SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO.

GENIVAL NUNES SANTOS

BELÉM – PA
DEZEMBRO - 2014

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

GENIVAL NUNES SANTOS

FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como pré – requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM - PA
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Santos, Genival Nunes, 1975-
Funções exponenciais: uma proposta para professores do ensino médio. / Genival Nunes Santos. - 2014.

Orientador: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Matemática-Ensino médio. 3. Funções exponenciais. 4. Exponentes (Algebra). I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

GENIVAL NUNES SANTOS

FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA PROPOSTA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como pré – requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 10/12/2014

Conceito: Excelente

Banca Examinadora

Prof. Dr.: Arthur da Costa Almeida
Universidade Federal do Pará - UFPA

Profª . Drª.: Rúbia Gonçalves Nascimento
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr.: Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicatória

A minha família, em especial a minha esposa, Rosangela Carvalho, que sempre me deu forças para não desanimar diante das dificuldades encontradas pelo caminho.

Agradecimentos

À minha família, pelo carinho, solidariedade, incentivo e por estarem sempre ao meu lado diante das decisões que precisei tomar.

Ao meu orientador, Giovany Figueiredo, pela paciência, pelas tantas horas dedicadas a orientação deste trabalho e tantas outras dedicadas a minha formação pessoal e profissional.

A cada um dos meus professores do curso de mestrado, por proporcionarem ao longo de suas aulas momentos de reflexão e aprendizagem que ajudaram a traçar caminhos e a perceber que a educação é uma construção coletiva.

A cada um dos alunos de minha classe, os quais proporcionaram inúmeros momentos de descontração e me auxiliaram diante dos desafios enfrentados.

A todos o meu sincero muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho, discute-se o tema das funções exponenciais e suas propriedades. Objetivando diagnosticar as dificuldades encontradas no desenvolvimento de tal tema, inicia-se o estudo com uma abordagem pautada em definições e provas algébricas, para as quais, sempre que necessário, são fornecidos subsídios, através de notas de rodapé e apêndices, visando assim proporcionar ao leitor o entendimento das demonstrações que envolvam os conteúdos que fogem do currículo da matemática básica, momento em que os discentes se deparam pela primeira vez com o tema das exponenciais. Em seguida, são analisados cinco livros didáticos de matemática disponibilizados pelo Ministério da Educação às escolas públicas. Como objetivo, busca-se estabelecer parâmetros de referencia em relação a forma como as funções exponenciais são abordadas por esses autores e como os mesmos superam as dificuldades encontradas em uma abordagem a partir de definições e provas algébricas. Posteriormente, são apresentadas duas propostas para o ensino das funções exponenciais, a saber, uma para a obtenção da definição dessa função a partir da generalização de multiplicações de números reais e outra destinada a apresentação de provas geométricas das principais propriedades das funções exponenciais, construídas a partir do software livre geogebra.

Palavras-chave: Ensino médio, função exponencial, propriedade.

Abstract

In this work, it discuss the issue about exponential functions and its proprieties. Aiming to diagnose the difficulties found in developing such a subject, the study begins with a approach guided in definitions and algebraic proofs, for which, where ver necessary, subsidies are provided through footnotes and appendices, aiming to provide and understanding of the demonstrations involving contents of the mathematics curriculum of the first series of the final stage of basic education, at which, the students are faced for the first time the issue of exponential. Then five mathematics textbooks provided by the Ministry of Education to public schools in order to establish reference parameters regarding shape are analyzed as exponential functions are addressed by these authors and how they overcome the difficulties found in a approach established through definitions and algebraic proofs. Subsequently, two proposals for the teaching of exponential functions, namely, one for getting the setting from the generalization of multiplication of real numbers, which arise in interdisciplinary problems and everyday school students, and other intended for presentation of the evidence of main properties built from starting the free software Geogebra.

Keywords : High school, exponential function, property.

Sumário

Introdução

As funções exponenciais constituem um tema de grande potencial interdisciplinar e com inúmeras aplicações no cotidiano escolar do aluno. Essas funções são inicialmente estudadas no primeiro ano do ensino médio e dentre as aplicações que podem ser abordadas naquela etapa do ensino, destacam - se: o crescimento / decrescimento de populações; a reação em cadeia da polimerase; a eliminação de um medicamento do corpo; o regime de capitalização composta; o decaimento de uma substância radioativa; o aquecimento / resfriamento de um corpo; a reprodução de uma cultura de bactéria; a magnitude de um terremoto ou a determinação da pressão atmosférica.

Neste trabalho, apresenta-se aos professores do ensino médio uma proposta para o ensino das funções exponenciais, baseada nos conceitos de contextualização, interdisciplinaridade e informática educativa. Vale ressaltar que o foco final deste estudo será sempre o aluno do ensino médio e suas dificuldades, fato este que levará - nos sempre a referenciar essa etapa do ensino.

O texto encontra - se dividido em quatro capítulos e no primeiro deles apresenta - se a definição de função exponencial assim como suas principais propriedades, enfatizando – se a necessidade de utilização de conhecimentos que fogem do currículo da educação básica, visto que conceitos como continuidade, derivabilidade ou convexidade tornam-se necessários para a prova de tais propriedades. Busca-se com essa abordagem inicial diagnosticar os conhecimentos prévios que se fazem necessários a uma caracterização consistente para essas funções.

No segundo capítulo, faz-se uma análise de cinco livros didáticos de matemática distribuídos pelo Ministério da Educação (Mec), visando com essa análise estabelecer parâmetros quanto a forma que os autores apresentam o tema das funções exponenciais e como superam as dificuldades inerentes a necessidade de conteúdos da matemática superior destinados as provas das propriedades dessa função. Como resultado, percebe-se que a forma encontrada pelos autores de ensino médio para contornar as dificuldades citadas é omitindo propriedades e suas demonstrações. Porém, que apesar dos mesmos não explorarem os conhecimentos prévios dos alunos, instigam a chegada a uma definição de função exponencial a partir da generalização de multiplicações de números reais, ainda que, em alguns casos, partindo-se de um único exemplo.

Diante dos resultados obtidos na análise dos cinco livros didáticos, apresenta-se no terceiro capítulo uma proposta instigante e desafiadora para a introdução do tema das funções exponenciais aos alunos do primeiro ano do ensino médio, a qual é pautada na apresentação de inúmeros problemas interdisciplinares; na utilização dos conhecimentos prévios; no cotidiano dos alunos; na obtenção do conceito de função exponencial a partir da generalização de multiplicações de números reais; e na construção dos primeiros esboços do gráfico dessa função a partir dos dados apresentados ou obtidos no problema.

No quarto e último capítulo, a partir da utilização do software livre geogebra, apresenta-se uma proposta de provas geométricas para as propriedades da função exponencial, objetivando assim minimizar as dificuldades encontradas quanto aos conteúdos necessários para a demonstração de tais propriedades e contribuindo para uma aprendizagem mais significativa para o aluno.

Capítulo 1
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

1.1 Introdução

Além de constituírem uma importante ferramenta para a resolução de problemas práticos, as funções exponenciais possuem ainda inúmeras aplicações no cotidiano do aluno, fato este que deveria contribuir para que essa função e suas propriedades fossem bem compreendidas no ensino médio. Entretanto, tais aplicações vêm sendo abordadas sem muita ênfase naquela modalidade de ensino, seja pela forma como vem sendo apresentadas ou em virtude dos conhecimentos prévios que se fazem necessários para a sua compreensão.

Neste capítulo, faz - se um estudo das funções exponenciais e suas propriedades a partir de uma abordagem centrada em sua definição formal e na prova de algumas de suas propriedades mais elementares. Busca-se com tal abordagem diagnosticar os conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento de uma caracterização algébrica consistente acerca dessas aplicações.

1.2 Definição

Seja a um número real tal que $0 < a \neq 1$. *Define-se a função exponencial* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$f(x) = a^x. \tag{1.1}$$

Na definição acima, a chama-se base da função exponencial e a desigualdade $a > 0$, presente na restrição $0 < a \neq 1$, faz-se necessária em virtude do domínio da função exponencial ser o próprio conjunto dos números reais. De fato, caso a variável independente assuma valores racionais e irredutíveis da forma $r = m/n$, com n par, conclui-se que, a menos que a base seja positiva, algumas potências fracionárias de a assumirão valores imaginários. Nessa definição, ressalta-se ainda a necessidade de a ser não nula e diferente de 1, pois caso contrário recair-se-ia na indeterminação $f(0) = 0^0$ ou na degeneração 1, pois $f(x) = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

1.3 Propriedades da função exponencial

1.3.1 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real* a*,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que* $f(0) = 1$.

A verificação dessa propriedade é imediata pois,

$$f(0) = a^0 = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Isto quer dizer que o par ordenado (0,1) pertence ao gráfico da função exponencial, qualquer que seja a base a, $0 < a \neq 1$. De outro modo, que todo gráfico da função exponencial intersecta o eixo y no ponto de ordenada 1.

1.3.2 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real* a*,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que*

$$f(x+y) = f(x).\, f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, pondo-se $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$, segue que

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x.\, a^y = f(x).\, f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Essa propriedade mostra que a função exponencial transforma soma em produto. Para fixar as ideias, tomemos $f(x) = 2^x$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$. Neste caso, conhecidos os valores de $f(1) = 2^1$ e $f(3) = 2^3$, determina-se $f(4)$ através do produto

$$f(4) = f(1+3) = f(1).\, f(3) = 2^1.\, 2^3 = 2^4 \tag{1.4}$$

1.3.3 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real* a*,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que*

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

A verificação dessa propriedade é imediata, pois se $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então, segue da propriedade (1.3.2) que,

$$f(0) = f(x_0 + (-x_0)) = f(x_0).\, f(-x_0) = 0.\, f(-x_0) = 0, \tag{1.5}$$

o que é absurdo, pois contraria a propriedade (1.3.1). Daí conclui-se então que,

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

A interpretação para essa propriedade é que o gráfico da função exponencial nunca intersecta o eixo das abscissas.

1.3.4 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que*

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato, aplicando-se a propriedade (1.3.2), escreve-se a imagem $f(x)$ como

$$f(x) = f\left(x/2 + x/2\right) = f\left(x/2\right) \cdot f\left(x/2\right) = \left[f\left(x/2\right)\right]^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Logo, segue de (1.6) e do fato de $f\left(x/2\right)$ ser um número real que

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

i.e., o gráfico da função exponencial está localizado apenas no primeiro e segundo quadrantes. Daí, conclui-se que o conjunto imagem da função exponencial é um subconjunto dos números reais positivos.

1.3.5 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$ *, de base real a, com* $a > 1$*, é crescente,* $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dados x, y ∈ ℝ, devemos mostrar que,

$$x > y \ \Rightarrow\ a^x > a^y. \tag{1.9}$$

Entretanto, notando que,

$$a^x > a^y \ \Leftrightarrow\ a^{x-y} > 1, \tag{1.10}$$

e tomando-se $w = x - y > 0$, tem-se que a implicação (1.9) pode ser reescrita de forma equivalente como

$$w > 0 \ \Rightarrow\ a^w > 1,\ \text{se}\ a > 1, \tag{1.11}$$

a qual será demonstrada em várias etapas, de 1.3.5.1 a 1.3.5.5, supondo *w* natural, racional, irracional e real.

1.3.5.1 *Se* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, *e* $w \in \mathbb{N}, w > 0$ *então* $a^w > 1$.

Faremos a prova por indução finita sobre *w*.

i) A proposição é logicamente verdadeira para $w = 1$, pois $a^1 = a > 1$;

ii) Supondo a validade da proposição para $w = k, k \in \mathbb{N}$, *i.e.*, $a^k > 1$, provemos a validade da mesma para $w = k + 1$.

Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a > 1$ por a^k, segue que

$$a > 1 \Rightarrow a.a^k > a^k \Rightarrow a^{k+1} > a^k > 1. \quad (1.12)$$

Logo, pelo princípio da indução finita, segue que para $a > 1$,

$$w \in \mathbb{N},\ w > 0 \Rightarrow a^w > 1. \quad (1.13)$$

1.3.5.2 *Se* $a \in \mathbb{R},\ a > 1$, *e* $w = \frac{1}{q} > 0,\ q \in \mathbb{N}$, *então* $a^w > 1$.

Mostraremos essa proposição por redução ao absurdo. De fato, supondo que

$$a^w = a^{1/q} \leq 1, \quad (1.14)$$

segue da propriedade (1.3.4) que $a^w > 0, \forall w \in \mathbb{R}$. Desse modo, multiplicando membro a membro q desigualdades do tipo (1.14), segue que $a \leq 1$, o que contraria a hipótese $a > 1$. Logo $a^w > 1$.

1.3.5.3 *Se* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, *e* $w = \frac{p}{q}$ *é um racional irredutível e positivo tal que* $q > 0$, *então* $a^w > 1$.

Com efeito, notando que

$$a^w = a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p. \quad (1.15)$$

Chamando-se $w' = \frac{1}{q} > 0$, segue da proposição anterior que $a^{w'} > 1$. Seja agora $b = a^{w'}$, sendo $p > 0$ segue-se de (1.13) que $b^p > 1$, $p \in \mathbb{N}$. Logo,

$$a > 1 \Rightarrow a^w > 1,\ \forall w \in \mathbb{Q}, w > 0. \quad (1.16)$$

1.3.5.4 *Se* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, *e* $w \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ w > 0$, *então* $a^w > 1$.

Sejam os conjuntos $A_1 = \{r \in \mathbb{Q}; r < w\}$ e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q}; s > w\}$ e os conjuntos de potencias de expoentes racionais que definem a^w, $B_1 = \{a^r;\ r \in A_1\}$ e $B_2 = \{a^s;\ s \in A_2\}$.

Pela definição do irracional w, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < w < s$. Sendo $a > 1$, $r > 0$ e $s > 0$, segue de (1.16) que $a^r > 1$ e $a^s > 1$. Fazendo-se $w' = s - r$ e tendo em vista que $w' > 0$ e $a > 1$, segue ainda de (1.16) que

$$a^{w'} > 1 \Rightarrow a^{s-r} > 1 \Rightarrow a^{s-r}.a^r > a^r \Rightarrow a^s > a^r > 1. \tag{1.17}$$

Segue pela definição de potência de expoente irracional que

$$a^s > a^w > a^r > 1. \tag{1.18}$$

Donde conclui-se para $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, e $w \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $w > 0$, que

$$a^w > 1. \tag{1.19}$$

1.3.5.5 *Se* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ *e* $w \in \mathbb{R}$, $w > 0$, *então* $a^w > 1$.

Com efeito, se $w \in \mathbb{Q}$, segue de (1.16) que $a^w > 1$. Por outro lado, se $w \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ segue de (1.19) que $a^w > 1$. De qualquer modo,

$$w > 0 \Rightarrow a^w > 1,\ \forall a, w \in \mathbb{R};\ a > 1. \tag{1.20}$$

Com este último resultado, concluímos a prova para o crescimento da função exponencial, $f(x) = a^x$, $\forall a, x \in \mathbb{R}$; $a > 1$. Perceba que esta propriedade não permite nenhuma conclusão acerca da concavidade da função exponencial, isto é, não sabemos até o momento se o gráfico da exponencial é côncavo para baixo ou para cima[1].

1.3.6 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$, *de base real a,* $a > 1$, *é ilimitada superiormente.*

De fato, sendo $a > 1$, então escrevendo-se $a = 1 + d$, $d > 0$, segue pela desigualdade de Bernoulli[2] que

$$a^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd. \tag{1.21}$$

Como $\lim(1 + nd) = +\infty$, segue que a sequência (a_n) formada pelas potencias a^n, $n \in \mathbb{N}$ e $a > 1$ é ilimitada superiormente. Logo, f é ilimitada superiormente.

---

[1] Vide Apêndice C.
[2] Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1.3.7 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a, a* > 1, *é limitada inferiormente.*

Mostrou-se nas subseções (1.3.1) e (1.3.4) que a função exponencial de base real a, $0 < a \neq 1$, intersecta o eixo *Oy* no ponto de ordenada 1 e assume apenas valores positivos. Mostrou-se ainda, em (1.3.5), que essa função é crescente para a base real a, $a > 1$. Essas informações são essenciais para a construção do gráfico de f, entretanto, não permitem concluir nada acerca da existência de assíntotas horizontais entre os pontos de abscissas nulas e ordenadas zero ou um. Daí, vamos mostrar que $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, como por hipótese $a > 1$, tem-se que existe um real positivo d de modo que $a = 1 + d$. Daí, se $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, tem-se que $-n > 0$ e,

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+d)^{-n}} \leq \frac{1}{1+(-n)d.} \tag{1.22}$$

Como $\frac{1}{1+(-n)d} \to 0$ e como f é sempre positiva, segue que $y = 0$ é a assíntota horizontal da função exponencial de base real a, tal que $a > 1$.

1.3.8 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a, a* > 1, *é não linear.*

Com efeito, se o gráfico da função exponencial fosse uma reta, visto que pela propriedade (1.3.5) f é crescente, haveria um ponto de abscissa $x_0 = -\frac{b}{a}$, tal que $f(x_0) = 0$. Absurdo, pois contraria a propriedade (1.3.3). Logo, f é não linear.

Pode-se perceber ainda a não linearidade da função exponencial através da propriedade (1.3.7), pois caso f fosse linear ela não poderia ser limitada inferiormente.

1.3.9 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a,* $0 < a \neq 1$, *é diferenciável para todo* $x \in D_f$.

Antes de apresentarmos a prova para essa propriedade mostraremos inicialmente que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \tag{1.23}$$

De fato, fazendo-se $a^h - 1 = \frac{1}{x}$ tem-se que $h = \log_a(1 + \frac{1}{x})$ e,

$$\frac{a^h-1}{h}=\frac{1/x}{\log_a(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{x\log_a(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{\log_a(1+\frac{1}{x})^x}. \tag{1.24}$$

Como $h\to 0 \Rightarrow x\to\pm\infty$, segue que

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\log_a(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\log_a[\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x]}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a. \tag{1.25}$$

Voltemos agora a demonstração inicial.

Com efeito, segue da definição de derivada que,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}a^x\,\frac{a^h-1}{h} \tag{1.26}$$

e como o fator a^x não depende de *h*, pode ser colocado adiante do limite. Logo,

$$f'(x)=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a, \tag{1.27}$$

onde utilizou-se o resultado obtido em (1.25). Note ainda que, aplicando-se a definição de derivada para a função obtida em (1.27), tem-se ainda

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}.\ln a-a^x.\ln a}{h}=a^x\ln a.\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\left(\ln a\right)^2. \tag{1.28}$$

O que mostra que a derivada de segunda ordem da função exponencial de base real *a*, $0<a\neq 1$, existe e é sempre positiva, pois sendo $a\neq 1$ segue que $ln a$ é uma número real não nulo daí $\left(\ln a\right)^2>0$ e, pela propriedade (1.3.4), $a^x>0$ para todo $x\in D_f$.

O fato da função exponencial ser derivável em todo $x\in D_f$ significa que ela admite uma única reta tangente em cada um dos pontos de seu gráfico.

1.3.10 *A função exponencial,* $f(x)=a^x$, *de base real a,* $0<a\neq 1$, *é convexa em todo intervalo I de seu domínio.*

Pela propriedade anterior, existe e é sempre positiva a derivada de segunda ordem da função exponencial *f*, de base real *a* tal que $0<a\neq 1$, $\forall x\in D_f$. Logo, segue do corolário 3.14 do Apêndice - C que *f* é convexa.

Essa propriedade significa que, dados dois pontos sobre o gráfico da função exponencial *f*, o segmento com extremos nesses dois pontos está sempre acima da porção do gráfico de *f* compreendido entre os dois pontos.

1.3.11 *A função exponencial*, $f(x) = a^x$, *de base real a*, $0 < a \neq 1$, *tem concavidade voltada para cima.*

Pela propriedade (1.3.9), a função exponencial f, de base real a tal que $0 < a \neq 1$, admite e é sempre positiva a sua derivada de segunda ordem, para todo $x \in D_f$. Logo, segue do teorema 3.12 do Apêndice - C que f possui concavidade para cima em todo o seu domínio.

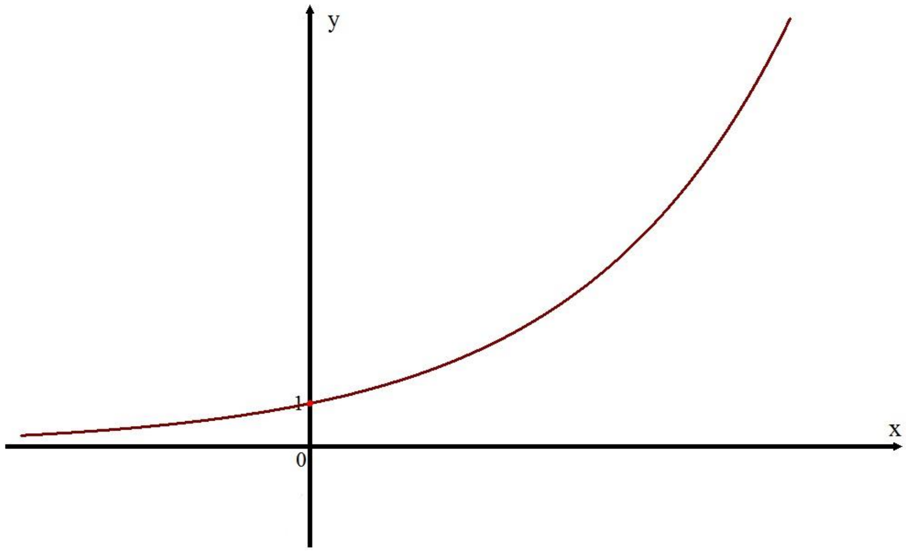
1.3.12 *A função exponencial*, $f(x) = a^x$, *de base real a*, $0 < a \neq 1$, *é contínua.*

Pela propriedade (1.3.10), a função exponencial é convexa em todo o seu domínio. Logo, segue da proposição 2.5 do Apêndice - B que f é contínua para todo $x \in D_f$.

1.4 Gráfico da função exponencial

Na seção anterior, provou-se em (1.3.1), (1.3.3) e (1.3.4), respectivamente, que o par ordenado (0, 1) pertence ao gráfico da função exponencial, que essa função é não nula e assume apenas valores positivos em todos os pontos de seu domínio, qualquer que seja a base real a, tal que $0 < a \neq 1$. Para o caso em que a base a é um real maior que 1, provou-se em (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7) e (1.3.8), respectivamente, que a função exponencial é crescente, ilimitada superiormente, limitada inferiormente e não linear. Ainda naquela seção, para uma base a qualquer, $0 < a \neq 1$, provou-se em (1.3.9), (1.3.10), (1.3.11) e (1.3.12), respectivamente, que a função exponencial f admite uma única reta tangente em cada ponto de seu domínio, que toda reta secante g está acima do gráfico de f no intervalo determinado pela interseção de f e g, que f tem concavidade voltada para cima e é contínua. Tais propriedades permitem concluir que o gráfico da função exponencial de base real a, $a > 1$, é uma curva ascendente, sempre positiva, que não toca o eixo das abscissas, que passa pelo ponto (0, 1), que não possui descontinuidades (saltos) e que é côncava para cima. A Figura 1.1 representa tal curva.

