sem deixar de lado a essência da matemática, pois não existe estudo da matemática sem definições, sem deduções, sem demonstrações. A diferença é que nesse trabalho isso é feito de uma maneira simplificada, ou seja, procurei utilizar uma linguagem acessível aos aluno do ensino médio, sem deixar de ser cuidadoso com a manipulação das fórmulas.

O capítulo inicial trata de sequências, onde inicialmente é feito uma abordagem histórica, não tendo como foco as definições e classificações, e sim fazendo uma viagem no tempo selecionando situações onde mostram que o estudo e a utilização de sequências advém de muito tempo e que nunca deixaram de existir. Há de se ressaltar o quão importante é a constante busca pelo conhecimento, e que não existe conhecimento acabado pois o mesmo está em constante processo de aperfeiçoamento. Após essa explanação histórica, as sequências são definidas e classificadas.

O segundo capítulo versa sobre o estudo da progressão aritmética de primeira ordem, com a preocupação de mostrar que o ensino desse tema e o entendimento das definições devam dar-se através da análise de situações que seguem padrões definidos. Verifica-se a existência de diversos fenômenos naturais que por ocorrerem de forma cíclica, servem perfeitamente para justificar esse estudo e apresentar aos alunos em sala de aula aplicações concretas das progressões aritméticas.

> Adquirir uma compreensão do mundo do qual a matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. (PCN +, pg. 117)

É proposta a idéia de se ensinar progressões aritméticas de primeira ordem conectada à função afim, cujo domínio é o conjunto |N*. A conexão da matemática com ela própria dentro de seus variados tópicos é sempre importante para mostrar que os ramos dessa ciência se interligam. A partir de análises do PCN + sobre as relações interáreas da matemática. Pode-se destacar que em se tratando de sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas (PCN +, pg.117). E,

> Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. (PCN +, pg.117).

No terceiro capítulo é apresentado o estudo de progressão aritmética de segunda ordem, onde é proposto o seu estudo no ensino médio, principalmente por apresentar sua relação com a função polinomial do segundo grau de domínio |N* e sua relação com a soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem, justificando assim o seu estudo.

2. SEQUÊNCIAS

2.1. HISTÓRICO DE SEQUÊNCIAS

A história da matemática mostra que, os homens sempre procuraram observar ao seu redor e procurar entender a periodicidade dos fenômenos naturais. Isso se dava em função da própria sobrevivência. Procuravam entender o ciclo das cheias dos rios para o melhor cultivo dos alimentos, entender as fases da lua e de outros fenômenos. Desenvolveu calendários que serviam de quantificadores do tempo afim de padronizar o transcurso de um ciclo. Para isso passou-se a criar e desenvolver sequências numéricas ao longo da história.

> Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos helíacos de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito por doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa. (BOYER, 2010, p.08)

2.1.1. PAPIRO DE RHIND (Egípcios)

Segundo BOYER (2010) Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por três mil e quinhentos anos. O mais extenso de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 30cm de altura por 5m de comprimento que encontra-se atualmente no British Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do rio Nilo por um antiquário escocês chamado Henry Rhind; motivo este que tal peça seja conhecido como *Papiro de Rhind*, ou com menor frequência de *Papiro de Ahmes* em honra do escriba que o copiou, em meados de 2000 a.C. A Figura 1, apresenta o Papiro de Rhind.

Figura 1: Papiro de Rhind

Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Neste papiro consta uma das mais antigas escritas sobre a temática de sequências numéricas, ilustrado pelo problema 79 do papiro que cita apenas *“7 casas*, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hectares.

Presume-se que o escriba estava tratando de um problema recreativo para jovens onde cada uma das sete casas possuía 7 gatos que comiam cada um 7 ratos, onde cada rato comeu 7 espigas com 7 medidas de grão cada uma.

Este probleminha recreativo encontrado no Papiro de Rhind parece ser um antepassado do versinho infantil:

Quando ía a Sto Ives,

Encontrei um homem com sete mulheres

Cada uma tinha sete sacos,

Cada saco tinha sete gatos,

Cada gato tinha sete gatinhos.

Gatinhos, gatos, sacos e mulheres

Quantos iam a Sto Ives?

2.1.2. PITÁGORAS, A ESCOLA PITAGÓRICA E OS NÚMEROS FIGURATIVOS

Segundo BOYER (2010), Pitágoras fora nascido em Somos, umas das ilhas do Dodecanesso, próximo de Mileto, na Grécia por volta de 585 a.C. Relatos históricos afirmam que Pitágoras peregrinou pelo mundo viajando pelo Egito, Babilônia e possivelmente foi até a Índia, enriquecendo-se de conhecimentos matemáticos e que o fez fundar a escola pitagórica ao regressar para o mundo grego.

A escola pitagórica tinha como lema *“tudo é número”*. Assim, por influência dos babilônios, ocorria uma associação de medidas numéricas às coisas que o cercavam. Muito foi observado, como fenômenos da natureza e até mesmo achar padrões numéricos na construção de figuras geométricas, apresentando através de sequências uma forma de fraternizar a geometria e a álgebra.

Um exemplo foi o estudo dos números figurativos, onde serão apresentados os números triangulares e quadrangulares.

2.1.3. NÚMEROS TRIANGULARES

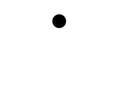
É a representação da soma dos números naturais por meio da construção de triângulos, onde cada triângulo representa fielmente, através de pontos, o resultado de somas parciais da sequência dos naturais.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2}\ .$$

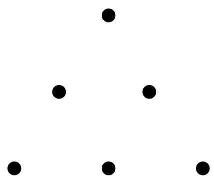
Onde:

$T_1 = 1.$

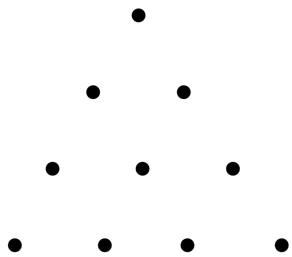
$T_2 = 1 + 2 = 3.$



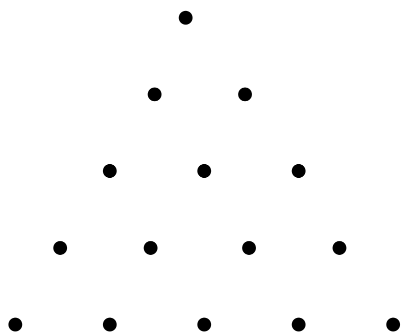
$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6.$



$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$



$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$



Como podemos observar a fórmula $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ representa a soma da sequência dos números naturais |N* = {1, 2, 3, 4, 5 ...} o que mostra a interação pitagórica com sequências numéricas.

2.1.4. NÚMEROS QUADRADOS OU QUADRANGULARES

São formados pela sequência 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n – 1), onde cada número quadrangular representa curiosamente, através da disposição e quantidade de pontos, o resultado das somas parciais dos números naturais ímpares.

$Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1 = n^2.$

Onde:

$Q_1 = 1$. •

• •

$Q_2 = 1 + 3 = 4$. • •

• • •

• • •

$Q_3 = 1 + 3 + 5 = 9$. • • •

• • • •

• • • •

• • • •

$Q_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$. • • • •

Apesar de pesquisas históricas apontarem essa recreação numérica de autoria dos pitagóricos ter sido desenvolvida antes do nascimento de Cristo, ainda hoje é comum ver nos livros didáticos a utilização dos números figurativos para o ensino de sequências numéricas.

2.1.5. PARADOXOS DE ZENÃO

Como afirma BOYER (2010) na matemática grega haviam duas escolas com idéias muitas vezes antagônicas, as escolas Jônia e Pitagóricas.

Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como constituído de pontos e instantes, mas para os seguidores da escola Jônia era defendida que o tempo e o espaço são contínuos.

Em função dessa dualidade Zenão, que viveu por volta de 450 a.C., propôs seus paradoxos.

O primeiro diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância, mas antes disso deve percorrer o primeiro quarto, e antes disso o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento. O segundo paradoxo é semelhante ao primeiro, apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva. Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai em vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar a posição inicial da tartaruga ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga.

Os paradoxos de Zenão apresentam uma aplicabilidade de sequências numéricas, prova esta da existência delas no cenário matemático grego nas escolas Jônia e Pitagórica.

No primeiro paradoxo podemos observar o uso da sequência:

$$\left(\ldots, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

2.1.6. OS ELEMENTOS DE EUCLIDES DE ALEXANDRIA

Os elementos de Euclides, é considerado por muitos, a produção matemática mais lida e mais notável de todos os tempos. Um verdadeiro *best seller.*

Apesar da crença que os elementos se resumem ao estudo da geometria isso não é verdade. Esta obra possui importantes contribuições para outros campos da matemática, como na álgebra e aritmética. O livro VIII, um dos treze livros da coleção começa com proposições sobre números em proporção contínua (progressão geométrica), onde quando encontramos uma proporção contínua a : b= b : c = c : d então podemos afirmar que a sequência numérica a, b, c e d apresenta um comportamento curioso, pois seus termos formam uma progressão geométrica.

Exemplificando:

3 : 6 = 6 : 12 = 12 : 24 ➡ (3, 6, 12, 24)

É importante ressaltar que as progressões geométricas são sequências numéricas de notáveis aplicações em vários ramos da ciência e fenômenos naturais, sendo estudadas até nos dias atuais.

2.1.7. ERATÓSTENES DE CIRENE

Uma outra demonstração da utilização de sequências numéricas pelos gregos foi dada por Eratóstenes na construção do “Crivo de Eratóstenes”, onde ele chega a uma sequência de números primos pela exclusão, dentro do conjunto dos números naturais de n-ésimas outras sequências dos múltiplos de 2, 3, 5, 7, ... (com exceção do 2, 3, 5, 7, ...). Com isso após retirar criteriosamente todas essas sequências, os números restantes de dois em diante, serão considerados primos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~								

2.1.8. INTRODUCTIO ARITHMÉTICAL DE NICÔMACO DE GERASA

Nicômaco de Gerasa foi um neoptagórico que viveu por volta do ano 100. A obra *Introductio de Nicômaco* contém apenas dois livros, pelo menos é o que foi preservado.

Na obra de Nicômaco muito se pode observar sobre as sequências numéricas, onde começa com a classificação pitagórica dos números em pares e ímpares. Escreveu também sobre sequências de números primos, compostos e perfeitos. Escreveu sobre os números figurativos em duas e três dimensões. Escreveu sobre as somas sucessivas dos cubos dos inteiros.

Segundo Boyer (2010), para Nicômaco, a sequência dos números naturais começava pelo número 3, pois segundo ele o 1 e o 2 eram meramente geradores do sistema numérico. Também afirmava que os números tinham qualidades, eram melhores ou piores, mais jovens ou mais velhos e podiam transmitir traços como se fossem de pais para filhos.

Nicômaco através de estudos e observações de sequências numéricas adicionando à influência dos estudos de Pitágoras chegou a conclusão que a soma dos *n* primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos *n* primeiros inteiros.

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = 9$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 36$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 225$

. . . .

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2.$

2.1.9. MATEMÁTICA CHINESA

Nas palavras de Boyer (2010), a obra do matemático chinês Yang Hui encontramos resultados quanto à soma de séries e o chamado triângulo de Pascal, especificamente na obra *Espelho Precioso* de Chu Shin, obra que marcou o fim da idade áurea da matemática chinesa.

Vejamos agora algumas das muitas somas de séries encontradas no *Espelho Precioso*:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n\,(n + 1)\ \frac{(2\,n + 1)}{3!}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + ... + n^2\,(n + 1)\ \frac{(n + 2)}{!}$$

$$= n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3) \times \frac{(4\,n + 1)}{5\,!}$$

Isso só evidencia o estudo de sequências numéricas pelos chineses.

