UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ANDERSON SILVA SENA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA INTEGRADA À FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM AO ENSINO MÉDIO

BELÉM-PA
2014

ANDERSON SILVA SENA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA INTEGRADA À FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM AO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – ICEN como requisito parcial para obtenção do grau de MESTRE no MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT pela Universidade Federa do Pará – UFPA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM – PA
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Sena, Anderson Silva, 1978-
Progressão geométrica integrada à função exponencial: uma abordagem ao ensino médio / Anderson Silva Sena. - 2014.

Orientador: Mauro de Lima Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Séries geométricas. 2. Função exponencial. I. Título.

CDD 22. ed. 515.24

TERMO DE APROVAÇÃO

ANDERSON SILVA SENA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA INTEGRADA À FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM AO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso profissional de Matemática, na Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Belém – PA, 02/ 12 / 2014

Se Deus disse que eu posso, então eu posso! Irei e não temerei mal algum.

(Filipenses 4:13)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, pelo incentivo de estudos e por me proporcionar condições de realização de meus sonhos estando ao meu lado nas horas difíceis pela qual passei. As minhas filhas e minha esposa, motivo de persistência e fortalecimento para poder seguir.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois Nele encontrei forças para superar os obstáculos.

Aos meus pais, Raimundo Nonato e Maria Eunice, que tanto se dedicaram a minha formação educacional e principalmente como cidadão.

A minha bela esposa Juceli, que sempre deu força para que eu alcançasse meus objetivos.

As minhas irmãs Ana, Dejane e Aline e a meu irmão Allan que sempre deram incentivos para meus estudos.

As minhas filhas Karina e Katarine e minha sobrinha Thalia, pois, principalmente por elas, tenho tanta dedicação, para que um dia possa servir de referência no futuro delas.

Ao meu tio Rogério por ter sido quem me incentivou a seguir o caminho da Matemática.

Aos meus professores da UFPA, em especial ao Professor Doutor Mauro de Lima Santos e que como orientador sempre se mostrou pronto e disposto a me ajudar.

Ao professor Doutor e amigo Renato Fabrício que sempre se mostrou disposto a ajudar-me em todos os momentos difíceis do curso.

À maravilhosa turma do PROFMAT-2012 que se tornou uma parte de minha família.

RESUMO

Neste trabalho defendemos que a progressão geométrica e a função exponencial podem ser trabalhadas de forma integrada por possuírem características semelhantes. Ideia defendida não só pelo fato de que o PCNEM prega essa integração e sim pelas semelhanças das questões que ambos os conteúdos abordam nos livros didáticos, mas a comprovação dessa integração só é possível se tivermos domínio dos fundamentos: conceituação, manipulação e aplicação.

Palavras-chaves: progressão, função, integrada, fundamentos

ABSTRACT

In this paper we argue that the geometric progression and the exponential function can be worked seamlessly for having similar characteristics. Idea advocated not only by the fact that the PCNEM preaches this integration but the similarities of the issues we address both content in textbooks, but the proof of this integration is possible only if we have mastery of the fundamentals: concepts, handling and application.

Keywords: Progresion, function, seamlessly, fundamentals

Sumário

INTRODUÇÃO

Sabemos que muitos professores “ensinam” Matemática sem o devido comprometimento com o aluno e deixam a essência da Matemática de lado e apenas reproduzem exercícios e comentários dos livros. É preciso seguir caminhos diferentes e realmente ensinar Matemática, fazer a ciência ter sentido na vida do aluno, não deixá-la se reduzir a cálculos sem sentidos e memorização de intermináveis fórmulas. Não pode ser só isso, temos que relacionar teoria e prática, é o que prega a LDB em seu artigo 35, inciso IV

<u>LDB .Art . 35</u>

> *IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.*

Os livros utilizados possuem a qualidade desejada? Será realmente que apenas repetindo o que os livros didáticos nos oferecem, iremos comprometer o ensino/aprendizagem de nossos alunos?

De acordo com Lima (2001, p. 462), a qualidade do ensino e, consequentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média do livro didático disponível.

Por isso, através de uma pesquisa foi verificado que dentre os oito livros didáticos oferecidos pelas editoras às escolas públicas do Pará, para serem utilizados em 2015, sete adotam situações-problemas semelhantes no estudo de função exponencial e progressão geométrica, mas apenas quatro deles fazem a associação entre os dois conteúdos.

Daí, verificamos que tais assuntos podem ser trabalhados em conjunto, pois possuem relação, desmitificando a ideia de trabalhá-los de maneira separada. Devemos buscar unificar os conteúdos mostrando a relação entre eles e o cotidiano.

Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência,entre as várias ciências e áreas do conhecimento conforme a visão adotada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

• Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. (PCNEM)

Desta forma, é de fundamental importância realizar um trabalho que relacione progressão geométrica e função exponencial e que tenha como aplicação, situações que envolvam outras disciplinas, a chamada interdisciplinaridade.

O processo metodológico a ser utilizado, para justificar a integração entre os conteúdos, será o que é defendido pelo professor e matemático Elon Lages Lima:

“O ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Dosando adequadamente esses três componentes, alcançamos o equilíbrio do processo de aprendizagem”.

Desta forma, Incentivar professores a trabalhar conteúdos, que sejam afins, de maneira integrada, em particular, Função exponencial e Progressão Geométrica, aprimorando o ensino da Matemática e, consequentemente, mostrar através da resolução de problemas que tais conteúdos possuem as mesmas características e, por isso, podem ser trabalhados de maneira integrada.

CAPÍTULO 1

1 UM POUCO DA HISTÓRIA

1.1 A Lenda do Jogo de Xadrez

Figura1.1: Xadrex

Uma das histórias a respeito da origem do jogo de xadrez é contada no livro de Malba Tahan, chamado "Diabruras da Matemática". Diz a lenda que o jogo foi criado para entreter um rei da Índia, de nome Iadava, o jovem Lahur Sessa, apresentou o jogo ao rei e este ficou maravilhado, querendo recompensar o inventor do jogo de xadrez, Ladava perguntou qual presente ele gostaria de receber: joias, terras, um palácio... O pedido do jovem inventor deixou o rei perplexo, Lahur disse que como recompensa, queria receber uma quantidade de trigo da seguinte forma:

1 grão de trigo pela 1ª casa;
2 grãos de trigo pela 2ª casa;
4 grãos de trigo pela 3ªcasa;
8 grãos de trigo pela 4ª casa, ...

A quantidade de grãos deveria ser dobrada a cada casa subsequente, e como sabemos, o jogo de xadrez tem 64 casas. O rei achou o pedido muito insignificante e pediu que fosse calculada a quantidade de grãos para atender o desejo do inventor do jogo de xadrez do jeito que este havia proposto.

Esse é um problema que envolve a soma dos termos de uma progressão geométrica, vejamos:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,.....

Para calcular a soma dos 64 primeiros termos dessa P.G , utilizamos a fórmula:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} \ ,$$

sendo a_1 o primeiro termo; q a razão da P.G. e n o número de termos, substituindo os valores, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2-1} \\ &= 2^{64} - 1 \\ &= 18446744073709551615. \end{aligned}$$

Os calculistas reais chegaram à conclusão que para atender ao pedido, seria necessário semear o planeta Terra todo e a dívida só seria quitada ao fim de 450 séculos!

Um número astronômico**:** 18 quintilhões, 446quatrilhões, 744 trilhões, 73 bilhões, 709 milhões, 551 mil, 615.

O astuto inventor deixou o rei em apuros, como pagar a dívida? O rei ficaria na mais absoluta miséria!

Muita gente conhece essa história, no entanto, poucos sabem que o rei conseguiu sair dessa enrascada, com a ajuda de um matemático, chamado Lavaxamã, o Homem da Face Fria, ele propôs ao jovem inventor uma recompensa melhor que ele havia pedido, ele dobraria a quantidade de grãos por cada casa e consideraria também o número de casas infinito, não somente as 64 do tabuleiro e por fim ainda acrescentaria mais um grão de trigo. O jovem meditou por alguns instantes e resolveu aceitar a proposta do rei, que afinal parecia muito mais vantajosa.

Sendo assim, Lavaxamã começou a expor a proposta de como calcular a quantidade de grãos de trigo:

" S " é a soma de todos os **infinitos** termos da progressão e que deverão ser pagos

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \ldots$$

dobrando a quantidade de grãos em cada casa, a soma "S" também dobra

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \ldots$$

por fim, ainda seria adicionado mais um grão de trigo a soma infinita de termos

$$2S+1=1+2+4+8+16+32+64+128+256+\dots,$$

note que a segunda parte da expressão é exatamente a soma inicial, ou seja, igual a **S**, Lavaxamã então propôs que se trocasse a parte numérica da expressão por S, e assim foi aceito pelo inventor.

$$2S+1=S\ ,$$

resolvendo a equação, temos:

$$2S-S=-1,$$

$$S=-1\ .$$

No final, o rei de devedor passou a ser credor do jovem inventor, graças a um "sofisma algébrico".

Adaptado do livro "Diabruras da Matemática" de Malba Tahan

1.2 Os Elementos de Euclides

Outra civilização que cooperou em larga escala com o desenvolvimento da Matemática foi a grega. Provavelmente devemos aos gregos o fato da Matemática ter sido considerada como Ciência pela primeira vez. Porém, não podemos nos esquecer de que os gregos obtiveram contribuições dos babilônios e dos egípcios, pois estes já haviam estudado Astronomia anteriormente, sendo cabível aos gregos o desenvolvimento de teorias a respeito dos movimentos planetários. Os gregos deram início às demonstrações e às deduções com a contribuição de diversos pensadores como Pitágoras, Arquimedes, Euclides, entre outros (CONTADOR, 2008).

O grego Euclides de Alexandria (aproximadamente final do século III a. C.) trouxe grandes contribuições para a Matemática, produzindo a obra Os Elementos que se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros. O livro VIII trata das proporções contínuas e enunciados equivalentes ao somatório de uma progressão geométrica. Na proposição 22 (figura) temos:

Caso três números estejam em proporção continuada, e o primeiro seja um quadrado o terceiro também será um quadrado.

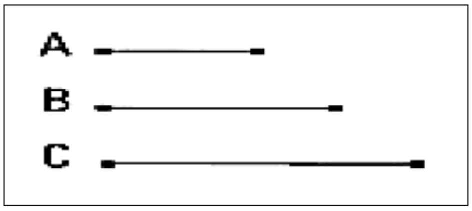
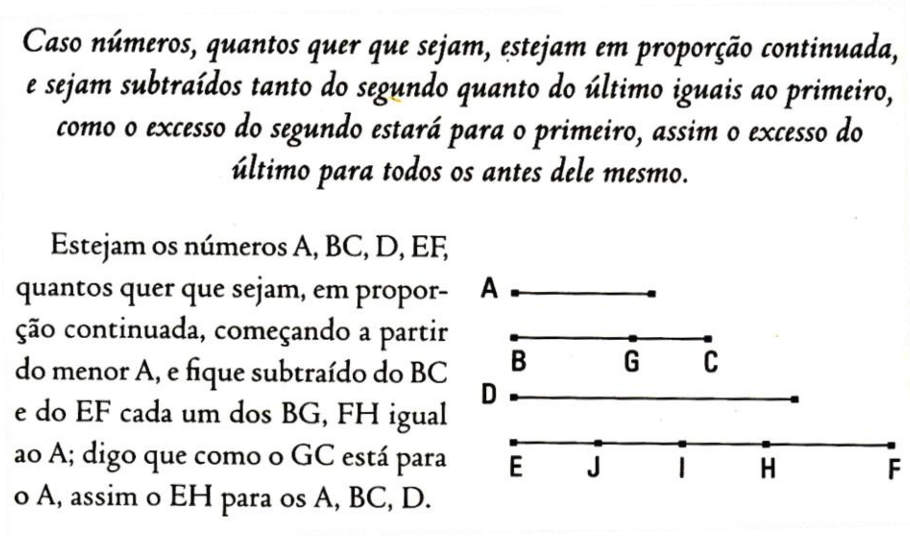


Figura 1.2: Proposição 22, Livro Os Elementos de Euclides

Nesta proposição que consideramos apenas as proporções contínuas com uma relação constante, as proporções da forma: se a : b = b: c = c : d, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.



Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como o excesso do segundo estará para o primeiro, assim o excesso do último para todos os antes dele mesmo.

Estejam os números A, BC, D, EF, quantos quer que sejam, em proporção continuada, começando a partir do menor A, e fique subtraído do BC e do EF cada um dos BG, FH igual ao A; digo que como o GC está para o A, assim o EH para os A, BC, D.

Figura 1.2: Proposição 35, livro Os Elementos de Euclides Garbi (2009)

Na proposição 35 do livro IX (figura 2.3), Euclides mostra como somar geometricamente os *n* termos de uma P.G. traduz esse raciocínio por meio da nossa atual simbologia matemática da seguinte maneira: se os números a_1, a_2, a_3, ..., a_n se anulam. Logo:

$$\frac{S_n}{\left(a_{n+1}-a_1\right)}=\frac{a_1}{(a_2-a_1)}$$

Ou

$$S_n=\frac{a_1\left(a_{n+1}-a_1\right)}{a_2-a_1}\ .$$

1.3 O Papiro de Rhind

Por volta de 1650 a. C. um escriba egípcio fez uma cópia de um antigo papiro, o qual foi chamado de papiro Rhind (ou Ahmes) o mesmo contem uma lista de 85 problemas escritos pelo escriba Ahmes em uma linguagem hierática. Tal papiro foi adquirido no Egito pelo escocês A. Henry Rhind, e ao ser comprado pelo Museu Britânico, ele estava menor, com cerca de dezoito pés de comprimento e treze polegadas de altura, tinha apenas duas partes faltando a sua porção central. Esse papiro foi publicado em 1927, sendo comprado quatro anos depois pelo o egiptólogo americano Edwin Smith, que comprou no Egito pensando que ser um papiro médico.