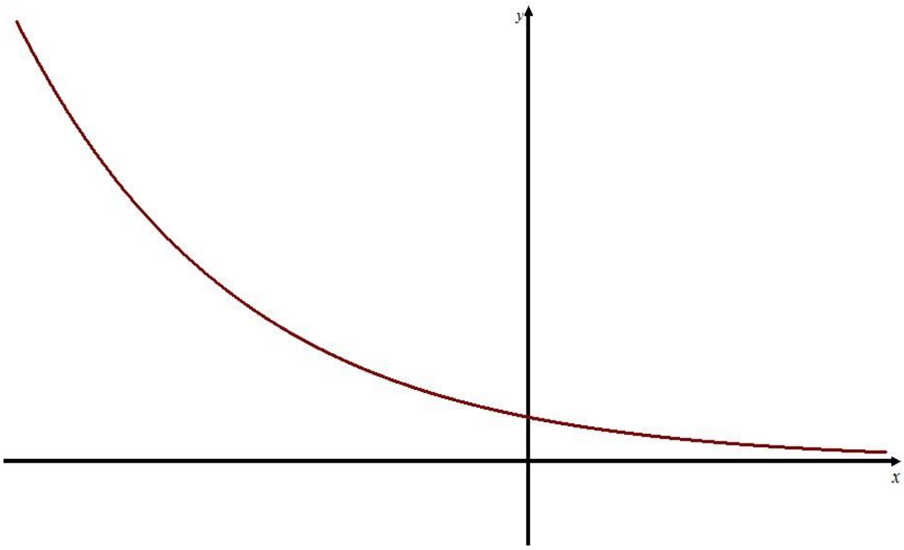
FIGURA 1.1 – Gráfico da função exponencial de base real *a*, *a* > 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo análogo, demonstra-se que o gráfico da função exponencial de base real *a* tal que $0 < a < 1$ é uma curva descendente, sempre positiva, que não toca o eixo das abscissas, que passa pelo ponto (0, 1), que não possui descontinuidades (saltos) e que é côncava para cima. Para tal, basta efetuar as provas das propriedades (1.3.5), (1.3.6) e (1.3.7) substituindo a condição $a > 1$ por $0 < a < 1$ e realizando procedimentos equivalentes aos apresentados nas demonstrações desenvolvidas. A Figura 1.2 representa tal curva.

FIGURA 1.2 – Gráfico da função exponencial de base real *a*, 0 < *a* < 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 2
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E O ENSINO MÉDIO

2.1 Introdução

No capítulo 1, viu-se que para uma caracterização mais aprofundada acerca das funções exponenciais, necessita-se introduzir conteúdos que fogem do currículo da educação básica. Conceitos como o de funções contínuas, convexas ou deriváveis tornam-se indispensáveis para uma melhor compreensão das características algébricas e gráficas dessa função. Entretanto, esse nível de abstração torna-se inviável na primeira serie do ensino médio, momento em que os alunos têm o primeiro contato com o tema das funções exponenciais.

Neste capítulo, faz-se uma análise qualitativa das abordagens apresentadas por cinco autores de livros didáticos de matemática, em relação ao tema das funções exponenciais. Busca-se com essa investigação estabelecer parâmetros em relação a forma como os mesmos contornam a necessidade de conteúdos mais avançados e como caracterizam as funções exponenciais.

2.2 Como as Funções Exponenciais vêm sendo apresentadas no Ensino Médio.

Objetivando estabelecer um perfil acerca da forma como as funções exponenciais vêm sendo apresentadas nos livros didáticos de matemática do ensino médio assim como, determinar parâmetros de referencia quanto à concordância ou divergência na forma da apresentação dos conteúdos por esses autores, foram analisadas cinco obras distribuídas pelo Ministério da Educação (Mec) para as escolas públicas. Vale ressaltar que tais obras também são de grande aceitação pelos educadores matemáticos das outras redes de ensino, haja vista que são comercializadas pelas editoras a quem tenha interesse em adquiri - las. As obras analisadas foram os volumes 1 das coleções:

[1] PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. São Paulo: Moderna, 2013.

[2] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2013.

[3] SOUZA. J. R. *Novo Olhar: Matemática*. São Paulo: FTD, 2013.

[4] GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. Matemática completa. São Paulo: FTD, 2005.

[5] IEZZI, G. et al. Matemática: ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2004.

De posse desses livros, buscou-se responder aos seguintes questionamentos:

2.2.1 Como as funções exponenciais são introduzidas nos livros didáticos de matemática do ensino médio?

Em relação a essa pergunta, a obra [1] apresenta na abertura do capítulo algumas páginas com informações acerca da evolução da capacidade de armazenamento de dados, do aumento da velocidade de processamento das informações e do número de transistores nos microprocessadores. Segundo o autor, o objetivo dessa abertura seria estimular a reflexão sobre um problema contextualizado e avaliar os conhecimentos prévios. Apesar da intenção ser válida, seus objetivos nesse capítulo possuem poucas possibilidades de serem alcançados, haja vista que velocidade ou capacidade de armazenamento não possuem a conotação quantitativa desejada no cotidiano do aluno sem que ele detenha conhecimentos teóricos acerca dos conceitos elementares da informática.

Por sua vez, [2] apresenta uma breve descrição acerca do fenômeno natural dos terremotos e destaca conceitos como: ondas sísmicas, energia mecânica, hipocentro, epicentro ou escala Richter. Uma vez que o livro didático destina-se a alunos do primeiro ano do ensino médio, esses conceitos tornam-se inoportunos visto que o aluno ainda não se deparou com a maioria dos mesmos. Como exemplo, o aluno somente terá contato com o conceito de ondas no segundo ano do ensino médio quando estudar em física o tema Ondulatória ou em breves introduções quando do estudo das funções trigonométricas, o que também geralmente é feito apenas no segundo ano. O autor ressalta ainda que a escala destinada a medir a intensidade de um terremoto é baseada em logaritmos de base dez, como se o aluno já conhecesse logaritmos ou bases.

Em relação às obras [3], [4] e [5], as mesmas não apresentam aberturas de capítulos com o intuito de contextualizar um problema do cotidiano, instigando assim a aprendizagem do aluno.

Após a apresentação ou não da abertura do capítulo, a técnica mais utilizada pelos autores antes da apresentação de uma definição formal para as funções exponenciais foi tomar um único exemplo onde essas funções surgem naturalmente como a generalização de uma multiplicação de números reais. Foram abordados problemas acerca da reprodução de uma cultura de bactérias, por [1], a desintegração de uma substância radioativa, por [2], o crescimento de uma planta que duplica de altura a cada mês, por [3], ou o número de bisavós que um determinado casal possui, sabendo que nessas famílias, as pessoas vivem bastante tempo, por [5]. A única obra que não se utilizou de tal técnica foi [4].

Destaca-se que ao iniciar o estudo das funções exponenciais, o aluno já detém conhecimentos a respeito de funções crescentes, decrescentes, constantes, afins, quadráticas, etc, e já possui condições de plotar em um sistema de coordenadas cartesianas os pares ordenados formados pelos números, por exemplo, do ciclo de vida e de bactérias existentes ao final daquele ciclo ou do mês de observação e da altura da planta, fato este que permitiria ao aluno obter uma primeira ideia do gráfico da função exponencial. Entretanto, esse é um recurso que se utilizam apenas [2] e [3]. As demais obras somente apresentam uma primeira ideia do gráfico das funções exponenciais após a apresentação de uma definição formal da mesma.

2.2.2 Quais propriedades das funções exponenciais estão sendo abordadas nos livros didáticos de matemática ensino médio?

Em relação a essa indagação, houve preferência pelos autores pesquisados em apresentar propriedades que possam ser observadas através de interpretações gráficas e, na maioria das obras, sem que fossem apresentados quaisquer outros recursos que proporcionem ao aluno os elementos necessários ao seu entendimento. Este é o caso das obras [3] e [4] que apenas descrevem o crescimento e decrescimento da função a partir de seu gráfico. Além das propriedades acima citadas, a obra [3] apresentou ainda o ponto de interseção da curva em relação ao eixo y e o fato das imagens da função exponencial serem não nulas. Em relação a obra [1], além da análise de crescimento e decrescimento a partir do gráfico, apresenta apenas o entendimento da contrapositiva da propriedade injetora da função exponencial, isto é, se uma função apresenta imagens iguais, então os elementos do domínio associados a essas imagens são iguais. Quanto à obra [2], além das propriedades de crescimento e decrescimento, apresenta a propriedade da função exponencial transformar soma em produto e de seu gráfico sempre passar pelo ponto de coordenadas $(1, a)$, onde a é a base da função. A partir do gráfico construído com um conjunto de pares ordenados, o autor observa ainda o domínio, imagem, injeção, sobrejeção, bijeção ou limitação superior. Por sua vez, a obra [5] optou por uma abordagem mais algébrica e apresentando justificativas em relação a apresentação das propriedades. Essa obra ressaltou o ponto de interseção da curva exponencial com o eixo das ordenadas, crescimento, decrescimento, a contrapositiva da propriedade injetora e o fato da imagem da função exponencial ser sempre positiva.

2.2.3 Existe contextualização e interdisciplinaridade na abordagem das funções exponenciais no 1º ano do ensino médio.

Entende-se por contextualização o ato de associar o conhecimento a ser construído à sua origem e à sua aplicação e por interdisciplinaridade a utilização da integração dos conteúdos de uma disciplina com outras áreas de conhecimento. Essas ideias ganharam veemência com a reforma do ensino médio, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB nº 9.394/96), que atribui a necessidade de integração e compreensão dos conhecimentos para uso cotidiano.

Em relação as obras analisadas, percebe-se a existência de uma tentativa de contextualização dos conteúdos abordados através dos exemplos apresentados na abertura do capítulo, entretanto, os autores poderiam ter explorado um numero maior de exemplos e, em alguns casos, mais condizentes com o cotidiano do aluno. Quanto a interdisciplinaridade, de maneira geral não houve integração com as demais áreas do conhecimento visto que os problemas abordados para a obtenção do modelo exponencial não exploraram nenhuma informação que não pudesse ser obtida através de outro problema de caráter puramente matemático.

Capítulo 3
AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E O COTIDIANO

3.1 Introdução

No capítulo 1, viu-se que para um estudo mais consistente acerca do tema das funções exponenciais, torna-se necessária a introdução de conteúdos matemáticos que fogem do currículo da educação básica. Já no capítulo anterior, observou-se que os autores matemáticos de livros didáticos de ensino médio estão contornando tais dificuldades omitindo propriedades dessas funções; que a técnica mais utilizada para a introdução das exponenciais naquela modalidade de ensino é com a apresentação de um exemplo que proporcione a obtenção do modelo exponencial a partir da generalização de multiplicações de números reais; e que os conhecimentos prévios do aluno não vêm sendo explorados durante o desenvolvimento do assunto.

Neste capítulo, apresenta-se uma proposta mais instigante e desafiadora para o ensino das funções exponenciais, a partir da reafirmação da técnica da generalização de multiplicações de números reais, porém, de forma interdisciplinar, pautada em problemas encontrados no cotidiano escolar do aluno, abordando os conhecimentos prévios adquiridos durante a vida escolar e apresentando ao final de cada subseção os gráficos obtidos através da plotagem dos pares ordenados trabalhados no problema.

Vale ressaltar que apesar de alguns dos exemplos abordados neste capítulo apresentarem refinamento mais comumente encontrado na matemática de nível superior, com alguma adaptação, os mesmos podem ser apresentados também a alunos do ensino médio.

3.2 Crescimento de populações

A Tabela 3.1 mostra os dados referentes a população brasileira, para o período de 1940 a 1980, medidos em intervalos de dez anos. Nessa tabela, a primeira, segunda e terceira colunas apresentam, respectivamente, os anos em que foram realizadas as observações, os valores registrados para a população e a variação populacional, calculada através da diferença entre o valor da medição atual e a anterior.

TABELA 3.1 - População Brasileira, 1940 - 1980

ANO	P (em milhões)	ΔP (em milhões)
1940	41.165.289	
1950	51.941.767	10.776.478
1960	70.070.457	18.128.690
1970	93.139.037	23.068.580
1980	119.002.706	25.863.669

Fonte: IBGE, Anuários Estatísticos do Brasil.

Os incrementos[1] apresentados na terceira coluna mostram que houve um crescimento populacional ao longo de todo o período de observação e que este foi mais acentuado a medida que a população foi assumindo valores mais elevados. A irregularidade do crescimento permite concluir ainda que o modelo matemático que se ajusta aos pontos cujas abscissas e ordenadas são, respectivamente, o ano e a medida da população, não pode ser linear, pois caso contrário tais diferenças obrigatoriamente seriam iguais. Com efeito, se $y = f(x)$ é o modelo linear que se ajusta aos dados das duas primeiras colunas então, no caso mais geral, f é uma função afim e, portanto da forma

$$f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

onde a e b são constantes reais.

Sejam x_i, x_j elementos consecutivos do domínio de f. Neste caso, $x_j - x_i = 10$ e,

$$f(x_i) = ax_i + b \tag{3.2}$$

$$f(x_j) = ax_j + b. \tag{3.3}$$

De onde conclui-se que

$$f(x_j) - f(x_i) = a(x_j - x_i) = 10a \tag{3.4}$$

o que demonstra a obrigatoriedade de incrementos iguais para o caso de modelos lineares.

Descartada a hipótese da linearidade, precisa-se de uma nova estratégia para analisar os dados apresentados na Tabela 3.1. Assim, suponha que t = 0 corresponde ao ano de 1940 e

[1] Diferença entre as populações de uma determinada década e década anterior.

$P(0)$ = 41.165.289; t = 1 ao ano de 1950 e $P(1)$ = 51.941.767; e assim sucessivamente. Dividindo – se as populações referentes a décadas consecutivas[2] obtém-se as razões

$$\frac{P(1)}{P(0)} = \frac{51.941.767}{41.165.289} = 1,262 \tag{3.5}$$

$$\frac{P(2)}{P(1)} = \frac{70.070.457}{51.941.767} = 1,349 \tag{3.6}$$

$$\frac{P(3)}{P(2)} = \frac{93.139.037}{70.070.457} = 1,329 \tag{3.7}$$

$$\frac{P(4)}{P(3)} = \frac{119.002.706}{93.139.037} = 1,278 \tag{3.8}$$

o que significa que a população do Brasil cresceu no período de 1940 - 1980 a taxas de crescimento diferentes[3].

Visando a simplificação do problema, torna-se necessária a adoção de alguma técnica matemática que substitua as razões (3.5) a (3.8) por outra de valor constante α e que permita com boa aproximação a estimativa da população brasileira proporcionando ao menos, por exemplo, a coincidência dos valores reais e estimados para $P(0)$ e $P(4)$. Tal artificio, isto é, a substituição de taxas de valores diferentes por outra de valor fixo α, pressupõe a existência de uma proporcionalidade entre a taxa de crescimento e a medida da população em um dado instante, permitindo a obtenção de um modelo matemático simplificado, conforme será observado em (3.16). Dentre as técnicas mais utilizadas para tal feito, destaca-se a determinação de alguma média.

Neste problema, busca-se uma razão média tal que, se em todos os períodos de medição o quociente entre duas medidas consecutivas fosse α, o aumento total seria o mesmo que o observado para o período de 1940 a 1980. Com efeito, de (3.5) a (3.8) tem-se que

$$P(1) = P(0).1,262 \tag{3.9}$$

$$P(2) = P(1).1,349 \Rightarrow P(2) = P(0).1,262.1,349. \tag{3.10}$$

Seguindo esse padrão, conclui-se que

$$P(4) = P(0).1,262.1,349.1,329.1,278. \tag{3.11}$$

---

[2] Onde estaremos utilizando a fórmula $P(n+10)/P(n)$, n = 1940, 1950, ..., 1970.

[3] A taxa seria constante se todas as razões fossem iguais. Neste caso as populações estariam em progressão geométrica e o termo geral seria dado por $P(t) = (41.165.289)q^t$, onde q seria a razão obtida.

Se $\bar{P}(t)$, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, representa a população estimada do Brasil, então pelas condições estabelecidas para α,

$$\bar{P}(1) = \bar{P}(0).\alpha \tag{3.12}$$

$$\bar{P}(2) = \bar{P}(1).\alpha = \left(\bar{P}(0).\alpha\right).\alpha = \bar{P}(0).\alpha^2 \tag{3.13}$$

. . . .

$$\bar{P}(4) = \bar{P}(0).\alpha^4 \tag{3.14}$$

Segue de (3.11) e (3.14) que

$$\alpha = \sqrt[4]{1,262x1,349x1,329x1,278} = 1,304. \tag{3.15}$$

Se $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, segue por generalização de (3.12) a (3.14), com substituição de (3.15)[4] e $P(0)$ = 41.165.289, que a estimativa para a população brasileira referente ao período de 1940 a 1980 é dada por[5]

$$\bar{P}(t) = 41.165.289\ x\ (1,304)^t\,. \tag{3.16}$$

De posse da equação (3.16), surgem então os seguintes questionamentos: (1) Esse modelo é eficiente, isto é, proporciona boa aproximação para a população brasileira no período de 1940 a 1980?; (2) Visto que (3.16) foi construída a partir da adoção de valores inteiros não negativos para a variável t, é possível determinar, por exemplo, a população para t = 1,5, isto é, é possível ampliar o domínio de validade da variável t?; (3) O que acontece se tentarmos extrapolar uma estimativa da população para, por exemplo, t = 7, isto é, para o ano de 2010?

Uma forma de avaliar a eficiência do modelo (3.16) é através do cálculo do erro percentual, o qual pode ser obtido através da equação

$$\mathrm{E(t)} = \frac{\bar{P}(t) - P(t)}{\mathrm{P(t)}}x100. \tag{3.17}$$

Uma vez que partimos do pressuposto da igualdade entre P(t) e $\bar{P}$(t) para t = 0 ou t = 4, o erro nestes dois casos será nulo restando determinar apenas aqueles associados a t = 1, t = 2 e t = 3. Nestes casos,

[4] Esse procedimento determina à média geométrica das razões (3.5) a (3.8).

[5] O recurso utilizado para a obtenção de (3.16) é chamado de Regressão ou ajuste de curvas e trata-se de um artifício destinado a obtenção de uma relação funcional a partir de uma relação estatística. A curva que se ajusta aos dados coletados é chamada de curva de regressão.

Para t = 1,

$$\text{E}(1) = \frac{\bar{P}(1) - P(1)}{\text{P}(1)} x100 = \frac{41.165.289x(1,304)^1 - 51.941.767}{51.941.767} x100 = 3,35. \tag{3.18}$$

Para t = 2,

$$\text{E}(2) = \frac{\bar{P}(2) - P(2)}{\text{P}(2)} x100 = \frac{41.165.289(1,304)^2 - 70.070.457}{70.070.457} x100 = -\ 0,10. \tag{3.19}$$

Para t = 3,

$$\text{E}(3) = \frac{\bar{P}(3) - P(3)}{\text{P}(3)} x100 = \frac{41.165.289(1,304)^3 - 93.139.037}{93.139.037} x100 = -\ 2,00. \tag{3.20}$$

Segue de (3.18) a (3.20) que o maior erro obtido, em módulo, é de 3,35%, correspondente ao ano de 1950. Portanto, a equação (3.16) mostra boa eficiência para a estimativa da população brasileira no período de 1940 – 1980.

Em relação ao questionamento acerca da validade de (3.16) para valores não inteiros da variável t, ressalta-se que o número de indivíduos de uma população é uma função descontínua do tempo, pois assume apenas valores inteiros. Entretanto, quando o número de indivíduos atinge determinado nível, é possível aproximar a população por uma função contínua do tempo e neste caso, a variável t assume todos os valores reais existentes entre o primeiro e o último tempo da observação. Assim, a população estimada para o ano de 1955, t = 1,5, é dada por

$$\bar{P}(1,5) = 41.165.289\ x\ (1,304)^{1,5} \cong 61.298.177, \tag{3.21}$$

que é um valor intermediário para os registrados nos anos de 1950 e 1960.

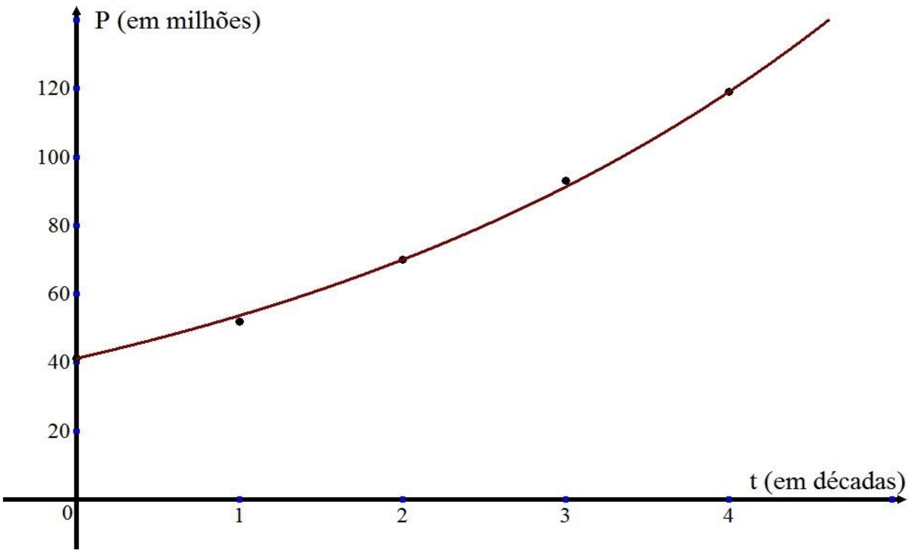
Por último, utilizando-se (3.16) para obter uma estimativa para a população brasileira no ano de 2010, t = 7, temos que

$$\bar{P}(7) = 41.165.289\ x\ (1,304)^7 \cong 263.921.219, \tag{3.22}$$

valor que encontra-se muito acima dos dados apresentados pelo IBGE para aquele ano e que foi de apenas 190.755.799 habitantes. Isso mostra a necessidade de certo cuidado ao realiza-se extrapolações para tempos demasiadamente fora do intervalo apresentado nos dados do problema em estudo. Tal distorção ocorre em virtude de (3.16) considerar que a taxa de variação da população em um dado instante é proporcional ao tamanho da população naquele instante e ainda, não levar em consideração fatores como fome, epidemias ou controle de natalidade[6].