2.1.10. MATEMÁTICA DOS HINDÚS

Segundo BOYER (2010), durante o sexto século, viveram dois matemáticos hindus que escreveram obras importantes para o estudo da matemática. O mais antigo e importante foi Aryabhatiya de Aryabhata. Sua importância na Índia é semelhante à de *Os elementos de Euclides na Grécia*, cerca de oito séculos antes.

Uma parte típica do Arybhatiya é a que trata de progressões aritméticas, contendo regras para achar a soma dos termos numa progressão e determinar o número de termos, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos. A primeira regra não era novidade, já a segunda constitui uma explanação curiosamente complicada.

> Multiplique-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada disso, subtrair-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por dois. O resultado será o mínimo de termos. (BOYER, pg. 144).

2.1.11. MATEMÁTICA NA ÍNDIA

A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da idade média, dentre eles o que teve maior destaque foi *Bhaskara* (1114 – 1185) considerado o mais importante matemático do século em que viveu como descreve BOYER (2010).

Sua obra mais importante é *Lilavati*, contendo numerosos problemas sobre uma infinidade de assuntos, dentre eles alguns envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

Um problema que envolve progressão aritmética tem o seguinte enunciado: *“Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo um rei marchou 2 yojonas no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojonas, em uma semana?”*

2.1.12. O LIBER ABACI E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa (1180 – 1250), mais conhecido como Fibonacci (Filho de Bonaccio), escreveu um livro intitulado *Liber Abaci* (livro do ábaco). Apesar do título, o referido livro não trata do ábaco, como afirma BOYER (2010, p. 173) “*Não é sobre o ábaco; é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos no qual o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado*”.

O *Liber Abaci* contém problemas muito interessantes sobre sequências numéricas. Podemos destacar um, muito parecido com o proposto no Papiro de Rhind:

> *“Sete velhas foram a Roma, cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas.”*

Podemos simbolizar esse problema com uma sequência numérica que indica o número de velhas, mulas, sacos, pães, facas e bainhas. (7, 49, 343, 2401, 16807, 117649).

O problema que mais se destacou e serviu de inspiração a muitos matemáticos em todos os tempos foi o seguinte:

“Quantos pares de coelhos serão produzidas num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”

A solução desse problema leva a uma das mais brilhantes e curiosas descobertas matemáticas, uma sequência numérica intitulada sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números, onde o número 1 representa o primeiro e o segundo termos, já os demais são originados pela soma dos dois números que o antecedem e os demais são originados pela soma.

O que faz dessa ordem de números tão especial é a sua ligação com os fenômenos da natureza e o valor aproximado da constante 1,6, quociente da divisão entre um número e seu antecessor na sequência a partir do número 3.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, ...

Os grandes estudiosos sempre procuraram a proporção ideal a ser aplicada nas construções e nas artes. E foi com esse propósito criaram o retângulo de ouro e os egípcios construíram as suas pirâmides. O retângulo obedecia a uma relação entre o comprimento e a largura, sendo a divisão entre eles igual a 1,6. Esse quociente também era registrado entre as pedras utilizadas na construção das pirâmides. Considerando que a pedra inferior seria maior que a superior. Nesse caso, a divisão entre eles também seria 1,6, pois esse valor era considerado símbolo da perfeição nas construções, chegando a receber o nome de “*divina proporção”*.

Fibonacci não só estabeleceu a sequência a partir do crescimento populacional de coelhos, ele também descobriu a “divina proporção” em plantas, exemplificada pelo espiral desenvolvida à partir da folha de uma bromélia, notando que o crescimento da espiral é semelhante ao do retângulo de ouro, obedecendo a proporção 1,618. Isso pode ser ilustrado através das figuras 2 e 3.

Figura 2: Folha de Bromélia

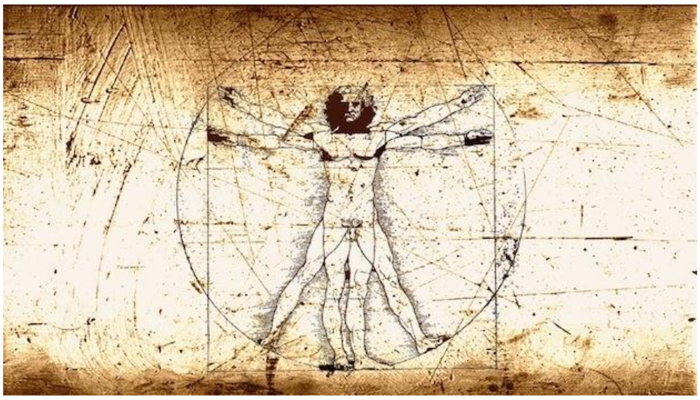
Fonte: http://www.mundoeducacao.com

Figura 3: Espiral

Fonte: http://www.mundoeducacao.com

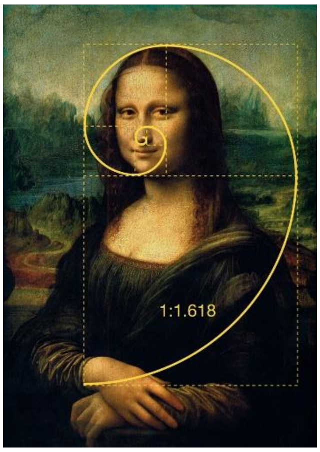
Temos ainda outras evidências da proporção áurea, ela foi muito usada nas obras dos artistas Michelangelo e Leonardo da Vinci, pois eles observam tal proporção nas medidas. As figuras 4 e 5, apresentam exemplos de obras de Leonardo da Vinci que foi feita obedecendo a proporção áurea.

Figura 4: Homem Vitruviano (1490 – Leonardo da Vince)



Fonte: http://matematicaeinteratividade.blogspot.com

Figura 5: Monalisa



Fonte: http://www.gpe.360.com.br

Podemos verificar a presença da razão áurea nas medidas do corpo humano, vejamos:

Altura da pessoa dividida pela altura do umbigo em relação ao solo. Medida inteira da perna dividida pela altura do joelho até o solo. Medida do braço inteiro dividido pelo tamanho do cotovelo até o dedo. Medida do dedo inteiro dividida pelo tamanho da dobra central até a ponta.

Graças a essas e outras evidências da razão áurea no corpo humano, algumas clínicas de estética usam tal razão para buscar a perfeição em cirurgias faciais.

2.1.13. GAUSS

O século dezenove merece ser considerado a idade de ouro da matemática. Gauss, que viveu nessa época, foi sem dúvida um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Para BOYER (2010), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) desde muito jovem mostrava traços de genialidade, isso pode ser ilustrado por uma narrativa de sua vida quando ele tinha apenas 10 anos de idade.

Gauss quando criança se divertia com cálculos matemáticos e certa vez, para colocar a classe ocupada, seu professor mandou que os alunos somassem todos os números naturais de 1 a 100. Quase imediatamente Gauss concluiu o trabalho dizendo: “- Aí está!” O professor ficou incrédulo, porém ao analisar sua resposta e a dos outros alunos observou que ele havia sido o único a responder corretamente 5050 e incomparavelmente mais rápido.

O menino de 10 anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100, tendo percebido que nessa sequência de somas havia um resultado que se repetia 101: 1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = 5 + 96 e assim sucessivamente. Então simplesmente multiplicou 50 x 101, pois 50 foi o número de vezes que essa soma apareceu.

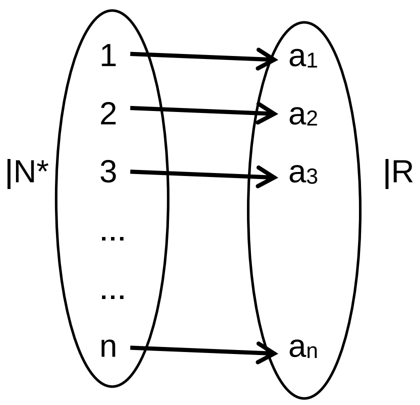
2.2. DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIA

Chama-se sequência infinita qualquer função de |N* em |R.

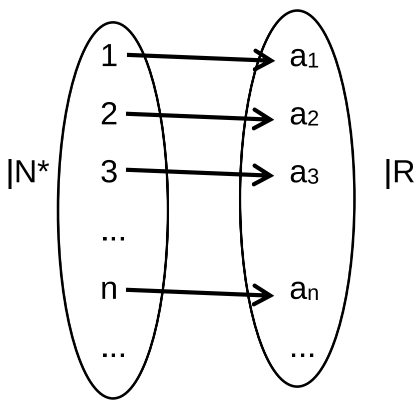
Assim em toda sequência infinita, a cada $n \in$ |N* está associado um $a_n \in$ |R.

$$\mathcal{F} = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}.$$

Quando uma sequência possui um número limitado de termos dizemos que trata-se de uma sequência finita.



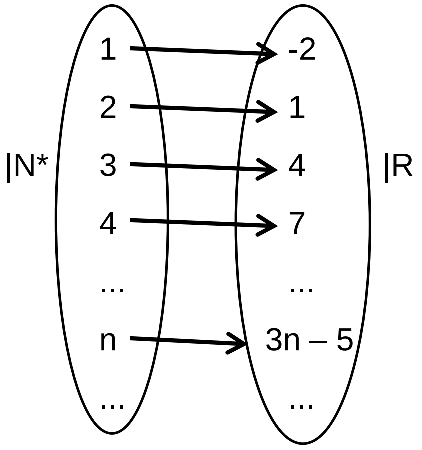
Sequência Finita



Sequência Infinita

EXEMPLO:

Considerando a função f de |N* em |R dada por f(n) = 3n - 5



$f(1) = 3 \,.\, 1 - 5 = -2$

$f(2) = 3 \,.\, 2 - 5 = 1$

$f(3) = 3 \,.\, 3 - 5 = 4$

$f(4) = 3 \,.\, 4 - 5 = 7$

... ...

$f(n) = 3 \,.\, n - 5$

... ...

É importante ressaltar que os resultados encontrados compõe uma sequência infinita, podendo esta ser representada por pares ordenados:

$$\{(1, -2); (2, 1); (3, 4); (4, 7); ...; (n, 3n - 5); ...\}$$

ou então pode ser representada por suas imagens (-2, 1, 4, 7, ... 3n – 5).

Quando a sequência é representada por suas imagens podemos afirmar que cada elemento da sequência seguirá uma sucessão ordenada de termos (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...) de forma que a_1 representa o 1º termo, a_2 o segundo termo e assim sucessivamente e consequentemente o n-ésimo termo da sequência, que é o termo geral, é indicado por a_n. Isso significa que se for necessário encontrarmos o sétimo termo, teremos simplesmente que substituirmos 7 na lei de formação da sequência.

Na sequência usada no exemplo (-2, 1, 4, 7, ..., 3n – 5) observamos que o primeiro termo a_1 é igual a a – 2, o segundo termo a_2 é igual a 1, o terceiro termo a_3 é igual a 4 e assim sucessivamente.

No estudo de sequências é necessário sabermos o conceito de operador diferença.

Seja (a_n) uma sequência qualquer. O operador diferença, denotado por Δa_n, é tal que $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Isto é Δ_n é a diferença entre um termo da sequência e seu antecessor.

2.3. FORMAS DE OBTENÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

2.3.1. POR FÓRMULA DE RECORRÊNCIA

É fornecido o primeiro termo e a lei que possibilita obter os termos à partir dos termos anteriores, ou seja, encontrar (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

EXEMPLO:

E1) $\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 20, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2. \end{cases}$

Temos:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 20 = 5 + 20 = 25$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 20 = 25 + 20 = 45$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 20 = 45 + 20 = 65$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 20 = 65 + 20 = 85.$

Observando atentamente percebemos que para obtermos qualquer termo à partir do segundo é bastante somarmos 20 ao termo anterior, dessa forma poderemos abandonar algumas formalidades e simplesmente montarmos a sequência:

(5, 25, 45, 65, 85, 105, 125, ...).