Após verificar que não se tratava de um papiro medico, Smith doou o papiro à Sociedade Histórica de Nova York em 1932, que por sua vez, doou o rolo do pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes. O papiro Rhind é uma comprovação que os egípcios antigos, na utilização da matemática, faziam uso da soma de termos de uma progressão aritmética. O problema que segue envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind: Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.

Carvalho e Costa (1997) sugerem que muitos dos problemas envolvendo no papiro de Rhind, contem cálculos que servem para exercitar jovens estudantes. No entanto, alguns desses problemas são enigmáticos, exigindo de quem os revolve, muita concentração e raciocínio. O problema 79, por exemplo, cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares". Neste caso, imagina que o escriba tratava de um problema bastante conhecido, onde ele diz haver sete casas e em cada casa sete gatos, os quais cada um deles comeram sete ratos e que cada rato havia comido sete espigas e cada uma delas havia produzido sete medidas de grão. Evidentemente o problema não pedia uma resposta prática, a qual seria determinar a quantidade de grãos poupados, porém a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

Carvalho e Costa (1997) apontam que no Papiro de Rhind foi encontrada uma sequência bastante interessante na forma de progressão geométrica, formada pelas frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Essa sequência ficou conhecida como frações dos olhos do deus Hórus.

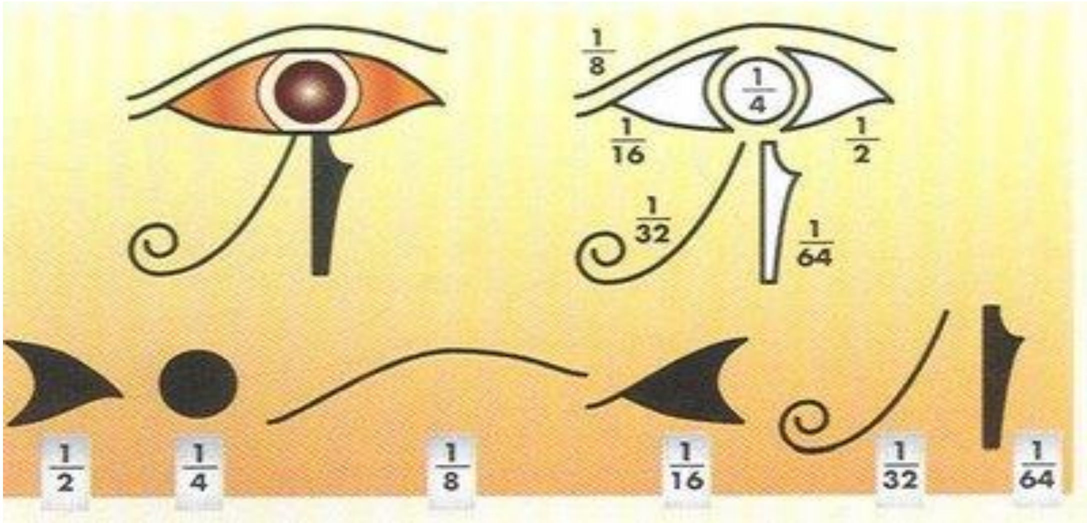


Figura 1.3: Sequência apresentada no Papiro de Rhind

Os egípcios trabalhavam com a soma de progressões geométricas com seis elementos, fazendo uso da multiplicação por um fator comum:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64},$$

multiplicando todos os elementos pelo ultimo denominador “64” Os egípcios encontrariam:

$$64\cdot S=64.\cdot\frac{1}{2}+64\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{8}+64\cdot\frac{1}{16}+64\cdot\frac{1}{32}+64\cdot\frac{1}{64}$$
$$64\cdot S=32+16+8+4+2+1$$
$$64\cdot S=63$$
$$S=\frac{63}{64}$$

PERGUNTA: Esse é um problema de progressão geométrica ou função exponencial?

* Vamos resolver por progressão geométrica:

P.G $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}\right)$

Razão: $q = \frac{1}{2}$

Número de termos: $n = 6$

Soma dos termos: $S_n = \frac{a_1\left(q^n-1\right)}{\left(q-1\right)}$

$$S_6 = \frac{\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$= \frac{63}{64}$$

Agora resolvendo por função exponencial:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

Vamos calcular o valor numérico de: $\sum_1^6 f(x)$, para $x \in \mathbb{N}$

$$\sum_1^6 f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$
$$= \frac{63}{64}.$$

Daí, concluímos que o problema pode ser de progressão geométrica ou função exponencial, mas é fato que devemos ter certas habilidades matemáticas para podermos manusear o problema, por isso que a parte abstrata da matemática como resolva, calcule, simplifique, etc, possuem seu grau de importância no momento da aplicação.

CAPÍTULO 2

CONCEITUAÇÃO

A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimentos de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações. (SBM, Revista do professor de Matemática, 41, 1999, Lima)

2.1. Função Exponencial

2.1.1 Ideias Iniciais

As bactérias são seres vivos que possuem a capacidade de se duplicar. Nas colônias de bactérias, quando o número de componentes dobra, a nova colônia mantém as mesmas características da anterior, duplicando em número no mesmo período de tempo que o anterior.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, dobra seu número a cada 10 minutos, quantas bactérias existirão após 1 hora e 20 minutos?

Após um período de 10 minutos, teremos 2 (2^1) bactérias. Após dois períodos de 10 minutos, ou seja, 20 minutos, teremos 4 (2^2) bactérias. Após 1 hora e 20 minutos, ou seja, 8 períodos de 10 minutos, teremos 256 (2^8) bactérias.

Da mesma forma, após x períodos de 10 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função com variável no expoente.

Definição 2.1.2 Uma função f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ chama-se função exponencial quando existe um número real α , com α> 0 e $\alpha \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $\chi \in \mathbb{R}$

Quando $a > 1$, f é crescente. Quando $0 < a < 1$, f é decrescente.

Exemplos:

1) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, f é decrescente
2) $g(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, g é crescente
3) $h(x) = (0{,}4)^x$, h é decrescente

2.1.3 *Propriedades*

1ª) Na função exponencial $y = a^x$ temos:

Se $x = 0$ então $y = a^x = 1$, isto é o par ordenado (0,1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo o a ($a > 0 \; e \; a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico de qualquer função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) Se $a > 1$ então a função é crescente

$$se \quad x < y \quad então \quad a^x < a^y \quad observa \quad que \quad os \quad sinais \quad são \quad iguais.$$

3ª) Se $0 < a < 1$ então a função é decrescente

$$se \quad x < y \quad então \quad a^x > a^y \quad observa \quad que \quad os \quad sinais \quad são \quad opostos.$$

2.1.4 Gráfico da Função Exponencial

1º caso: A base é um número real maior que 1: $a > 1$. FUNÇÃO CESCENTE

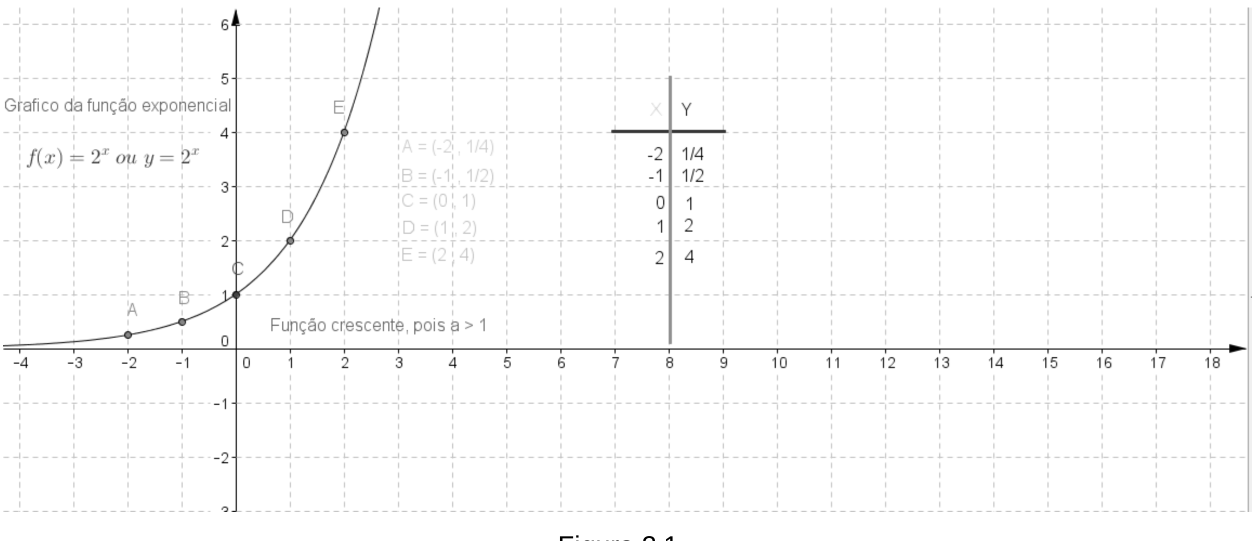


Figura 2.1

2º caso: A base é um número real maior que 0 e menor que 1: $0 < a < 1$. FUNÇÃO DECRESCENTE

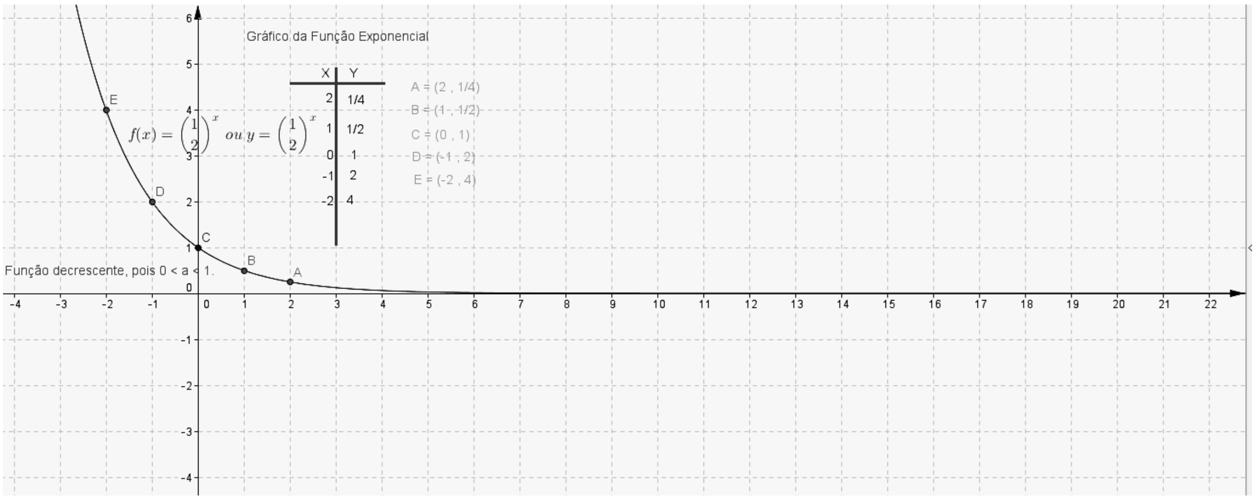


Figura 2.2

Características da função exponencial

- ✓ A curva da função $f(x) = a^x$ passa pelo ponto (0 , 1);
- ✓ O seu domínio é o conjunto dos reais D = R;
- ✓ O seu conjunto imagem é Im = R_+^*;
- ✓ A função é crescente para a base a maior que 1 ($a > 1$);
- ✓ A função é decrescente para a base a maior que 0 e menor que 1 ($0 < a < 1$).

2.2 Progressão Geométrica

2.2.1 Ideias Iniciais

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população brasileira no ano de 2004 era de, aproximadamente, 180 milhões de pessoas. Considerando um crescimento populacional de 2% ao ano, qual foi a estimativa da população, feita naquele ano, para 2008?

Para calcular esse valor, partimos do número de brasileiros em 2004.

Tabela 1

Ano	Número de habitantes
2004	**180.000.000**
2005	**180.000.000 · 1,02 = 183.600.000**
2006	**183.600.000 · 1,02 = 187.272.000**
2007	**187.272.000 · 1,02 = 191.017.440**
2008	**191.017.440 · 1,02 = 194.837.788**

Observe que, com exceção de 2004, a estimativa do número de brasileiros de um ano, foi obtida multiplicando-se o número de brasileiros no ano anterior pela constante 1,02. Em 2004, estimava-se que o país teria 194.837.788 brasileiros em 2008

A sequência (180.000.000; 183.600.000; 187.272.000; 191.017.440; 194.837.788) é um exemplo de progressão geométrica.

Definição 2.2.2 É toda sequência em que cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado por uma constante chamada **razão**.