Na Figura 3.1, os pontos em destaque correspondem aos pares ordenados $(t, P(t))$, em que $P(t)$ é a medida da população para o ano t, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A linha contínua representa o gráfico[7] da equação (3.16), onde supôs – se que $\bar{P} = \bar{P}(t)$ varia continuamente com o tempo. Uma vez que foram estabelecidas as condições $P(0) = \bar{P}(0)$ e $P(4) = \bar{P}(4)$, segue que $P(0)$ e $P(4)$ são imagens de $\bar{P} = \bar{P}(t)$ enquanto que $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ são aproximadas por $\bar{P}(1)$, $\bar{P}(2)$ e $\bar{P}(3)$, respectivamente, com erros estimados em (3.18) a (3.20).

FIGURA 3.1 – População aproximada do Brasil, 1940 - 1980.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com essa figura, a população brasileira é uma função positiva de t, $\forall t \geq 0$, com concavidade para cima, apresenta um crescimento não linear e mais acentuado à medida que os tempos vão assumindo valores cada vez maiores. A figura permite concluir ainda que caso a evolução mantivesse esse ritmo, a população brasileira cresceria ilimitadamente, o que mais uma vez mostra os riscos de extrapolar para valores muito elevados de t.

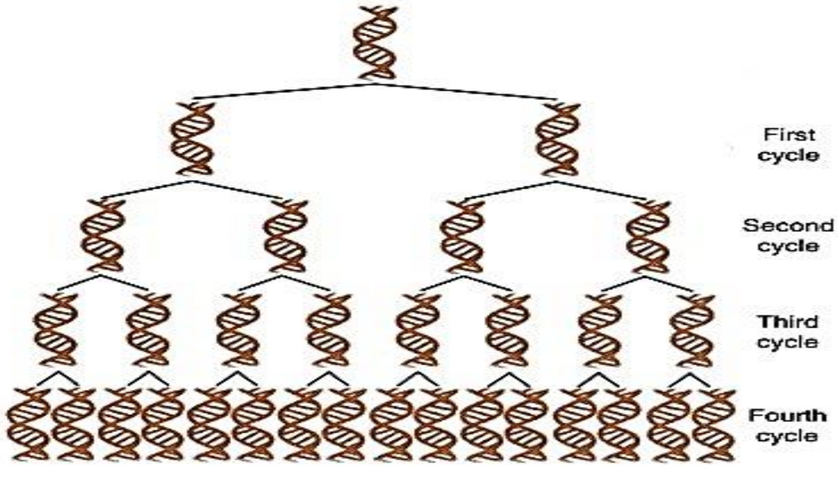
[6] A equação (1.16) é o modelo Malthusiano e trata-se da primeira tentativa de modelar uma população humana.
[7] Apesar da equação (1.16) ajustar-se com boa precisão aos dados da Tabela 1.1, ela não representa uma curva de melhor ajuste. Um modelo matemático que satisfaz tal condição é $\bar{P}(t)$ = 40.633.387x $(1{,}311)^{t}$

3.3 Reação em cadeia da polimerase

O advento da biologia molecular foi certamente um dos maiores passos das ciências biológicas durante o Século XX. A descoberta da Reação em Cadeia da Polimerase (PCR[8]) trouxe enormes benefícios e desenvolvimentos científicos para a humanidade, dentre os quais: o sequenciamento de genomas, o estudo da genética molecular, a redução do tempo gasto para a realização de testes de paternidade ou ainda, o diagnóstico de doenças infecciosas. A técnica da PCR foi desenvolvida nos anos de 1980 por Kary Mullis[9] e consiste em fazer cópias de DNA "in vitro" usando os elementos básicos do processo de replicação natural do DNA. Nessa reação, uma única amostra específica de uma sequência de DNA origina de forma artificial duas outras moléculas idênticas a cada ciclo de reação.

A Figura 3.2 mostra a evolução do número de sequências de DNA, durante os quatro primeiros ciclos de replicação da PCR, na qual admitiu-se que o processo inicia-se com apenas uma molécula. Supondo-se intervalos de reação de cinco minutos, ao final do ciclo inicial, há o surgimento de uma molécula artificial, ficando o sistema com a molécula original e uma cópia. Ao final do segundo ciclo, dez minutos após o início da contagem dos tempos, cada uma das duas moléculas existentes no final do primeiro ciclo gera uma nova molécula, restando então no sistema quatro moléculas, uma original e três cópias. De modo análogo, ao final do quarto ciclo, passados vinte minutos da origem da contagem dos tempos, cada uma das oito moléculas existentes ao final do terceiro ciclo gera uma nova molécula, restando agora um total de dezesseis moléculas no sistema.

FIGURA 3.2 – Número de sequencias de DNA para os quatro primeiros ciclos da PCR.



Fonte: http://www.biomedicinapadrao.com/2011/10/reacao-em-cadeia-da-polimerase-pcr.html. Acessado em 23.02.2014

[8] Do inglês *Polymerase Chain Reaction*
[9] Esse trabalho rendeu-lhe o prêmio Nobel de Química no ano de 1993.

Se $N(0) = 1$ representa o número de moléculas no início do processo de replicação; $N(1) = 2$, o número de moléculas ao final do primeiro ciclo; e assim sucessivamente, temos então que,

$$N(0) = 1 \tag{3.23}$$

$$N(1) = 2.N(0) = 2 \tag{3.24}$$

$$N(2) = 2.N(1) = 2.2.N(0) = 2^2.N(0) = 2^2 \tag{3.25}$$

$$N(3) = 2.N(2) = 2.2^2.N(0) = 2^3.N(0) = 2^3. \tag{3.26}$$

Por analogia, conclui-se que após o ciclo de ordem n, o número de moléculas existentes no sistema será dado por

$$N(n) = 2^n, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.27}$$

Frequentemente, busca-se determinar a quantidade de moléculas de DNA existente no sistema após um certo tempo t. Neste caso, deve-se substituir a variável n da equação (3.27) pela razão entre o intervalo de tempo dado e o tempo necessário para a conclusão de um ciclo, ambos na mesma unidade de tempo. Se o tempo estiver sendo medido, por exemplo, em minutos, tal substituição permite rescrever (3.27) na forma

$$N(t) = 2^{t/5},\ t = 5k,\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.28}$$

Surge então o questionamento: o que acontece se o tempo não for múltiplo de cinco minutos? A resposta a essa indagação pode ser dada seguindo raciocínio análogo ao descrito no exemplo anterior quando aproximou-se a população brasileira por uma função contínua do tempo. Assim, se considerarmos que o número de moléculas de DNA é também uma função contínua do tempo[10], é possível fazer uma estimativa para o tempo, por exemplo, $t = 23$ minutos a partir de (3.28) como segue

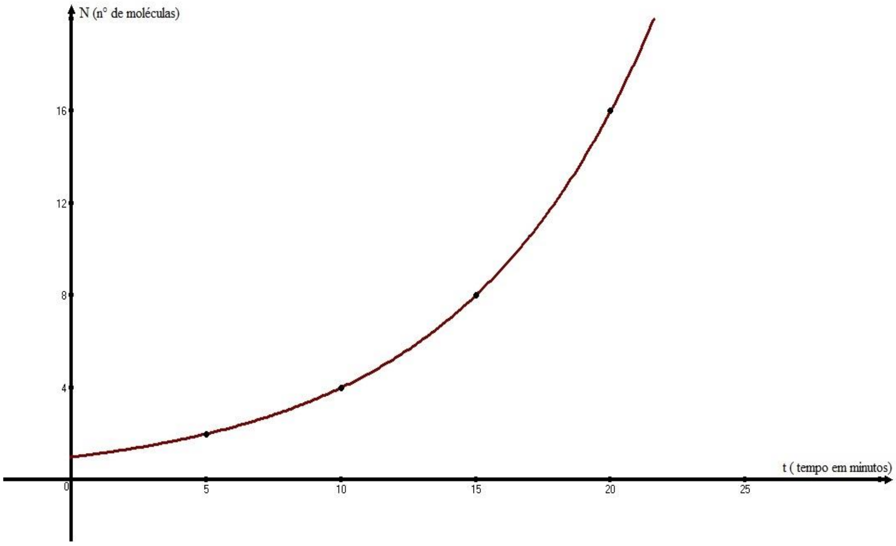
$$N(23) = 2^{23/5} \cong 24{,}25 \text{ moléculas.} \tag{3.29}$$

Na Figura 3.3, os pontos em destaque correspondem aos pares ordenados $(t, N(t))$, $t \in \{0, 5, 10, 15, 20\}$, em que $N(t)$ é o número de moléculas de DNA, respectivamente, no início do processo de replicação, ao término do primeiro ciclo, e assim sucessivamente. A linha con-

[10] Tal aproximação mostra-se viável em virtude do número de moléculas utilizadas durante o processo de replicação. A título de curiosidade, em apenas uma célula existem 46 moléculas de DNA e o corpo humano possui cerca de 100 trilhões de células.

tínua representa o gráfico da equação (3.28), onde supôs-se que $N = N(t)$ varia continuamente com o tempo.

FIGURA 3.3 – Número de moléculas de DNA em função do tempo para os quatro ciclos iniciais da PCR.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com essa figura, assim como observado na subseção (3.2), o número de moléculas de DNA é uma função positiva de t, $\forall t \geq 0$, com concavidade para cima, apresenta um crescimento não linear e mais acentuado à medida que os tempos vão assumindo valores cada vez maiores. Em comparação com a Figura 3.1 daquela subseção, intuitivamente a concavidade da curva apresentada na Figura 3.3 mostra-se mais acentuada, fato este que pode ser demonstrado através da comparação entre as razões obtidas através da divisão de imagens consecutivas paras as funções descritas por (3.16) e (3.28) em suas respectivas unidades de tempo.

3.4 Eliminação de um medicamento do corpo

Ao se aplicar uma medicação em um paciente, a substância injetada entra na corrente sanguínea passando a ser metabolizada pelo organismo a uma taxa que depende do medicamento em questão. Para o caso do antibiótico ampicilina, a dose usual para um indivíduo adulto é de 250 mg e a taxa de eliminação da substância é de 40% a cada hora. Suponha que $Q = Q(t)$ é a quantidade de ampicilina, em mg, presente no sangue t horas após a aplicação. Neste caso, em $t = 0$, temos $Q(0) = 250$. Como a quantidade de ampicilina restante ao fim de cada hora corresponde a 60% da quantidade restante uma hora antes, temos

$$Q(0) = 250 = 250.(0,6)^0 \tag{3.30}$$

$$Q(1) = 250.(0,6) = 250.(0,6)^1 \tag{3.31}$$

$$Q(2) = 250.(0,6).(0,6) = 250.(0,6)^2 \tag{3.32}$$

$$Q(3) = 250.(0,6).(0,6).(0,6) = 250.(0,6)^3 \tag{3.33}$$

$$Q(4) = 250.(0,6).(0,6).(0,6).(0,6) = 250.(0,6)^4. \tag{3.34}$$

Por analogia com os resultados (3.30) a (3.34), segue que decorrido *t* horas após a aplicação do medicamento, a quantidade de ampicilina presente no corpo do indivíduo é dada pela expressão

$$Q(t) = 250.(0,6)^t \text{ , } t \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.35}$$

A Tabela 3.2 mostra a quantidade de ampicilina presente no sangue ao final das quatro primeiras horas depois da aplicação do medicamento. Note por essa tabela que a cada hora que passa é retirada uma quantidade menor da substância em relação ao que foi retirado na hora anterior. Tal observação leva a conjectura que para tempos demasiadamente longos a quantidade de ampicilina no sangue deve se aproximar de zero.

TABELA 3.2 – Quantidade de ampicilina presente no sangue após *t* horas

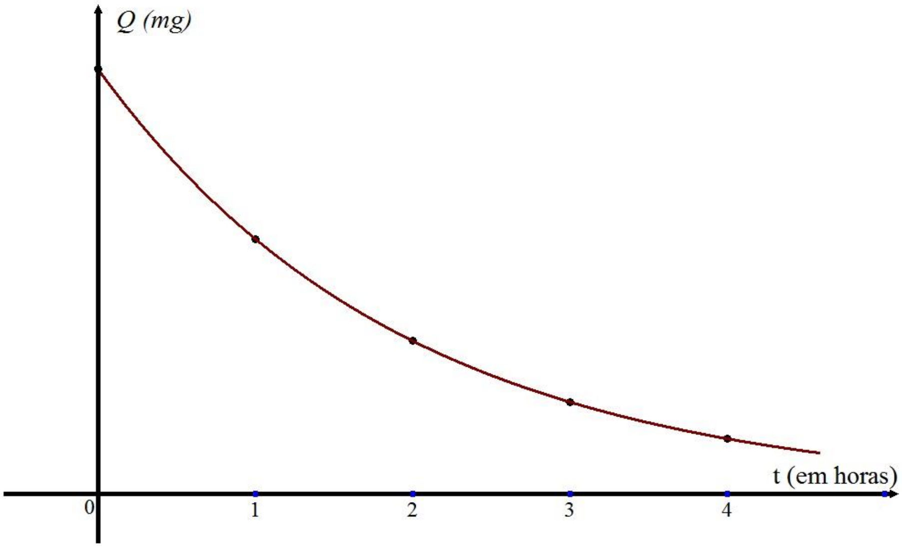
TEMPO (horas)	QUANTIDADE (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32,4

Fonte: Elaborada pelo autor

Para este exemplo, de fato, as considerações acerca da substituição do modelo discreto por outro contínuo é pertinente, visto que o medicamento está sendo eliminado do organismo de forma ininterrupta e não apenas ao final de cada hora. Desse modo, pode-se substituir a restrição $t \in \mathbb{Z}_+$ por $t \in \mathbb{R}^+$, o que permite determinar estimativas para a quantidade de medicamento presente no organismo em qualquer instante t, $t \geq 0$.

Na Figura 3.4, os pontos em destaque correspondem aos pares ordenados $(t, Q(t))$, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, em que $Q(t)$ é a quantidade de ampicilina para as quatro primeiras horas após a administração do medicamento. A linha contínua representa o gráfico da equação (3.35), onde supôs-se que $Q = Q(t)$ variar continuamente após a administração da droga.

FIGURA 3.4 – Eliminação de um medicamento injetado na corrente sanguínea.



Fonte: Figura adaptada de HALLETT, D. H, et al, pg 32.

De acordo com essa figura, a quantidade de ampicilina encontrada no corpo é uma função positiva de t, $\forall t \geq 0$, com concavidade para cima, apresenta um decréscimo não linear e se aproxima de zero[11] à medida que os tempos vão assumindo valores cada vez maiores.

3.5 Regime de capitalização composta

No regime de capitalização composta, o juro formado ao final do primeiro período de aplicação financeira é incorporado ao capital existente no início desse mesmo período, passando esse montante[12] a render juros no período seguinte. Para esse regime, os juros do primeiro período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital gerando o montante M_1. Os juros do segundo período são obtidos multiplicando-se a taxa de juros pelo montante M_1; esses juros são adicionados a M_1, gerando o montante M_2. Seguindo esse raciocínio, conclui-se que o montante após cada período de aplicação, com exceção do primeiro, é igual à soma do montante do período anterior com os juros do período atual, os quais são iguais ao produto do montante anterior pela taxa de juros.

---

[11] Este fato significa que o eixo dos t é uma assíntota horizontal para a função descrita por (3.35).
[12] Soma do capital com os juros produzidos ao final do período.

Em símbolos, se C é o capital, i é a taxa de juros e J_1, J_2, ..., J_n, M_1, M_2,..., M_n são, respectivamente, os juros e os montantes gerados ao final do primeiro, segundo, ..., n-ésimo período de aplicação, então

$$M_1 = C + J_1 = C + C.i = C(1+i)^1 \tag{3.36}$$

$$M_2 = M_1 + J_2 = M_1 + M_1.i = M_1(1+i)^1 = C(1+i)^2 \tag{3.37}$$

$$M_3 = M_2 + J_3 = M_2 + M_2.i = M_2(1+i)^1 = C(1+i)^3. \tag{3.38}$$

....

$$M_n = M_{n-1} + J_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i = M_{n-1}(1+i)^1 = C(1+i)^{n-1}.(1+i)^1 \Rightarrow$$

$$M_n = C(1+i)^n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Vale ressaltar que, embora (3.39) tenha sido deduzida para n natural, ela pode ser estendida para qualquer valor real não negativo[13]. Além disso, o valor de n deve ser expresso em conformidade com a unidade de tempo da taxa de juros. Se a taxa for mensal, n deve ser expresso em meses, se a taxa for anual, n deve ser expresso em anos. Daí alguns autores optarem pela substituição do número de períodos n pelo tempo de aplicação t, escrevendo (3.39) na forma

$$M(t) = C(1+i)^t. \tag{3.40}$$

Como exemplo, considere que no ano 2000 foram depositados R$ 100,00 em uma caderneta de poupança e que os mesmos passaram a ser remunerados em regime de capitalização composta com uma taxa de juros anual de 6%. Adotando-se o ano 2000 como a origem da contagem dos tempos, t = 0, e admitindo-se a inexistência de novos depósitos ou saques, os valores dos montantes (M) obtidos após os cinco primeiros anos são os apresentados na Tabela 3.3 abaixo:

[13] Conforme foi demonstrado no Capítulo 1 quando tratamos da continuidade da função exponencial.

TABELA 3.3 - Montante obtido para o período 2000-2005

ANO	TEMPO (t, em anos)	MONTANTE (R$)
2000	0	$100.(1,06)^0 = 100,00$
2001	1	$100.(1,06)^1 = 106,00$
2002	2	$100.(1,06)^2 = 112,36$
2003	3	$100.(1,06)^3 = 119,10$
2004	4	$100.(1,06)^4 = 126,25$
2005	5	$100.(1,06)^5 = 133,82$

Fonte: Elaborada pelo autor

Por generalização dos dados constantes nessa tabela, conclui-se que, decorridos t anos após 2000, $t \in \mathbb{Z}_+$, o valor do montante é dado pela expressão

$$M(t) = 100(1,06)^t,\ t \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.41}$$

Em relação a este problema, ressalta-se que não há riscos de obtenção de estimativas absurdas para o valor do montante M, quando aplica-se (3.41) para t relativamente grande. A justificativa para tal impossibilidade dá-se em virtude das estimativas encontradas através da aplicação dessa equação coincidirem com os dados da Tabela 3.3, para $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ou para outro t qualquer, desde que $t \in \mathbb{Z}_+$, tal que $t > 5$, visto que os dados tabelados correspondem aos termos de uma progressão geométrica de valor inicial 100, razão 1,06 e ainda, em virtude da regra estabelecida para a determinação do montante ao final de um período qualquer de aplicação obedecer a esse tipo de sequência.

Considere agora que ao invés de uma capitalização anual única e com taxa de juros de 6% ao ano, em regime de juros compostos, o investidor optasse por realizar três outras no mesmo regime e com taxas de juros quadrimestrais proporcionais a 6% a.a[14]. Neste caso, 2% do capital são pagos na forma de juros ao final dos primeiros quatro meses, 2% do montante gerado ao final do primeiro quadrimestre são pagos ao final de oito meses e mais 2% do montante gerado ao final do segundo quadrimestre são pagos no final do ano. A aplicação de (3.40) ao final de cada quadrimestre proporciona a obtenção dos valores:

$$M(1) = 100(1,02)^1 = 102,00 \tag{3.42}$$

$$M(2) = 100(1,02)^2 = 104,04 \tag{3.43}$$

[14] 6 % ao ano.

$$M(3) = 100(1,02)^3 = 106,12 \qquad (3.44)$$

Em comparação com os dados da Tabela 3.3, percebe-se para este novo tipo de capitalização que o montante recebido ao final de um ano, com taxas de juros proporcionais e 6 % a.a e com três composições nesse mesmo período, sofre relativo aumento, pois os juros recebidos ao final do primeiro quadrimestre contribuem para os juros correspondentes ao segundo quadrimestre e estes por sua vez contribuem para os juros da etapa final. A validade geral para essa conjectura[15] pode ser demonstrada supondo que se o intervalo de tempo *T* corresponde a um período completo de capitalização no qual o capital *C* estará sujeito a uma taxa de juros *i* por cada período de tempo igual a *T*, então dividindo-se *T* em *n* partes iguais e considerando que os juros são pagos com taxas percentuais i/n a cada intervalo de tempo igual a T/n, segue de (3.40) que os montantes gerados para as duas situações, ao final do intervalo de tempo *T*, são dadas por:

$$M_T = C(1+i)^1 \qquad (3.45)$$

e

$$M_{T/n} = C(1 + i/n)^n, \qquad (3.46)$$

onde M_T e $M_{T/n}$ são, respectivamente, os montantes obtidos através de uma e de *n* aplicações dentro do intervalo de tempo *T*. Provar que $M_{T/n} > M_T$ equivale a mostrar que $(1+ i/n)^n > 1+i,$ o que é imediato, desde que adote-se $x = i/n$ e aplique-se a desigualdade de Bernoulli[16]:

$$(1+x)^n > 1+nx \qquad (3.47)$$

Com efeito, segue dessa desigualdade que

$$(1+ i/n)^n > 1+n.\, i/n$$

---

[15] O aumento da frequência de aplicação e a utilização de taxas de juros proporcionais a taxa do maior período de capitalização implicam elevação do montante.

[16] Para todo número real $x > -1$ e todo $n \in \mathbb{N},$ tal que $n > 1,$ tem-se $(1+x)^n > 1+nx.$

$$(1+ i/n)^n > 1+i \,. \quad (3.48)$$

Baseado na comprovação acima, pode-se ser tentado a concluir que, caso sejam mantidas taxas de juros proporcionais a *i*, o montante cresce indefinidamente[17] a medida em que se aumenta a frequência de composição dentro do período de aplicação. Entretanto, tal conclusão é falsa visto que os ganhos devidos ao aumento da frequência de capitalização tornam-se desprezíveis após o montante atingir certo valor[18]. Com efeito, segue de (3.46) que para um tempo de aplicação *t* qualquer, tem-se

$$M(t) = C(1+ i/n)^{nt}, \quad (3.49)$$

onde *t* é dado na mesma unidade da taxa de juros. E desde que[19]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (3.50)$$

segue-se que o montante, para *n* relativamente grande, é dada por

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} C(1+ i/n)^{nt}$$

$$M(t) = C\left[\lim_{n\to\infty}(1+ i/n)^{n/i}\right]^{it}$$

$$M(t) = C\left[\lim_{m\to\infty}(1+ 1/m)^{m}\right]^{it}$$

$$M(t) = Ce^{it}. \quad (3.51)$$

O que mostra que $M(t)$ tende a um valor finito[20] quando a frequência de capitalização torna-se relativamente grande. Para o problema motivador desta subseção, caso o valor de R$ 100,00 fosse capitalizado cem mil ou um milhão de vezes durante um ano, os valores obtidos para os montantes seriam:

$$M(100.000) = 100.(1+ 0,06/100.000)^{100.000} = 106{,}1836527 \quad (3.52)$$

$$M(1.000.000) = 100.(1+ 0,06/1.000.000)^{1.000.000} = 106{,}1836545 \quad (3.53)$$

---

[17] Dizemos que uma função cresce sem cota se os valores dessa função excedem qualquer número positivo *M* a medida que *x* cresce sem parar.