E2) $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_n = 5 \,.\, a_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2. \end{cases}$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 \,.\, a_1 = 5 \,.\, 3 = 15$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5 \,.\, a_2 = 5 \,.\, 15 = 75$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5 \,.\, a_3 = 5 \,.\, 75 = 375$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5 \,.\, a_4 = 5 \,.\, 375 = 1875.$

... ...

Percebamos que para obtermos qualquer termo à partir do segundo, basta multiplicarmos por 5 o termo anterior, quando houver essa percepção fica evidente a montagem da sequência.

(3, 15, 75, 375, 1875, 9375, 46875, ...).

2.3.2. POR UMA LEI DE FORMAÇÃO QUE EXPRESSA CADA TERMO EM FUNÇÃO DE SUA POSIÇÃO

É fornecida uma fórmula que expressa a_n em função de n.

EXEMPLO:

E1) Escrever a sequência cujos termos obedecem a lei $a_n = 5.n + 7$, $\forall n \in |N^*$.

Temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5 . 1 + 7 = 12$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 . 2 + 7 = 17$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5 . 3 + 7 = 22$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5 . 4 + 7 = 27$

... ...

Então poderemos escrever a sequência:

(12, 17, 22, 27, ...).

E2) Escrever a sequência cujos termos obedecem a lei:

$$a_n = 3^n – 5 \quad , \quad \forall n \in |N^*.$$

Temos:

$n = 1 \quad a_1 = 3^1 - 5 = -2$

$n = 2 \quad a_2 = 3^2 – 5 = 4$

$n = 3 \quad a_3 = 3^3 – 5 = 22$

$n = 4 \quad a_4 = 3^4 – 5 = 76.$

Então podemos escrever a sequência:

(-2, 4, 22, 76, ...).

E3) Escreva a sequência cujos termos obedecem a lei.

$a_n = 10^n + 1 \quad , \quad \forall n \in |N – \{ 0 \}$

$a_1 = 10^1 + 1 = 11$

$a_2 = 10^2 + 1 = 101$

$a_3 = 10^3 + 1 = 1001$

$a_4 = 10^4 + 1 = 10001$

$a_5 = 10^5 + 1 = 100001$

$a_6 = 10^6 + 1 = 1000001$.

2.3.3. POR UMA PROPRIEDADE DOS TERMOS

Nesse caso é fornecida uma propriedade onde os termos da sequência devem obrigatoriamente apresentar.

EXEMPLOS:

E1) Escrever a sequência dos múltiplos naturais de 3 colocados em ordem crescente, temos:

(0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...).

E2) Escrever a sequência dos números primos positivos colocados na ordem crescente, temos:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...).

Notemos que algumas sequências, como a dos números primos por exemplo, não podem ser dados por fórmula de recorrência bem como não existe fórmula para calcular o n-ésimo termo.

2.4. CLASSIFICAÇÃO

2.4.1. SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

a) **Estritamente Crescente:** Uma sequência é estritamente crescente se, e somente se, $a_n < a_{n+1}$, $\forall_n \in |N^*$, ou seja: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$

EXEMPLO:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Podemos mostrar que $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}$, ... é estritamente crescente, vejamos:

O padrão dos termos iniciais sugere que a sequência é estritamente crescente. Para provar isso, seja $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Podemos obter a_{n+1} substituindo *n* por n + 1. Então:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Assim, para $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1).\ (n+1) - n\,(n+2)}{(n+1).\ (n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1).\ (n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\ (n+2)} > 0.$$

O que prova ser a sequência estritamente crescente.

Se para algum $n \in |N^*$ $a_{n+1} - a_n = 0$, então a sequência é dita crescente.

Uma outra forma de afirmar que uma sequência é estritamente crescente é quando a razão dos termos sucessivos é maior do que 1.

$$\frac{an+1}{an} > 1.$$

Vejamos o mesmo exemplo dado anteriormente:

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Assim,

$$\frac{an+1}{an} = \frac{(n+1)/\ (n+2)}{n\ /\ (n+1)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{(n+1)}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}.$$

Uma vez que o numerador na expressão $\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ excede o denominador, tem-se que $\frac{an+1}{an} > 1$ para $n \geq 1$. Isso prova que a sequência é estritamente crescente.

b) **Crescente:** Uma sequência é crescente, se e somente se, $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall_n \in |N^*$, ou seja $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ...$

Exemplos:

1, 1, 2, 2, 3, 3, ...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

c) **Estritamente Decrescente**: Uma sequência e estritamente decrescente se, e somente se, $a_n > a_{n+1}$, $\forall_n \in |N^*$, ou seja: $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$

Exemplo: 1, ½, $^1/_3$, ... $^1/_n$, ...

Podemos mostrar que:

1, ½, $^1/_3$, ... $^1/_n$, ... é estritamente decrescente, vejamos:

O padrão de termos iniciais sugere que a sequência é estritamente decrescente. Para provar isso seja:

$$a_n = {}^1/_n .$$

Então como foi visto anteriormente uma sequência é estritamente decrescente quando $a_n > a_{n+1}$, $\forall_n \in |N^*$ então:

$a_{n+1} - a_n =$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$

$\frac{n-(n+1)}{n\,(n+1)} =$

$\frac{n-n+1}{n\,(n+1)} =$

$\frac{-1}{n\,(n+1)}$ ➡ $a_{n+1} - a_n < 0$

➡ $a_{n+1} < a_n$.

Perceba que para qualquer valor que atribuirmos a *n* onde *n* ϵ |N* a expressão $\frac{-1}{n\,(n+1)}$ resultará em um número menor do que zero, com isso está provado que a sequência é estritamente decrescente.

d) **Decrescente:** Uma sequência é decrescente se, e somente se, $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall_n$ ϵ |N*, ou seja, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ...$

EXEMPLO:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...$$

e) **Constante:** Uma sequência é constante se, e somente se, $a_n = a_{n+1}$, $\forall_n$ ϵ |N*, ou seja, $a_1 = a_2 = a_3 = ...\ a_n = ...$

EXEMPLO:

2, 2, 2, 2, 2, ...

2.4.2. SEQUÊNCIAS ALTERNANTES

Uma sequência (a_n) é alternante se, e somente se, (a_n) não é monótona.

3. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

3.1. COMENTÁRIOS INICIAIS

Abraham de Moivre nasceu em 26 de maio de 1667, em Vitry, França. Atribui-se ao matemático De Moivre uma lenda sobre um homem que previu sua própria morte. As condições da previsão estão dentro de uma narrativa que modela grosseiramente vários aspectos da realidade. Por exemplo, dormir 24 horas seguidas equivale a morrer, e assim por diante. A lenda é a seguinte: Um homem observou que cada dia dormia 15 minutos a mais que no dia anterior. Se ele fez essa observação exatamente após ter dormido 8 horas, quanto tempo levará para que ele durma 24 horas seguidas, não mais acordando?

Considerando que oito horas possui 480 minutos e que 24 horas possui 1440 minutos, poderemos montar a seguinte sequência finita:

(480, 495, 510, 525, 540, 555, 570, 585, 600, 615, ..., 1440)

Observe que na sequência apresentada, cada termo a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com 15. A sequência construída é um exemplo de progressão aritmética, que iniciaremos agora o estudo.

3.2. DEFINIÇÃO

Progressão aritmética é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada da razão da P.A. e indicaremos por *r*.

A progresso aritmética é uma sequência regida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + r, \quad \forall_n \in |N, n \geq 2. \end{cases}$$

EXEMPLOS:

E1) (-25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, ...) é uma P.A.de razão r = 5

E2) (-40, -42, -44, -46, -48, -50, ...) é uma P.A. de razão r = -2

E3) (10, 10, 10, 10, ...) é uma P.A. de razão r = 0

A definição de progressão aritmética deve ser entendida através de exemplos que instiguem os alunos a pensar e através das conclusões chegadas, consigam montar uma sequência, ou seja, para fixação da idéia de progressão aritmética podemos apresentar exemplos que os alunos compreendam como está ocorrendo a sucessão de termos para que posteriormente consigam encontrar os próximos termos e assim montar a sequência.

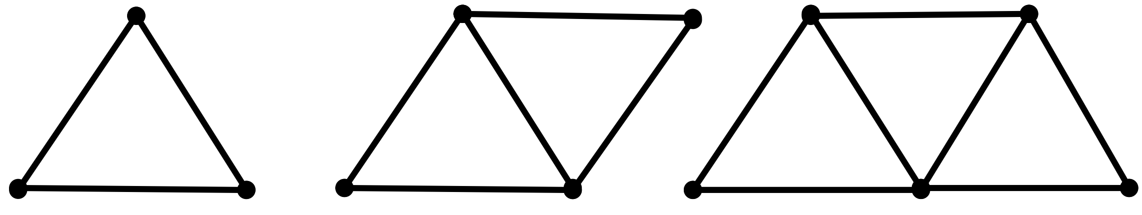
Os exemplos propostos devem apresentar padrões matemáticos que existam em fenômenos naturais, na construção de figuras, no cotidiano das pessoas, fazendo uma conexão entre a matemática e a vida, isso possibilitará um interesse maior por parte do aluno.

Para Lima (2011), uma boa forma de introduzir sequências numéricas, dentre as quais se destacam as progressões aritméticas, se refere a “padrões matemáticos” que são seguidas por “situações que ocorrem na natureza”, na história da Matemática e na vida econômica da sociedade contemporânea.

Vejamos agora algumas atividades que possibilitarão aos alunos perceberem algumas regularidades, padrões que existam na construção de cada elemento que faz parte da sequência, fazendo com que uma vez encontrado a lógica que exista na passagem de um elemento para o seu sucessor, possa generalizar para consequentemente obter qualquer elemento que faça parte do conjunto da sequência, como também encerre sua observação com a construção de uma lei que possibilite obter qualquer termo constituinte dessa sequência.

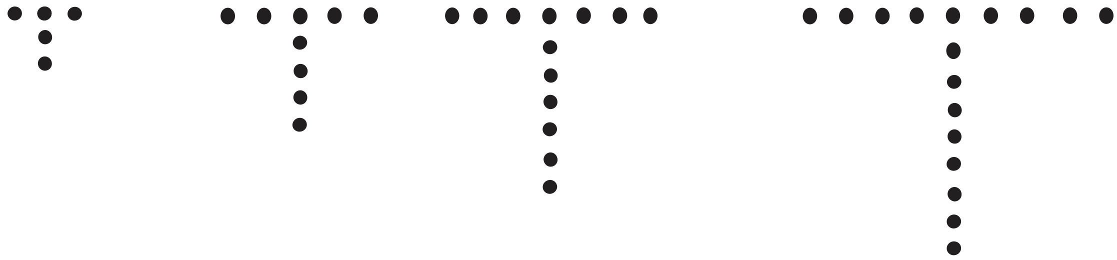
3.2.1. ATIVIDADES PARA FIXAÇÃO DA DEFINIÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

a) (DANTE, p. 296 adaptado) Observe as figuras abaixo, formadas com palitos:



Nessa atividade podemos propor aos alunos que depois de uma rigorosa observação possam desenhar as próximas figuras que compõe a sequência, em seguida escrever uma sequência numérica da quantidade de palitos usados para construção de cada figura, inclusive estimulando até a construção de tabelas, encerrando o processo escrevendo uma expressão matemática que generalize a sequência, possibilitando ao aluno encontrar quantos palitos serão necessários para a obtenção da 10ª 15ª, 20ª, 100ª, etc, não precisando para isso desenhar todas as figuras até achar a procurada.

b) (IMENIS E LELLIS, 9º ano, p. 209 adaptado) Observe a sequência de figuras:



Trata-se de mais um exemplo de atividade em que o aluno poderá observar o padrão de montagem de figuras para posteriormente tentar achar quais serão as próximas figuras, inclusive tentando achar a expressão matemática que possibilite encontrar a n-ésima figura. Nesse momento a percepção mais importante que os alunos deverão ter é que a quantidade de pontinhos para formar cada figura retratam uma progressão aritmética, reforçando a aprendizagem da definição de progressão aritmética.