- Uma PG é **constante** quando $q = 1$ ou quando $a_1 = 0$ e qé um valor constante
- Uma PG é **estacionária** quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$
- Uma PG é **oscilante** quando $a_1 \neq 0$ e $q < 0$
- Uma PG é **crescente** quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$
- Uma PG é **decrescente** quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$

$$a_2 = a_1 . q$$

$$a_3 = a_2 . q$$

$$a_4 = a_3 . q$$

$$a_n = a_{n-1} . q$$

Representação: Os termos da P.G. podem ser representados da seguinte maneira:

$$(a_1, a_{2,} a_{3\,,} a_{4,} \dots \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

$a_1 \rightarrow$ 1º termo

$a_n \rightarrow$ n - ésimo termo ou termo geral

n $\rightarrow$ número de termos

q $\rightarrow$ razão

Cálculo da razão: Calcula-se a razão de uma P.G, tomando qualquer termo, a partir do 2º, e dividindo-se pelo anterior.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots$$

2.2.3 Fórmula do termo geral

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 \cdot q \\
&a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \\
&a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
&a_n = a_1 \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ vezes}} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Observe que essa fórmula é a lei de formação de função, e que n é o número de termos de uma PG até o termo a_n.

Quando em uma PG, o primeiro termo é representado por a_0, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 . q^n$

2.2.4 Fórmula da soma dos termos de uma P.G finita: (S_n)

Dada a P.G. $(a_1, a_{2,} a_{3\,,} a_{4,} \dots \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão $q \neq 0 \; e \; q \neq 1$ e a soma S_n de seus n termos pode ser expressa por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \,, \qquad (1)$$

Multiplicando (1) por q, vem

$$q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n) \cdot q \ , \tag{2}$$

encontrando a diferença entre a (2) e (1), temos

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_n \cdot q - a_1 \ , \tag{3}$$

assim temos

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} \ , \tag{4}$$

obtendo então

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} \ . \tag{5}$$

2.2.5 Fórmula da soma dos termos de uma P.G infinita: (S)

Dada a P.G. infinita: (a_1, a_2, a_3, a_4, ...), de razão q e S sua soma, devemos analisar 3 casos para calcularmos a soma S.

(i) **Se$a_1 = 0$**$\Rightarrow S = 0$, pois $S = 0.0.0.0.0.0.0\ldots.0.0.0 = 0$ (todos os termos seriam zero)

(ii) **Se q** <-1 **ou q** > 1, isto é $|q| > 1$ e $a_1 \neq 0$, S tende a $-\infty\ ou + \infty$. Neste caso é impossível calcular a soma S dos termos da P.G.

(iii) **Se –1<q< 1**, isto é, $|q| < 1$ e $a_1 \neq 0$, S converge para um valor finito. Assim a partir da Fórmula da soma dos **n** termos de uma P.G, vem:
Quando n tende a $+\infty$, q^n tende a zero, logo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1\,(0-1)}{q-1} \Longrightarrow S = \frac{-a_1}{q-1} \quad ou \quad S = \frac{a_1}{1-q}$$

2.3 Comparando as definições

Uma função f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*_+$ chama-se **função exponencial** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada **razão da PG.** Conforme termo geral: $a_n = a_0 . q^n$, com $n \in \mathbb{N}$. (com o primeiro termo sendo a_0)

As funções exponenciais do tipo $f(x) = b. \cdot a^x$ assemelham-se a uma progressão geométrica. Note que:

$f(x) = b. a^x$ e $a_n = a_0 . q^n$, *onde*

$$f(x) = a_n$$

$$b = a_0$$

$$a = q$$

$$x = n$$

Entretanto, deve-se atentar para o domínio das relações com que trabalhamos. Na função exponencial, o termo geral vale para todo $x \in \mathbb{R}$

Na progressão geométrica, o termo geral vale para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que estamos considerando uma PG cujo primeiro termo é a_0.

Ou seja, quando o problema apresentado envolver o domínio $\mathbb{N}$, pode-se utilizar qualquer uma das relações. Quando a situação envolver o domínio $\mathbb{R}$, não se pode utilizar a progressão geométrica.

2.4 Comparando os gráficos

O valor de um automóvel daqui a t anos é dados pela lei $V = 20.000 \cdot (0{,}9)^t$ (em dólares). Calcule o valor desse automóvel daqui a 4 anos.

Resolução:

Aplicando-se o valor dado $t = 4$ na fórmula, obtemos:

$$V = 20.000 \cdot (0{,}9)^4$$

$$V = 20.000 \cdot 0{,}6561$$

$$V = 13.122$$

Montando-se o gráfico dessa função:

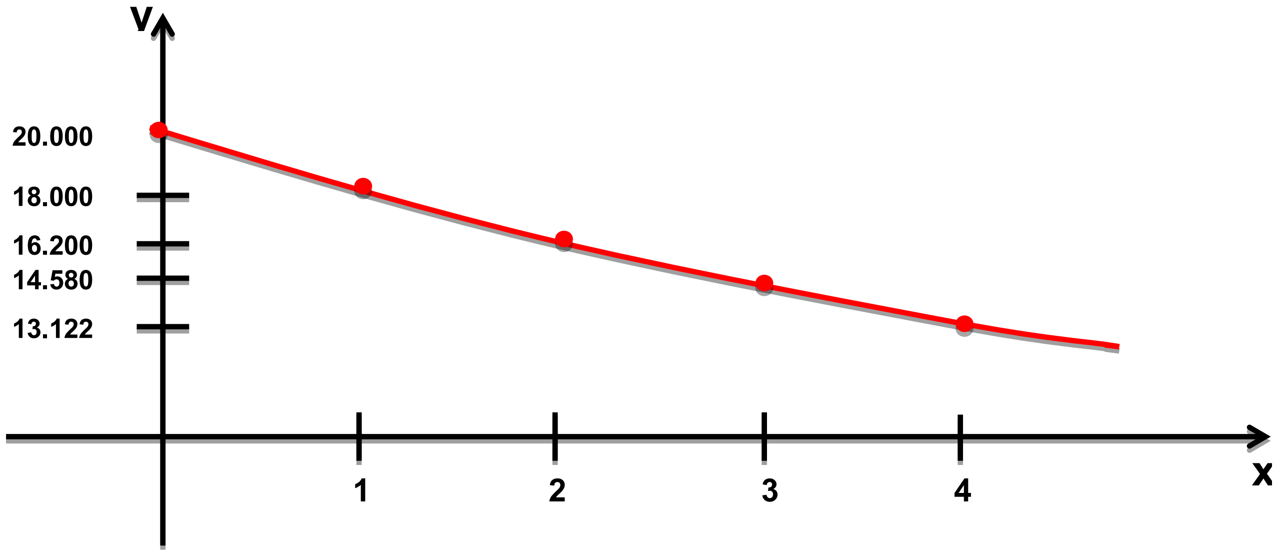


Figura 2.3 – Função Exponencial

Agora, digamos que o valor inicial do automóvel fosse 30.000 dólares. Entretanto, vamos analisar a situação usando um método diferente, a progressão geométrica.

Tabela 2

Tempo (anos)	0	1	2	3
Valor (US$)	**30.000**	**27.000**	**24300**	**21870**

O valor do automóvel, em função do tempo em anos após sua compra, forma uma PG decrescente (30.000, 27.000, 24.300, 21870, ...), em que $a_0 = 30.000$ e $q = 0,9$

.

Como o termo geral de uma PG é $a_n = a_0 \cdot q^n$,com *n* ∈ℕ, na PG temos:

$$a_4 = 30.000 \cdot (0,9)^4$$
$$a_4 = 19.683.$$

Considerando a fórmula $a_n = a_0 \cdot q^n$ de uma PG cujo primeiro termo é a_0 e cuja razão é q, percebemos que uma PG se assemelha a uma função exponencial $f(x) = a_0.q^x$, com $q \neq 1$, só que com uma restrição do domínio ao conjunto dos números naturais.

Dessa maneira, podemos construir o gráfico de uma PG.

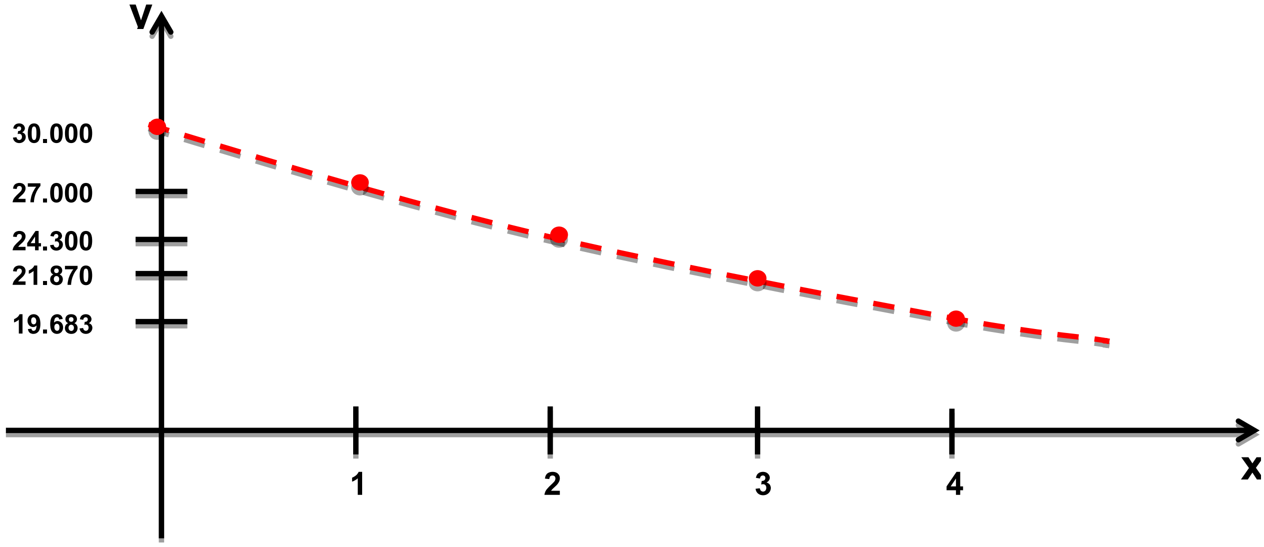


Figura 2.4 – Progressão Geométrica

Comparando os gráficos feitos, fica evidente que ambos podem ser obtidos tanto pela função exponencial quanto pela progressão geométrica.

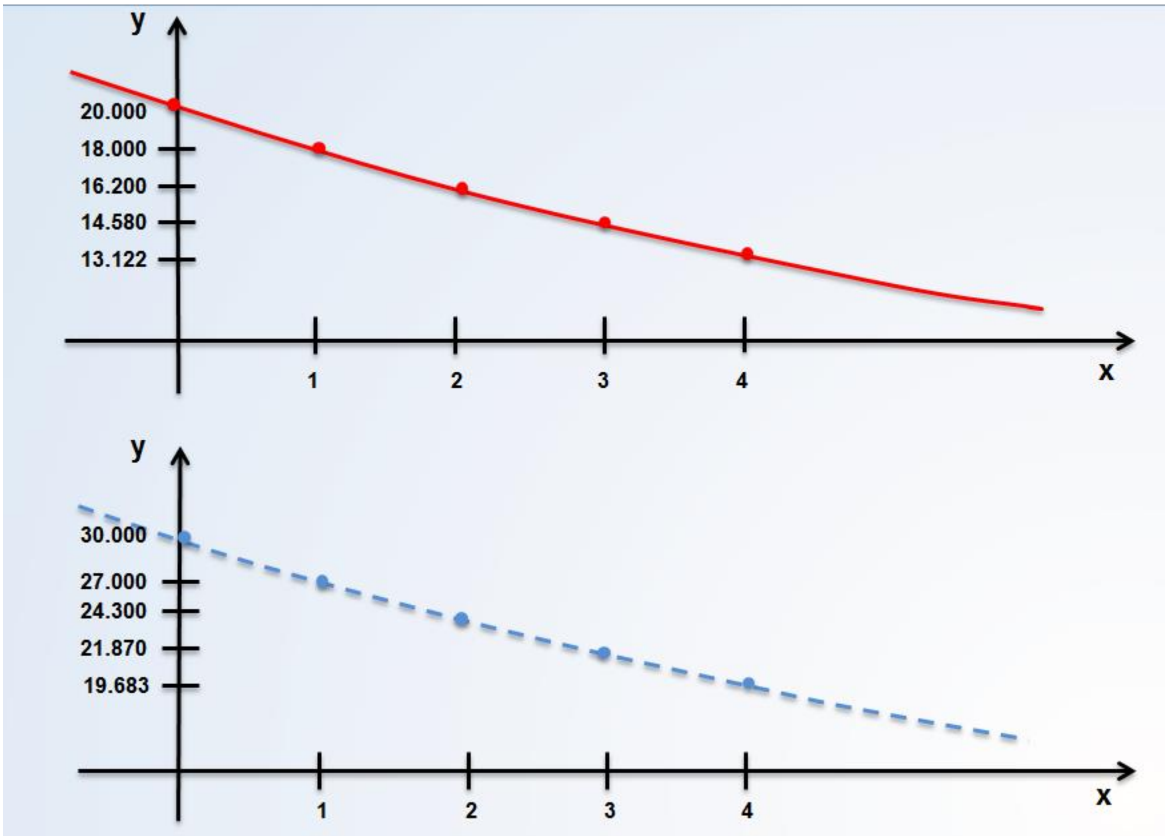


Figura 2.5 – comparação da P.G. e Função Exponencial

Observe que o matemático Elon Lages Lima relaciona a função exponencial e a progressão geométrica:

Uma progressão geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial, $f(x) = b \cdot a^x$, se consideram apenas valores $f(n) = b \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Por isso é que os problemas em que se aplicam funções exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam progressões geométricas. (Lima, 2001, p.24).