[18] Quando este valor é atingido diz-se que os juros estão sendo compostos continuamente.

[19] Vide Apêndice D.

[20] A representação dada por (3.51) não é única para a capitalização contínua. Para outras bases basta por $e = a^k$, onde $0 < a \neq 1$ e $k = \log_a e$, e então $M(t) = C(a^k)^{it}$, pois $a^k = a^{\log_a e} = e$.

De onde percebe-se não haver muita diferença entre compor o capital cem mil ou um milhão de vezes durante esse período[21]. Estes valores são de fato maiores que o obtido em (3.44), porém menores que

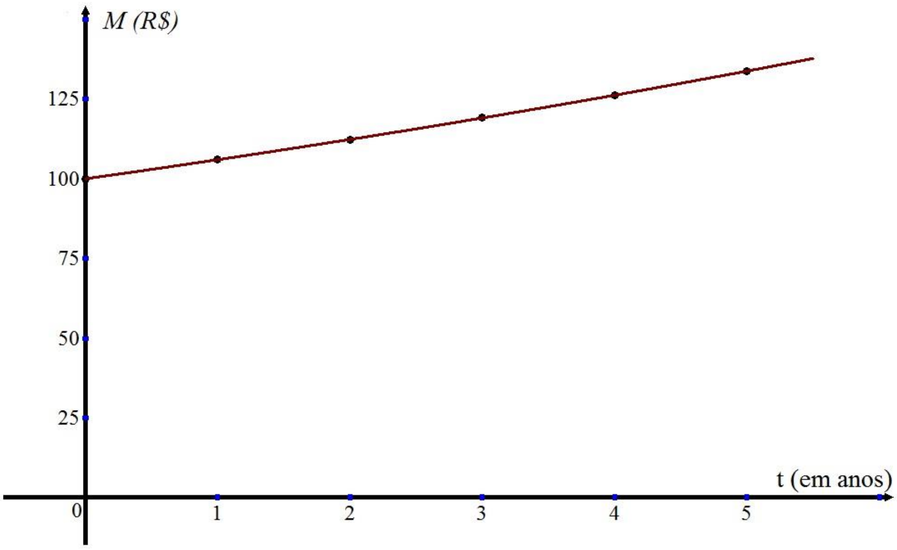
$$M(1) = 100e^{0,06} = 106,1836547, \tag{3.54}$$

que é o valor obtido para a capitalização contínua do valor dado. Diz-se que o valor obtido em (3.54) é uma cota superior da qual o montante aproxima-se com o aumento da frequência de capitalização.

Uma vez que recursos financeiros possuem apenas valores discretos, isto é, não existem frações de centavos, a primeira vista pode parecer estranho representar-se uma soma em dinheiro utilizando limites. Na verdade o limite é apenas uma aproximação, mas quando as quantias envolvidas são vultuosas, ele mostra-se uma excelente aproximação.

A Figura 3.5, refere-se aos dados da Tabela 3.3. Os pontos em destaque correspondem aos pares ordenados (t, $M(t)$), $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, e a linha contínua[22] representa o gráfico da equação (3.41), onde supôs-se que o montante $M = M(t)$ variar continuamente com o tempo.

FIGURA 1.5 – Capitalização de R$ 100,00 após os cinco primeiros anos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

---

[21] Caso um investidor aplicasse um bilhão de reais com cem mil composições e igual valor com um milhão de composições, ambas com taxas de juros de 6% a.a e pelo período de um ano, ao final desse período os montantes seriam iguais a, respectivamente, R$ 1.061.836.527 e R$ 1.061.836.545, cuja diferença é de apenas dezoito reais.

[22] Pode-se ter a falsa impressão de tratar-se de uma função linear, entretanto, uma reta não se ajusta a todos os pares ordenados do tipo (t, $M(t)$), pois, conforme pode ser observado na Tabela 3.3, os incrementos obtidos para dois valores consecutivos do montante são diferentes.

De acordo com essa figura, o montante é uma função positiva de t, $\forall t \geq 0,$ com concavidade para cima e apresenta um crescimento não linear.

3.6 Decaimento radioativo

No modelo estrutural bem aceito, o núcleo de um átomo é formado por combinações de prótons e neutros sendo que a única exceção fica por conta do núcleo do hidrogênio comum, o qual é composto por apenas um próton, sem a presença de nêutrons. Muitas dessas combinações são instáveis e pode ocorrer do núcleo emitir espontaneamente partículas para o meio, transformando o átomo original em outro mais estável. Chama-se decaimento radioativo[23] a esse processo de emissão espontânea de partículas ou de radiação, sendo que as três formas mais comumente encontradas na natureza são através da emissão de partículas alfa, beta ou de raios gama.

Em física, define-se a meia-vida de uma substância radioativa como o tempo necessário para que metade de um dado número de núcleos se desintegre e uma dessas substâncias, a qual apresenta aplicações na medicina e na agricultura, é o estrôncio – 90, S_r - 90, cuja meia vida é de aproximadamente 25 anos. Supondo-se que $m = m(t)$ sejam as massas de uma amostra desse material[24] ao longo do tempo e que no início da observação, $m(0) = 100$ mg, então, a quantidade de estrôncio restante ao fim de cada ciclo de 25 anos corresponde à metade da quantidade restante vinte cinco anos antes, isto é

$$m(0) = 100 \tag{3.55}$$

$$m(25) = \frac{1}{2}.100 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^1 \tag{3.56}$$

$$m(50) = \frac{1}{2}.100\left(\frac{1}{2}\right) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{3.57}$$

$$m(75) = \frac{1}{2}.100\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \tag{3.58}$$

$$m(100) = \frac{1}{2}.100\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^4 \tag{3.59}$$

$$m(125) = \frac{1}{2}.100\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^5 \tag{3.60}$$

....

$$m(n) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{25}}, \mathrm{n} = 25k,\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.61}$$

[23] Os átomos que sofrem o processo de decaimento são chamados radioativos.
[24] O S_r – 90 se desintegra através de decaimento beta, isto é, através da emissão de elétrons ou de pósitrons.

Onde k é o número de meias-vida decorridas a partir do início da contagem dos tempos e n é o tempo gasto, medido em anos.

Frequentemente, busca-se determinar a massa remanescente de S_r – 90 após um certo tempo t qualquer. Neste caso, a massa é uma função descontínua do tempo, pois as massas das partículas beta emitidas do núcleo não podem ser expulsas em qualquer quantidade e sim apenas como múltiplas da massa de um pósitron ou de um elétron. Entretanto, como as massas expelidas são muito pequenas em relação a amostra em estudo, é possível aproximar a massa por uma função contínua do tempo e, nesse caso, a variável t assume todos os valores reais positivos. Desse modo, a massa estimada de estrôncio para o instante t, $t \geq 0$, é dada por

$$m(t) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}_+. \tag{3.62}$$

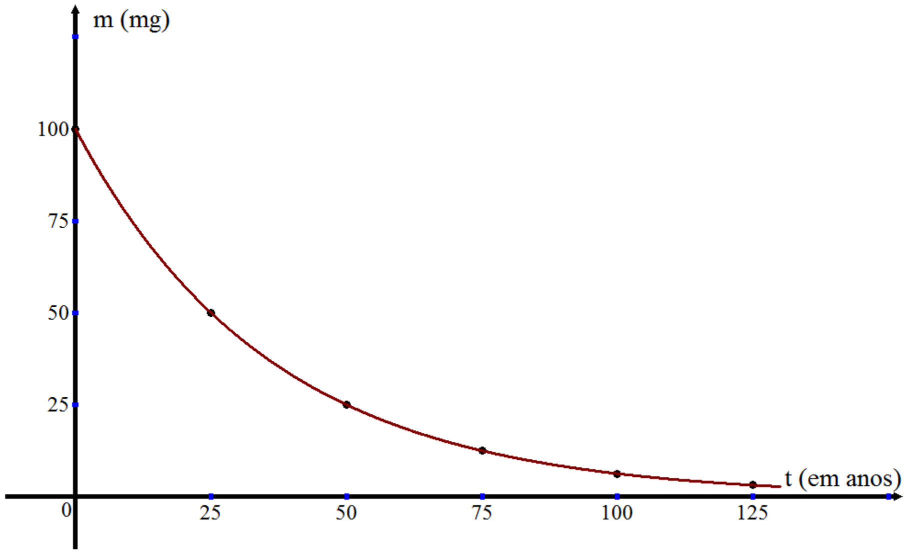
Como exemplo, é possível fazer uma estimativa da massa remanescente de estrôncio para t = 23 anos, através da aplicação de (3.62) como segue

$$m(23) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{25}} \cong 53\ mg. \tag{3.63}$$

Essa estimativa mostra-se razoável visto que o tempo dado é inferior, porém relativamente próximo, a primeira meia-vida observada após o início da contagem dos tempos e cuja massa esperada é de 50 *mg*.

Na Figura 3.6, os pontos em destaque correspondem aos pares ordenados (t, $m(t)$), $t \in \{0, 25, 50, 75, 100, 125\}$, em que $m(t)$ é a massa de estrôncio, respectivamente, no início do processo de observação do decaimento, ao término da primeira meia-vida, ao término da segunda meia-vida e assim sucessivamente. A linha contínua representa o gráfico da equação (3.62), onde admitiu-se que $m = m(t)$ varia continuamente com o tempo.

FIGURA 3.6 – massa de estrôncio – 90 em função do tempo para as cinco primeiras meias vidas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com essa figura, a massa de estrôncio é uma função positiva de t, $\forall t \geq 0$, com concavidade para cima, apresenta um decrescimento não linear e se aproxima de zero a medida que os tempos vão assumindo valores cada vez maiores.

Percebe-se através dos exemplos desenvolvidos neste capítulo que os modelos matemáticos de boa aproximação ou de melhor ajuste aos dados apresentados nos problemas descritos nas subseções (3.2) a (3.6) são da forma

$$f(x) = b.a^{kx}, \tag{3.64}$$

onde b, a e k são constantes que dependem do problema em estudo. Apesar de tais problemas permitirem estabelecer uma caracterização inicial acerca da função descrita por (3.64), esses exemplos não são suficientes para inferir sobre todo o comportamento dessa aplicação. Assim, faz-se necessária uma abordagem mais consistente e axiomática capaz de estabelecer de maneira mais precisa o comportamento exponencial.

Vale ressaltar ainda que os problemas abordados neste capítulo não esgotam o conjunto de aplicações do modelo exponencial (3.64). Como exemplos, além das aplicações apresentadas, esse modelo surge ainda em situações como o aquecimento ou resfriamento de um corpo, na reprodução de uma cultura de bactéria, na magnitude de um terremoto ou na determinação da pressão atmosférica. Assim como foi discutido na subseção (3.5) onde mostrou-se que a representação para a capitalização contínua não é única, pode-se demonstrar que (3.64) não é a única representação para o modelo exponencial. De fato, basta por $a^k = a_1$, onde $0 < a_1 \neq 1$ e $k = \log_a a_1$, pois $a_1 = a^{\log_a a_1} = a^k$, para que (3.64) possa ser reescrita como

$$f(x) = b.a_1^x. \tag{3.65}$$

Capítulo 4

AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E O SOFTWARE GEOGEBRA

4.1 Introdução

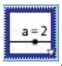
No capítulo 2, viu-se que a prática exercida nas obras analisadas quanto a apresentação das propriedades das funções exponenciais foi omitir algumas dessas propriedades; que apenas um dos autores explorou propriedades como injeção, sobrejeção, bijeção ou limitação superior. Já no capítulo 3, buscando inserir no estudo das exponenciais os conceitos de contextualização e interdisciplinaridade, apresentaram-se alguns exemplos com aplicações práticas no cotidiano do aluno e que podem ser desenvolvidos com os conhecimentos prévios do educando.

Neste capítulo, visando superar as dificuldades inerentes a apresentação de uma prova para as propriedades das funções exponenciais, apresenta-se uma proposta para o desenvolvimento das mesmas através da utilização do software livre geogebra. Vale ressaltar que tais provas não apresentam o mesmo rigor e não substituem as de caráter algébrico; que seu objetivo é apenas motivar e facilitar a aprendizagem.

4.2 Estudo das propriedades da função exponencial com o software geogebra

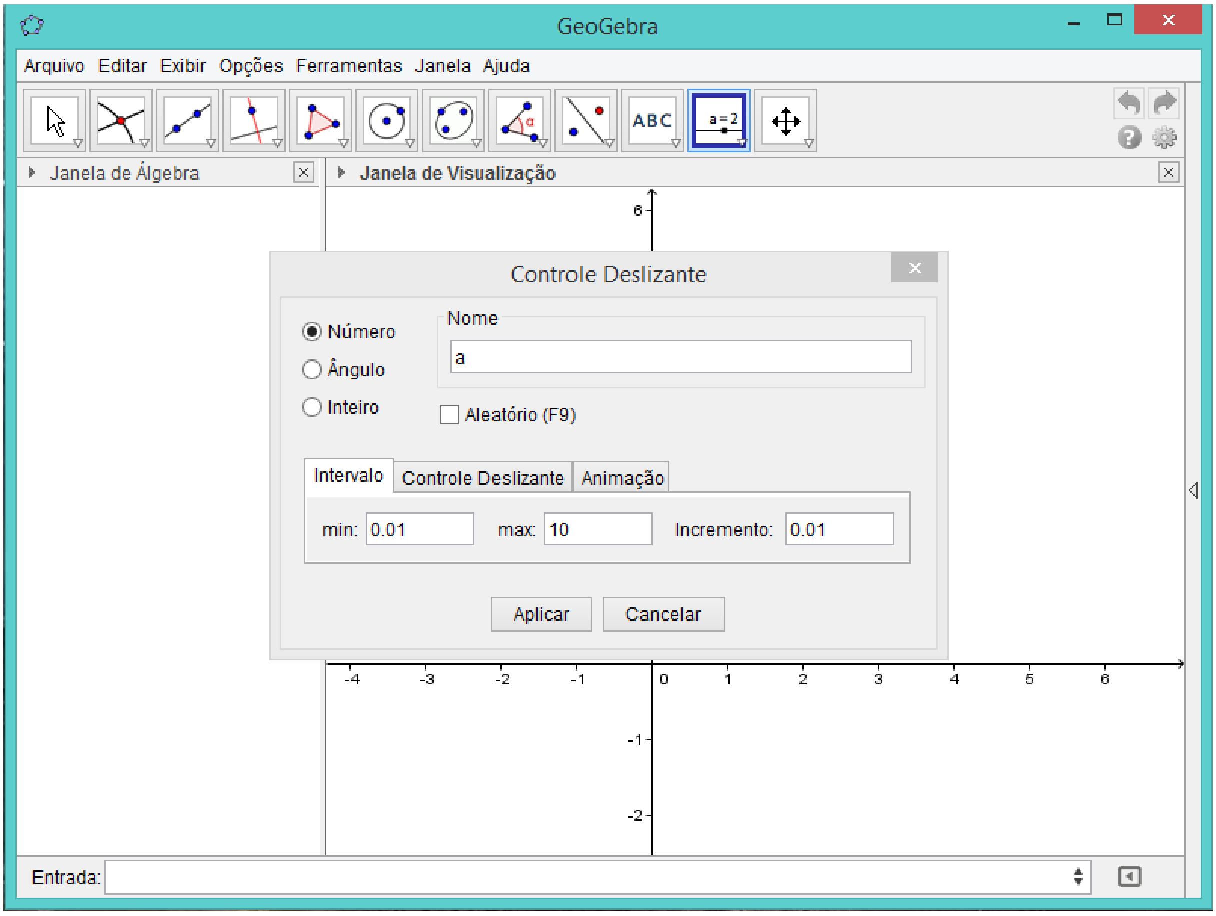
4.2.1 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que* $f(0) = 1$.

Provar essa propriedade equivale a mostrar que o ponto de coordenadas (0, 1) está no gráfico da função exponencial.

1º passo: Na barra de ferramentas[1]; clique com o botão esquerdo do *mouse* inicialmente na opção controle deslizante ; em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização; será mostrada a caixa **Controle Deslizante**. Conforme mostra a Figura 4.1, com a opção **Número** selecionada, mantenha na caixa de entrada **Nome** o parâmetro *a*; utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01 e mande aplicar. Nesse instante, aparecerá o parâmetro *a* com valor inicial igual a 1.

[1] Vide apêndice A.

FIGURA 4.1 – Configurações da caixa Controle Deslizante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2º passo: No campo “Entrada” insira a função $f\,(x) = a$^x e tecle “Enter”. Lembre-se que “^” significa a operação de potenciação. Ao final desse processo, surgirá na Janela de Álgebra a equação

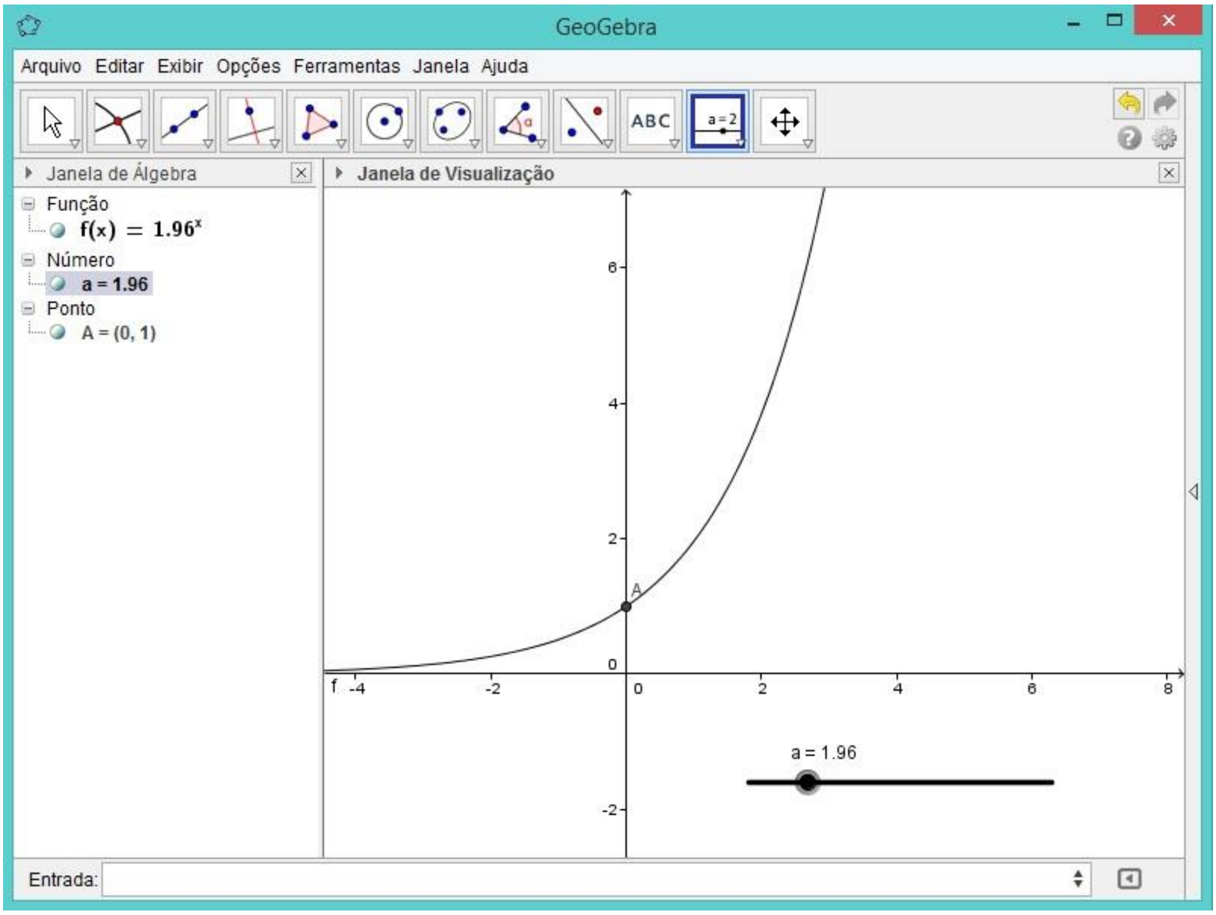
$$f\,(x) = 1^x \qquad (4.1)$$

e na janela de visualização uma reta horizontal passando pela ordenada 1. Com o botão “Controle Deslizante” selecionado, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o seletor *a* e mova-o para algum canto da janela de visualização de modo a não ser intersectado pelo gráfico da função exponencial.

3º passo: Na caixa de entrada, digite A = Interseção[f(x), EixoY]. Com esse comando, será mostrado o ponto *A*, interseção da função *f* com o eixo das ordenadas.

4º passo: No seletor do controle deslizante de *a*, altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Dessa forma, conforme mostra a Figura 4.2, você verá na janela de álgebra que o gráfico de uma função exponencial sempre passa pelo ponto *A* de coordenadas (0, 1), concluindo a prova.

FIGURA 4.2 – Gráfico da função exponencial de base real *a*, $0 < a \neq 1$.