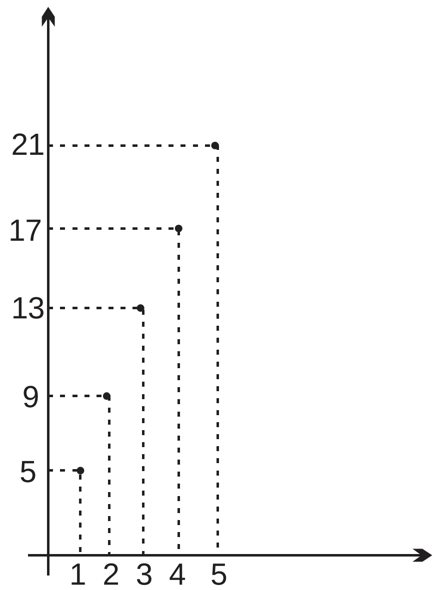
Ao encontrar a expressão matemática que generalize a sequência o aluno vai tendo um primeiro contato com a conexão da progressão aritmética com a função afim, já que uma P.A. é uma função afim $\mathcal{F}$, de domínio em |N*, nesse caso o número de pontinhos das figuras formam a P.A. (5, 9, 13, 17, ...), onde ao relacionarmos a ordem *n* da figura e a quantidade de pontinhos de cada uma formamos a tabela:

Tabela 1:

Ordem *n* da figura	**Nº de pontinhos que compõem a figura**
1	5
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
...	...
N	4n + 1

A representação gráfica da função $\mathcal{F}$ onde $\mathcal{F}(n)$ = 4n + 1 é o conjunto de pontos a seguir:

Gráfico 1:



Lembrando que os pontos estão alinhados, porém não formam uma reta, pois $\mathcal{F}$ está definida apenas para o conjunto |N*.

c) (RIBEIRO, Jackson. Adaptado) Alguns cometas, quando passam por determinados pontos da Via Láctea, podem ser observados da terra a olho nu. Um dos mais conhecidos desses cometas é o Halley, visto da Terra a olho nu pela última vez em

1986. Esse cometa, famoso pelo intenso brilho que emite, tem períodos de 76 anos, ou seja passa pelo mesmo ponto de sua órbita a cada 76 anos.

A partir desse enunciado várias situações podem ser propostas aos alunos afim de fixarem a definição de progressão aritmética. Por exemplo poderá ser pedido aos alunos que construam uma P.A. de 10 termos que represente os anos das próximas vezes em que o cometa Halley poderá ser visto da Terra a olho nu, no caso (2062, 2138, 2214, 2290, 2366, 2442, 2518, 2594, 2670, 2746).

Também podemos pedir que o aluno construa uma progressão aritmética mostrando todas as vezes que o cometa Halley “visitou” a Terra desde o nascimento de Cristo. Ao montar a sequência o aluno poderá fazer uso de uma progressão aritmética decrescente, cujo primeiro termo é 1986, vejamos:

(1986, 1910, 1834, 1758, 1682, 16006, 1530, 1454, 1378, 1302, 1226, 1150, 1074, 988, 922, 846, 770, 694, 618, 542, 466, 390, 314, 238, 162, 86, 10).

Situações como esta envolvendo fenômenos naturais são muito bem aplicados no estudo de progressões aritméticas, dado que desperta a curiosidade no aluno, fomentando o interesse deste na aprendizagem.

Existem muitos outros fenômenos periódicos que podem ser abordados, contextualizando questões de progressões aritméticas, como exemplos podemos citar os movimentos de rotação e translação da Terra, fases da lua, eclipses, estações do ano etc.

Em linhas gerais, para o estudo da definição de progressões aritméticas devemos buscar situações que torne significativa a aprendizagem, que faça o aluno descobrir padrões e depois generalizá-los, que façam conexões com a vida, com outras ciências, mostrando que a matemática existe dentro e fora dela, ou seja não justificar sempre a matemática pela própria matemática, pois isso costuma causar desinteresse nos discentes muitas vezes.

3.3. CLASSIFICAÇÃO

As progressões aritméticas podem ser classificadas da seguinte forma:

a) Crescentes:

São as progressões aritméticas onde cada termo é maior que o anterior, isso acontece quando $r > 0$, pois:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

Exemplo: (7, 11, 15, 19, 23, 27, ...) é uma progressão aritmética crescente, pois sua razão $r = 4$.

b) Constantes:

Constantes são as progressões aritméticas em que cada termo é igual ao anterior. Isso só ocorre quando $r = 0$, pois:

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Exemplo: (7, 7, 7, 7, 7, 7, ...) é uma progressão aritmética constante, pois sua razão $r = 0$

c) Decrescentes:

Decrescente são as progressões aritméticas em que cada termo é menor que o anterior, isso acontece quando $r < 0$, pois:

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Exemplo: (8, 5, 2, -1, -4, -7 ...) é uma progressão aritmética decrescente, pois sua razão $r = -3$.

3.4. LEI DE FORMAÇÃO

Vimos que a fórmula de recorrência pela qual se define uma progressão aritmética é:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + r \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } n \geq 2. \end{cases}$$

Vamos admitir a_1 como o primeiro termo da progressão, *r* como a razão da progressão, e o índice *n* como a posição que o termo ocupa na sequência, teremos então:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

$a_5 = a_4 + r$

....

$a_n = a_{n-1} + r$

Somando essas n – 1 igualdade, temos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-1}} + a_n = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1}} + (n - 1) \;.\; r \;.$$

Cancelam-se

Poderemos então enunciar que na progressão aritmética onde o primeiro termo é a_1 e a razão é *r*, o n-ésimo termo é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \;.\; r \;.$$

Demonstração pelo princípio da indução finita:

Para n = 1 , temos:

$a_1 = a_1 + (1 - 1) \;.\; r$

$a_1 = a_1$ (SENTENÇA VERDADEIRA)

Hipótese de Indução:

Admitamos ser válido para n = p

$a_p = a_1 + (p - 1) \;.\; r$

Provemos que vale para n = p + 1:

$a_{p+1} = a_1 + (p + 1 – 1) . r$

$a_{p+1} = a_1 + p . r = \underbrace{a_1 + (p – 1) . r}_{} + r = a_p + r$

$a_p \Rightarrow$ pela hipótese de indução

$a_{p+1} = a_p + r$ já definida na fórmula de recorrência.

Então: $a_n = a_1 + (n – 1) . r \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Podemos ainda estabelecer uma relação da progressão aritmética com funções polinomiais do primeiro grau, onde o n-ésimo termo de uma progressão aritmética pode ser interpretado como sendo uma função $\mathcal{F} : \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathbb{R}$, onde f(n) = a . n + b, com a = *r* e b = $a_1 – r$. Isso pode ser observado com a manipulação da fórmula $a_n = a_1 + (n -1) . r$, vejamos:

$a_n = a_1 + (n – 1) . r$

$a_n = a_1 + n . r – r$

$a_n = n . r + a_1 – r$.

Comparando com f(n) = a . n + b

$a . n + b = r . n + (a_1 – r)$.

Temos que a = *r* e b = $a_1 – r$, e que *r* e $(a_1 – r)$ são termos constantes. Portanto, qualquer sequência onde o termo geral é dado por expressões do tipo:

$$a_n = a . n + b.$$

Onde *a* e *b* são constantes, é uma P.A. de razão igual a *a*.

Por exemplo, a sequência cujo o termo geral é $a_n = 7n – 8$ é uma progressão aritmética de razão igual a 7 e $a_1 = -1$, visto que $a_1 - r = b \Rightarrow a_1 – 7 = -8 \Rightarrow a_1 = -1$.

Isso deve ser ensinado de forma que essa conexão entre progressão aritmética com função afim seja a mais natural possível, pois relações como estas permitem que o aluno perceba a ligação harmoniosa dos assuntos abordados na matemática.

EXEMPLOS:

E1) Seja a Progressão Aritmética (P.A.) de domínio E = {1, 2, 3, 4} cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$.

a) Qual é a razão dessa P.A.?

b) Quais são os termos dessa P.A.?

c) Faça o gráfico de a_n em função de *n*.

SOLUÇÃO:

a) $a_n = 2n - 1$ $\quad\quad$ $r = 2$

b) $a_1 = 2 \cdot (1) - 1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot (2) - 1 = 3$

$a_3 = 2 \cdot (3) - 1 = 5$

$a_4 = 2 \cdot (4) - 1 = 7$

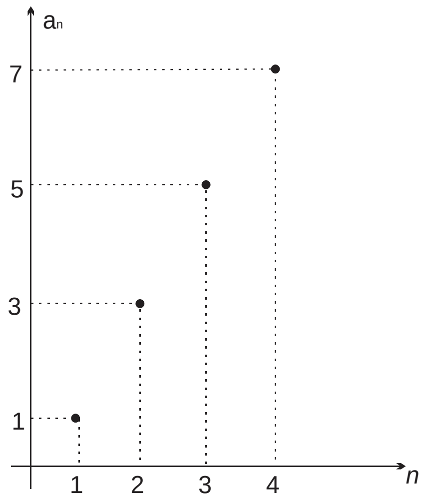
P.A. (1, 3, 5, 7)

c)

n	**na**
1	1
2	3
3	5
4	7

Os pares ordenados que deverão formar o gráfico são: (1; 1), (2; 3), (3; 5), (4; 7), isto é, apenas 4 pares e, portanto, o nosso gráfico tem apenas 4 pontos. Esses pontos não devem ser ligados, em função do seu domínio:

Gráfico 2:



E2) (RIBEIRO. p. 103 adaptada)

<u>Camadas da Atmosfera</u>

Termosfera - Camada que se estende da mesosfera até aproximadamente 500km de altitude. É nessa camada que ocorre grande tráfego de alguns tipos de ondas de rádio devido à grande quantidade de gases ionizados.

Estratosfera – Essa camada que se estende da troposfera até cerca de 50km de altitude. É nela que se encontra a camada de gás ozônio (O_3), responsável pela filtração dos raios ultravioletas emitidas pelo sol.

Exosfera – Essa camada vai da termosfera até o espaço exterior. Em geral, é nessa camada que se instalam os satélites artificiais.

Mesosfera – Essa outra camada vai da estratosfera, até cerca de 80km. É nela que ocorrem as temperaturas mais baixas, podendo chegar a -90º C.

Troposfera – Essa é a primeira camada da atmosfera, e se estende até cerca de 17km de altitude nas proximidades da linha do equador. Nela ocorre a maioria dos fenômenos meteorológicos.

A temperatura diminui cerca de 5ºC a cada quilômetro que aumentamos na altitude. Suponha que a temperatura diminua gradativamente à medida que aumentamos a altitude, e considere que em um ponto R, situado na linha do Equador, a temperatura a nível do mar é de 30ºC.

Escreva uma função f: |N* ➡ |R que expresse a temperatura T, em função da altitude, acima do ponto R.

SOLUÇÃO: Perceba que a temperatura T em função de cada quilômetro de altitude acima de R descreve uma progressão decrescente de razão *r* = -5. Vejamos:

(25, 20, 15, 10, ...).