Mas o problema que ele observa é que:

Não é feita conexão entre P.G. e função exponencial nem são oferecidos problemas não artificiais que exibam situações de fato onde se poderia usar PGs ou funções exponenciais. (Lima, 2001, p.464).

Para exibir problemas que possam ser resolvidos pela progressão geométrica e função exponencial precisamos ter certas habilidades matemáticas, por isso falaremos um pouco do fundamento MANIPULAÇÃO.

CAPÍTULO 3

MANIPULAÇÃO

A manipulação, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados "fundamentos" está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e a destreza no manuseio das equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e energia com detalhes secundários. *(SBM, Revista do professor de Matemática, 41, 1999, Lima)*

- **MANIPULAÇÃO 1:**

(UFPR-PR-14) Uma pizza a 185°C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65°C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão $T = 160 \times 2^{-0,8 \times t} + 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa pizza com as mãos nuas, sem se queimar?

SOLUÇÃO:

$$T = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t} + 25$$
$$65 = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t} + 25$$
$$40 = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t}$$
$$2^{-0,8t} = 1/4$$
$$2^{-0,8t} = 2^{-2}$$
$$-0,8 \cdot t = -2$$
$$t = 2,5 \ minutos.$$

Comentário: Note que apesar de a questão ter um contexto, a resolução exige uma manipulação da expressão em relação às operações básicas da Matemática para poder determinar o valor da incógnita.

- **MANIPULAÇÃO 2:**

(UFRN - 2013) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.

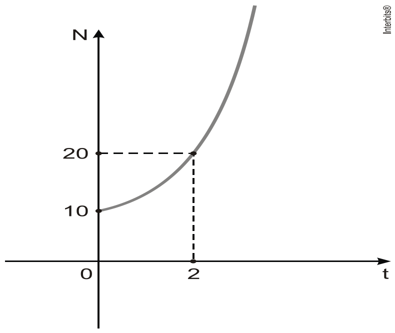


Figura 3.1

Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k.2^{at}$ com t em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com t = 4 horas e t = 8 horas.

Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, qual deve ser o aumento obtido, pelo orientador, na quantidade de micro-organismos?

SOLUÇÃO

Do gráfico temos

$$(0,10) \Leftrightarrow 10 = k \cdot 2^{a \cdot 0} \Leftrightarrow k = 10$$

e

$$\begin{aligned}(2, 20) &\Leftrightarrow 20 = 10 \cdot 2^{a \cdot 2} \\ &\Leftrightarrow 2 = 2^{2a} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $N(t) = 10.(2)^{\frac{t}{2}}$ e, portanto, se o modelo estiver correto, o aumento na quantidade de micro-organismos entre $t = 4\ e\ t = 8$ horas deve ter sido de $N(8) - N(4) = 160 - 40 = 120.000.$

Comentário: Observe que para iniciar a manipulação das operações tínhamos que ter domínio dos conceitos básicos de análise de gráficos e operações com pares ordenados, só então, encontraríamos a resposta da questão.

- **MANIPULAÇÃO 3:**

(Fgv 2013) Um capital A de R$ 10.000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 20% ao ano; simultaneamente, outro capital B, de R$ 5.000,00 também é aplicado a juros compostos, à taxa de 68% ao ano.
Utilize a tabela abaixo para resolver.

Tabela 3

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log*x*	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,96

Depois de quanto tempo os montantes se igualam?

SOLUÇÃO

Temos $M_A = 10000 \cdot (1,2)^t$ e $M_B = 5000 \cdot (1,68)^t$. Logo,

$$\begin{aligned} 10000 \cdot (1,2)^t = 5000 \cdot (1,68)^t &\Leftrightarrow \left(\frac{1,68}{1,2}\right)^t = 2 \\ &\Leftrightarrow \log(1,4)^t = \log 2 \\ &\Leftrightarrow t \cdot (\log 2 + \log 7 - \log 10) = \log 2 \\ &\Rightarrow t \cdot (0,3 + 0,85 - 1) \cong 0,3 \\ &\Leftrightarrow t \cong \frac{0,30}{0,15} \\ &\Leftrightarrow t \cong 2. \end{aligned}$$

Portanto, os montantes se igualarão, aproximadamente, após 2 anos (ou 24 meses).

Comentário: Nesta questão teríamos que saber que os montantes representavam funções exponenciais e que para determinar o resultado o domínio sobre as operações e propriedades eram indispensáveis.

- **MANIPULAÇÃO 4:**

(UFF 2010) O gráfico da função exponencial *f*, definida por $f(x) = k.a^x$, foi construído utilizando-se o programa de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (http://www.geogebra.org), conforme mostra a figura a seguir:

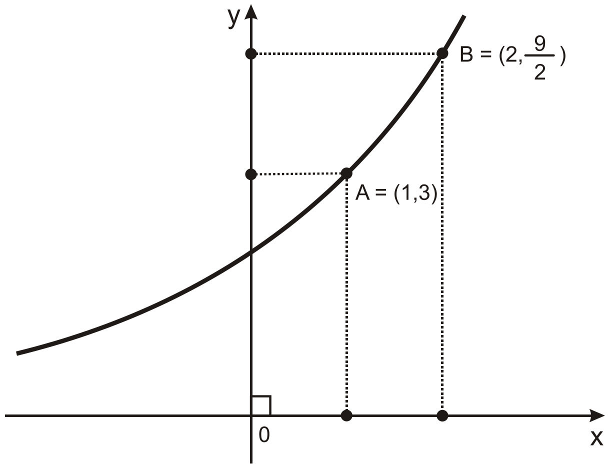


Figura 3.2

Sabe-se que os pontos A e B, indicados na figura, pertencem ao gráfico de *f*. Determine:

a) os valores das constantes *a* e *k*;

b) *f* (0) e *f* (3).

SOLUÇÃO

a) $\begin{cases} 3 = a.k^1 (I) \\ \frac{9}{2} = k.a^2 (II) \end{cases}$ dividindo (II) por (I) temos: $a = \frac{3}{2}$ $e\ 3 = k.\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = 2$

b) $f(x) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$f(0) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2$

$f(3) = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}$

Comentário: Questão que entra no grupo: calcule, encontre o valor,..., mas é uma questão importante para a metodologia defendida no trabalho para que a manipulação das operações seja eficiente no momento das aplicações.

- **MANIPULAÇÃO 5:**

(Ufsm 2014) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número de mudas $N(t) = b \cdot a^t$ $(o < a \neq 1 \text{ e } b > 0)$ a serem plantadas no tempo t (em anos), numa determinada região.

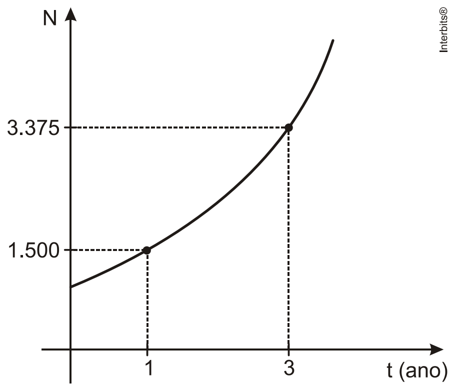


Figura 3.3

De acordo com os dados, calcule o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2\ anos.$

SOLUÇÃO

Considerando os pontos $(1,1500)$ e $(3,3375)$ do gráfico temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1500 = b \cdot a^1 \quad (\ I\ ) \\ 3375 = b \cdot a^3 \ (\ II\ ) \end{cases}$$

Fazendo (II) dividido por (I), temos:

$$a^2 = 2,25 \Rightarrow a = 1,5 \ e \ b = 1000$$

Logo, $N(t) = 1000 \cdot (1,5)^t \Rightarrow N(2) = 1000 \cdot (1,5)^2 = 2250.$

Comentário: Observe que o manuseio da resolução da questão possui a metodologia defendida em nosso trabalho, pois é dada uma função exponencial e temos a sequência (a^1, a^2, a^3) que formam uma P.G. de razão a, daí, usando as habilidades matemáticas conseguimos determinar o valor pedido. (P.G: 1500, 2250, 3375)

- **MANIPULAÇÃO6:**

(Espm 2014)A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $\overline{BC} = \overline{CD}, \overline{DE} = \overline{EF}, \overline{FG} = \overline{GH}, \overline{HI} = \overline{IJ}$ e assim por diante.

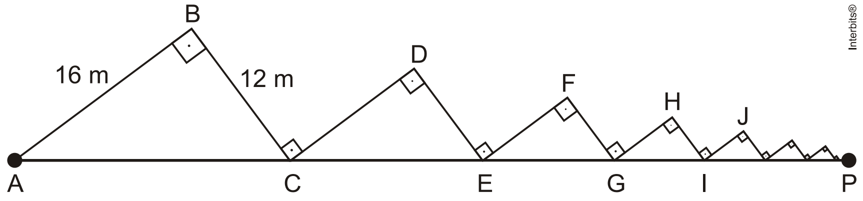


Figura 3.4

Considerando infinita a quantidade desses segmentos, a distância horizontal calcule a distância AP alcançada por esse móvel.

SOLUÇÃO

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ABC, encontramos facilmente $\overline{AC} = 20$ m.

Os triângulos $ABC, CDE, EFG, \ldots$ são semelhantes por AA. Logo, como a razão de semelhança é igual a $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, segue-se que $\overline{AC} = 20$ m, $\overline{CE} = 15$ m, $\overline{EG} = \frac{45}{4}$ m, $\ldots$ constituem uma progressão geométrica cujo limite da soma dos n primeiros termos é dado por $\frac{20}{1 - \frac{3}{4}} = 80\,m$

Comentário: Note que o estilo desta questão é abordado na maioria dos livros didáticos quando é trabalhada a noção de P.G. cujo objetivo é a soma limite dos termos, porém a resolução exige conhecimentos básicos de semelhança de triângulos e a FÓRMULA da soma limite é o elemento que o aluno define como necessário e suficiente para determinar a soma pedida.

- **MANIPULAÇÃO 7:**

(UERJ) A inflação anual de um país decresceu no período de sete anos. Esse fenômeno pode ser representado por uma função exponencial do tipo $f(x) = b.a^x$, conforme o gráfico abaixo.

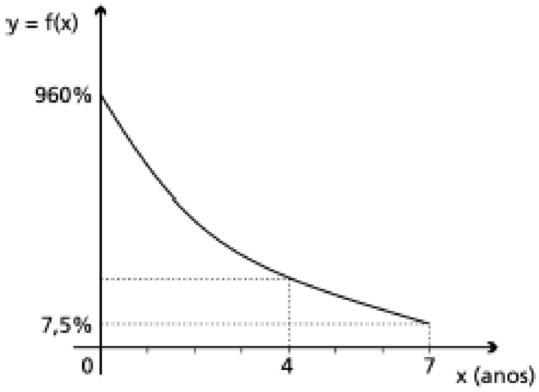


Figura 3.5

Determine a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio.

SOLUÇÃO

com base no gráfico temos: $f(0) = 960\%$; $f(7) = 7{,}5\%$; $f(4) = ?$

$$7{,}5\% = 960\% . a^7$$

$$\frac{7{,}5\%}{960\%} = a^7$$

$$\frac{1}{128} = a^7$$

$$\frac{1}{2^7} = a^7$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Daí temos

$$f(x) = 960\% . \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

logo

$$f(4) = 960\% . \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 960\% . \frac{1}{16} = 60\%.$$

Comentário: Apesar de ser uma questão em que o objetivo é analisar o manuseio das operações básicas da Matemática, ela se encaixa na integração defendida em nosso trabalho, pois poderíamos considerar a P.G. sendo: $a_0 = 960\%$, $a_7 = 7{,}5\%$; $a_4 = ?$, mas de uma forma ou outra, não poderíamos deixar de ter o domínio dos cálculos para determinar o valor pedido, pois este continua sendo uma das dificuldades de nossos alunos. Veja um dos comentários postados na internet por uma pessoa sobre a questão proposta para colaborar com o que nosso trabalho defende a respeito da manipulação.

FUNÇÃO EXPONENCIAL ME AJUDEM!?
“A inflação anual de um país decresceu no período de sete anos. Esse fenômeno pode ser representado por uma função exponencial do tipo f(x) = a.b (b elevado a x), conforme o gráfico a seguir”:
http://www.diadematematica.com/vestibular/TEMP/EXPON/E5976.BMP
Atualização:*“Determine a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio, preciso dos cálculos a resposta final é 60%”.*

- **MANIPULAÇÃO 8:**

(Uema 2014) Numa plantação tomada por uma praga de gafanhotos, foi constatada a existência de 885.735 gafanhotos. Para dizimar esta praga, foi utilizado um produto químico em uma técnica, cujo resultado foi de 5 gafanhotos infectados, que morreram logo no 1º dia. Ao morrerem, já haviam infectado outros gafanhotos. Dessa forma, no 1º dia, morreram 5 gafanhotos; no 2º dia, morreram mais 10; no 3º dia, mais 30 e assim sucessivamente.
Verificando o número de mortes acumulado, determine em quantos dias a praga de gafanhotos foi dizimada.