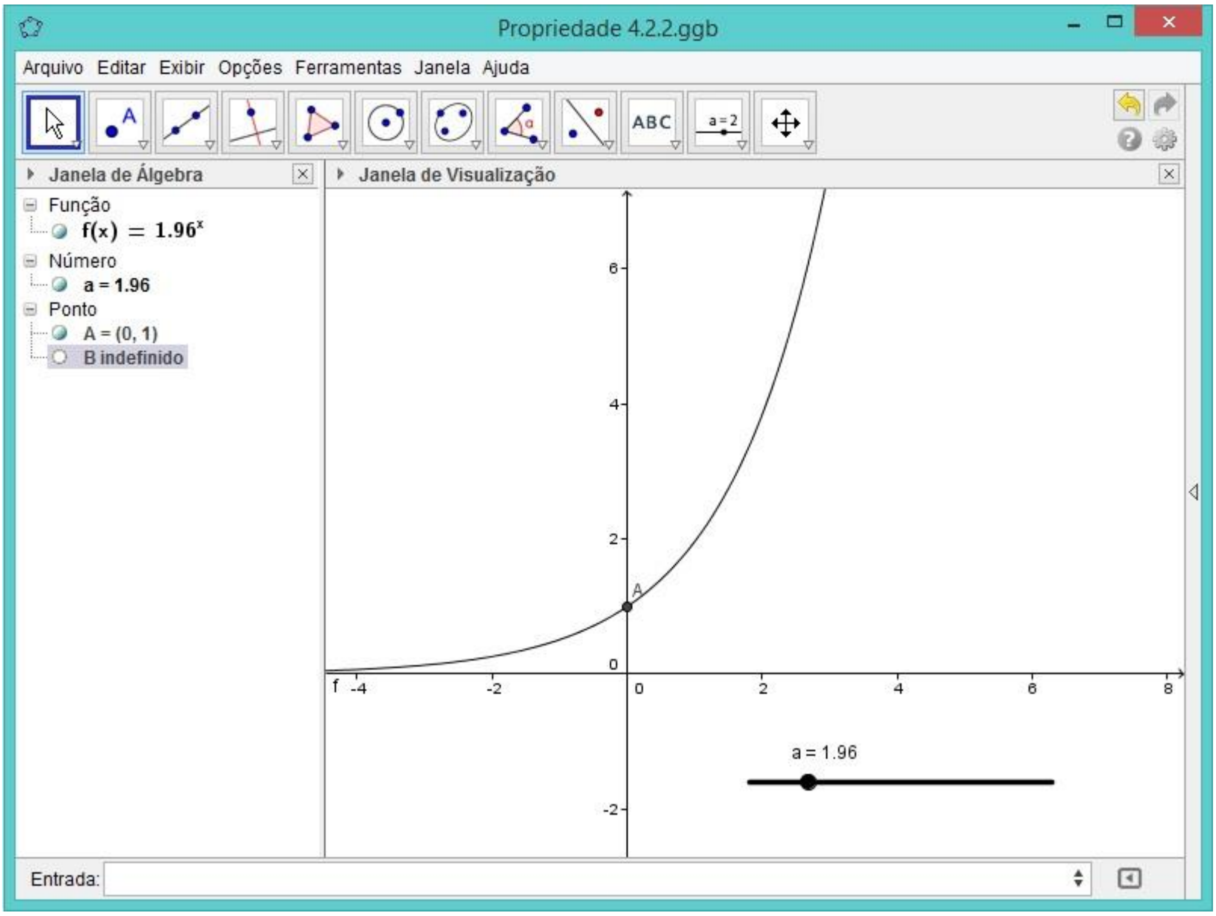
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 *Na função exponencial*, $f(x) = a^x$, *de base real a*, $0 < a \neq 1$, *tem-se que*

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

1º passo: A partir do gráfico obtido através dos passos descritos na propriedade anterior, digite no campo de entrada o comando B = Interseção[f(x), EixoX]. Você verá na janela de álgebra o surgimento de um ponto *B* com a descrição "Indefinido" e sem a opção de habilitar esse ponto para que o mesmo seja mostrado na figura. Isso mostra que não existe ponto de interseção da função f com o eixo das abscissas. A Figura 4.3 apresenta tal descrição.

FIGURA 4.3 – Indefinição do ponto de interseção do gráfico da função exponencial com o eixo *x*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.3 *Na função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a,* $0 < a \neq 1$*, tem-se que*

$$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Na subseção anterior, provou-se que a imagem da função exponencial é sempre não nula. Isso significa que as imagens da função exponencial encontram-se em apenas um dos semieixos determinados pelo eixo y. Como em (4.2.1) provou-se que o ponto (0, 1) pertence ao gráfico da função exponencial, conclui-se que o gráfico encontra-se todo acima do eixo *x*. Vamos agora apresentar uma prova com a utilização do geogebra.

1º passo: Clique no menu “Opções”, na aba “arredondamento” e no menu que abrir, selecione “15 Algarismos Significativos”. Por padrão, o geogebra vem definido para uma precisão de dois algarismos e com essa nova configuração ele trabalhará com uma precisão de 15 algarismos significativos.

2º passo: Crie um controle deslizante e com a opção **Número** selecionada, mantenha na caixa de entrada **Nome** o parâmetro *a*; utilize como extremos do **Intervalo** de variação **min:** 0.1,

max: 10, incremento 0.1 e mande aplicar. Nesse instante, aparecerá o parâmetro *a* com valor inicial igual a 1,00000000000000.

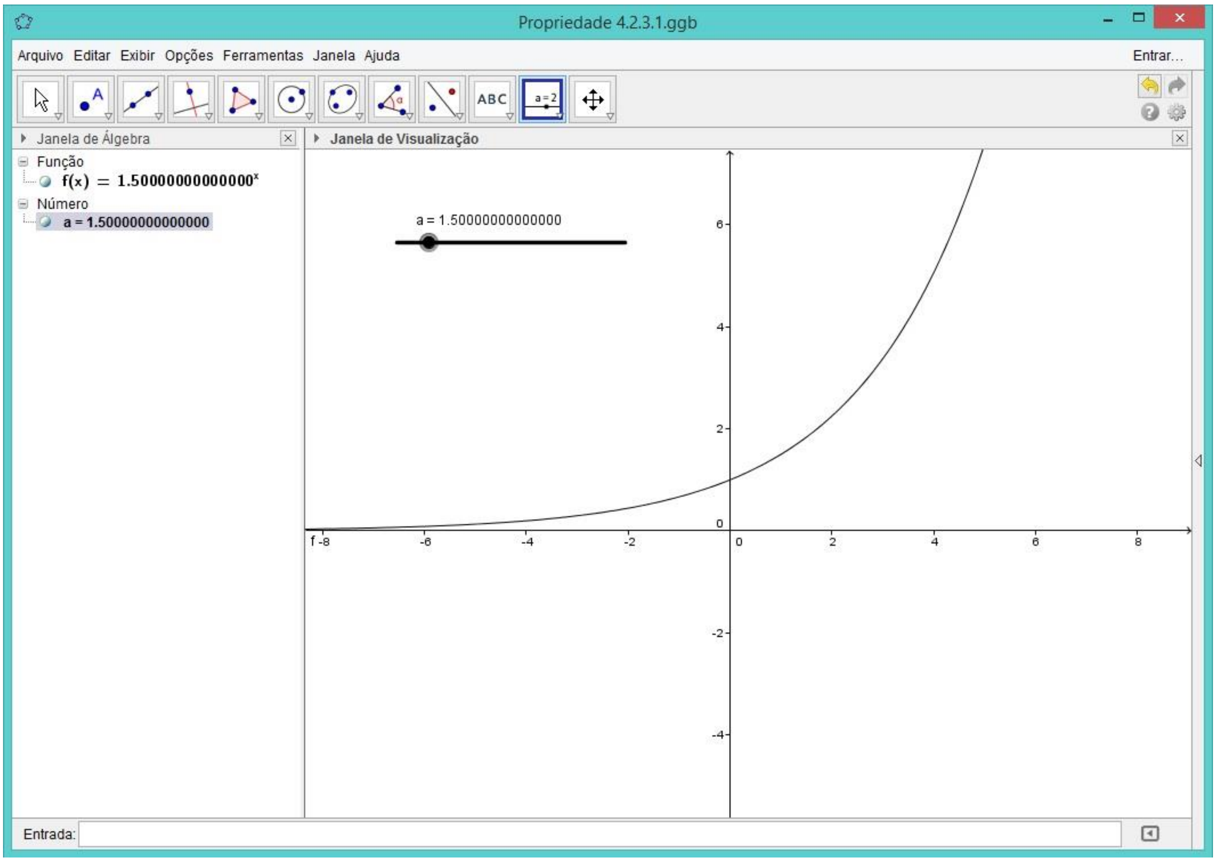
3º passo: No campo "Entrada" insira a função $f(x) = a$^x e tecle "Enter". Ao final desse processo, surgirá na Janela de Álgebra a equação

$$f(x) = 1{,}00000000000000^{x} \tag{4.1}$$

e na janela de visualização uma reta horizontal passando pela ordenada 1. Com o botão "Controle Deslizante" selecionado, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre o seletor *a* e mova-o para algum canto da janela de visualização de modo a não ser intersectado pelo gráfico da função exponencial.

4º passo: No seletor do controle deslizante de *a*, altere o seu valor e escolha, por exemplo, a = 1,5 (qualquer valor escolhido também serve). Ao final desta etapa, o gráfico visualizado será o apresentado na Figura 4.4 abaixo.

FIGURA 4.4 – Gráfico da função exponencial com precisão de quinze casas decimais.



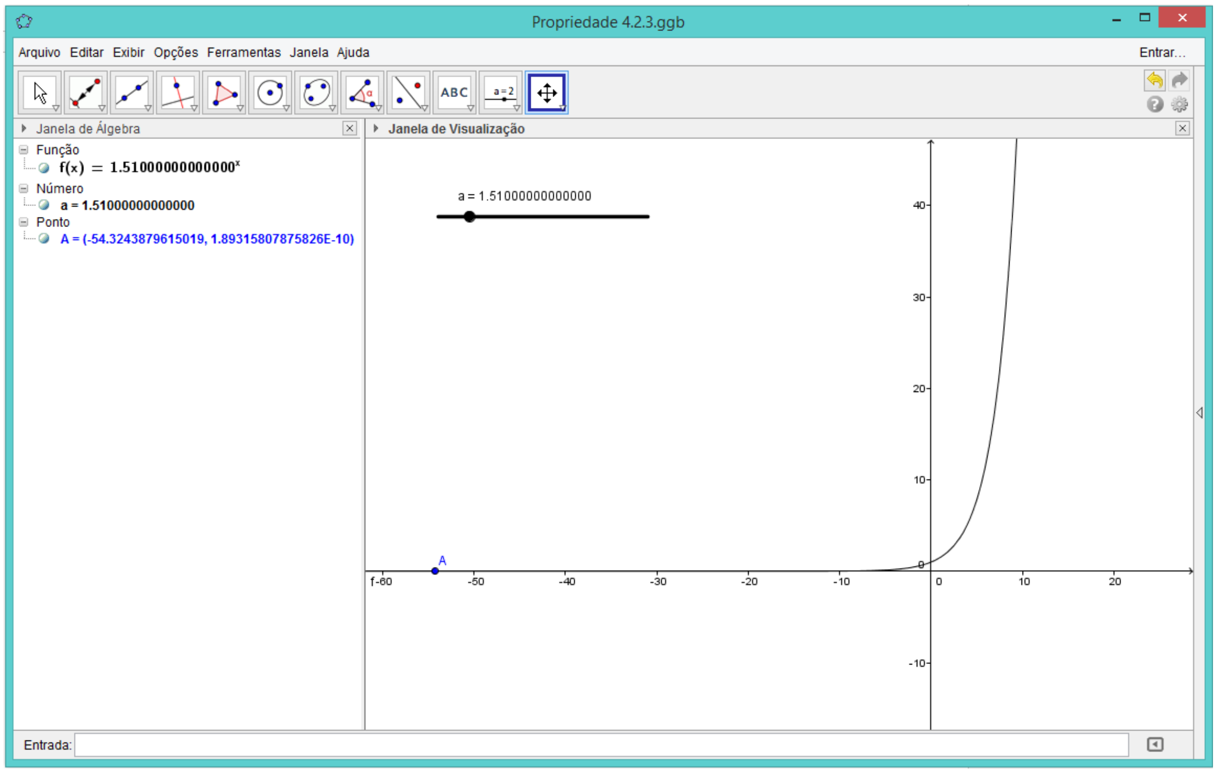
Fonte: Elaborada pelo autor.

5º passo: Na barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção Ponto, ; em seguida, clique em qualquer local da janela de visualização; será marcado o ponto *A*.

6º passo: Na barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção Vincular / Desvincular Ponto, ; em seguida, clique sobre o ponto *A* e sobre o gráfico da função exponencial; quando a opção Mover estiver selecionada, , o ponto vinculado ao gráfico moverá - se apenas sobre a curva e os valores de suas coordenadas serão mostradas na Janela de Álgebra.

7º passo: Com o botão Mover Janela de Visualização pressionado, , arraste o gráfico para a direita e pressione o botão Mover, , para deslocar o ponto *A* para a esquerda. Perceba com esse procedimento que a segunda coordenada do ponto *A* assume valores positivos que não se anulam até esse número atingir a precisão dos 15 algarismos significativos. Conclui-se daí que a imagem da função exponencial é sempre positiva.

FIGURA 4.5 – Gráfico e coordenadas da função exponencial para abscissas negativas e decrescentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.4 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$ *, de base real a, é crescente se* $a > 1$ *e decrescente se* $0 < a < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1º passo: Crie um controle deslizante com o parâmetro X e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** -10, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

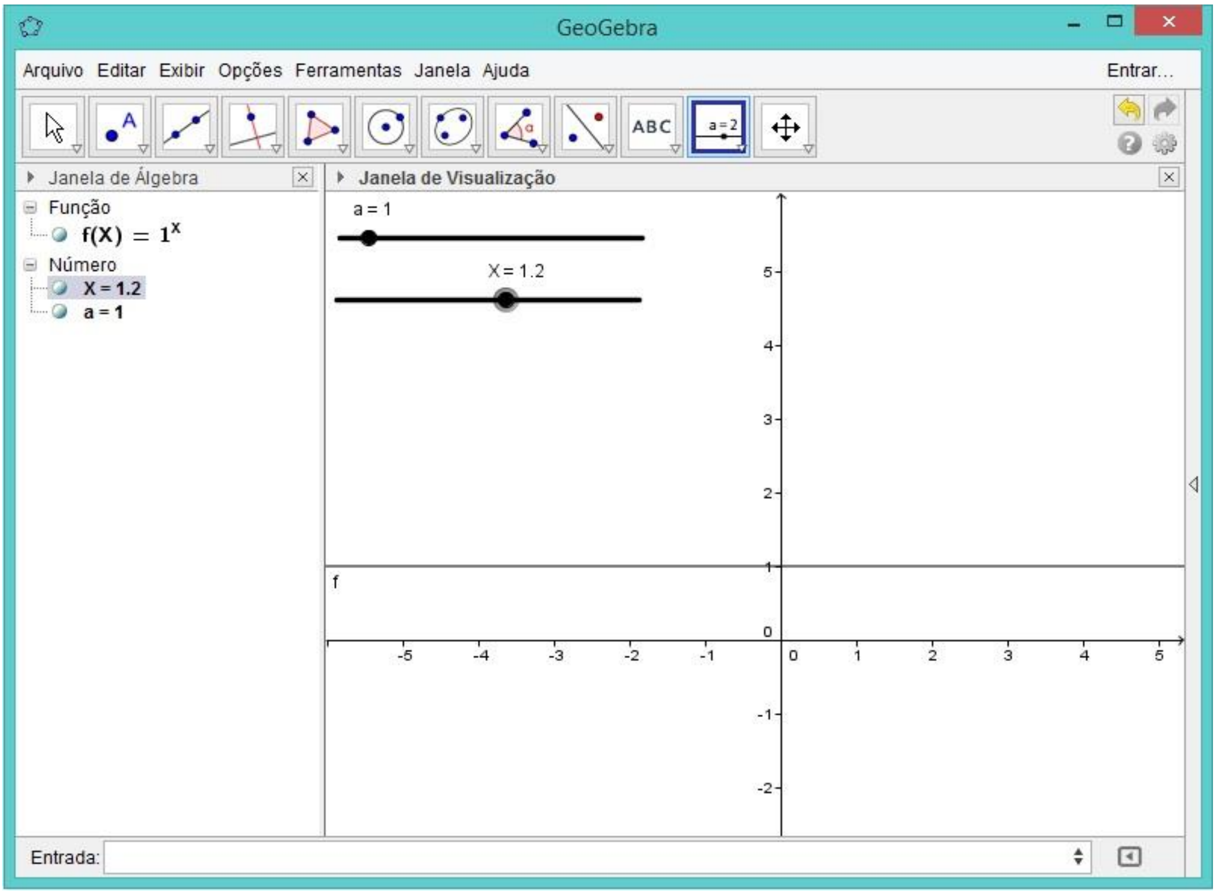
2º passo: Crie um controle deslizante com o parâmetro *a* e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

3º passo: Na Caixa de Entrada, digite f(X) = a^X. Ao final desse processo, surgirá na Janela de Álgebra a equação

$$f(\mathrm{X}) = 1^x \tag{4.2}$$

e na janela de visualização uma reta horizontal passando pela ordenada 1. Com o botão "Controle Deslizante" selecionado, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre os seletores *a* e X movendo-os para algum canto da janela de visualização de modo a não serem intersectados pelo gráfico da função exponencial, conforme mostra a Figura 4.6 abaixo.

FIGURA 4.6 – Janelas de Álgebra e de Visualização para três primeiros passos descritos em 4.2.4.

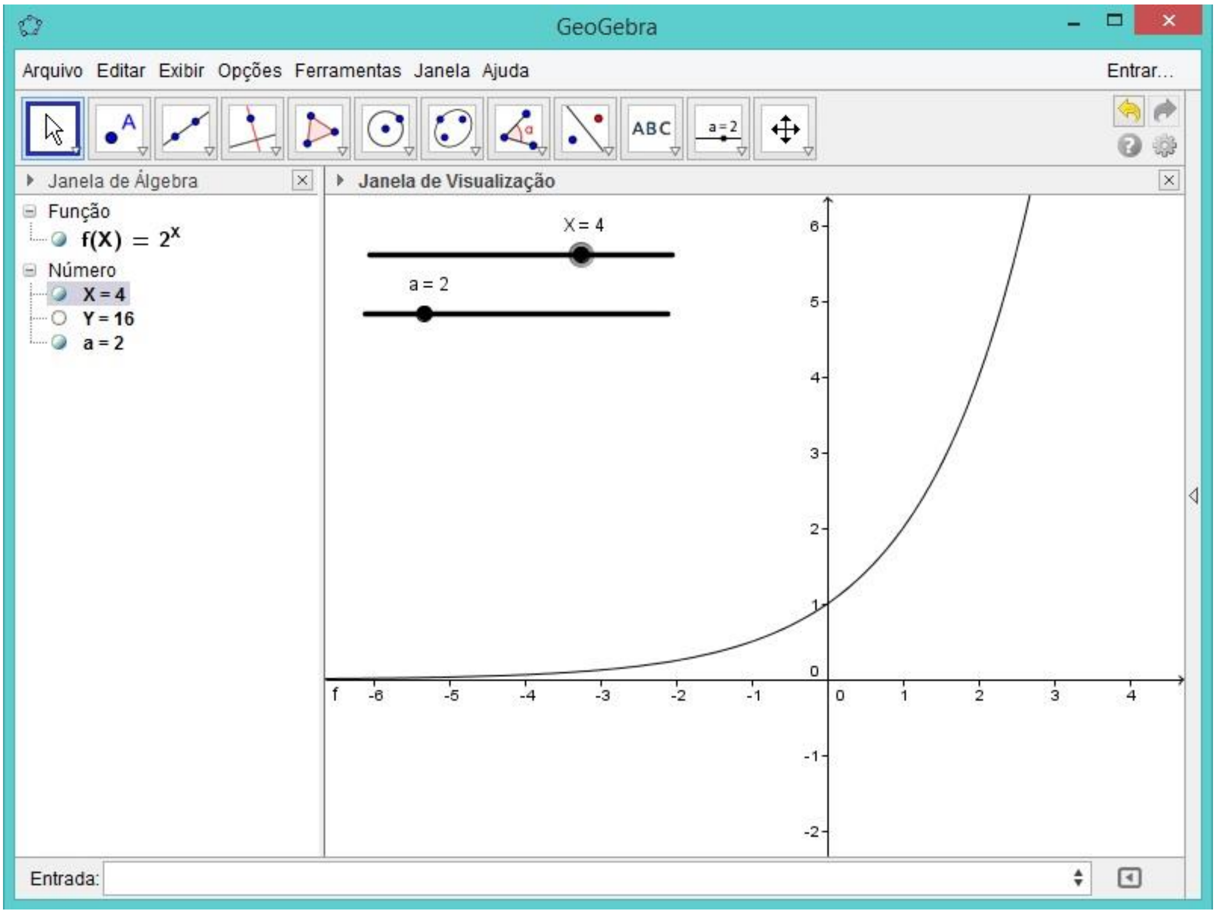


Fonte: Elaborada pelo autor.

4º passo: Na Caixa de Entrada, digite Y = f (X) e tecle "Enter". Esse comando mostrará o valor da imagem Y para cada valor da abscissa X.

5º passo: No controle deslizante de *a*, altere o seu valor para, por exemplo, $a = 2$ e no controle X, altere lentamente seu valor da posição $X_1 = 2$ para $X_2 = 4$; observe na Janela de Álgebra que Y assume, respectivamente, os valores $Y_1 = 4$ e $Y_2 = 16$. Logo, para $X_2 > X_1$, tem-se que $f(X_2) > f(X_1)$, o que mostra que a função exponencial é crescente para uma base real $a = 2$. Variando-se a base real $a > 1$, observa-se que sempre que $X_2 > X_1$, então $f(X_2) > f(X_1)$. Daí conclui-se que a função exponencial de base real a, $a > 1$, é crescente. A Figura 4.7 apresenta a curva característica de uma função exponencial crescente.

FIGURA 4.7 – Função exponencial crescente.

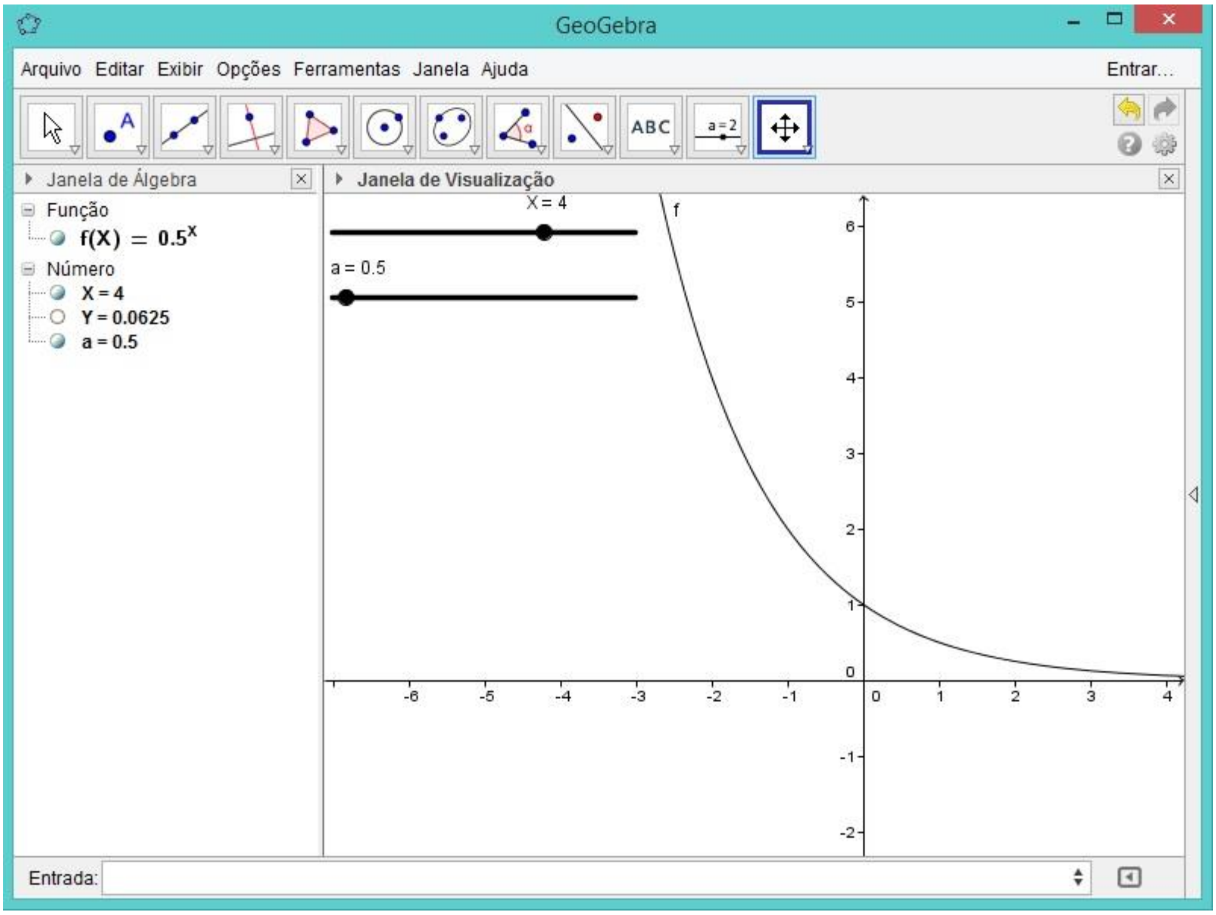


Fonte: Elaborada pelo autor.