Então considerando f(n) = T e que $f(n) = r \cdot n + a_1 - r$

onde : *r* = razão da P.A.

n = altitude

a_1 = altitude no ponto a 1km de R

segue que:

$f(n) = r \cdot n + a1 - r$

$T = -5 \cdot n + 25 - (-5)$

$T = -5n + 30$

E3) Dada a função $\mathcal{F} : |N^* \Rightarrow |R$, ou seja, de domínio natural e contra-domínio real definida por f(n) = 4n – 6, escreva a progressão aritmética obtida à partir dessa função.

Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, e que relacionando com a função polinomial do 1º grau obtemos:

$$f(n) = r \cdot n + a_1 - r$$

Comparando com a função f(n) = 4n – 6

$$4 \cdot n - 6 = r \cdot n + a_1 - r$$

$$r = 4 \qquad (\text{I})$$

$$a_1 - r = -6 \ (\text{II}).$$

Substituindo (I) em (II)

$$a_1 - 4 = -6$$

$$a_1 = -2$$

Encontramos assim a progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = -2$ e razão $r = 4$, então assim podemos escrever a sequência:

(-2, 2, 6, 10, 14, 18, ...).

3.5. PROPRIEDADES DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

3.5.1. OBTENÇÃO DE UM TERMO CENTRAL ATRAVÉS DA MÉDIA ARITMÉTICA ENTRE O ANTECESSOR E O SUCESSOR DESSE TERMO.

Em toda progressão aritmética, dados três termos consecutivos (..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...), exceto o primeiro e o último (quando a progressão for finita) o termo central a_n corresponde à média aritmética dos outros dois.

DEMONSTRAÇÃO: Considerando três termos consecutivos de uma progressão aritmética a_{n-1}, a_n, a_{n+1} $\Rightarrow$ como $a_n - a_{n-1} = r$ e $a_{n+1} - a_n = r$, temos que:

$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$

$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Então, a_n é a média aritmética entre o seu antecessor e seu sucessor.

3.5.2. SOMA DOS TERMOS EQUIDISTANTES

Numa progressão aritmética finita podemos afirmar que a soma de dois termos equidistantes dos extremos equivale a soma desses termos extremos nessa progressão aritmética.

DEMONSTRAÇÃO:

Dado a progressão aritmética finita ($a_1, a_2, ..., a_j, a_{j+1}, ..., a_{n-j}, a_{n-j+1}, ..., a_{n-1}, a_n$)

Note que a_{j+1} e a_{n-j} são equidistantes dos extremos a_1 e a_n, então demonstremos que $a_n + a_1 = a_{j+1} + a_{n-j}$

$a_n = a_1 + (n - 1) . r$

$a_n = a_1 + n . r - r \qquad (I)$

$a_{j+1} = a_1 + (j + 1 - 1) . r$

$a_{j+1} = a_1 + j . r \qquad (II)$

$a_{n-j} = a_1 + (n - j -1) . r$

$a_{n-j} = a_1 + nr - jr - r \qquad (III)$

Fazendo:

$I + a_1 = II + III$

$a_1 + n\, r - r + a_1 = a_1 + jr + a_1 + n\, r - jr - r$

$2a_1 + n\, r - r = 2a_1 + j\, r - jr + nr - r$

$2a_1 + n\, r - r = 2a_1 + nr - r$

O que prova que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma desses termos extremos.

3.6. SOMA DOS *n* PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), é tido como o maior matemático do século XIX, sendo considerado um menino prodígio. Quando ainda era uma criança de apenas 10 anos, seu professor, para manter a turma em silêncio por um bom tempo, pediu que os alunos somassem todos os números de 1 a 100, ou seja 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100. Após poucos minutos, quando seu professor menos esperava, Gauss chegou à resposta e disse que a soma era 5050.

O menino Gauss havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 observando que 1 + 100 = 101; 2 + 99 = 101; 3 + 98 = 101 e assim por diante, executando 50 somas com resultados 51 em todas elas. Então simplesmente ele multiplicou 50 . 51 que resultou em 5050.

O que Gauss fez para somas a P.A. (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100) pode ser generalizado.

DEMONSTRAÇÃO:

Dada a progressão aritmética finita de razão *r* $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ a soma (S_n) dos seus *n* termos pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n . \qquad \text{(I)}$$

Ou de maneira equivalente:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1. \qquad \text{(II)}$$

Somando membro a membro as igualdades I e II, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pela propriedade **2.5.2.** sabemos que, numa progressão aritmética finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos. Então, temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

$$2S_n = n\,(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2}.$$

Que é a soma dos *n* termos de uma progressão aritmética finita.

EXEMPLOS:

E1) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro:

1ª Linha	1				
2ª Linha	3	5			
3ª Linha	7	9	11		
4ª Linha	13	15	17	19	
5ª Linha	21	23	25	27	29
....	...	...	...	...	...

Qual é o 1º elemento da 43ª linha na horizontal?

SOLUÇÃO:

Primeiramente teremos que encontrar quantos elementos existem nas primeiras 42 linhas:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 42)$$

Isso resulta na soma de uma P.A. de razão 1 com:

$a_1 = 1$ e $a_n = 42$

$$a_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}$$

$$a_n = \frac{(1 + 42) \,.\, 42}{2}$$

$a_n = 43 \,.\, 21$

$a_n = 903$

Como nas 42 primeiras linhas existem 903 elementos poderemos certamente afirmar que o 1º elemento da 43ª linha será 904º elemento.

Para concluir a questão, basta agora encontrar o valor do 904º elemento, portanto:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{904} = 1 + (904 - 1) \cdot 2$

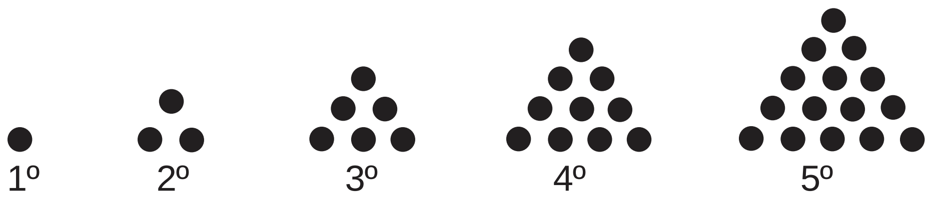
$a_{904} = 1 + 903 \cdot 2$

$a_{904} = 1 + 1806$

$a_{904} = 1807$

O 1º elemento da 43ª linha será o número ímpar 1807.

E2) Os membros da escola pitagórica ao estudarem os números figurativos, definiram como sendo número de pontos em determinadas configurações geométricas. Entre eles existem os números triangulares. Os primeiros números triangulares são 1, 3, 6, 10 e 15.



Obedecendo-se à mesma lógica de formação observada nas figuras, qual será o 100º número triangular?

Percebamos que o número de pontos de cada triângulo segue a seguinte lógica:

1º $\Longrightarrow$ 1

2º $\Longrightarrow$ 1 + 2

3º $\Longrightarrow$ 1 + 2 + 3

4º $\Longrightarrow$ 1 + 2 + 3 + 4

5º $\Longrightarrow$ 1 + 2 + 3 + 4 + 5

Então, seguindo esse padrão o 100º triângulo será formado por 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 100 pontos. O que exibe a soma de uma P.A. de 100 termos, onde o 1º termo é 1 e o 100º termo é o 100 e a razão é 1.

Realizando as operações:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \ . \ n}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \ . \ 100}{2}$$

$$S_{100} = \frac{101 \ .100}{2}$$

S_{100} = 5050

O 100º número triangular é 5050.

E3) Um poço de petróleo que produz 100 barris de petróleo bruto por mês se esgotará em um ano. Em cada mês, o preço se mantém constante e é dado por f(x) = 69,8 + 0,2 x dólares por barril, em que x = 1 representa o 1º mês, x = 2 o segundo mês, e assim por diante. Qual será a receita total proporcionada pelo poço, até se esgotar?

SOLUÇÃO:

$f(x) = 0{,}2x + 69{,}8$ (I)

$f(x) = r \ . \ x + (a_1 - r)$ (II)

Comparando I e II, concluímos que:

$r = 0{,}2$

$a_1 - r = 69{,}8$

$a_1 - 0{,}2 = 69{,}8$

$a_1 = 70{,}00$

Então o preço mensal do barril de petróleo naquele ano pode ser descrito como uma P.A. com $a_1 = 70{,}00$ e $r = 0{,}2$. Então:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{12} = 70{,}00 + (12 – 1) \cdot 0{,}2$

$a_{12} = 70{,}00 + 11 \cdot 0{,}2$

$a_{12} = 72{,}20$

Equivale ao preço do barril no 12º mês.

Agora usando a fórmula da soma da P.A.:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{12} = \frac{(70 + 72{,}2) \cdot 12}{2}$$

$S_{12} = 142{,}20 \times 6$

$S_{12} = 853{,}20$

Encontramos 853,20.

Mas não podemos esquecer que são produzidos 100 barris por mês. Logo, 853,20 x 100 = 85.320,00.

CONCLUSÃO: A receita total no ano proporcionado pelo poço é de 85.320,00 dólares.

4. PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE 2ª ORDEM

4.1. COMENTÁRIOS INICIAIS

Vejamos a sequência numérica (1, 3, 7, 13, 21, 31, ...), analisando de maneira superficial chegaríamos a conclusão de que trata-se de uma sequência infinita crescente.

Essa é uma verdade, porém se analisarmos com um maior critério, a sequência revela uma outra verdade que muitas vezes passa despercebida, trata-se da diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor, vejamos:

3 – 1 = **2**

7 – 3 = **4**

13 – 7 = **6**

21 – 13 = **8**

31 – 21 = **10**

... ...

Montando a sequência obtida através das diferenças entre os termos consecutivos nos leva a uma progressão aritmética não estacionária.

(2, 4, 6, 8, 10, ...)

Quando a primeira sequência não forma uma progressão aritmética, mas a diferença entre seus termos consecutivos determinam uma segunda sequência constituída de uma progressão aritmética não estacionária podemos afirmar que essa primeira sequência é uma progressão aritmética de 2ª ordem.

4.2. DEFINIÇÃO:

Considere uma primeira sequência (b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n, ...) e uma segunda sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...) formada à partir das diferenças entre os termos consecutivos da primeira, quando a segunda sequência é uma progressão aritmética não estacionária dizemos que a primeira é uma progressão aritmética de 2ª ordem.

Exemplos:

E1) (3, 5, 9, 15, 23, 33, ...)

E2) (10, 15, 23, 44, 58, 75, ...)

4.3. LEI DE FORMAÇÃO

Como consequência da definição de progressão aritmética de segunda ordem onde tendo uma sequência (b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n, ...), que não representa uma progressão aritmética, mas as diferenças entre seus termos consecutivos formam uma sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...) que constitui uma progressão aritmética não estacionária, podemos encontrar a lei de formação de uma progressão aritmética de segunda ordem. Vejamos:

Dada a sequência:

(b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n, ...)