SOLUÇÃO

O número total de gafanhotos mortos após n dias constitui a progressão geométrica

$$(5, 15, 45, \ldots, 5 \cdot 3^{n-1}, \ldots).$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{n-1} = 885735 &\Leftrightarrow 3^{n-1} = 177147 \\ &\Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^{11} \\ &\Leftrightarrow n = 12. \end{aligned}$$

Portanto, a resposta é 12 dias.

Comentário: Note que a sequência de mortes por dia não forma uma P.G., mas sim o total de mortes acumuladas. Daí o aluno poderia recorrer à utilização de fórmulas prontas ou uma habilidade matemática de enxergar a sequência como:

$$(5.3^0,\ 5.3^2,\ 5.3^3, \ldots, 5.3^{n-1}, \ldots)$$

Em que n representa o dia que todos os gafanhotos estarão mortos.

Com isso, para finalizar a questão, bastaria fazer as divisões e fatorações devidas para chegar ao valor procurado.

- **MANIPULAÇÃO 9:**

(Ufmg 2012) Pretende-se diluir 800 ml de ácido contidos em um recipiente. Para tanto, inicialmente, substituem-se ***a*** ml do ácido por ***a*** ml de água. Essa nova solução é homogeneizada e, com ela, repete-se o mesmo procedimento, usando-se o mesmo volume ***a***. Esse procedimento é repetido certo número de vezes, até se conseguir a diluição desejada.

a) Considerando que o procedimento é repetido **cinco** vezes e que, na solução final obtida, restam 25 ml de ácido, determine a quantidade da solução *a* que foi substituída por água em cada uma das cinco etapas.

b) Considerando essa solução com 25 ml de ácido, determine quanto se deve substituir dela por água pura, para se obter uma nova solução com 20 ml de ácido.

SOLUÇÃO

a) Após cada retirada de ácido, a solução será novamente homogeneizada, portanto, a fração de ácido retirada a cada fase será de $\frac{a}{800}\,ml$ e restará na mistura sempre o equivalente a $\left(1-\frac{a}{800}\right)ml$. Portanto, o volume de ácido restante após n retiradas será de $V(n) = 800\times\left(1-\frac{a}{800}\right)^n ml$.

Conforme o enunciado, após cinco retiradas consecutivas, restarão, na solução final obtida, 25 ml de ácido. Portanto:

Para $n = 5$, temos $800\times\left(1-\frac{a}{800}\right)^5 = 25 \Rightarrow \left(1-\frac{a}{800}\right)^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow a = 400\ ml$.

b) Retirando 5 ml de ácido dos 25 ml restantes, é necessário calcular quanto se deve retirar dos 800 ml da solução. Para isto, basta aplicar **regra de Três:**

$$\left| \begin{array}{l} 25 \rightarrow 5 \\ 800 \rightarrow x \end{array} \right. \Rightarrow x = 160\ ml\ .$$

Comentário: Observe que a resolução da questão coloca em destaque o entendimento da situação, a organização dos valores dados e o valor da incógnita a determinar, veja que essa solução está considerando a equação $\left(1 - \frac{a}{800}\right)^5 = \frac{1}{32}$como trivial para o aluno, por isso omite os passos e dá logo o resultado $a = 400$. Da mesma forma, no item b, ela ainda reforça que as manipulações matemáticas já devem estar dominadas pelo aluno ao falar: **basta aplicar a regra de três**.

- **MANIPULAÇÃO 10**

(Ifsp 2011) Observe a sequência de figuras

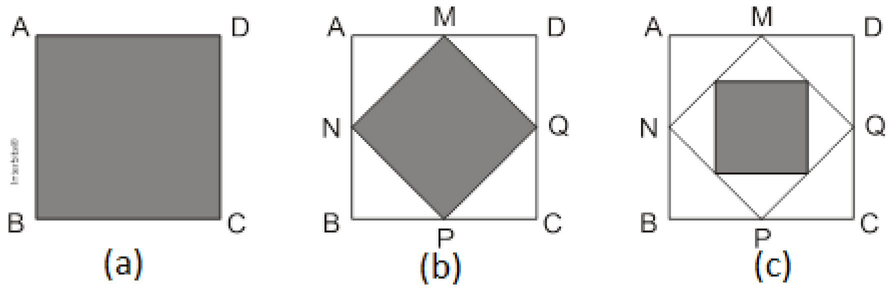


Figura 3.6

ABCD é um quadrado, cujo lado mede x cm. Ligando os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se o quadrado MNPQ. Realizando esse procedimento indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados sombreados dessa sequência é igual a $64\sqrt{2}\ cm^2$. A área do quadrado sombreado da décima figura dessa sequência, em centímetros quadrados, é igual a

SOLUÇÃO

A sequência é uma P.G. infinita de razão$q = \frac{1}{2}$, vamos considerar A_1 seu primeiro termo e A_{10}seu décimo termo.

$$\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}} = 64\sqrt{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}.64\sqrt{2}$$

$$= 32\sqrt{2}$$

logo

$$A_{10} = 32\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Comentário: Como resolver a questão sem utilizar a fórmula da soma limite de uma P.G.? A saída óbvia seria adotar um valor literal para a medida do lado da Figura 15.a. e usar as habilidades matemáticas para verificar que as áreas formam uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$ e perceber que a sequência $\left(1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{8}\,, \frac{1}{16}\,, \frac{1}{32}, \dots\dots\dots\right)$ se aproxima de zero quando o número de figuras aumenta assim a soma se aproxima do dobro do valor inicial, ou seja, manipulação com fórmulas prontas ou com expressão numéricas são indispensáveis para a resolução do problema.

$$S = \frac{x(\cancelto{0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}} - 1)}{\frac{1}{2} - 1}$$

3.1 COMENTÁRIO FINAL SOBRE AS MANIPULAÇÕES

Como foi mencionado na introdução, os fundamentos - Conceituação, Manipulação e Aplicação-precisam ser dosados de maneira adequada para que não haja exagero em nenhum deles a fim de que não comprometa o equilíbrio do processo de aprendizagem.

Colocamos dez questões, suas resoluções e comentários com o objetivo de mostrar a importância do manuseio das operações matemáticas, fórmulas, expressões, equações, etc. A maior parte dessas dez questões trabalhadas possuem um contexto ou faz relação com problemas reais, o que foge às características das questões que normalmente são trabalhadas na manipulação. Mas essa fuga é válida, pois mostra que questões contextualizadas que buscam relacionar a teoria e prática só poderão ser resolvidas, na grande maioria, se tivermos o domínio dos conceitos matemáticos do referido assunto e uma manipulação eficiente.

Contudo, devemos ter cuidado no exagero da manipulação, pois ela é a mais abordada nas salas de aulas e livros e alguns professores acabam deixando a conceituação e aplicação num plano secundário, o que é um erro, pois os três fundamentos se complementam.

Deve ficar bem claro que os exercícios de manipulação são imprescindíveis, mas precisam ser comedidos, simples, elegantes e, sempre que possível, úteis para emprego posterior. (SBM, Revista do professor de Matemática, 41, 1999, Lima)

CAPÍTULO 4

4.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS:

Para promover a compreensão dos conceitos a partir de um conjunto de atividades a serem trabalhadas pelos alunos, o professor recorre aos livros didáticos para selecioná-las. Prática essa realizada a partir de alguns critérios de escolha, análise crítica dos conteúdos e situações-problema abordados pelos autores das obras. Nesse sentido, o docente avalia o tratamento dado pelos autores objetivando vislumbrar e promover ao aluno um conjunto de situações que o ajudem a construir os significados esperados.

Partimos do pressuposto que a análise de conteúdos de livros didáticos, especificamente, PG e Função Exponencial, pode ser um bom direcionamento para o professor realizar suas atividades e ensinar/mediar processos de aprendizagem matemática que promova ao aluno o raciocínio crítico-reflexivo-transformador. Porém, analisar conteúdos requer uma teoria que fundamente essa ação de olhar para os materiais didáticos identificando as situações-problema potencialmente favoráveis na formação desse modelo de aluno e, porque não, desse cidadão. Nesse entendimento, o presente trabalho está pautado nas contribuições que essas análises promovem para a prática pedagógica do professor de Matemática, especificamente ao serem realizadas pela Organização Praxeológica.

Analisar conteúdos de livros didáticos é estudar, investigar, avaliar, testar e desenvolver o que é proposto nas unidades didáticas presentes nos livros com intencionalidade, portanto, requer uma reflexão sobre os saberes que serão mobilizados e construídos pelos alunos e de que modo a abordagem usada pelos elaboradores dos materiais didáticos podem efetivamente contribuir nesse processo. A prática de analisar os conteúdos permite ao professor de Matemática identificar tipos de situações-problema que favoreçam um ambiente em que os discentes possam trabalhar de forma autônoma e apropriarem-se do saber a ser ensinado (PAIS, 2008).

4.2 LIVROS DIDÁTICOS ENVIADOS PELAS EDITORAS ÀS ESCOLAS PÚBLICAS PARAENSES PARA SEREM UTILIZADOS NO ANO LETIVO DE 2015.

Observamos que entre oitos livros enviados, a maioria deles faz relação entre função exponencial e P.G., mas de forma muito superficial, por isso, não deixa explícita tal relação, pois não resolve as mesmas situações - problemas utilizando os dois conteúdos para poder deixar de maneira clara a integração entre eles, mas salientamos que entre tais livros temos como principal característica em comum os problemas utilizados: Juros compostos, crescimento populacional (bactérias, plantas, pessoas) e fractais (conjunto de Sierpinski), com base nisso, vamos resolver alguns desses problemas utilizando a PG e a função exponencial para mostrar que a integração seria possível.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO

As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. *(SBM, Revista do professor de Matemática, 41, 1999, Lima)*

Situação 1. Juros compostos: O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia.
O atual sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, pois ele oferece uma maior rentabilidade quando comparado ao regime de juros simples, uma vez que juros compostos incidem mês a mês, de acordo com o somatório acumulativo do capital com o rendimento mensal. Juros compostos são muito usados no comércio, como em bancos. Os juros compostos são utilizados na remuneração das cadernetas de poupança, e é conhecido como “juro sobre juro”.
Sabemos que a fórmula utilizada é: $m = c.(1 + i)^t$, onde temos: c = capital, i = taxa da aplicação, t = período da aplicação, m = montante acumulado. Daí, vamos associá-la à função exponencial e à P.G.

Problema: Maria depositou R$ 20.000,00 em um banco que opera com uma taxa de juros de 10% ao ano. Determine:

a) A lei de formação da função e o termo geral da P.G.
b) O valor do montante após 5 anos.

c) O tempo para que Maria tenha exatamente o dobro do que depositou.

d) Construa os gráficos com os valores obtidos.

RESOLUÇÃO:

a)

Função exponencial:

$$f(x) = b.a^x$$

$$f(t) = 20.000.(1+0,1)^t$$

$$f(t) = 20.000.(1,1)^t$$

P.G. :

$$a_n = a_0.q^n$$

$$a_t = 20.000.(1+0,1)^t$$

$$a_t = 20.000.(1,1)^t$$

Observe que a base da função exponencial e a razão da P.G. são iguais a 1,1 ou 110%.

b) Para t = 5 anos temos,

Função exponencial:

$$f(5) = 20.000\,.(1,1)^5$$

$$= 20.000\,.1,61051$$

$$= 32.210,20$$

P.G.

$$a_5 = 20.000\,.(1,1)^5$$

$$= 20.000\,.1,61051$$

$$= 32.210,20$$

Note que a P.G. possui 6 termos, pois ela começa por a_0 e não por a_1.