6º passo: No menu Opções, selecione a aba arredondamento e marque a opção 4 Casas Decimais.

7º passo: No controle deslizante de a, altere o seu valor para, por exemplo, $a = 0.5$ e no controle X, altere lentamente seu valor da posição $X_1 = 2$ para $X_2 = 4$; observe na Janela de Álgebra que Y assume, respectivamente, os valores $Y_1 = 0.25$ e $Y_2 = 0.0625$. Logo, para $X_2 > X_1$, tem-se que f $(X_2) <$ f (X_1), o que mostra que a função exponencial de base $a = 0.5$ é decrescente. Variando-se a base real $0 < a < 1$, observa-se que sempre que $X_2 > X_1$, então f $(X_2) <$ f(X_1). Daí conclui-se que a função exponencial de base real a, $0 < a < 1$, é decrescente. A Figura 4.8 apresenta a curva característica de uma função exponencial decrescente.

FIGURA 4.8 – Função exponencial crescente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

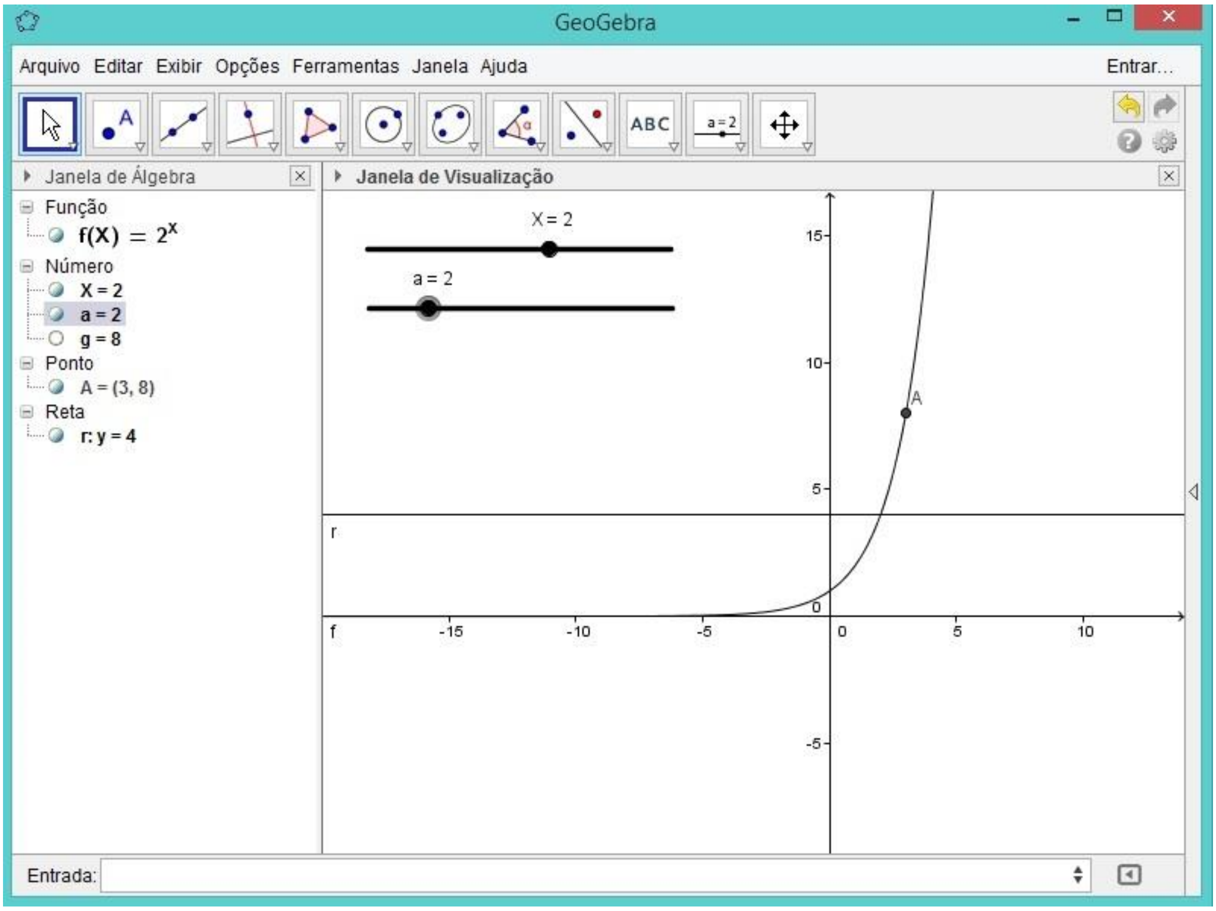
4.2.5 *A função exponencial, f* (*x*) = a^x, *de base real a*, $0 < a \neq 1$, *é ilimitada superiormente.*

1º passo: Crie um controle deslizante X e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** -10, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar. Em seguida, crie um controle deslizante a e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

2º passo: Na Caixa de Entrada, digite a função f (X) = a^X e tecle "Enter"; digite o comando r:y=a^X para criar a reta horizontal que passa pela ordenada y = a^X qualquer e tecle "Enter"; digite o comando g = f (X+1). Este último comando retornará o valor da imagem y = f (X+1) para um valor X qualquer; Ainda na Caixa de Entrada, digite o comando *A* = (X+1, f (X+1)) e tecle "Enter". Esse comando mostrará sobre o gráfico da função exponencial o ponto *A*, o qual irá se deslocar se sempre que X variar.

3º passo: Mova o controle deslizante a para, por exemplo, a = 2 e desloque lentamente o controle deslizante X. Note que a medida que X varia, a reta *r* desloca-se para cima ou para baixo e o ponto A mantem-se sempre acima dessa reta indicando que f (X+1) é maior que um f (X) qualquer. Isto é, dada uma imagem *y* = a^X, a = 2, de f, é sempre possível obter uma outra imagem dada por f (X+1), tal que f (X+1) > f (X), o que mostra que a função exponencial de base a = 1 é ilimitada superiormente. Variando-se o parâmetro a, a > 1, conclui-se que a função exponencial é ilimitada superiormente, para todo a > 1. A Figura 4.9 caracteriza essa construção.

FIGURA 4.9 – Construção para visualizar a não limitação da função exponencial de base a > 1.

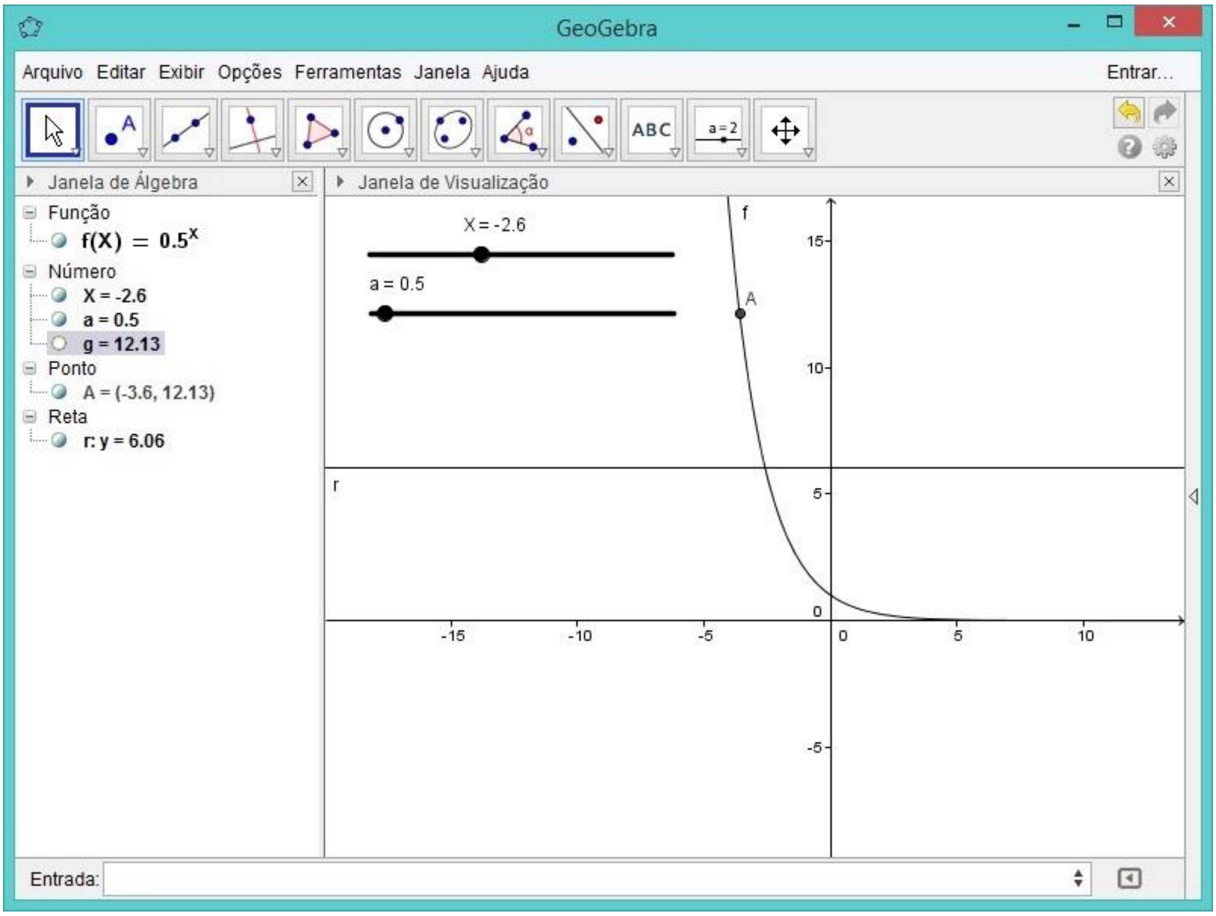


Fonte: Elaborada pelo autor.

4º passo: Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do *mouse* sobre *g* e selecione propriedades; no campo Definição, redefina f para f (X-1) e mande fechar a janela; ainda na Janela de Álgebra, clique com o botão direito do *mouse* sobre o ponto *A* e selecione propriedades. No campo Definição, redefina o ponto *A* para (X-1, f (X-1)) e mande fechar a janela.

5º passo: Mova o controle deslizante a para, por exemplo, a = 0.5 e desloque lentamente o controle deslizante X para a esquerda. Note que a medida que X varia, a reta *r* desloca-se para cima ou para baixo e o ponto A mantem-se sempre acima dessa reta indicando que f (X-1) é maior que um f (X) qualquer. Daí conclui-se que a função exponencial de base a = 0,5 é ilimitada superiormente. De modo análogo ao procedimento descrito no terceiro passo, conclui-se que a função exponencial de base a, 0 < a < 1 é ilimitada superiormente. A Figura 4.10 caracteriza essa última construção.

FIGURA 4.10 – Construção para visualizar a não limitação da função exponencial de base 0 < a < 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.7 *A função exponencial, $f(x) = a^x$, de base real a, a > 1, é não linear.*

Pela propriedade 4.2.1, tem-se que $f(0) = 1$, para qualquer função exponencial f de base real a tal que $0 < a < 1$. Para mostrar que f é não linear, basta mostrar que o coeficiente angular m varia em função da variável dependente x.

1º passo: Crie um controle deslizante X e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** -10, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar. Em seguida, crie um controle deslizante a e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

2º passo: Na Caixa de Entrada, digite a função f (X) = a^X e tecle "Enter"; ainda na caixa de entrada digite o comando m = (f (X+1) -1)/X e tecle "Enter".

3º passo: Mova o controle deslizante a para, por exemplo, a = 2 e desloque lentamente o controle deslizante X. Note que a medida que X varia, m também varia, isto é, a função exponencial f de base $a = 2$ é não linear. Variando-se a base a tal que $a > 1$, percebe-se que a medida que X varia o coeficiente angular *m* também varia. Daí conclui-se que *f* de base $a > 1$ é não linear. De modo análogo, mostra-se que a função exponencial f de base $0 < a < 1$ é não linear.

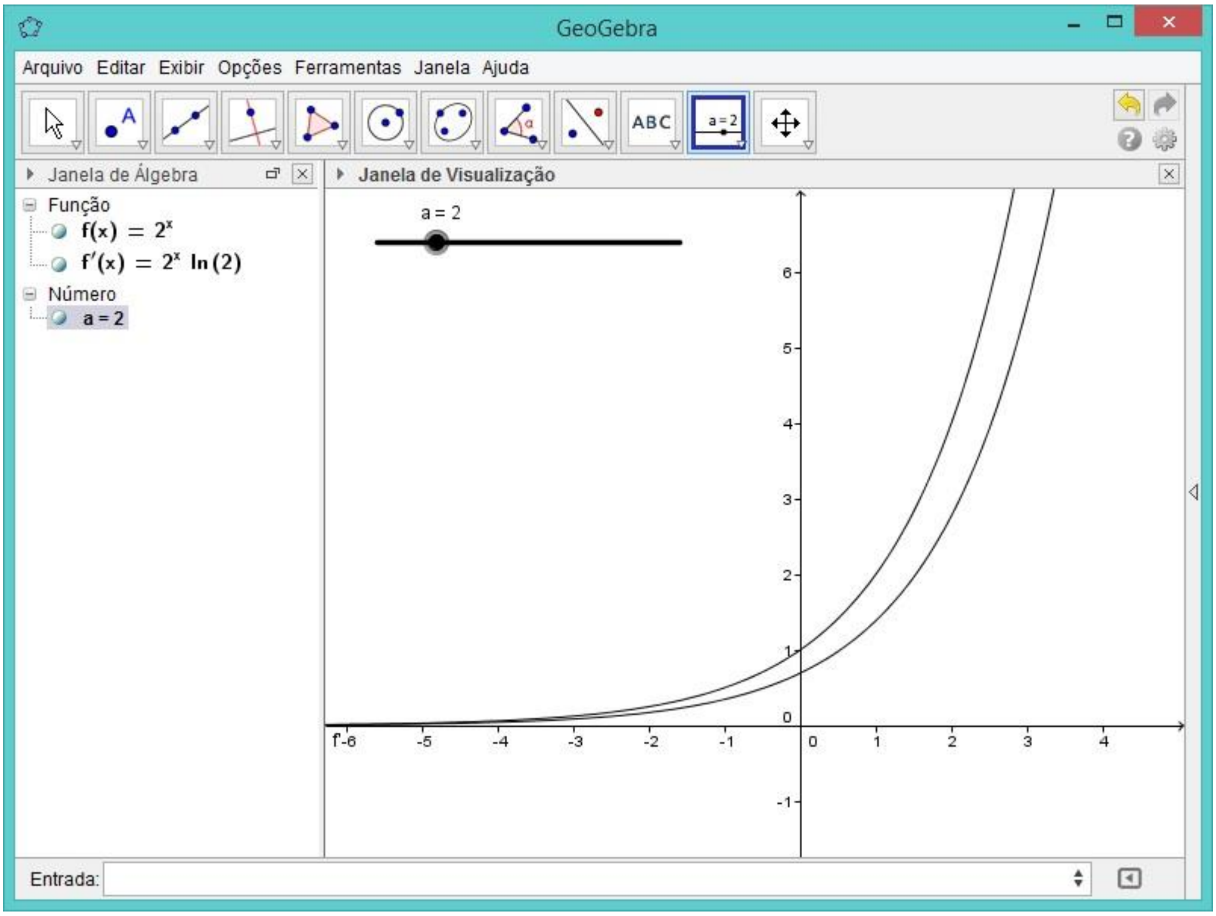
4.2.8 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real a,* $0 < a \neq 1$*, é diferenciável para todo* $x \in D_f$.

1º passo: Crie um controle deslizante a e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

2º passo: No campo "Entrada" insira a função $f(x) = a$^x e tecle "Enter".

3º passo: No campo "Entrada" insira o comando Derivada[f] e tecle "Enter". Nas janela de Visualização e de Álgebra serão mostrados, respectivamente, os gráficos e as equações de f e sua derivada, os quais variam a medida em que movimenta - se o controle deslizante a, conforme mostra a Figura 4.11 abaixo para o caso em que a > 1.

FIGURA 4.11 – Gráfico da função exponencial de base a > 1 e sua derivada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.9 *A função exponencial,* $f(x) = a^x$*, de base real* a*,* $0 < a \neq 1$*, é convexa em todo intervalo* I *de seu domínio.*

1º passo: Crie um controle deslizante a e utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01; mande aplicar.

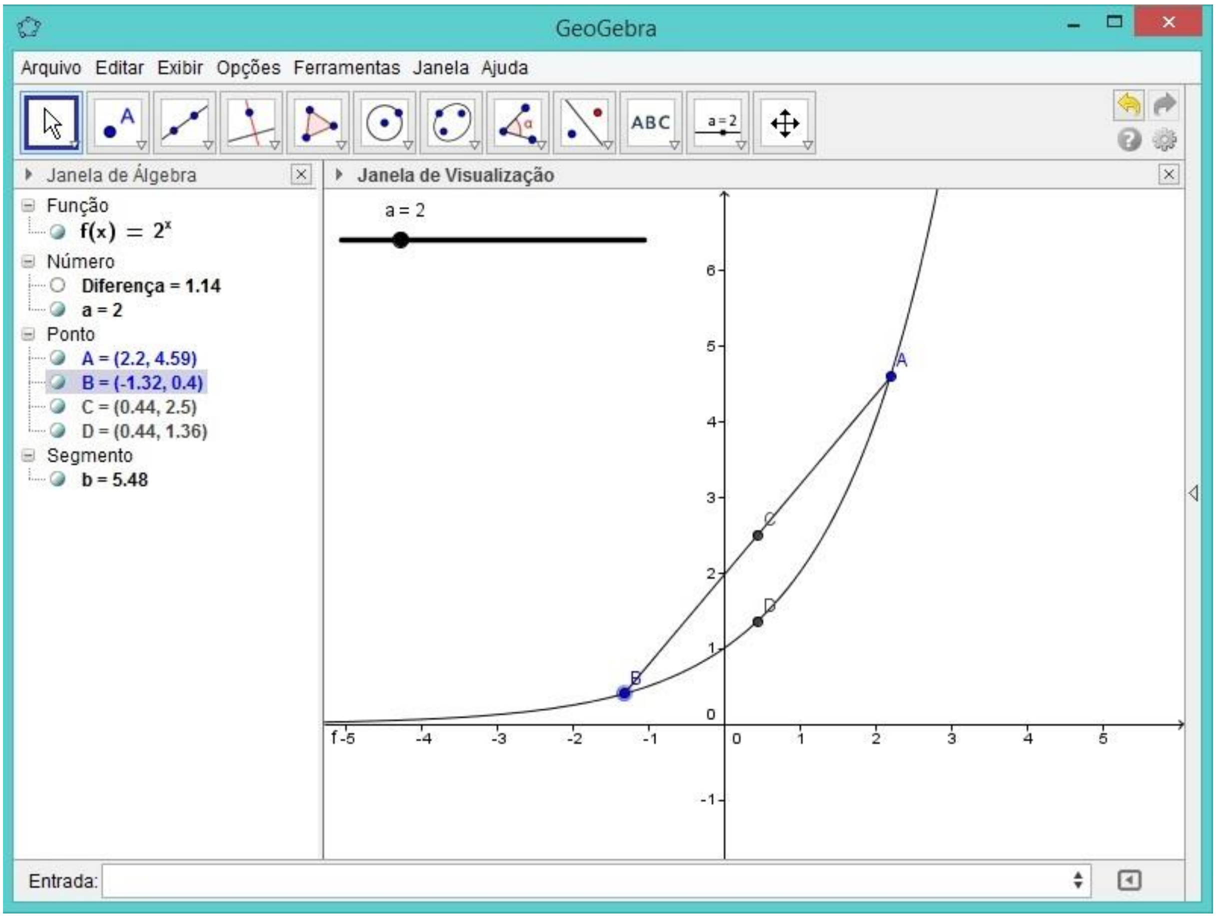
2º passo: No campo "Entrada" insira a função *f* (*x*) = *a*^*x* e tecle "Enter".

3º passo: Na barra de ferramentas; clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção Ponto, ; em seguida, clique em quaisquer dois locais da janela de visualização; serão marcados os pontos *A* e *B*; ainda na barra de ferramentas, clique com o botão esquerdo do *mouse* na opção Vincular / Desvincular Ponto, ; em seguida, clique em um dos pontos *A* ou *B* e sobre o gráfico da função exponencial; depois clique sobre o ponto restante e novamente sobre o gráfico.

4º passo: No campo "Entrada" insira os comandos Segmento[A,B] e tecle "Enter"; C = PontoMédio[A,B] e tecle "Enter". Esse segmento terá medida b; ainda no campo "Entrada", insira o comando D = (*x*(C), f (*x*(C)) para marcar sobre o gráfico de *f* o ponto D tal que esse ponto movimenta-se sempre abaixo de C à medida que os pontos *A*, *B* ou o controle deslizante a variam.

5º passo: No campo "Entrada" defina a diferença entre os pontos C e D através do comando Diferença = y (C) – y (D). Assim, à medida em que os pontos *A*, *B* ou o controle deslizante a variam, o valor da diferença também varia assumindo apenas valores positivos. Daí conclui-se que o segmento de estremos *A* e *B* está sempre acima do gráfico de *f* que é convexa. A Figura 4.12 abaixo caracteriza essa construção para o caso em que a base a > 1 .

FIGURA 4.12 – Convexidade da função exponencial de base a > 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, viu-se que uma caracterização mais rigorosa acerca das funções exponenciais e suas propriedades exige alguns conteúdos matemáticos que não pertencem ao currículo da educação básica. Entretanto, esse tema é apresentado inicialmente a alunos da primeira série do ensino médio, fato este que dificulta o trabalho do professor, haja vista que os conhecimentos adquiridos pelo aluno até aquele momento são inconsistentes com os necessários para caracterização mais concisa.