Formemos uma segunda sequência constituída das diferenças dos termos consecutivos da primeira.

$$a_1 = b_2 - b_1 \Rightarrow b_2 = b_1 + a_1$$

$$a_2 = b_3 - b_2 \Rightarrow b_3 = b_2 + a_2 \Rightarrow b_3 = b_1 + a_1 + a_2$$

$$a_3 = b_4 - b_3 \Rightarrow b_4 = b_3 + a_3 \Rightarrow b_4 = b_1 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$a_4 = b_5 - b_4 \Rightarrow b_5 = b_4 + a_4 \Rightarrow b_5 = b_1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

... .

$$b_n = b_1 + \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}}_{\text{soma dos n-1 primeiros termos da P.A.}}$$

$$b_n = b_1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}$$

$$b_n = b_1 + \underbrace{\frac{(a_1 + a_{n-1}) \,.\, (n-1)}{2}}_{\text{soma dos n-1 primeiros termos da P.A.}} \quad (\text{ I })$$

Calculando o termo a_{n-1}

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Longrightarrow a_{n-1} = a_1 + (n - 2) \cdot r \qquad (II)$

Substituindo: (II) em (I)

$$b_n = b_1 + \frac{(a_1 + a_1 + (n-2).\ r)\ .\ (n-1)}{2}$$

$$b_n = b_1 + \frac{(2a_1 + (n-2).\ r)\ .\ (n-1)}{2}$$

$$b_n = b_1 + \frac{2a_1\ .\ (n-1) + (n-1)\ .\ (n-2)\ .\ r}{2}$$

$$\boxed{b_n = b_1 + a_1\ .\ (n - 1) + \frac{(n-1).\ (n-2)\ .\ r}{2}}$$

EXEMPLOS:

E1) Encontre o 100º termo da sequência (5, 7, 10, 14, 19, 25, ...)

SOLUÇÃO: Através da diferença dos termos consecutivos obtemos a seguinte sequência: (2, 3, 4, 5, 6, ...)

Para encontrar o 100º termo da primeira sequência precisamos dos seguintes termos:

$b_1 = 5 \Longrightarrow$ Primeiro termo da 1ª sequência

$a_1 = 2 \Longrightarrow$ Primeiro termo da 2ª sequência

$r = 1 \Longrightarrow$ Razão da progressão aritmética que representa a segunda sequência.

$n = 100 \Longrightarrow$ Consideremos 100 termos já que queremos o 100º termo. Então façamos uma substituição na fórmula:

$$b_n = b_1 + a_1\ .\ (n - 1) + \frac{(n-1).\ (n-2)\ .\ r}{2}$$

$$b_{100} = 5 + 2\ .\ (100 - 1) + \frac{(100-1).\ (100-2)\ .\ 1}{2}$$

$b_{100} = 5 + 2 \cdot 99 + \frac{99 \cdot 98 \cdot 1}{2}$

$b_{100} = 5 + 198 + 4851$

$b_{100} = 5054$

Portanto, o 100º termo da sequência (5, 7, 10, 14, 19, 25, ...) é 5054.

OBSERVAÇÃO:

Podemos simplificar um pouco a expressão:

$$b_n = b_1 + a_1 \cdot (n - 1) + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot r}{2}$$

Bastante para isso sabermos b_1, a_1, e *r*. Nesse caso temos:

$b_1 = 5$ obtido na sequência (5, 7, 10, 14, 19, 25, ...)

$a_1 = 2$ obtido na sequência (2,3,4,5,6, ...)

$r = 1$, pois trata-se da razão da P.A. (2, 3, 4, 5, 6, ...)

Vejamos:

$b_n = b_1 + a_1 (n - 1) + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot 1}{2}$

$b_n = 5 + 2 (n - 1) + \frac{(n^2-3n+2) \cdot 1}{2}$

$b_n = 5 + 2n - 2 + \frac{n^2-3n + 2}{2}$

$b_n = 2n + 3 + \frac{n^2-3n + 2}{2}$

$b_n = \frac{4n+6+ n^2-3n+2}{2}$

$b_n = \frac{n^2+ n+8}{2}$

Onde com essa expressão podemos encontrar qualquer termo da P.A. de 2ª ordem.

$$b_{100} = \frac{100^2 + 100 + 8}{2}$$

$$b_{100} = \frac{10000 + 100 + 8}{2}$$

$$b_{100} = 5054$$

Se quiséssemos achar o 1000º termo, faríamos uma substituição de n = 1000 na fórmula.

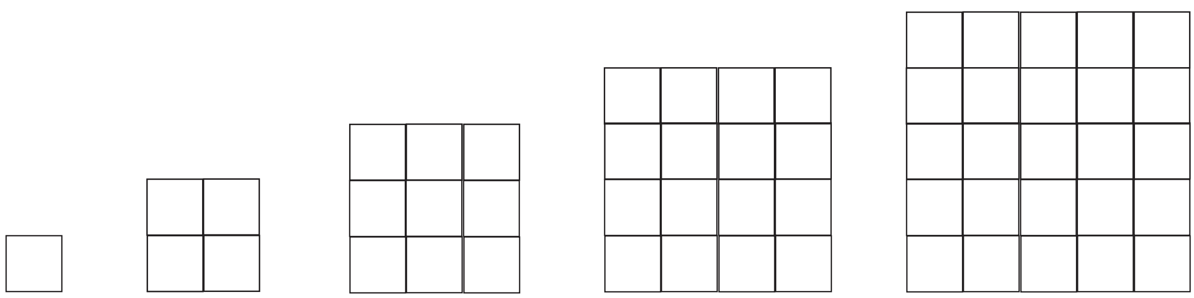
$$b_n = \frac{n^2 + n + 8}{2}$$

$$b_{1000} = \frac{1000^2 + 1000 + 8}{2}$$

$$b_{1000} = \frac{1000000 + 1000 + 8}{2}$$

$$b_{1000} = 500504$$

E2) Dada a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, ..., 2n - 1, ...), para n = 1, 2, 3, ... podemos utilizar quadrados para mostrar geometricamente a soma dos *n* primeiros naturais ímpares:



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1+3+5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$ $\quad$ $1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

Então, dessa representação geométrica podemos concluir que:

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

....

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2n – 1 = n^2$

Montando a sequência das somas encontradas:

(1, 4, 9, 16, 25, ...) (I)

Obtendo a sequência das diferenças dos termos consecutivos:

(3, 5, 7, 9, ...) (II)

A sequência (II) é uma progressão aritmética de razão *r* = 2, então chegamos a conclusão que (I) é uma progressão aritmética de 2ª ordem.

Através da lei de formação da progressão aritmética de 2ª ordem qual o valor da soma 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 13 + 15 + 17 + 19 + ... + 999?

Nessa sequência podemos perceber facilmente que temos a soma dos primeiros 500 números ímpares, então essa soma representa o 500º termo da sequência (I) (1, 4, 9, 16, 25, ...)

Não esquecendo que podemos obter de (I) a sequência das diferenças dos termos consecutivos (3, 5, 7, 9, ...) (II)

Usando a lei de formação dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética de 2ª ordem, podemos encontrar o termo desejado:

$$b_n = b_1 + a_1 (n – 1) + \frac{(n-1).\ (n-2)\ .\ r}{2}$$

$$b_{500} = 1 + 3 (500 – 1) + \frac{(500-1).\ (500-2)\ .\ 2}{2}$$

$$b_{500} = 1 + 3 \cdot 499 + 499 \cdot 498$$

$b_{500} = 1 + 1497 + 248502$

$b_{500} = 250\ 000$

4.4. RELAÇÃO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM COM FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

Quando a lei de formação de uma sequência é dada por um polinômio do segundo grau, dizemos que a sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem, em outras palavras podemos relacionar uma progressão aritmética de segunda ordem com uma função polinomial do segundo grau com domínio |N*, como podemos mostrar:

Partiremos da lei de formação da progressão aritmética de segunda ordem

$$b_n = b_1 + a_1 (n - 1) + \frac{(n-1).(n-2).r}{2}$$

Fazendo o desenvolvimento:

$$b_n = b_1 + a_1.n - a_1 + \frac{(n^2-3n+2).r}{2}$$

$$b_n = b_1 + a_1.n - a_1 + \frac{r}{2}n^2 - \frac{3}{2}r.n + r$$

$$b_n = \frac{r}{2}n^2 + a_1 n - \frac{3}{2}r n + b_1 - a_1 + r$$

$$\boxed{b_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{3r}{2}\right).n + (b_1 - a_1 + r)}$$

Observe que o termo b_n pode ser visto no aspecto de uma função polinomial do segundo grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$), onde: $a = \frac{r}{2}$, $b = a_1 - \frac{3r}{2}$ e $c = b_1 - a_1 + r$ de modo que podemos escrever o termos geral b_n como $b(n) = an^2 + bn + c$ com $n \in$ |N*.

EXEMPLOS:

E1) Dada a função polinomial do segundo grau $b(n) = n^2 + 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$, verifique que a imagem obtida quando atribuímos a *n* os valores (1, 2, 3, 4, 5, ...) determina uma progressão aritmética de segunda ordem e represente graficamente.

SOLUÇÃO: $b(n) = n^2 + 2n - 2$

$b(1) = 1^2 + 2 .1 - 2 = 1$

$b(2) = 2^2 + 2 .2 - 2 = 6$

$b(3) = 3^2 + 2 .3 - 2 = 13$

$b(4) = 4^2 + 2 .4 - 2 = 22$

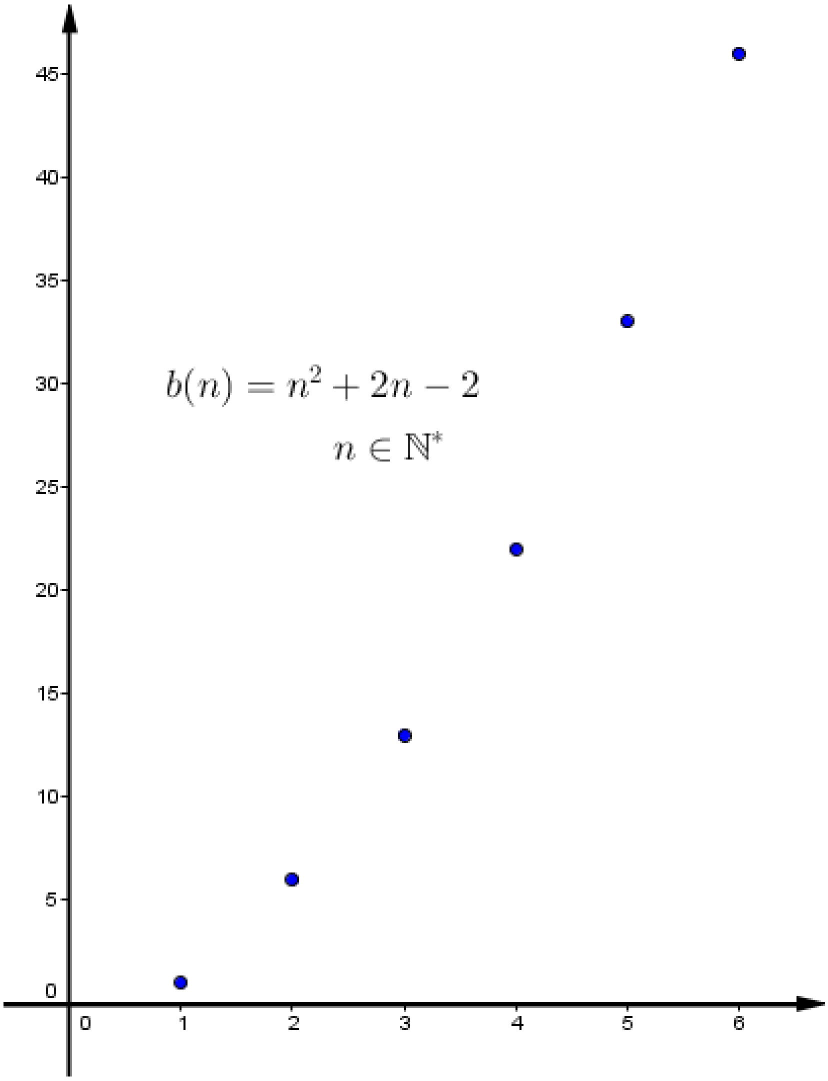
$b(5) = 5^2 + 2 .5 - 2 = 33$

$b(6) = 6^2 + 2 .6 - 2 = 46$

Resulta na sequência (1, 6, 13, 22, 33, 46, ...) que é uma P.A. de segunda ordem, visto que a sequência das diferenças entre os termos consecutivos é (5, 7, 9, 11, 13, ...).