P.G. (20.000 , 22.000 , 24.200 , 26.620 , 29.282 , 32.210,20)

c) Função exponencial:

$$f(t) = 2\ x\ 20.000 = 20.000.(1,1)^t$$

$$2 = (1{,}1)^t$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}1}$$

$$t \cong 7\, anos\ .$$

P.G.:

$$a_n = a_0 . q^n$$

$$40.000 = 20.000. (1{,}1)^t$$

$$2 = (1{,}1)^t$$

$$t \cong 7\, anos.$$

d)

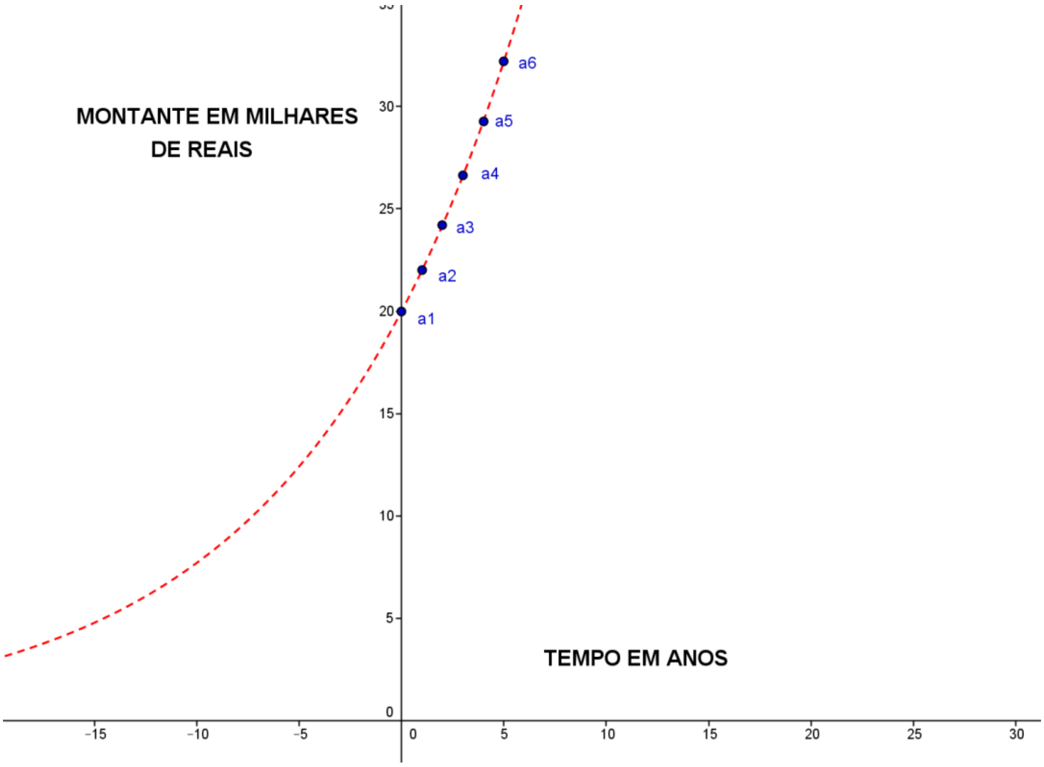


Figura 5.1 – gráfico da Progressão Geométrica

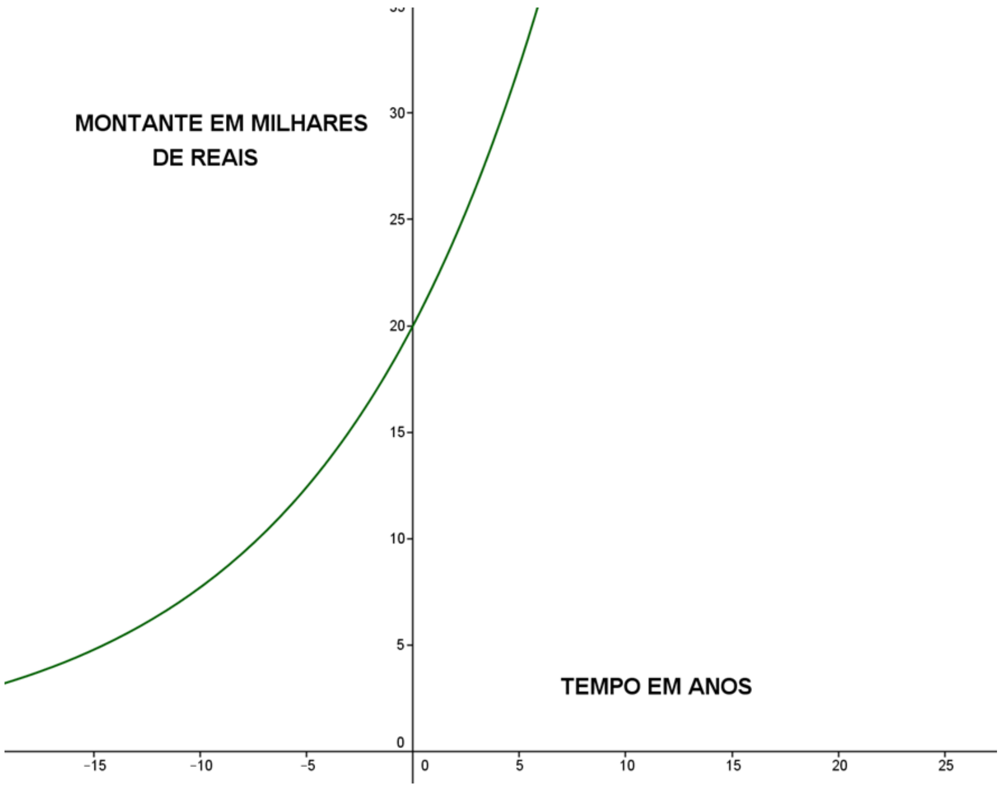


Figura 5.2 – gráfico da Função Exponencial

Situação 2. Crescimento populacional de bactérias:

Sob condições ótimas de crescimento, ou seja, condições físicas, químicas e nutricionais adequadamente balanceadas, muitas espécies bacterianas apresentam **um tempo de geração médio de 20 minutos**, ou seja, **a cada 20 minutos uma nova geração de indivíduos é produzida**. Essa nova geração mantém as mesmas características da geração anterior. Estas se dividirão produzindo quatro novas células, as quais, dividindo-se, produzirão oito novas células e assim por diante. Este tipo de crescimento é denominado **crescimento exponencial ou logarítmico**, no qual o número de indivíduos dobra a cada geração.

Problema: Certa cultura com 100 bactérias tem a característica de dobrar seu número a cada 20 minutos. Determine:

a) A lei de formação da função e a expressão geral da P.G. que representa o número de bactérias em função do tempo em minutos.

b) O número de bactérias após 2 horas.

c) O instante em que o número de bactérias é 10 vezes o inicial.

d) O esboço gráfico da função e da P.G.

RESOLUÇÃO:

a)

Função exponencial:

$$f(x) = b\,.\,a^x$$

$$f(t) = 100\,.\,(2)^{t/20}$$

$$f(p) = 100\,.\,(8)^p$$

P.G.:

$$a_n = a_0 . q^n$$

$$a_t = 100\,.\,(2)^{t/20}$$

$$a_p = 100\,.\,(8)^p$$

Observe que t é dado em minutos e p em horas.

b) Para 2 horas temos: $t = 120\ minutos e p = 2\ horas$

Função exponencial:

$$f(t) = 100\,.\,(2)^{t/20}$$

$$f(120) = 100\,.\,(2)^{120/20}$$

$$= 100\,.\,2^6$$

$$= 100\,.\,64$$

$$= 6.400.$$

De outra forma temos

$$f(p) = 100\,.\,(8)^p$$

$$f(2) = 100\,.\,8^2$$

$$= 100\,.\,64$$

$$= 6.400.$$

P.G.: (100 , 200 , 400 , 800 , 1.600 , 3.200 , 6.400)

Note que na P.G. temos que:

$$a_0 \ = \ 100$$

primeiros 20 minutos = $a_1 \ = 200$

segundos 20 minutos = $a_2 \ = 400$

⋮

Sextos 20 minutos = $a_6 \ = 6.400$

Observe que a sequência vai até o 6º termo, pois completa 2 horas.

c)

Função exponencial:

$$f(t) = 100\,.\,(2)^{t/_{20}}$$

$$= 10\ x\ 100$$

$$(2)^{t/_{20}} \ = 10$$

$$\frac{t}{20} \ = \ \frac{\log 10}{\log 2}$$

$$\frac{t}{20} \ = \ \frac{1}{0{,}30}$$

$$t \ = \ \frac{20}{0{,}30}$$

$$= \ \frac{200}{3}\ minutos$$

$$= \ \ 66\ minutos\ e\ 40\ segundos = 1\ h\ 6\min 40\ seg$$

d) Esboço dos gráficos:

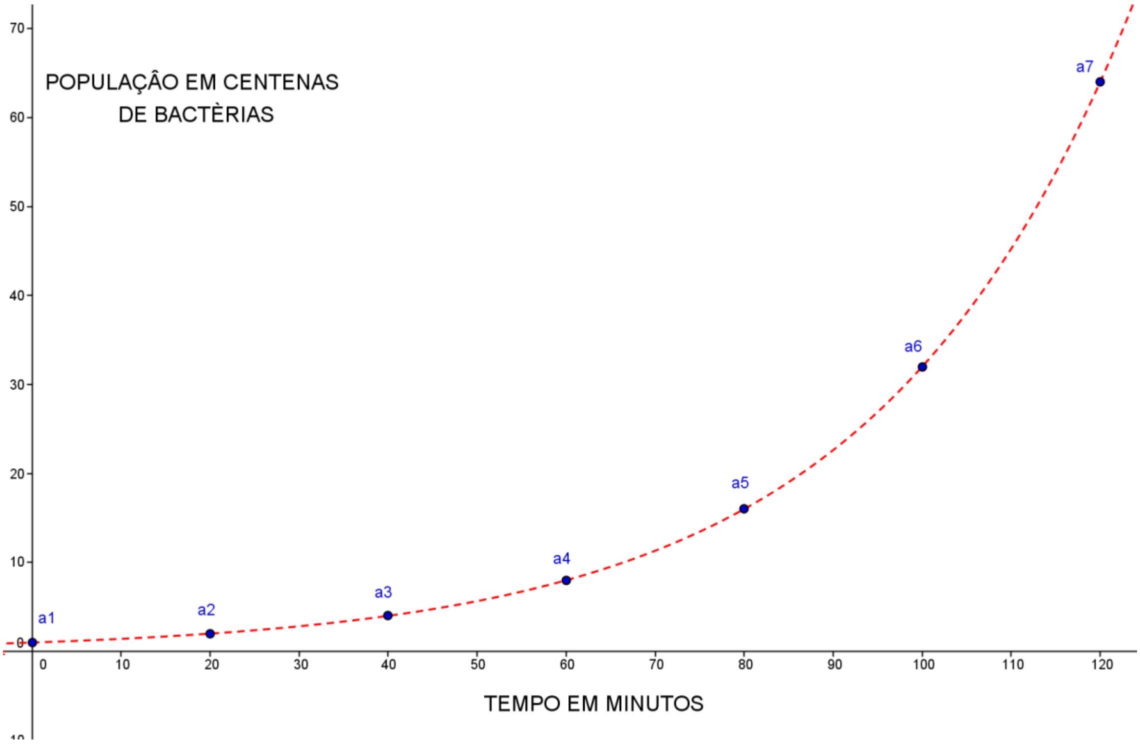


Figura 5.3 – P.G.

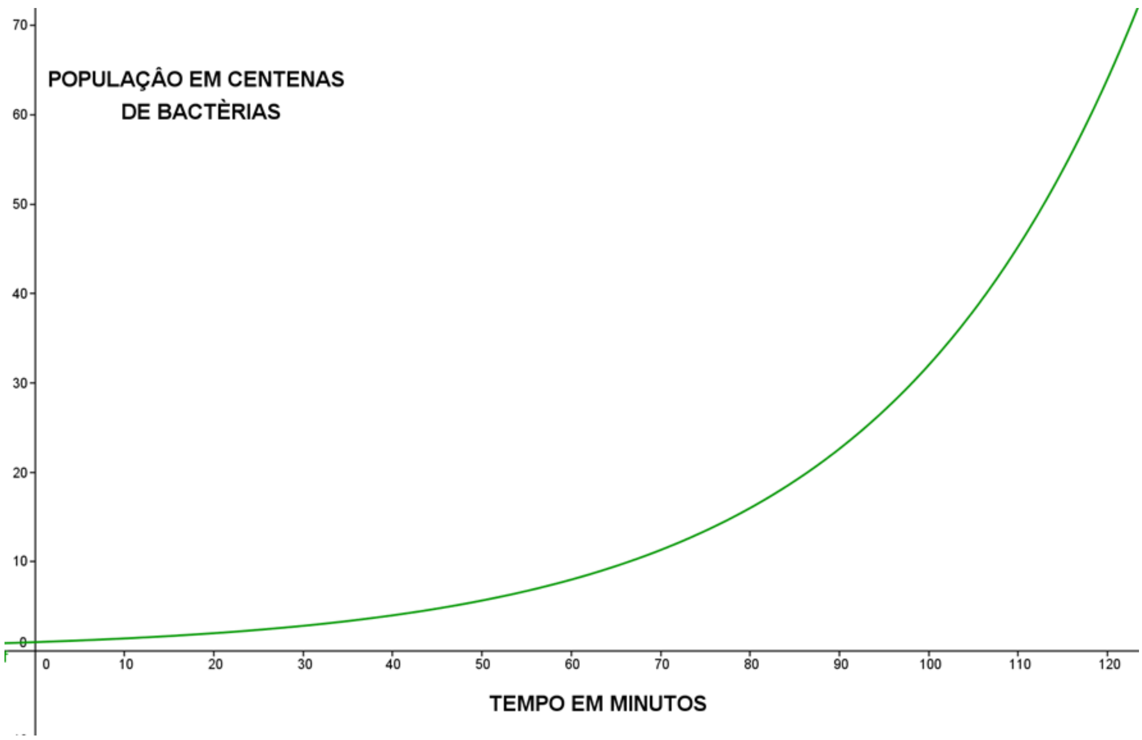


Figura 5.4 - Função

Situação 3. Fractais

TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969). É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original e é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.

O fractal obtido é estritamente auto-semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura. Pode-se generalizar o triângulo de Sierpinski para uma terceira dimensão, obtendo assim a Pirâmide de Sierpinski.