Através de uma análise realizada com cinco livros didáticos de matemática do ensino médio distribuídos pelo Mec para as escolas públicas, concluiu-se que técnica mais utilizada pelos autores foi a de omitir propriedades e provas, fato este que restringiu o estudo das funções exponenciais a sua definição, a apresentação intuitiva de algumas dessas propriedades e análises gráficas. Entretanto, tal abordagem mostra-se incoerente haja vista que uma vez que o aluno não conhece certas propriedades, provas e suas implicações, não será capaz de perceber as particularidades presentes na resolução de problemas que envolvem esse assunto.

Assim, o objetivo deste trabalho foi apresentar propostas destinadas a introdução das funções exponenciais a partir de problemas interdisciplinares e do cotidiano do aluno, para que, partindo-se dos conhecimentos prévios já adquiridos possa-se obter por generalização a definição de função exponencial. Em relação as dificuldades inerentes as propriedades dessa função, propõe-se ainda neste trabalho o estudo das mesmas a partir da utilização do software livre geogebra, ferramenta computacional amplamente utilizada por educandos de várias partes do mundo.

Espera-se com essas propostas tornar o ensino e a aprendizagem das funções exponenciais mais compreensíveis na educação básica e capazes de proporcionar aos educandos aprendizagens mais significativas a passiveis de serem aplicadas na solução de problemas do seu dia a dia, isto é, em suas vidas, como prevê a nova LDB.

REFERÊNCIAS

BRONSON, R. **Moderna introdução às equações diferenciais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

CONNALLY, E. et al. **Funções para modelar variações: uma preparação para o cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

COURANT, R. **Cálculo diferencial e integral volume 1**. 1. ed. Porto Alegre: Globo, 1965.

CRESPO, A. A. **Matemática comercial financeira fácil**. 13. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

FLEMMING, D; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

GUIDORIZZI. H. L. **Um curso de cálculo volume 1**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

HALLETT, H. et al. **Cálculo Aplicado**. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de matemática elementar**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1982.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 11. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PISKOUNOV, N. **Calculo diferencial e integral**. 5. ed. Porto: Lopes da Silva, 1977.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica volume 1**. São Paulo: McGraw – Hill, 1987.

SOUZA. J. R. **Novo Olhar: Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SPIEGEL, M. R. **Cálculo avançado**. Rio de Janeiro: McGraw – Hill, 1971.

STEWART, J. **Cálculo volume 1**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

THOMAS, G. B. Calculo volume 1. 11. ed. São Paulo: Addison Weslley, 2009.

ZAHN, M. **Teoria elementar das funções.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

APÊNDICE A - CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL COM O SOFTWARE GEOGEBRA.

1º Passo:

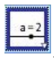
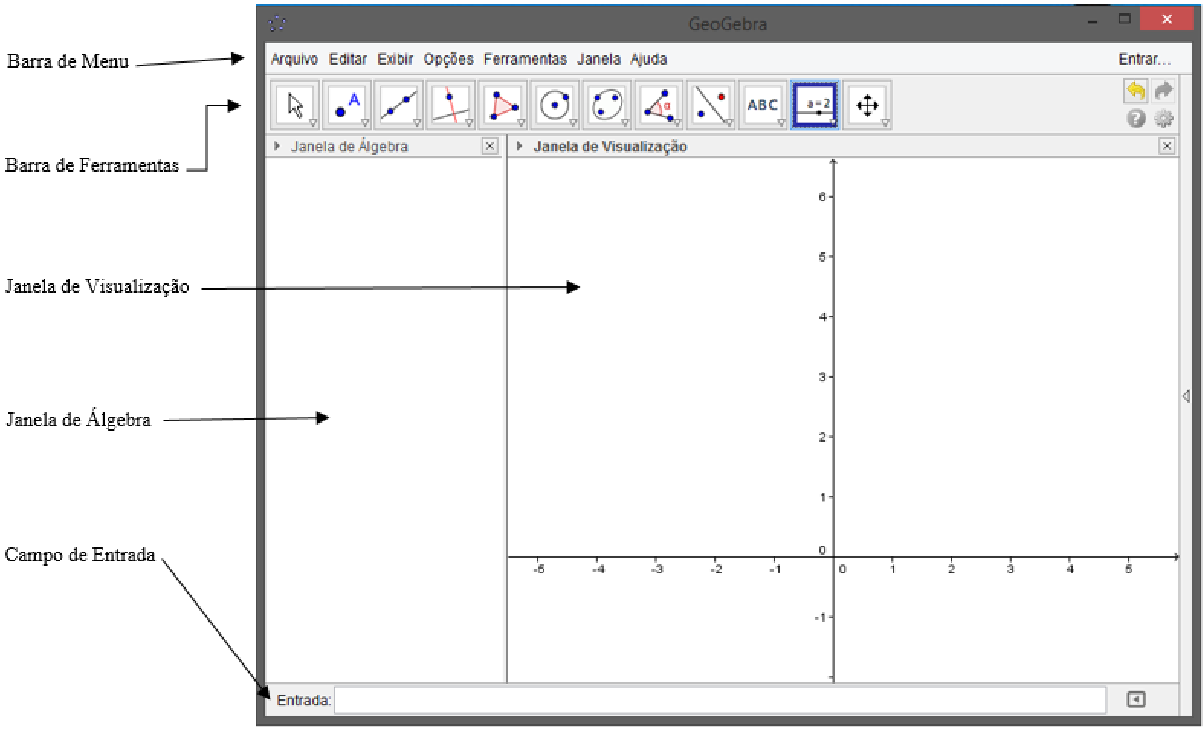
Na barra de ferramentas, selecione a opção **Controle Deslizante**, , e clique em algum ponto da janela de visualização.

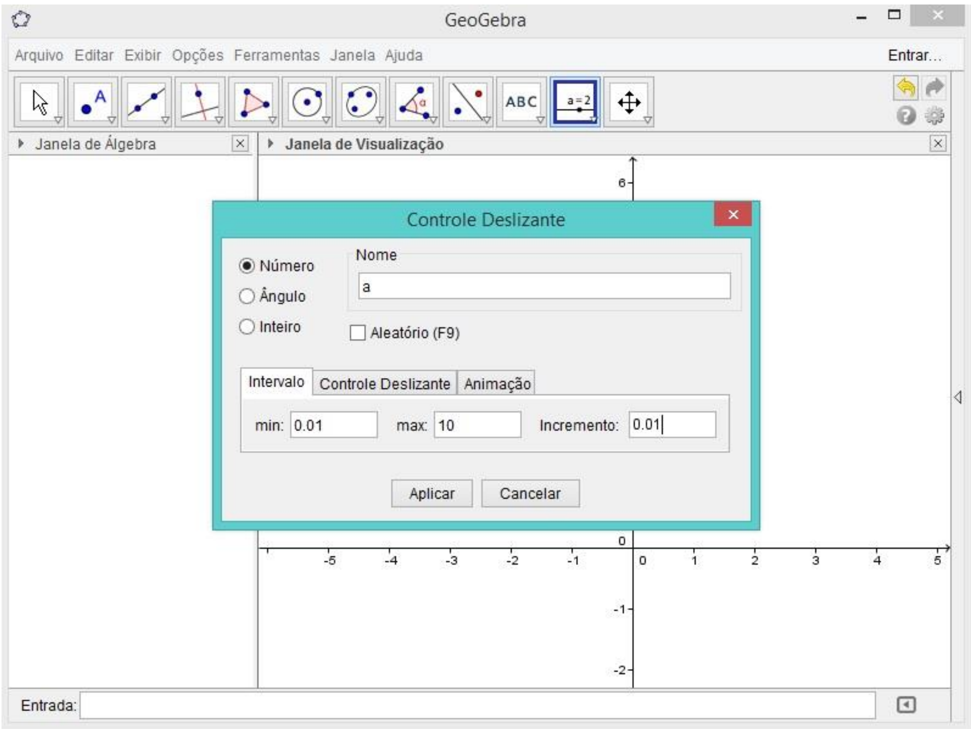
FIGURA A.1 – Tela inicial do geogebra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Será mostrada a caixa **Controle Deslizante** e com a opção **Número** selecionada, escreva na caixa de entrada **Nome** o parâmetro *a*, utilize como extremos do **Intervalo** de variação os valores **min:** 0.01, **max:** 10, incremento 0.01 e mande aplicar.

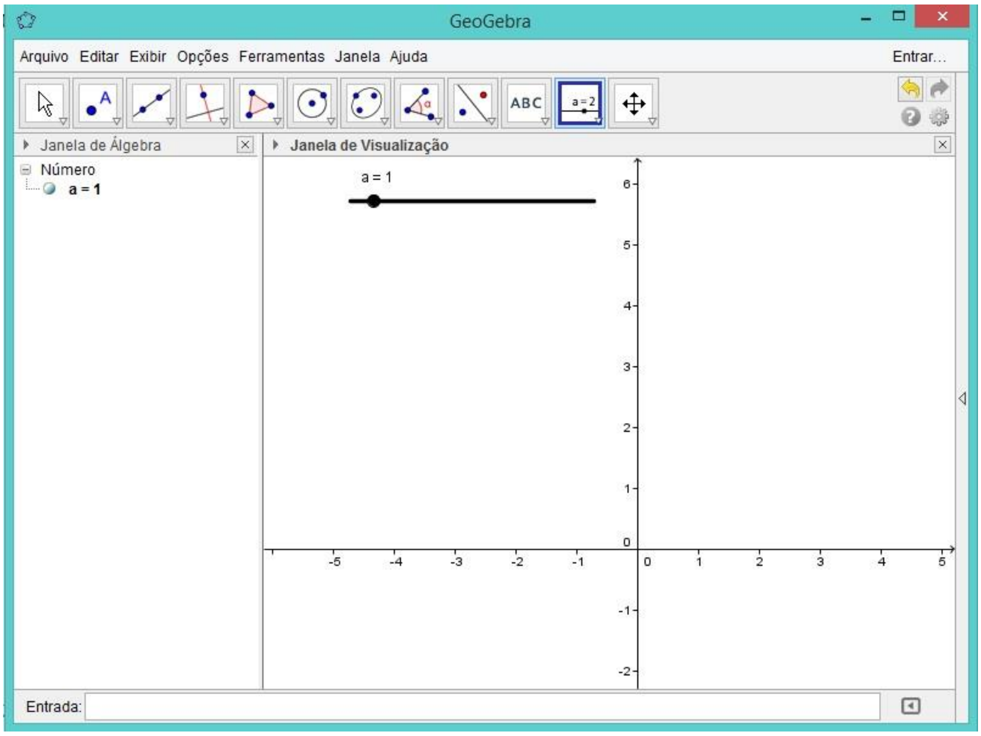
FIGURA A.2 – Caixa Controle Deslizante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Surgirá na janela de visualização um controle deslizante escrito em função do parâmetro *a*.

FIGURA A.3 – Controle deslizante para o paramento *a*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a opção Controle **Deslizante ativada**, coloque o cursor sobre o seletor e com o botão direito do mouse pressionado, arraste-os para algum canto da janela de visualização, de modo a não interferirem na visualização do gráfico a ser construído.

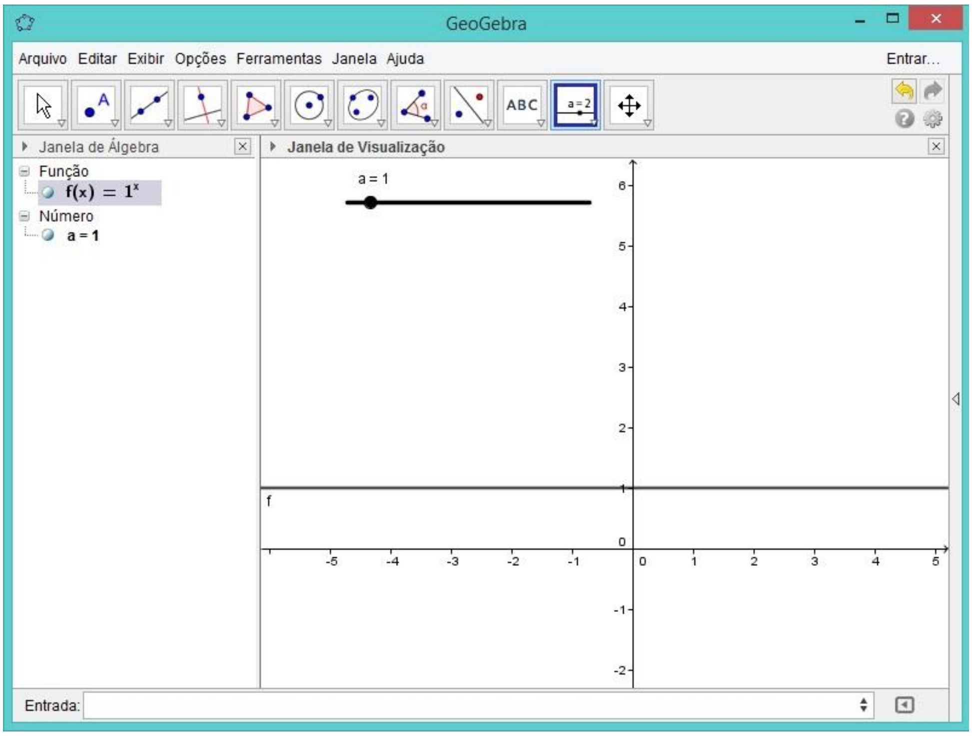
2º Passo:

No campo de entrada, escreva a equação f(x) = a^x e dê Enter (O sinal de acentuação til (^) entre *a* e a variável independente *x* é para indicar que a base *a* está elevada ao expoente *x*). Ao final desse processo, surgirá na janela de álgebra a equação

$$f(x) = 1^x \tag{3.12}$$

e o paramento *a* com valor igual a 1. Na janela de visualização será mostrada uma reta horizontal passando pelo ponto de ordenada 1.

FIGURA A.4 – Informações apresentadas nas Janelas de Visualização e de Álgebra.

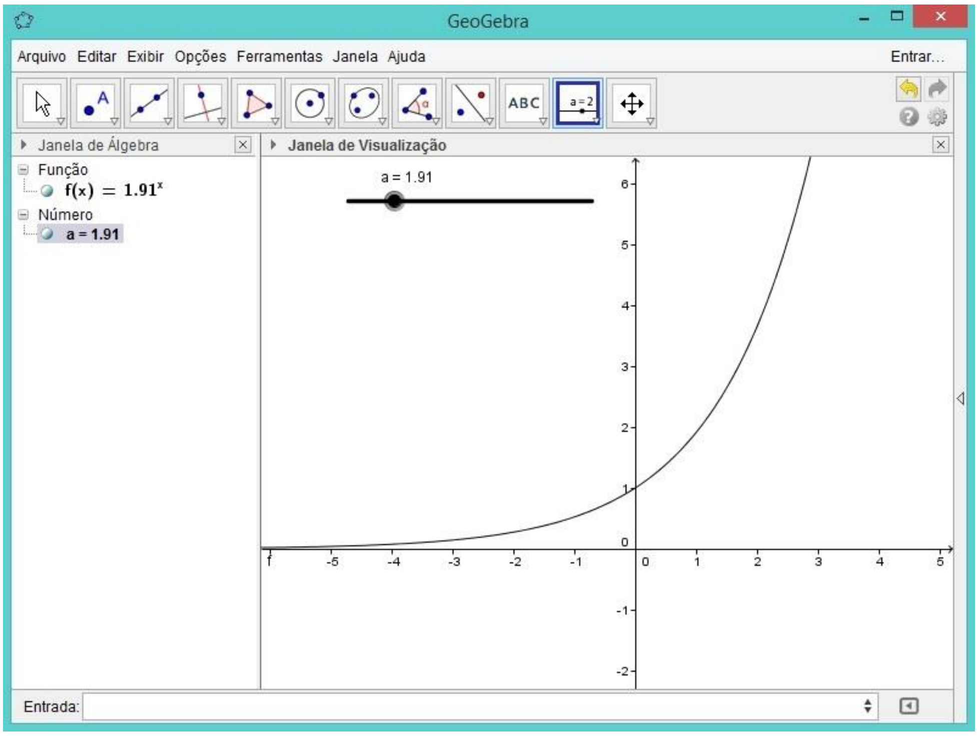


Fonte: Elaborada pelo autor.

3º Passo:

Agora tudo que você precisa fazer é movimentar o botão do controle deslizante para os lados para visualizar os diversos gráficos gerados.

FIGURA A.5 – Gráfico da função exponencial de base *a*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE B - FUNÇÕES CÔNCAVAS E CONVEXAS

Um conceito de relevante importância no estudo da otimização é o de função convexa. Quando presente, essa propriedade garante que um mínimo local de uma função é também global.

Neste apêndice apresentam-se os conceitos de funções côncavas e convexas assim como algumas das propriedades mais elementares das funções convexas.

Definição 2.1 (Funções Convexas) *Seja I um intervalo não vazio de* $\mathbb{R}$. *A função* $f: I \to \mathbb{R}$ *é dita convexa em I quando*

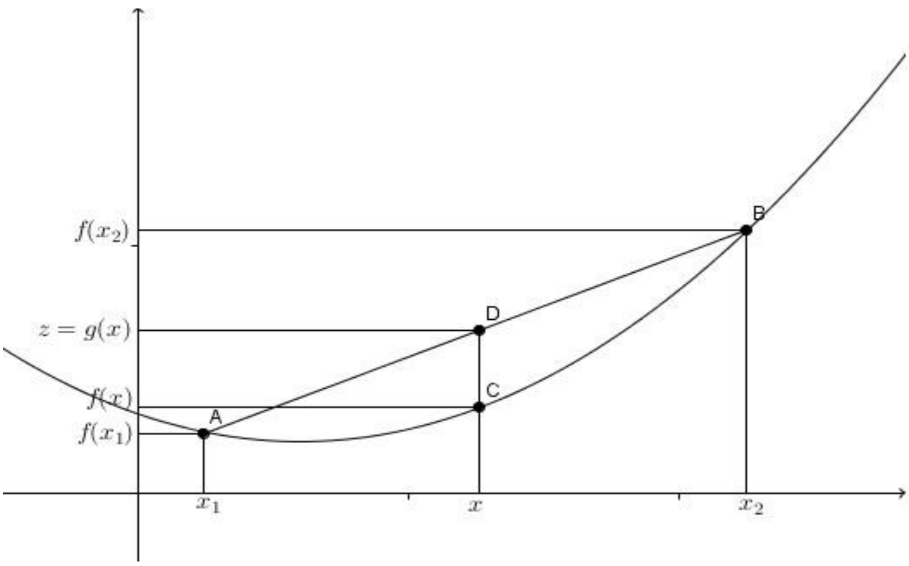
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{B.1}$$

para todos os pares de pontos (x_1, x_2) *em I e todo* $t \in (0,1)$.

A interpretação da propriedade (B.1) é simples e pode ser feita como segue.

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função e $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x, f(x))$ pontos de seu gráfico, tal que x é interno ao intervalo de extremos x_1 e x_2. Seja o ponto D sobre a reta g que passa pelos pontos A e B, que possui ordenada z e abscissa igual ao do ponto C. Sejam ainda os pontos $A_1 = (x_1, 0)$, $A_2 = (0, f(x_1))$, $B_1 = (x_2, 0)$, $B_2 = (0, f(x_2))$, $D_1 = (x, 0)$ e $D_2 = (0, z)$, conforme mostra a Figura B.1 abaixo:

FIGURA B.1 – Gráfico da função convexa f e do segmento de reta que a intersecta nos pontos A e B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se β é a razão de secção entre os segmentos orientados $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$, então β é um número real tal que $0 \le \beta \le 1$ e pelo teorema de Tales aplicado as transversais $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A_1B_1}$ do feixe de paralelas $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{DD_1}$ e $\overleftrightarrow{BB_1}$, segue que

$$\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{A_1B_1}}$$

$$\beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{B.2}$$

Donde conclui-se que

$$x - x_1 = \beta(x_2 - x_1). \tag{B.3}$$

Escrevendo-se a variável x como

$$x = x_1 + (x - x_1), \tag{B.4}$$

segue-se de (B.3) e (B.4) que

$$x = x_1 + \beta(x_2 - x_1), \tag{B.5}$$

ou ainda,

$$x = (1-\beta)x_1 + \beta x_2, \quad 0 \le \beta \le 1. \tag{B.6}$$

Fazendo-se $t = 1-\beta$, tem-se que $0 \le t \le 1$, para $\beta \in [0,1]$, e ainda,

$$x = tx_1 + (1-t)x_2. \tag{B.7}$$

De modo análogo, aplicando-se o Teorema de Tales as transversais $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$ do feixe de paralelas $\overleftrightarrow{AA_2}$, $\overleftrightarrow{DD_2}$ e $\overleftrightarrow{BB_2}$, segue-se que

$$\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{A_2B_2}}$$

$$\beta = \frac{z - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \tag{B.8}$$

Donde conclui-se que

$$z - f(x_1) = \beta(f(x_2) - f(x_1)). \tag{B.9}$$

Escrevendo-se a variável z como

$$z = f(x_1) + (z - f(x_1)), \tag{B.10}$$

segue-se de (B.9) e (B.10) que

$$z = f(x_1) + \beta(f(x_2) - f(x_1)), \tag{B.11}$$

ou ainda,

$$z = (1-\beta) f(x_1) + \beta f(x_2), \ \ 0 \le \beta \le 1. \tag{B.12}$$

Fazendo-se $t = 1-\beta$, tem-se que $0 \le t \le 1$, para $\beta \in [0,1]$, e ainda,

$$z = tf(x_1) + (1-t) f(x_2). \tag{B.13}$$

Calculando-se a imagem de *f* para a abscissa x dada por (B.7) e comparando-se com (B.13), segue que uma interpretação para a definição 2.1 é que uma função é convexa quando para todos x_1, x_2 em *I* e todo x no intervalo (x_1, x_2), o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de *f* está abaixo do segmento de extremos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Uma definição equivalente e baseada nessa última interpretação pode ser apresentada como segue.

Definição 2.2 (Funções Convexas) *Seja I um intervalo não vazio de* $\mathbb{R}$. *A função* $f : I \to \mathbb{R}$ *é dita convexa em I quando para todo* $x_1, x_2 \in I$ *o segmento de extremos* $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ está sempre acima do gráfico de *f*.

A condição geométrica descrita nessa definição pode ser expressa de maneira analítica diferente da apresentada na definição 2.1 e algumas vezes mostra-se mais útil nas demonstrações. Com efeito, sendo *g* a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, tem-se que a expressão analítica de *g* é dada por

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + f(x_1) \tag{B.14}$$

e estará acima do gráfico de f se $g(x) \ge f(x)$, $\forall x \in (x_1, x_2)$, isto é, se

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + f(x_1) \ge f(x). \tag{B.15}$$

Como $x - x_1 > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, pode-se escrever (B.15) de modo equivalente como,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq \frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)} \tag{B.16}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} \tag{B.17}$$

De modo análogo a definição 2.2, pode-se apresentar uma definição para uma nova classe de funções chamadas côncavas como segue.