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA:

Gráfico 3:



Perceba que o gráfico é formado por um conjunto de pontos não contínuos, dado que o domínio é o conjunto |N*.

E2) A soma dos *n* primeiros termos da progressão aritmética (3, 7, 11, 15, 19, ...) pode ser escrita como $S_n = 2n^2 + n$ para todo *n*. Escreva a progressão aritmética de segunda ordem que podemos obter à partir das *n* somas sucessivas dos termos dessa P.A.

SOLUÇÃO:

$$S_n = 2n^2 + n$$

Para n = 1 $\Rightarrow$ $S_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ $\Rightarrow$ 3

Para n = 2 $\Rightarrow$ $S_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ $\Rightarrow$ 3 + 7

Para n = 3 $\Rightarrow$ $S_3 = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21$ $\Rightarrow$ 3 + 7 + 11

Para n = 4 $\Rightarrow$ $S_4 = 2 \cdot 4^2 + 4 = 36$ $\Rightarrow$ 3 + 7 + 11 + 15

Para n = 5 $\Rightarrow$ $S_5 = 2 \cdot 5^2 + 5 = 55$ $\Rightarrow$ 3 + 7 + 11 + 15 + 19

... ...

De fato, as somas obtidas (3, 10, 21, 36, 55, ...) representam uma progressão aritmética de segunda ordem, pois à partir dessa sequência podemos obter a sequência das diferenças dos termos consecutivos (7, 11, 15, 19, ...) que é uma progressão aritmética de primeira ordem, ou melhor é a própria progressão aritmética inicial, à partir do segundo termo.

Um outro forte argumento para fazer a associação da expressão geral que indica a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética com uma progressão aritmética de segunda ordem, é saber que a fórmula da soma resulta em uma função polinomial do segundo grau onde, conforme já foi definido a sequência que exibe as sucessivas somas, é uma progressão aritmética de segunda ordem. Vejamos:

I - $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ $\Rightarrow$ Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética de primeira ordem.

II - $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ $\Rightarrow$ Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Substituindo-se II em I:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(2a_1 + nr - r) \cdot n}{2}$$

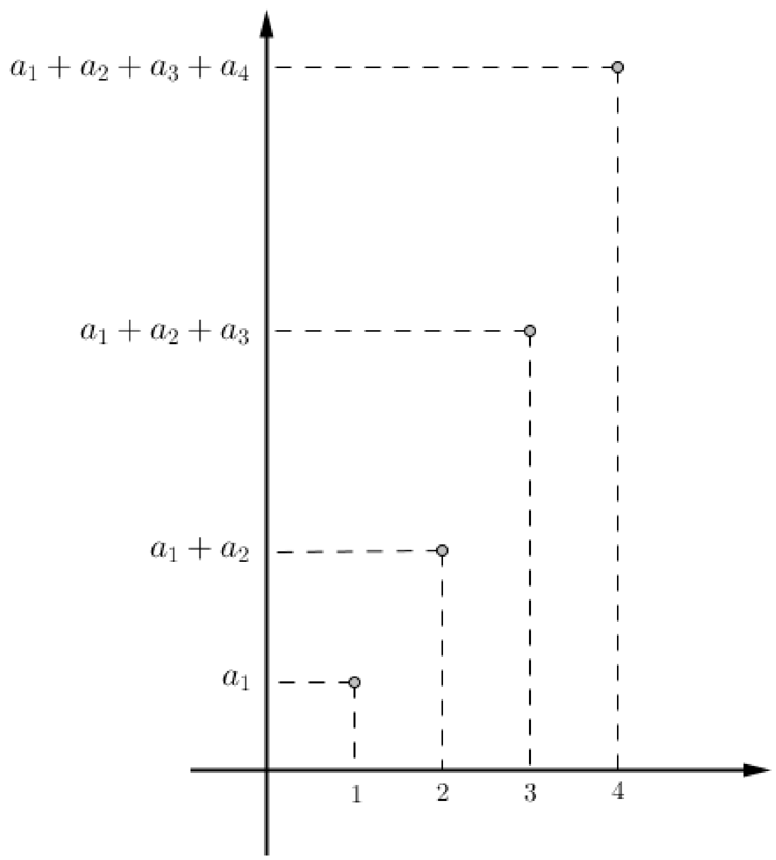
$$S_n = \frac{2a_1 \,.\, n + n^2 \,.\, r - r\,n}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{r}{2}\,n^2 + \frac{(2a_1 - r)\,.\,n}{2}}$$

Como a fórmula da soma de uma progressão aritmética pode ser escrita como um polinômio de segundo grau, podemos concluir que as situações que envolvem soma de uma progressão aritmética de primeira ordem pode ser entendida como uma progressão aritmética de segunda ordem.

Se fizermos a interpretação gráfica das sucessivas somas de uma progressão aritmética, veremos que resultará em pontos de uma parábola, respeitando o fato de não traçarmos continuamente a parábola, já que o domínio é o conjunto |N*, vejamos:

Gráfico 4:



4.5. SOMA DOS *n* PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM

Como vimos anteriormente, o termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem pode ser escrita como:

$$b_n = b_1 + a_1\,(n-1) + \frac{(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,r}{2}$$

Observe que o termo $\frac{(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,r}{2}$ pode ser escrito como uma combinação, mais precisamente $C_{n-1,2}$ dado que:

$$C_{n-1,2} = \frac{(n-1)\,!}{[(n-1)-2]!\,.\,2!}$$

$$C_{n-1,2} = \frac{(n-1)\,!}{(n-3)!\,.\,2!}$$

$$C_{n-1,2} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,(n-3)\,!}{(n-3)!\,.\,2.1}$$

Como (n-3)! Aparece no numerador e no denominador, a divisão de $\frac{(n-3)!}{(n-3)!}$ dará 1, logo:

$$C_{n-1,2} = \frac{(n-1)\,.\,(n-2)}{2}$$

Então o termo geral da progressão aritmética

$b_n = b_1 + a_1\,(n - 1) + \frac{(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,r}{2}$ pode ser escrito como:

$$b_n = b_1 + a_1\,(n-1) + C_{n-1,2}\,.\,r$$

Aplicando o somatório em ambos os membros:

$$\sum_{n=1}^{k} b_n = \sum_{n=1}^{k} (b_1 + a_1 (n-1) + r \,.\, C_{n-1,2})$$

$$\sum_{n=1}^{k} b_n = S_k \quad \text{(Soma dos k termos)}$$

$$S_k = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} b_1}_{\text{Parcela 1}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{k} a_1 (n-1)}_{\text{Parcela 2}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{k} .\, r \,.\, C_{n-1,2}}_{\text{Parcela 3}} \qquad (\text{I})$$

Analisando separadamente as parcelas:

Parcela 1: $\sum_{n=1}^{k} b_1$ como b_1 é constante teremos ($k \,.\, b_1$)

Da parcela 2: $\sum_{n=1}^{k} a_1 \,.\, (n-1)$ como a_1 é constante pode sair do somatório resultando em:

$$a_1 \sum_{n=1}^{k} (n-1) = a_1 \,.\, \frac{(0+k-1)\,.\,k}{2}$$

$$= a_1 \,.\, \frac{k\,(k-1)}{2}$$

Isso dizemos pois, $\sum_{n=1}^{k} (n-1)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem com o primeiro termo zero e razão 1.

Da parcela 3: $\sum_{n=1}^{k} C_{n-1,2} \,.\, r = r \sum_{n=1}^{k} C_{n-1,2}$

Perceba que não faz sentido falar em $C_{n-1,2}$ para $n \leq 2$ (pois, para $n = 1 \Rightarrow C_{0,2}$ e para $n = 2 \Rightarrow C_{1,2}$ que não faz sentido zero tomado dois a dois ou um tomado dois a dois) e ainda mais, na realidade a razão r só surgirá à partir do 3º termo da P.A. de segunda ordem. Vejamos:

Lembre-se da sequência ($b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n, ...$) que quando representa uma progressão aritmética de segunda ordem podemos formar uma sequência das diferenças dos termos consecutivos retratando uma progressão aritmética.

$a_1 = b_2 - b_1 \Rightarrow b_2 = b_1 + a_1$

$a_2 = b_3 - b_2 \Rightarrow b_3 = b_2 + a_2 \Rightarrow b_3 = b_1 + a_1 + a_2 \Rightarrow b_3 = b_1 + a_1 + a_1 + r$

A razão aparece pela primeira vez quando obtemos o 3º termo da P.A. de segunda ordem.

Assim, $r \cdot \sum_{n=1}^{k} C_{n-1,2} = r \cdot \sum_{n=3}^{k} C_{n-1,2}$, mas o somatório $\sum_{n=3}^{k} C_{n-1,2}$ representa a soma da coluna 2 do triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{llllllll}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{0} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & ... & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Coluna zero

Coluna dois

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	5	5	1
...	...	...	...	...	...

$\Uparrow$

Coluna dois

Conclui-se que:

$\sum_{n=3}^{k} C_{n-1,2} = C_{k,3}$. Logo, a parcela 3

$\sum_{n=1}^{k} C_{n-1,2} \cdot r = C_{k,3} \cdot r$

Substituindo a análise das parcelas 1, 2 e 3 na equação I teremos:

$$S_k = b_1 \cdot k + a_1 \cdot \frac{k\,(k-1)}{2} + C_{k,3} \cdot r$$

Onde:

b_1 = Primeiro elemento da P.A. de segunda ordem;

a_1 = Primeiro elemento da P.A. de primeira ordem que é formada à partir das diferenças dos termos consecutivos da P.A. de segunda ordem;

k = Número de termos a ser somado;

r = Razão da P.A. de primeira ordem.

EXEMPLO:

E1) Qual a soma dos sete primeiros termos da sequência (8, 14, 22, 32, 44,...)?

SOLUÇÃO:

Primeiramente temos que atentar ao fato que a sequência (8, 14, 22, 32, 44, ...) é uma progressão aritmética de segunda ordem, dado que (6, 8, 10, 12, ...) que é a sequência das diferenças dos termos consecutivos é uma progressão aritmética de primeira ordem de razão 2.

Agora é só fazer uso da fórmula da soma dos k primeiros termos da progressão aritmética de segunda ordem.

$$S_k = b_1 \,.\, k + a_1 \,.\, \frac{k\,(k-1)}{2} + C_{k,3} \,.\, r$$

$$S_7 = 8 \,.\, 7 + 6 \,.\, \frac{7\,(7-1)}{2} + C_{7,3} \,.\, 2$$

Temos que: $C_{7,3} = \frac{7\,!}{3!(7-3)!} = \frac{7\,!}{3!\;4\,!} = \frac{7\,.\,\cancel{6}\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{6}\,.\,\cancel{4}\,!} = 7 \,.\, 5 = 35$

Voltando para a expressão da soma:

$$S_7 = 8 \,.\, 7 + 6 \,.\, 7 \,.\, 3 + 35 \,.\, 2$$

$$S_7 = 56 + 126 + 70$$

$$S_7 = 252$$

Logo, a soma dos 7 primeiros termos da sequência é 252.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo realizado por meio dessa dissertação abordou o tema sequências e progressões aritméticas de primeira e segunda ordem. O foco é o ensino médio, fazendo, com isso, a exibição da temática de maneira simples sem no entanto abandonar os fundamentos da matemática. Deste modo, as principais definições foram feitas, propriedades e fórmulas foram apresentadas com suas deduções e demonstrações.