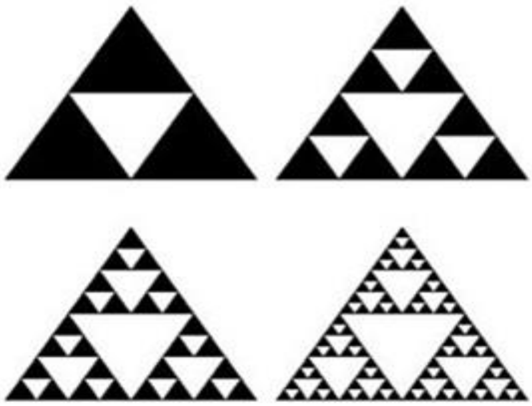


Figura 5.5: Triângulo de Sierpinski e suas interações. Fonte: Internet, 2010.

TAPETE DE SIERPINSKI

Neste, partimos de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes, e eliminando o triângulo central. Em seguida, vamos aplicando esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente, o resultado é conhecido como Tapete de Sierpinski.

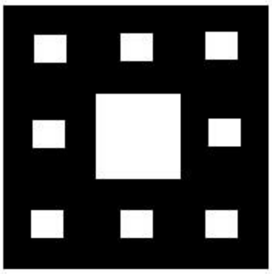


Figura 5.6: Tapete de Sierpinski após a segunda interação. Fonte: Internet, 2010.

Agora fazendo a verificação da área do Tapete de Sierpinski, começamos analisando como se formava esse fractal, o Tapete de Sierpinski é formado por um quadrado que posteriormente é dividido em nove quadrados menores onde retiramos o quadrado do centro.

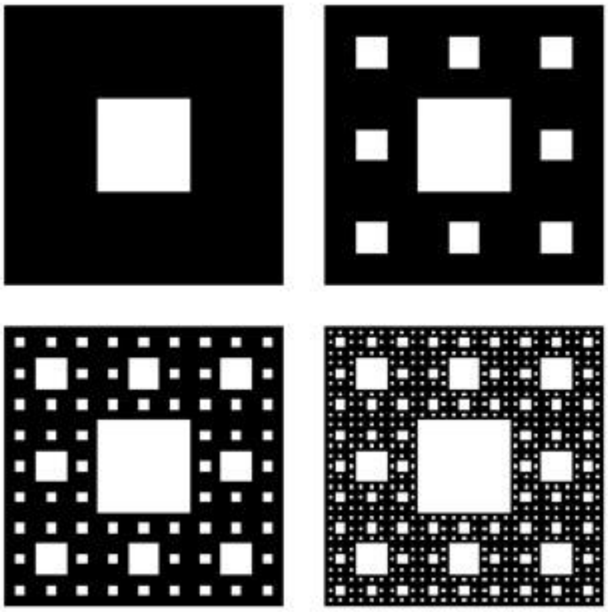


Figura 5.7: Tapete de Sierpinski após as interações. Fonte: Internet, 2010.

- ***O Fractal do Floco de Neve***

O fractal do Floco de Neve consiste em um triângulo equilátero inicial, de onde tomamos cada um de seus lados e o dividimos em três segmentos de reta iguais. Retiramos, então, o segmento do meio e o substituímos por outro triângulo equilátero sem a base. Demonstramos abaixo as iterações de um dos lados do triângulo inicial.

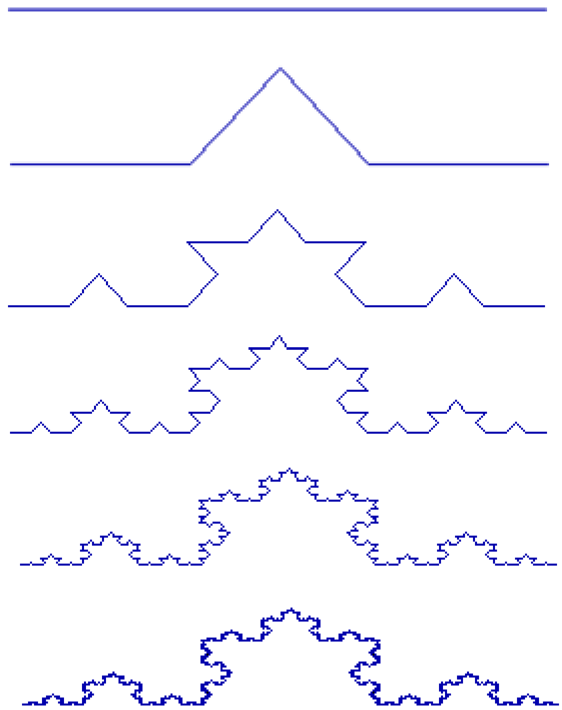


Figura 5.8

De sequências de imagens como estas (triângulo e tapete de Sierpinski, Floco de neve), definidas por regras muito simples, quando desenhadas à mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenhos. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como as anteriores é um fractal

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas – um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta -, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Linguística. Os linguistas, por exemplo, começaram a aplicar a teoria dos fractais no estudo da evolução dos dialetos. Já na Medicina, foram reconhecidas características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Figura 5.9: Imagens fractais também têm sido usadas em filmes de ficção, como o retorno de Jedi. (livro matemática ensino médio – Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz – volume 1 – ed. Saraiva – pag: 169)

Problema: (Unicamp 2012) Para construir uma curva “floco de neve”, divide-se um segmento de reta (Figura a) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60º, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura b. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras c e d.

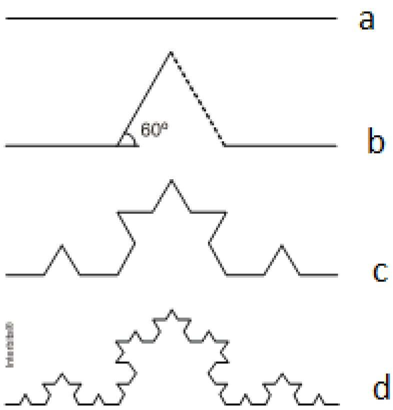


Figura 5.10

Se o segmento inicial mede 1, determine a razão entre o número de partes e o comprimento de cada parte para n figuras.

Pelas 3 primeiras figuras temos

$$\left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{16}{9}\right)=1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{0}\ ,\ 1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{1}\ ,1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\ldots$$

Daí temos que

Função exponencial

$$f(x)=b.a^{x}\ \Rightarrow\ f(n)=1.\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

ou

Progressão geométrica:

$$a_n = a_1\ .q^{n-1}\Rightarrow a_n = a_0\ .q^{n}\ \Rightarrow\ a_n\ = 1\ .\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

Observe que é possível manipular a expressão do termo geral da P.G. de modo que ela fique na mesma forma da função exponencial, mas essa manipulação já foi realizada na conceituação.

Situação 4. O número $e\,(euler)$ em questões financeiras e a progressão geométrica

Desde épocas imemoriais as questões financeiras tem-se encontrado no centro das preocupações humanas. Nem um outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo, ou talvez um mercador, no início do século XVII, tenha notado uma relação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de certa expressão matemática no infinito. Central em qualquer consideração sobre o dinheiro encontra-se o conceito de juros, ou valor pago sobre um empréstimo. Em um tablete de argila da Mesopotâmia, hoje no Louvre, datado de1700 a.C., encontra-se um exemplo esclarecedor que propõe o seguinte problema:

Quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20%ao ano?

A resposta dada, na base 60 é da forma 3;47.13.20, que, no sistema sexagesimal significa $3+\frac{47}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}=3{,}7870$ encontra-se próxima do valor correto que é 3,8018, isto é, cerca de 3 anos e 9 meses e 18 dias.

Ao considerar a fórmula para juros compostos, é provável que o escriba tenha usado interpolação linear entre os valores $(1{,}2)^3$ e $(1{,}2)^4$ de uma tabela de potências de1,2. Assim, fazendo $C_t=2C_0$ em $C_t=C_0(1+r)^t$, em que r= 20% e C_0 é a quantia inicial colocada a juros, tem-se$2C_0=C_0(1+r)^t$, ou seja,

$$2=(1{,}2)^t.$$

Vale ressaltar que já eram utilizadas na Mesopotâmia, para resolver questões específicas, tabelas de potências sucessivas de um dado número, semelhantes às atuais de logaritmos que resolvem facilmente a equação da acima. É interessante observar também, que o resultado acima abordado não depende do valor inicial colocado a juros.

Explorando um pouco mais a fórmula de capitalização $C_t=C_0(1+r)^t$, suponha um investimento de $C_0=RS\ 100$ (o principal) em uma conta que paga 5% de juros compostosanualmente. No final de um ano o saldo será 100 × 1,05 = R$ 105.

O Banco então considerará esta nova soma como um novo principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano, o saldo será $105\times1{,}05=R\$\,110{,}25$, e no final do terceiro ano $110{,}25\times1{,}05\ =R\$\,115{,}76$. Continuando esse processo de composição nota-se que o saldo cresce numa progressão geométrica com razão de 1,05. Por outro lado, em uma conta que pague juros simples, a taxa anual é aplicada sobrea soma original, sendo, portanto, a mesma a cada ano. No caso do investimento de R$100,00 a juros simples, de 5%, o saldo aumentará a cada ano R$ 5 resultando numa progressão aritmética de razão 5. Na comunidade bancária podem-se encontrar todos os tipos de composição de juros, ou seja, anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário. Suponha que a composição é feita n vezes ao ano. Para cada período de conversão o banco usa a taxa de juros anual dividida por n, que é $\frac{r}{n}$.

E como em t anos existem $n \cdot t$ períodos de conversão, um principal C_0, após t anos renderá

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt}$$

Retomando o exemplo acima, de $C_0 = R\$\ 100$ e $r = 5\%$, a Tabela 4, fornece um demonstrativo dos resultados de composição em diversos períodos.

Tabela 4

Período de conversão	n	r/n	C_t
Anual	1	0,05	105,00
Semestral	2	0,025	105,06
Trimestral	4	0,0125	105,09
Mensal	12	0,004166	105,12
Semanal	52	0,0009615	105,12
Diário	365	0,0001370	105,13

Para explorar ainda mais essa questão, considera-se um caso especial da equação $C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{nt}$, em que $r = 1$, $C_0 = R\$\ 1{,}00$ e $t = 1$ ano, ou seja, $C_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$. O objetivo agora é investigar o comportamento desta fórmula para valores crescentes de n. Os resultados são dados na Tabela 5.

Tabela 5

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Observando a Tabela 5, nota-se que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ converge muito lentamente, e que foi preciso fazer $n = 100.000$ para que uma aproximação do e fosse atingida. A questão que se coloca é se a convergência para o número e de fato se confirma. Uma cuidadosa análise matemática, através de expansão binomial, frações contínuas e séries de potências, mostrou que isso de fato acontece, inclusive noutras questões não relacionadas aos juros compostos.

Problema: Um agiota empresta 1 real a juros de 100% ao ano a uma pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo 1 + 1 = 2 reais. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto.

Se dividirmos o ano em dois semestres, a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 real + 50% de 1 real = 1½ real. Em mais um semestre, os juros se comporiam em: 1½ real + 50% de 1½ real = 2,25 reais.

Porém, o agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria ao final de cada trimestre, conforme a tabela.

Tabela 6

Período e Montante
1º trimestre 1 real + 25% de real = 1,25 reais.
2º trimestre 1,25 reais + 25% de 1,25 reais= 1,25.1,25= 1,252 = 1,5625 reais.
3º trimestre 1,5625 reais + 25% de 1,5625 reais= 1,5625.1,25 = 1,253 = 1,953125 reais.
4º trimestre 1,953125 reais + 25% de 1,953125 reais= 1,254 = 2,4414063 reais.

Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 real, a 100% ao ano, supondo a correção trimestral dos juros

Considerando a ano com 360 dias, qual o valor que o devedor deveria pagar para uma capitalização por dia? Qual é a relação do problema com a progressão geométrica e com o número de Euler?

Nesta situação a taxa de aplicação por dia seria: $\frac{1}{360}$, daí teríamos como montante:

$$M = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} = 2,7166825.$$

Neste caso, M é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a R$ 1,00, razão igual a $\left(1 + \frac{1}{360}\right)$ e número de termos, 360.

Concluímos através de cálculos que quanto maior o número de divisões do período do empréstimo o montante se aproxima de 1. $e = 2,71828$ reais.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observe que a integração entre a progressão geométrica e a função exponencial defendida em nosso trabalho teve como sustentação o tripé – conceituação, manipulação, aplicação -, pois se baseando apenas na análise dos livros didáticos, que possuem questões semelhantes para ambos os conteúdos, ficaríamos sem a comprovação dessa integração.

Com isso, após a conceituação verificamos que as definições eram semelhantes e por isso poderíamos relacioná-las através de suas representações algébricas e gráficas. Por fim, com o domínio da manipulação resolvemos problemas contextualizados, que fazem parte da aplicação, e utilizamos as habilidades matemáticas para mostrar que era possível determinar a solução do problema através da progressão geométrica ou da função exponencial.

Como incentivo aos professores que desejam adotar a metodologia defendida nesse trabalho com seus alunos, elaboramos algumas estratégias de aulas divididas em 3 (três) planos de aula. PLANO DE AULA 1 (conceituação) / PLANO DE AULA 2 (manipulação) / PLANO DE AULA 3 (aplicação), localizados no anexo do trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio .** Brasília: SEF, 1998.