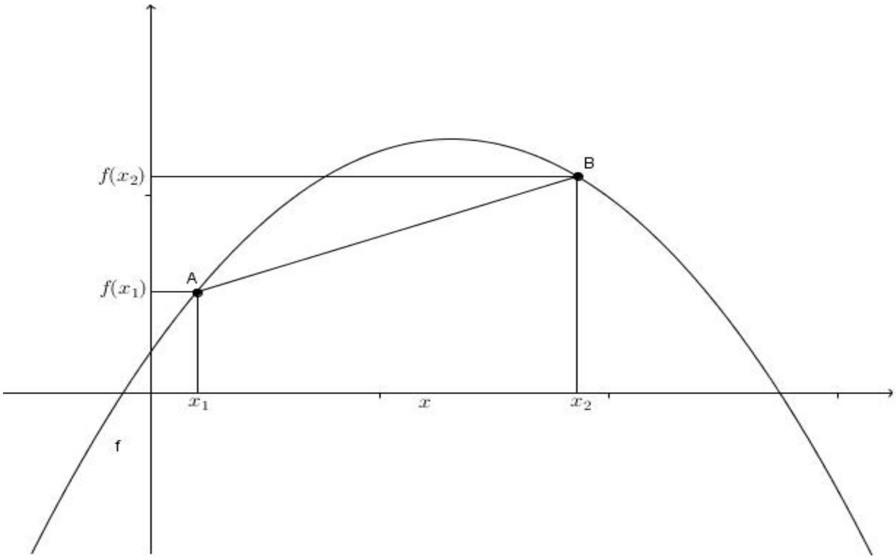
Definição 2.3 (Funções Côncavas) *Seja I um intervalo não vazio de* $\mathbb{R}$. *A função* $f: I \to \mathbb{R}$ *é dita côncava em I quando para todo* $x_1, x_2 \in I$ *o segmento de extremos* $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ está sempre abaixo do gráfico de *f*.

Analiticamente, essa definição é dada pela desigualdade

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{(x-x_1)} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} \tag{B.18}$$

e o gráfico para uma função côncava é mostrado na Figura B.2 abaixo.

FIGURA B.2 – Gráfico da função côncava *f* e do segmento de reta que a intersecta nos pontos A e B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As definições 2.1, 2.2 e 2.3 mostram que os gráficos das funções convexas e côncavas curvam-se para cima ou para baixo quando os pontos que os traçam movem-se da esquerda para a direita. Na Figura B.1, o gráfico se curva para cima enquanto que na figura B.2 o gráfico se curva para baixo. Tais noções serão definidas no apêndice C como curvas côncavas para cima ou para baixo.

Proposição 2.4 *Seja* $I=(a,b)$ *um intervalo não vazio de* $\mathbb{R}$. *Se* $f:I\to\mathbb{R}$ *é convexa em I e se* $x_1,x_2\in I$ *tal que* $x\in(x_1,x_2)$, *então*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad \text{(B.19)}$$

Prova. Como por hipótese f é convexa em *I*, segue da definição 2.2 que se g é a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, então a expressão analítica de g é dada por

$$g(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1) \qquad \text{(B.20)}$$

e estará acima do gráfico de f no intervalo $\left(x_1,x_2\right)$ se $g(x)\ge f(x)$, isto é, se

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.(x-x_1)+f(x_1)\ge f(x), \qquad \text{(B.21)}$$

como $x-x_1>0$, pode-se reescrever (B.21) como,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \qquad \text{(B.22)}$$

ou ainda,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \text{(B.23)}$$

o que conclui a primeira parte da prova.

Note agora que, como $x-x_1>0$ e $x_2-x_1>0$, pode-se reescrever (B.23) como

$$(f(x)-f(x_1)).(x_2-x_1)\le(f(x_2)-f(x_1)).(x-x_1), \qquad \text{(B.24)}$$

donde obtém-se que,

$$x_2.f(x)-x_1.f(x)-x_2.f(x_1)+x_1.f(x_1)\le x.f(x_2)-x_1.f(x_2)-x.f(x_1)+x_1.f(x_1). \qquad \text{(B.25)}$$

Cancelando-se os termos comuns presentes nos dois membros da desigualdade, adicionando-se membro a membro o termo $x_2.f(x_2)$ e agrupando-se os termos semelhantes, tem - se que

$$(f(x_2)-f(x_1)).(x_2-x)\le (f(x_2)-f(x)).(x_2-x_1), \tag{B.26}$$

e como $x_2-x>0$ e $x_2-x_1>0$, pode-se reescrever (B.26) como,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \tag{B.27}$$

o que conclui a segunda parte da prova.

Segue de (B.23) e (B.27) que,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \tag{B.28}$$

o que conclui a prova.

Proposição 2.5 *Seja* $I=(a,b)$ *um intervalo não vazio de* $\mathbb{R}$*. Se* $f:I\to\mathbb{R}$ *é convexa então f é contínua em I.*

Prova. Dado $x\in I$, tomando-se $\delta>0$ tal que $[x-\delta,x+\delta]\subset I$ e $z_1\in(x-\delta,x)$, segue da proposição 2.4 que para os pontos $x-\delta$, z_1 e x vale a desigualdade

$$\frac{f(z_1)-f(x-\delta)}{z_1-(x-\delta)}\le\frac{f(x)-f(x-\delta)}{x-(x-\delta)}\le\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}. \tag{B.29}$$

Aplicando-se novamente a proposição 2.4 para os pontos z_1, x e $x+\delta$, tem-se que

$$\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}\le\frac{f(x+\delta)-f(z_1)}{(x+\delta)-z_1}\le\frac{f(x+\delta)-f(x)}{(x+\delta)-x}. \tag{B.30}$$

Segue de (B.29) e (B.30) que,

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{x-(x-\delta)}\le\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}\le\frac{f(x+\delta)-f(x)}{(x+\delta)-x}. \tag{B.31}$$

Donde conclui-se que

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta}\le\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}\le\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{B.32}$$

Seja Agora um ponto z_2 no intervalo $(x,x+\delta)$. Aplicando-se novamente a proposição 2.4 aos pontos $x-\delta$, x e z_2, tem-se que

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{x-(x-\delta)} \leq \frac{f(z_2)-f(x-\delta)}{z_2-(x-\delta)} \leq \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}. \quad \text{(B.33)}$$

Aplicando-se ainda a proposição 2.4 para os pontos $x,\ z_2,\ x+\delta$, tem-se que

$$\frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} \leq \frac{f(x+\delta)-f(x)}{(x+\delta)-x} \leq \frac{f(x+\delta)-f(z_2)}{(x+\delta)-z_2}. \quad \text{(B.34)}$$

Segue de (B.33) e (B.34) que,

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{x-(x-\delta)} \leq \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} \leq \frac{f(x+\delta)-f(x)}{(x+\delta)-x}, \quad \text{(B.35)}$$

ou ainda,

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} \leq \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \quad \text{(B.36)}$$

Segue de (B.32) e (B.36) que $\forall z \in [x-\delta, x+\delta]$ vale a desigualdade

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leq \left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \leq \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \quad \text{(B.37)}$$

Seja $L = \dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, segue de (B.37) que

$$|f(z)-f(x)| \leq L|z-x|, \quad \text{(B.38)}$$

ou ainda,

$$-L|z-x| \leq f(z)-f(x) \leq L|z-x|,\ \forall z \in [x-\delta, x+\delta]. \quad \text{(B.39)}$$

Como,

$$\lim_{z\to x}(-L|z-x|) = -L\left|\lim_{z\to x}(z-x)\right| = -L|0| = 0 \quad \text{(B.40)}$$

e

$$\lim_{z\to x}(L|z-x|) = L\left|\lim_{z\to x}(z-x)\right| = L|0| = 0, \quad \text{(B.41)}$$

Segue do teorema do confronto de limites que,

$$\lim_{z\to x}(f(z)-f(x)) = 0 \quad \text{(B.42)}$$

ou seja,

$$\lim_{z \to x} f(z) = f(x), \tag{B.43}$$

o que prova que *f* é continua em *I*.

APÊNDICE C - CONCAVIDADE

Definição 3.1 *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função, p um ponto de seu domínio e T a reta tangente a f em p. Diz-se que f tem concavidade para cima no intervalo aberto I se*

$$f(x) > T(x), \tag{C.1}$$

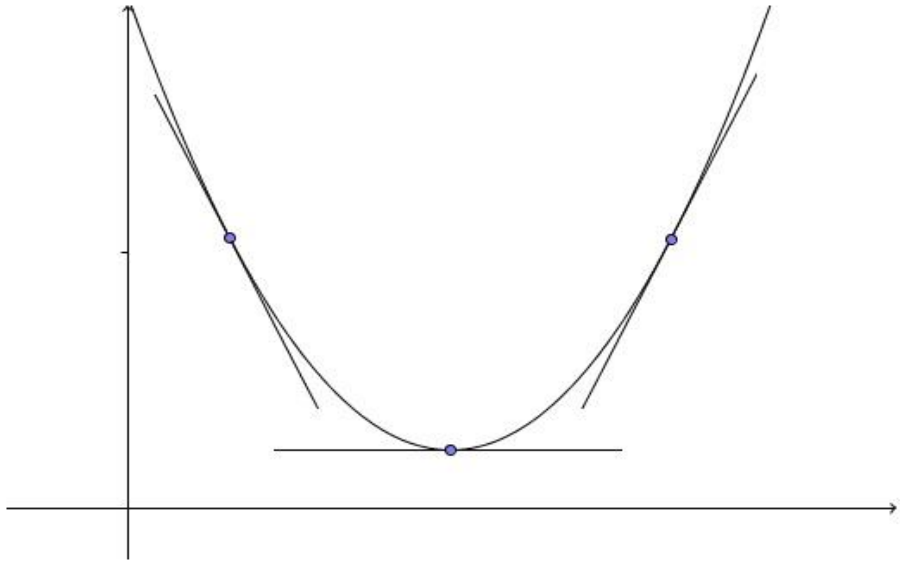
quaisquer que sejam x e p, com $x \neq p$.

Graficamente, essa definição quer dizer que uma função terá concavidade para cima em *I* se o seu gráfico estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo *I*.

Definição 3.2 *Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado de côncavo para cima em I.*

A figura C.1 ilustra uma função que tem concavidade para cima. Esse gráfico é côncavo para cima.

FIGURA C.1 – Função com concavidade para cima.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 3.3 *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função, p um ponto de seu domínio e T a reta tangente a f em p. Diz-se que f tem concavidade para baixo no intervalo aberto I se*

$$f(x) < T(x), \tag{C.2}$$

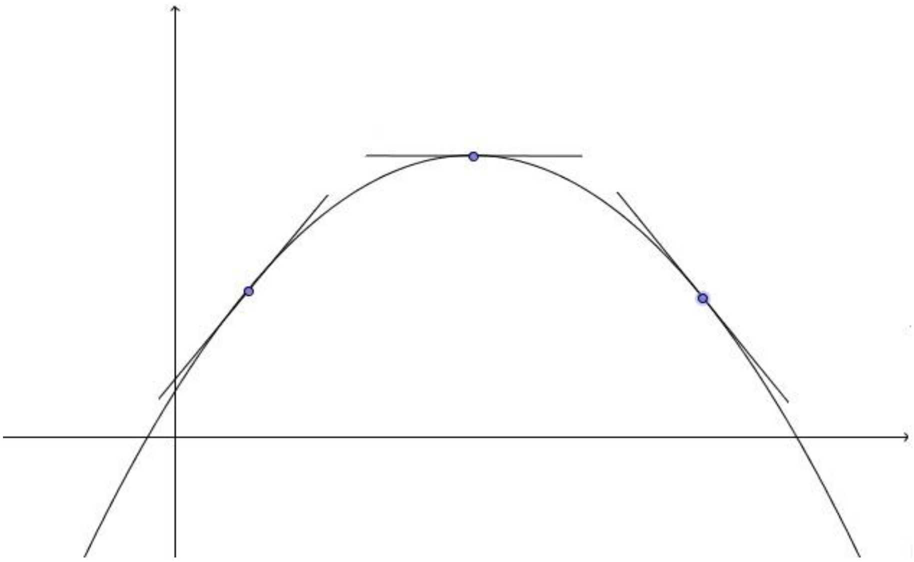
quaisquer que sejam x e p, com $x \neq p$.

Graficamente, essa definição quer dizer que uma função terá concavidade para baixo em *I* se o seu gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo *I*.

Definição 3.4 *Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado de côncavo para baixo em I.*

A Figura C.2 ilustra uma função que tem concavidade para baixo. Esse gráfico é côncavo para baixo.

FIGURA C.2 – Função com concavidade para baixo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 3.5 *Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* $x \in I \cap D(f)$.

Definição 3.6 *Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que* $f(c) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I \cap D(f)$.

Definição 3.7 *Diz-se que f* (c) *é o máximo absoluto da função f, se* $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ *para todos os valores de x no domínio de f.*

Definição 3.8 *Diz-se que f* (c) *é o mínimo absoluto da função f, se* $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ *para todos os valores de x no domínio de f.*

Teorema 3.9 (*Teorema de Rolle*) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado* $[a,b]$ *e derivável no intervalo aberto* (a,b). *Suponha que* $f(a) = f(b) = k$. *Então existe um ponto* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Da continuidade de f sobre $[a,b]$, segue que f atingirá máximo e mínimo nesse intervalo. Agora, se f for constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ e o teorema está demonstrado. Suponhamos então que f não seja constante. Daí, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) > k$ ou $f(x_0) < k$. Se $f(x_0) > k$, a função f atingirá máximo em um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) > k$. Portanto, $f(c+h) \leq f(c)$ para todo h tal que $c + h \in [a,b]$. Suponha $h > 0$. Assim,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \tag{C.3}$$

e daí

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0. \tag{C.4}$$

Analogamente, considerando $h < 0$, obtém-se

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \tag{C.5}$$

e pela unicidade da derivada, conclui-se que $f'(c) = 0$.

O outro caso, em que tem-se $f(x_0) < k$, é demonstrado de maneira análoga. □

Teorema 3.10 (*Teorema do valor médio*) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado* $[a,b]$ *e derivável no intervalo aberto* (*a* ,*b*). *Então existe um ponto* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{C.6}$$

Demonstração. Considere a função $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.(x-a) - f(a), \tag{C.7}$$

que é contínua em $[a,b]$ e derivável em (*a*, *b*), pois é a soma de funções contínuas em [*a*, *b*] e deriváveis em (*a*, *b*). Sendo $g(a) = g(b) = 0,$ segue do *Teorema de Rolle* que existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0.$ Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \tag{C.8}$$

tem-se que $g'(c) = 0$ é equivalente a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \tag{C.9}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Teorema 3.11 *Seja f contínua no intervalo I.*

a) *Se* $f^{'}(x) > 0$ *para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.*

b) *Se* $f^{'}(x) < 0$ *para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração. Dados x_1 e x_2 em *I*, devemos mostrar que se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Como, por hipótese f é contínua e diferenciável em I , então f é contínua em $[x_1, x_2] \subset I$ e diferenciável em $(x_1, x_2) \subset I.$ Segue do *teorema do valor médio* que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{C.10}$$

Agora, de $f'(c) > 0,$ pois *c* está no interior de *I*, e de $x_2 - x_1 > 0$ segue que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \tag{C.11}$$

ou

$$f(x_2) > f(x_1), \tag{C.12}$$

o que mostra que *f* é crescente *I*.

O outro caso, em que tem-se $f'(x) < 0,$ é demonstrado de maneira análoga. □

Teorema 3.12. *Seja* f *uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I.*

a) Se $f''(x) > 0$ *em I, então f terá concavidade para cima em I.*

b) Se $f''(x) < 0$ *em I, então f terá concavidade para baixo em I.*

Demonstração. Seja *p* um real qualquer em *I*. De acordo com a definição 3.1, devemos provar que se $f''(x) > 0$ então $f(x) > T(x),$ para todo *x* em *I*, $x \neq p.$ De outro modo, sendo

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p) \tag{C.13}$$

e considerando-se a função $g(x) = f(x) - T(x),\ x \in I,$ basta provar que $g(x) > 0,$ para todo *x* em *I*, $x \neq p.$ Com efeito, sendo *g* derivável, segue que

$$g'(x) = f'(x) - T'(x) \tag{C.14}$$

e

$$T'(x) = (f(p))' + f'(p)(1-0) = f'(p). \tag{C.15}$$

Daí,

$$g'(x) = f'(x) - f'(p),\ x \in I. \tag{C.16}$$

Como, por hipótese, $f''(x) > 0$ em *I*, segue que $f'(x)$ é estritamente crescente em *I*. Então,

$$g'(x) > 0,\ \text{para } x > p, \tag{C.17}$$

e

$$g'(x) < 0,\ \text{para } x < p. \tag{C.18}$$

Segue que g é estritamente decrescente em $\{x \in I : x < p\}$ e estritamente crescente em $\{x \in I : x > p\}.$ Como $g(p) = 0,$ resulta que

$$g(x) > 0, \qquad \text{(C.19)}$$

para todo x em I, $x \neq p$.

A demonstração do caso $f''(x) < 0$ é feita de modo análogo. □

Teorema 3.13 *As seguintes afirmações sobre a função $f: I \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, são equivalentes:*

(1) *f é convexa.*

(2) *A derivada $f': I \to \mathbb{R}$ é monótona não decrescente.*

(3) *Para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.*

Prova. Provaremos as implicações (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2). Sejam $a < x < b$ em I. Fazendo primeiro $x \to a^+$, e depois $x \to b^-$, vem $f'_+(a) \leq \frac{[f(b)-f(a)]}{b-a} \leq f'_-(b)$. Logo a $<$ b ⇒ $f'(a) \leq f'(b)$.

(2) ⇒ (3). Suponhamos $a < x$ em I. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como f' é monótona não-decrescente, temos $f'(z) \geq f'(a)$. Logo $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Raciocínio análogo no caso $x < a$.

(3) ⇒ (1). Sejam $a < c < b$ em I. Escrevemos $\propto(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ e chamamos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \propto(x)\}$ o semipleno superior determinado pela reta $y = \propto(x)$, tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Evidentemente, H é um subconjunto convexo do plano, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de H está contido em H. A hipótese (3) assegura que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem a H, logo o segmento de reta que une estes pontos está contido em H. Em particular, o ponto desse segmento que tem abscissa c pertence a H, isto é, tem ordenada $\geq \propto(c) = f(c)$. Isto significa que $f(c) \leq f(a) + \frac{[f(b)-f(a)]}{b-a}(c - a)$. Como $a < c < b$ são quaisquer em I, a função f é convexa. □

Corolário 3.14 *Uma função $f: I \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I, é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Prova. Com efeito, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ equivale a afirmar que $f': I \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente. □

APÊNDICE D – O NÚMERO *e*

Teorema 4.1 *Para a variável* $(1+\frac{1}{n})^n$ *definida em* $\mathbb{N}$ *tem-se que:*

(1) $(1+\frac{1}{n})^n$ é crescente em $\mathbb{N}$;

(2) $2 \le (1+\frac{1}{n})^n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(3) Existe $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Demonstração. Segundo a fórmula do binômio de Newton, pode-se escrever:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\left(\frac{1}{n}\right)^2+...+\frac{n(n-1)(n-2)...[\mathrm{n}-(\mathrm{n}-1)]}{1.2...n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad \text{(D.1)}$$

Donde conclui-se que

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{1.2.3}.(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{1.2.3...n}.(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n}). \qquad \text{(D.2)}$$

Segue da última igualdade que a grandeza variável $(1+\frac{1}{n})^n$ é uma variável crescente quando n cresce. Com efeito, quando se passa do valor n ao valor n+1 cada termo desta soma aumenta

$$\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{n}) < \frac{1}{1.2}.(1-\frac{1}{n+1}),\ \text{etc}, \qquad \text{(D.3)}$$

e mais um novo termo aparece. (Todos os termos do desenvolvimento são positivos.)

Mostremos que a grandeza variável $(1+\frac{1}{n})^n$ é limitada. Notando que $(1-\frac{1}{n}) < 1$; $(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n}) < 1$, etc., obtém-se da expressão (D.2) a desigualdade

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...\frac{1}{1.2.3...n}. \qquad \text{(D.4)}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{1.2.3} < \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{2^3};\ ...;\ \frac{1}{1.2...n} < \frac{1}{2^{n-1}}; \qquad \text{(D.5)}$$

o que permite escrever a igualdade (D.4) como

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad \text{(D.6)}$$

Uma vez que os termos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$ constituem uma progressão geométrica de razão $q=\frac{1}{2}$ e de primeiro termo $a_1 = 1$, segue que (D.6) pode ser reescrita como

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3. \qquad \text{(D.7)}$$

Por conseguinte, para todos os *n* temos:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 3. \qquad \text{(D.8)}$$

Resulta da igualdade (D.2) que

$$(1+\frac{1}{n})^n \geq 2. \qquad \text{(D.9)}$$

Assim, deduzimos a dupla desigualdade

$$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n < 3 \qquad \text{(D.10)}$$

e provamos que a variável $(1+\frac{1}{n})^n$ é limitada.

Provemos agora que existe $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. De fato, considerando que $(1+\frac{1}{n})^n$ é crescente e limitada em $\mathbb{N}$, seja L, $2 \leq L < 3$ tal que:

1º) $(1+\frac{1}{n})^n < L$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2º) Se $(1+\frac{1}{n})^n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $k \geq L$.

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $(1+\frac{1}{n_1})^{n_1} > L-\varepsilon$. Tomando $M = n_1$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ e $n > M$

$$L-\varepsilon < (1+\frac{1}{n_1})^{n_1} < (1+\frac{1}{n})^n < L < L+\varepsilon, \qquad \text{(D.11)}$$

isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $n > M \Rightarrow \left|(1+\frac{1}{n})^n - L\right| < \varepsilon.$

Esse teorema permite concluir a existência do limite, porém nada afirma sobre o seu valor L a não ser o fato do mesmo pertencer ao intervalo $2 \leq L < 3$. Uma forma de estimar esse limite é como segue:

Para n =100, $(1+\frac{1}{100})^{100} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \approx 2,70481$

Para n =1.000, $(1+\frac{1}{1.000})^{1000} = \left(\frac{1.001}{1.000}\right)^{1000} \approx 2,71692$

Para n =1.000.000, $(1+\frac{1}{1000})^{1000} = \left(\frac{1.000.001}{1.000.000}\right)^{1.000.000} \approx 2,71828$

Donde percebe-se que $(1+\frac{1}{n})^n$ parece aproximar-se por falta de 2,72.

Definição 4.2 *Chama-se número e o limite da variável* $(1+\frac{1}{n})^n$ *quando* $n \to \infty$.

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n. \tag{D.12}$$

O número e é um número irracional e seu valor aproximado, a menos de $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ é:

$$e = 2,7182818284... \tag{D.13}$$