Nesse trabalho não houve a intenção de exibir um banco de fórmulas sem aplicações e com demonstrações complexas. Houve sim, a utilização de situações que por acontecerem com regularidade, instigam o aluno a identificar esses padrões e partindo desse foco, poder generalizar, entendendo assim as definições. Para isso foram utilizadas situações contextualizadas, fatos históricos e uso da interdisciplinaridade.

Ao fazer uso do contexto histórico de sequências não houve a intenção de apresentar uma rigorosa análise dos fatos e problemas que ocuparam a mente de importantes matemáticos. O que advém é a apresentação de situações curiosas com intuito de despertar no aluno o interesse por esse estudo, outorgando uma proposta aos professores do ensino médio que se utilizem dessa conexão de fatos históricos com os temas abordados, no propósito de enriquecer suas aulas, criando um maior interesse nos alunos em continuar explorando o tema.

É importante mencionar que houve uma apresentação do estudo das progressões aritméticas de primeira ordem conectados com as funções polinomiais do primeiro grau, e das progressões aritméticas do segundo grau agregadas às funções polinomiais do segundo grau. Assim, constrói-se com essa relação uma visão sistematizada nos campos de estudo da matemática, mostrando assim que a matemática pode ser ensinada de maneira integrada.

Ressalto aqui a dificuldade de encontrar materiais voltados a progressão aritmética de segunda ordem em livros, artigos e sites. Principalmente nos livros voltados ao ensino médio onde no máximo foram encontrados breves comentários sobre o assunto. Por conseguinte, foi apresentado por meio desta dissertação que é totalmente possível o ensino das progressões aritméticas de segunda ordem no ensino médio, sobretudo por sua relação direta com as funções polinomiais do segundo grau, tema esse largamente presente nesse nível de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard. Cálculo um novo horizonte. Vol 2. 6ª edição. Ed. Bookman.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 3ª Edição. 2010. Ed. Edgard Blücher Ltda.

COSTA, Ailton Barcelos da. A Construção do Conceito de Sequências na Perspectiva Lógico-histórico. Revista Iberoamericana de Educacion Matemática. Março de 2010. Pg. 133 – 157. Disponível em: http://www.fisem.org/www/mnion/revistas/2010/21/union_021_015.pdf . Acessado em 03 ago. 2014.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. 1ª Edição. Ed. Ática. 2010.

http://www.gpc.360.com.br Acessado em 25 out. 2014

http://www.matematica.br/historia/prhind.html. Acessado em 25 out. 2014.

http://www.mundoeducacao.com.br Acessado em 25 out. 2014.

http://matematicaeinteratividade.blogspot.com Acessado em 25 out. 2014.

IEZZI,Gelson e HAZZAN, Samuel. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol 4. 7ª edição. Editora: Atual.

IMENES, Luiz Márcio e LELIS, Marcelo. Matemática: Imenes & Lelis. 9º ano. 2ª edição. Editora Moderna, 2012.

LIMA, Elon. Lages. Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o ensino médio. VITAE. IMPA. SBM: 2011.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cézar Pinto Carvalho; WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2. 6ª Edição. SBM, 2001.

NETO, Aref Antan ... [et al]. Progressões e Logaritmos. São Paulo. Editora Moderna. 1ª Edição

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. Vol. 1. Scipione. 2010.

ANEXOS

QUESTÕES ENVOLVENDO PROGRESSÕES ARITMÉTICAS NO ENEM

A - (ENEM 2013, questão 149) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87
d) 558,75
e) 563,25

SOLUÇÃO:

A sequência que corresponde a projeção da produção de arroz no período de 2012 – 2021 (50,25; 51,50; 52,75; 54,00; ...) é uma progressão aritmética de primeira ordem, pois a diferença entre os termos consecutivos é constante:

51,50 – 50,25 = 52,75 – 51,50 = 54,00 – 52,75 = 1,25.

Essa diferença constante constitui a razão da P.A. Encontrar a quantidade total de arroz que deverá ser produzida no período de (2012 – 2021) é encontrar o resultado da soma da produção desse período.

A fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}$, depende do primeiro termo do número de termos e do último termo a ser somado (a_n). Logo, para realizarmos essa soma precisamos do termo a_{10} que é a projeção da produção de 2021. Para isso usaremos a fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 + (n – 1) \,.\, r$

$a_{10} = 50,25 + (10 – 1) \,.\, 1,25$

$a_{10} = 50,25 + 9 \,.\, 1,25$

$a_{10} = 50,25 + 11,25$

$a_{10} = 61,50$

Usando agora a fórmula da soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(50,25 + 61,50) \,.\, 10}{2}$$

$S_{10} = 111,75 \,.\, 5$

$S_{10} = 558,75$

Portanto, a alternativa correta é a letra **D**.

B - (ENEM 2012, questão 149) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:

a) 21

b) 24

c) 26

d) 28

e) 31

SOLUÇÃO:

Começaremos a solução apresentando a sequência das sete colunas de cartas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que é uma P.A. de primeira ordem, de razão 1 com 7 termos onde o primeiro termo vale 1 e o sétimo termo vale 7.

Com base nessas informações calculemos a soma da quantidade de cartas dessas sete colunas:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\ .\ n}{2}$$

$$S_7 = \frac{(1 + 7)\ .7}{2}$$

$S_7 = 28$

O monte é formado pela quantidade de cartas não usadas nas colunas, equivalendo a quantidade total de cartas subtraída das cartas que formaram as colunas:

$$52 – 28 = 24$$

24 cartas formam o monte: alternativa **B**.

C - (ENEM 2011, questão 162) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000

b) 40 500

c) 41 000

d) 42 000

e) 48 000

SOLUÇÃO:

A “chave” da resolução dessa questão é perceber que a sequência formada pelos números obtidos pelas vendas mensais de passagens por essa empresa aérea à partir de janeiro do ano em questão. (33000, 34500, 36000, ...) é uma PA.

Para obter o número de passagens vendidas por essa empresa aérea em julho, precisamos apenas encontrar o sétimo termo da sequência a_7. Usaremos para isso a fórmula do termo geral da progressão aritmética:

$a_n = a_1 + (n - 1) . r$

$a_7 = 33000 + (7 - 1) . 1500$

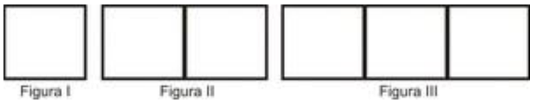
$a_7 = 33000 + 6 . 1500$

$a_7 = 33000 + 9000$

$a_7 = 42000$

Então no mês de julho foram vendidos 42000 passagens. A solução é a letra **D**.

D - (ENEM 2010, questão 149) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



(Foto: Reprodução/Enem)

Que expressão fornece a quantidade de quadrados de cada figura?

a) C = 4Q
b) C = 3Q + 1
c) C = 4Q – 1
d) C = Q + 3
e) C = 4Q – 2

SOLUÇÃO:

Para resolver essa questão é importante perceber a ligação clara entre progressão aritmética e função afim no contexto.

Para obtermos o termo geral de uma progressão aritmética, dependemos do primeiro termo e a razão. Nesse caso o termo geral é a quantidade de canudos. Cada figura é um termo que é composto por um determinado número de quadrados, então temos:

Fórmula do termo geral da P.A. $a_n = a_1 + (n – 1) . r$

Reescrevendo para obtermos uma função afim de domínio |N*:

$$a_n = a_1 + n . r – r$$

$$a_n = r . n + a_1 – r$$

Como o termo geral é a quantidade de canudos obtidos em função do número de quadrados e que cada figura é obtida acrescentando três canudos, podemos escrever da seguinte forma:

$a_n = r . n + a_1 – r$

C = 3 . Q + 4 – 3

$\boxed{C = 3Q + 1}$ Portanto, letra **B**.

E - (ENEM 2ª Aplicação 2010, questão 137) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Disponível em: http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

a) 12 dias
b) 13 dias
c) 14 dias
d) 15 dias
e) 16 dias

SOLUÇÃO:

Primeiramente é importante entender que o aumento de 500 metros por dia durante o treinamento fará com que as distâncias percorridas nos sucessivos dias formem uma progressão aritmética onde o primeiro termo é 3000 e a razão é 500.

(3000, 3500, 4000, ...)

Podemos escrever o termo geral dessa sequência da seguinte forma:

$a_n = a_1 + (n – 1) . r$

$a_n = 3000 + (n – 1) . 500$

$a_n = 3000 + 500n – 500$

$a_n = 500n + 2500$

A recomendação médica é que no máximo o atleta corra 10 km, ou seja 10000m num único dia de treino. Temos que:

$a_n = 500.n + 2500$

Pela carga permitida de treino:

$a_n \leq 10000$

$500n + 2500 \leq 10000$

$500n \leq 7500$

$n \leq \frac{7500}{500}$

$n \leq 15$

Logo seu planejamento de treino só poderá ser executado em no máximo 15 dias, pois passando disso ultrapassaria a carga máxima diária.

Resposta correta, letra **D**.

F - (ENEM 2ª Aplicação 2010, questão 139) O trabalho em empresas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal.

Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.

Funcionário II: aproximadamente 6 000 estrelas.

Funcionário III: aproximadamente 12 000 estrelas.

Funcionário IV: aproximadamente 22 500 estrelas.

Funcionário V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

SOLUÇÃO:

A distribuição de estrelas nas linhas sucessivas formam uma progressão aritmética de razão 1. Percebemos também que o número da linha equivale a quantidade de estrelas: 1ª linha: 1 estrela, 2ª linha: 2 estrelas, 3ª linha: 3 estrelas, e assim sucessivamente de modo que a 150ª linha tenha 150 estrelas.

Entendido isso, a questão se resumirá a somar a quantidade de estrelas das 150 linhas. Utilizarei para isso a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1)\ .\ n}{2}$$

$$S_n = \frac{(\ 1+150).150}{2}$$

$$S_n = \frac{151\ .150}{2}$$

S_n = 151 . 75

S_n = 11325

Portanto o funcionário que deu a resposta mais próxima da correta foi o funcionário III, que respondeu 12000 estrelas. Letra **C**.

G - (ENEM PPL 2013, Questão 170) Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse chip armazene, em sua memória, no máximo 9,5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados.

Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

a) 7
b) 8
c) 9
d) 12
e) 13

SOLUÇÃO:

Primeiramente vamos montar a sequência das distâncias percorridas dia a dia nos treinos:

(300, 500, 700, 900, 1100, ...)

Percebemos que trata-se de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 300 e a razão 200, com isso podemos obter o seu termo geral:

$a_n = a_1 + (n – 1) . r$

$a_n = 300 + (n – 1) . 200$

$a_n = 300 + 200n – 200$

$a_n = 200n + 100$

Sabemos que *n* equivale ao número de dias e que a soma das distâncias armazenadas tem que ser no máximo 9500m, podemos usar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}$

$\frac{(300+200n+100) \,.\, n}{2} \leq 9500$

$(200n + 400) \,.\, n = 19000$

$200n^2 + 400n – 19000 = 0$

Podemos dividir ambos os membros por 200 e tornar a equação mais simples:

$n^2 + 2n – 95 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$\Delta = b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c$

$\Delta = 2^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-95)$

$\Delta = 4 + 380$

$\Delta = 384$

$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \,.\, a}$

$n = \frac{-2 \pm \sqrt{384}}{2 \,.\, 1}$

$n' = \frac{-2 - \sqrt{384}}{2}$ ➡ Não serve, pois nesse caso a raiz não poderá ser negativa.

$n'' = \frac{-2 + \sqrt{384}}{2}$

Considerando $\sqrt{384} \cong 19{,}5$

$n = \frac{-2 + 19{,}5}{2} \cong 8{,}75$

Porém, o número de dias tem que ser um número natural, portanto para não ultrapassar a capacidade de armazenamento do chip, podemos afirmar que o chip só poderá armazenar as informações até o oitavo dia. Letra **B**.