[2] DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações: Manual do professor** – São Paulo: Editora Ática, 2003.

[3] **Livro Matemática ensino médio** – Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz – volume 1 – ed. Saraiva

[4] Lima, Elon Lages. **A Matemática do ensino médio – volume 2**/ Elon Lages Lima, Paulo Cézar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cézar Morgado. 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006

[5] Lima, Elon Lages. **Os três fundamentos da Matemática**: Conceituação, Manipulação e Aplicação, IMPA – RJ (internet 20/09/2014)

[6] PAIS, Luis Carlos. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3. ed. (revisada). São Paulo: EDUC, 2008. p. 11-48.

[7] **SAS** – Sistema Arí de Sá – interbits - Super Pro web

[8] *SBM, Revista do professor de Matemática, 41, 1999, Lima*

[9] http://matematica-online-clc.blogspot.com/2009_05_01_archive.html

ANEXOS A – Planos de Aula

DISCIPLINA: MATEMÁTICA	
PROFESSOR:	
SÉRIE: 1ª /ENSINO MÉDIO	CARGA HORÁRIA: 2 H /AULAS
PLANO DE AULA 1 - CONCEITUAÇÃO	
TEMA: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL	

OBJETIVOS
GERAL : Dar aos alunos a capacidade para que eles reconheçam uma progressão geométrica e função exponencial e perceber a relação entre elas.
ESPECÍFICOS: a) Ter conhecimento dos conceitos e características da P.G. e função exponencial. b) Reconhecer as fórmulas de P.G. e saber relacioná-las à função exponencial. c) Saber reconhecer as semelhanças e diferenças entre P.G. e função exponencial.

CONTEÚDO
Explicação do que é uma Progressão Geométrica falando um pouco da história, defini-la e apresentar as fórmulas, mostrando a demonstração que achar necessário, fazer a relação com a função exponencial de forma algébrica e gráfica.

METODOLOGIA DE ENSINO
Aula expositiva, acompanhada de recursos didáticos como data show para facilitar a apresentação gráfica da P.G. e função exponencial.

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM
A avaliação será a partir da aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno resolverá problemas relacionados à conceituação da P.G. e da função exponencial.

REFERÊNCIAS

SAS – sistema Arí de Sá – SuperPro web

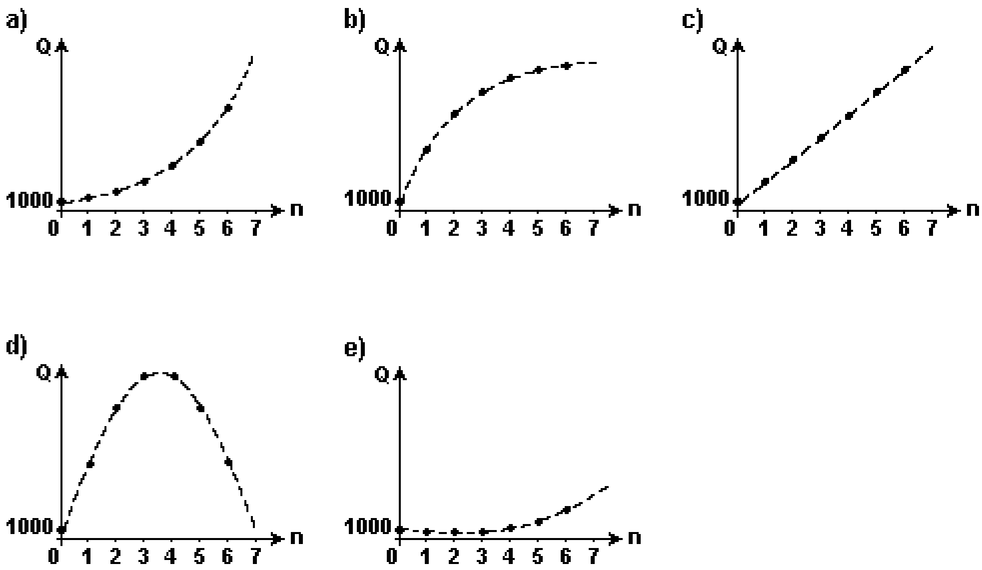
KIYUKAWA, Rokusaburo, SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática. 2 ed.. São Paulo: Saraiva, 1999.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Matemática - pag 111 - 119

SUGESTÃO DE QUESTÕES: APENAS AQUELAS QUE ESTEJAM LIGADAS AOS CONCEITOS BÁSICOS E DEFINIÇÕES DE TAIS CONTEÚDOS COMO AS MOSTRADAS A SEGUIR:

01) (Uff 2006) Considere o seguinte modelo para o crescimento de determinada população de caramujos em uma região: "A cada dia o número de caramujos é igual a 1,5 do número de caramujos do dia anterior."

Suponha que a população inicial seja de 1000 caramujos e que n seja o número de dias transcorridos a partir do início da contagem dos caramujos. O gráfico que melhor representa a quantidade Q de caramujos presentes na região em função de n é o da opção:



OBS: Fazer a representação como P.G. e função exponencial explicando o motivo do gráfico ser pontilhado e não contínuo.

02) (Enem 2008) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) - objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais - objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);

2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

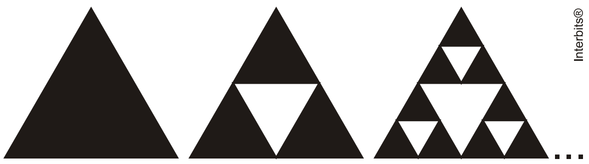
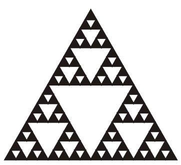
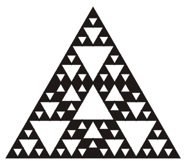
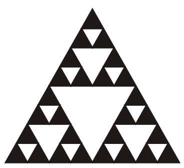


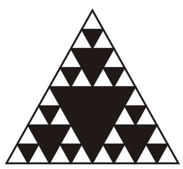
Figura 1 Figura 2 Figura 3

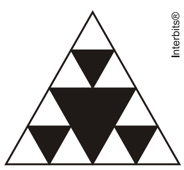
De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é

a) 

b)  .

c) 

d) 

e) 

Obs: reconhecer uma P.G. através de valores numéricos ou figuras e descobrir o padrão utilizado na construção da sequência.

03) (Uerj 2013-adaptada) Um automóvel perde 15% do valor de venda a cada ano. O valor V(*t*) desse automóvel em *t* anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$$V = V_0 . a^t$$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule:

a) Os valores de V_0 e a .

b) Os valores do automóvel após: 1 ano, 2 anos e 3 anos.

c) Os valores encontrados no item b formam uma P.G.? Caso afirmativo, qual a razão desta P.G.?

d) Faça a análise gráfica do problema mostrando a diferença se consideramos a questão como P.G. ou função exponencial.

Obs: Foram colocadas apenas 3 questões , mas cada professor pode seguir esta linha e buscar outras questões que abordem conceitos básicos dos conteúdos trabalhados.

PLANO DE AULA 2 - MANIPULAÇÃO

DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSOR:
SÉRIE: 1ª /ENSINO MÉDIO   **CARGA HORÁRIA: 6 H /AULAS**
TEMA: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

OBJETIVOS
GERAL : Dar aos alunos a habilidade de manuseio das diversas fórmulas e operações matemáticas.
ESPECÍFICOS: **a) Fazer com que os alunos obtenham o conhecimento necessário sobre propriedades e operações referentes à P.G. e à função exponencial.** **b) Dar condições ao aluno para que ele fique apto a aplicar e relacionar as fórmulas de maneira eficiente.**

CONTEÚDO
Manipulação das expressões, fórmulas, equações, gráficos, figuras, etc, referentes à progressão geométrica e à função exponencial e usar propriedades e artifícios na resolução de questões do tipo: Calcule, Determine a incógnita, etc.

METODOLOGIA DE ENSINO
Aula expositiva no quadro com base na resolução de questões do livro ou lista de exercícios sobre P.G. e função exponencial.

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM
A avaliação será a partir da aplicação de lista de exercícios para medir a eficiência do aluno em sua resolução.

REFERÊNCIAS
SAS – sistema Arí de Sá – SuperPro web **KIYUKAWA, Rokusaburo, SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática. 2 ed.. São Paulo: Saraiva, 1999.** **PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Matemática - pag 111 - 119**

SUGESTÃO DE QUESTÕES: AQUELAS QUE ESTEJAM LIGADAS A PARTE ALGÉBRICA DA MATEMÁTICA COMO CALCULE, ENCONTRE A INCÓGNITA, SIMPLIFIQUE, DESENVOLVA, ETC.

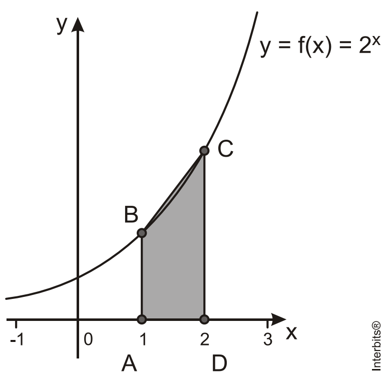
1. (Uern 2013) A seguinte sequência representa uma progressão geométrica: $\sqrt{5x}, 9x-5\sqrt{5x}, 16\sqrt{5x}.$ O valor de x, tal que $x = q^2 - 2q - 3,$ sendo q a razão desta progressão $x \in \Re$, determine o valor de x.

Obs: Note que a questão é Matemática pura em que o aluno terá que ter domínio sobre os conceitos de P.G. e habilidades matemáticas em sua resolução.

2. (Ufsj 2013) Sabendo que a soma do 2º, 3º e 4º termos de uma progressão geométrica (PG) é igual a 140 e que a soma dos 8º, 9º e 10º termos é $8960,$ determine a razão, o primeiro termo e o décimo termo dessa P.G.

Obs: Questão que exige conceitos de P.G., habilidades com operações matemáticas e aplicação de fórmulas.

3. (Ufjf 2012) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x.$ Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de *f* e um trapézio *ABCD*, retângulo nos vértices *A* e *D* e cujos vértices *B* e *C* estão sobre o gráfico de *f*.



Determine a medida da área do trapézio *ABCD.*

Obs: A questão aborda apenas valor numérico da função e fórmula da área de trapézio.

PLANO DE AULA 3 - APLICAÇÃO
TEMA: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA	
PROFESSOR:	
SÉRIE: 1ª /ENSINO MÉDIO	CARGA HORÁRIA: 4 H /AULAS

OBJETIVOS
GERAL : Dar aos alunos a capacidade de interpretar problemas contextualizados que relacionem a teoria com problemas reais.
ESPECÍFICOS: a) Deixar os alunos em condições de transformar uma situação – problema, que envolva P.G. ou função exponencial, para linguagem matemática. b) Colocar os alunos em condições de determinar a solução do problema.

CONTEÚDO
Resolução e explicação de questões de progressão geométrica e função exponencial que tenham um contexto, que relacionem a Matemática com outras disciplinas e com problemas do cotidiano e mostrar que a questão pode ser resolvida através da P.G. ou função exponencial confirmando a integração entre os conteúdos.

METODOLOGIA DE ENSINO
Aula expositiva, acompanhada de recursos didáticos como data show para facilitar a apresentação de problemas que envolvam P.G e função exponencial.

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM
A avaliação será a partir da aplicação de questões contextualizadas para verificar se o aluno tem domínio da interpretação, dos conceitos, da manipulação e integração da P.G. com a função exponencial para chegar ao resultado esperado.

REFERÊNCIAS
SAS – sistema Arí de Sá – SuperPro web **PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Matemática - pag (111 – 119)**

SUGESTÃO DE QUESTÕES: PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS SOBRE P.G. E FUNÇÃO EXPONENCIAL.

1. (Uepa 2014 - ADAPTADA) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registrados 60.000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes, 40% das vítimas estavam em motos.

Texto Adaptado: *Revista Veja*, 19/08/2013.

A função $N(t) = N_0(1{,}2)^t$ fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo t o número de anos e N_0 o número de vítimas que estavam em moto em 2012. Nessas condições, determine:

a) Os valores de N(0), N(1), N(2) e N(3) ,ou seja, o número de vítimas de moto em 2012, 2013, 2014 e 2015.

b) Esses valores formam uma progressão geométrica? Caso a resposta seja afirmativa, qual a razão dessa progressão?

c) Represente esse problema graficamente.

Obs: Comente com o aluno sobre o domínio da função exponencial e da progressão geométrica.

2. (Livro: Matemática - Ciência e Aplicações) Uma imobiliária acredita que o valor ***v*** de um imóvel no litoral varia segundo a lei $v(t) = 60000.(0{,}9)^t$, em que ***t*** é o número de anos contados a partir de hoje.

a) Qual é o valor atual desse imóvel?

b) Qual é a desvalorização percentual anual desse imóvel?

c) Quais os valores do imóvel após 1 ano, 2 anos e 3 anos?

d) Explique a relação entre a função dada e uma P.G.

Obs: Deixar que o aluno conclua através de cálculos que para valores naturais para t a função pode ser vista como uma progressão geométrica.