Universidade Estadual de Santa Cruz

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Área de Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A MATEMÁTICA AO ALCANCE DAS MÃOS

por

Cíntia Karla Alves Souza ★

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Ilhéus - BA

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Ilhéus

2013

★Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes obtido através da SBM.

Cíntia Karla Alves Souza

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A MATEMÁTICA AO ALCANCE DAS MÃOS

Ilhéus

2013

Cíntia Karla Alves Souza

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A MATEMÁTICA AO ALCANCE DAS MÃOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Mota Alves

Ilhéus
2013

S729 Souza, Cíntia Karla Alves.
Materiais manipuláveis : a matemática ao alcance das mãos / Cíntia Karla Alves Souza. – Ilhéus : UESC, 2013.
viii, 87 f. : il. ; anexos.

Orientador: Sérgio Mota Alves.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Matemática – História. 3. Material didático. 4. Ensino – Meios auxiliares. I. Título.

CDD 516

Cíntia Karla Alves Souza

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A MATEMÁTICA AO ALCANCE DAS MÃOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 27 de fevereiro de 2013:

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
Orientador

Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Prof. Drª. Mariana Pinheiro Gomes da Silva

Fabíolo Moraes Amaral

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral

Ilhéus - 2013

DEDICATÓRIA

Àqueles que me permitiram: Conhecer o amor incondicional... Realizar o meu maior sonho... Manter-me de pé e seguir em frente... Para vocês, Ana Paula, Lucas e Kauan , com todo o meu amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, por me carregar no colo, fazer cafuné e me colocar pra dormir.

Por me dar sabedoria para vencer as dificuldades. Por ser o meu melhor amigo.

A meus pais, irmãos e cunhadas, por terem feito de mim a pessoa que sou hoje. Por acreditarem em mim, sempre. Por terem, tantas vezes, assumido o meu papel de mãe durante o meu mestrado.

Aos meus filhos pela maturidade, paciência, pelo apoio, companheirismo, carinho e amor com que enfrentaram todas as nossas dificuldades.

Por compreenderem a minha ausência nos últimos anos.

A Aline, Bira, Rafael e Sírius, grandes amigos, por permitirem que eu volte a ser criança, tornando minha vida mais leve. Por todos os sorrisos, abraços, micos e gargalhadas.

A Vinícius, anjo enviado por Deus pra me trazer de volta à luz. Por ter acreditado em mim. Por eu estar aqui.

À turma do Profmat 2011, *a turma*.

A Gustavo, Leôncio e Rodrigo, meus companheiros de estrada e hotel, por tornarem nossas viagens deliciosas.

A Alex, meu irmão anjo, por estar comigo em momentos de ***longas*** caminhadas.

Por me levar pra comer *Petit Gateau*.

A Sérgio, meu professor, pai, amigo, irmão, anjo, por ser essa pessoa maravilhosa. Por fazer com que eu me apaixonasse ainda mais pela docência.

A Roque, meu anjo de olhos verdes, por me fazer flutuar sobre águas turbulentas. Por me suportar. Por me fazer rir e chorar. Por me fazer amar.

A todos vocês "muito obrigada"!

À **Capes** pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

ABSTRACT

Since antiquity Geometry is the basis of the mathematical knowledge. The man created experimentally the basis of Geometry and used to carry out algebraic calculations and demonstrations. The purpose of this work is the use of manipulable materials in teaching mathematics in order to rescue the geometric methods used in ancient times to assist in the visualization and understanding the mathematical contents by students from primary school, presenting them so the Mathematics as result direct of human action. It proposes the use of a fixed magnetic board with acrylic parts magnetized for handling teacher as part of their classes. Proposes the use of the History of Mathematics and identification of Arithmetic and Algebra with Geometry, in order to facilitate the same background and viewing. At the end of the work are presented some proposals for improvement of the product, such as: to insert kits mathematical curiosities, history of Mathematics, video lessons related to their content. It also presents a proposal for continued training for teachers of Mathematics at all levels of education.

Keywords: Geometry, History of Mathematics, Manipulable materials.

RESUMO

Desde a antiguidade a Geometria é a base do conhecimento matemático. O homem criava, experimentalmente, as bases da Geometria e a utilizava para efetuar cálculos algébricos e demonstrações. A proposta deste trabalho é a utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática, a fim de resgatar os métodos geométricos utilizados na antiguidade, para auxiliar na visualização e na compreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos da rede básica de ensino, apresentando-lhes, desta forma, a Matemática como resultado direto da ação humana. Propõe a utilização de um quadro magnético com peças de acrílico imantadas, para a manipulação do professor como parte integrante de suas aulas. Propõe a utilização da História da Matemática e a identificação da Aritmética e da Álgebra com a Geometria, a fim de facilitar a contextualização e visualização das mesmas. Ao fim do trabalho são apresentadas algumas propostas de aperfeiçoamento do produto, tais como: inserir aos *kits* curiosidades matemáticas, História da Matemática, videoaulas relacionadas ao conteúdo. Apresenta, também, uma proposta de formação continuada para professores de Matemática em todos os níveis de ensino.

Palavras-chave: Geometria, História da Matemática, Materiais manipuláveis.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"Qualquer coisa pode se tornar tão simples quanto possível, mas não mais simples do que são."
Albert Einstein

A proposta de utilizar materiais manipuláveis no ensino da Matemática emergiu no Brasil por volta da década de 90 e nos últimos anos vem despertando o interesse de vários professores e pesquisadores. Essa proposta surge na tentativa de melhorar a aprendizagem da Matemática que a cada ano apresenta resultados mais baixos.

O caos no ensino da Matemática tem raízes históricas, proveniente de uma Matemática que foi ensinada por décadas e décadas de forma tradicional, dando-se ênfase, quase que exclusivamente, às demonstrações e ao encadeamento impecável das proposições, se dando de forma puramente teórica e distante da realidade. Sendo assim, os professores não estão preparados para utilizar de forma adequada essas metodologias que surgem desenfreadamente, pois são frutos do ensino de uma Matemática fria e acabada, onde não se levava em conta que a Matemática foi, e ainda é, uma construção humana que surgiu da necessidade do homem de responder a várias questões que mudaram o rumo da humanidade.

É um círculo vicioso: professores que tiveram um ensino tradicional tendem a reproduzir este ensino, pois este é o único que eles conhecem.

Por causa deste despreparo, a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula geralmente ocorre de maneira ineficiente, promovendo a dispersão dos alunos e sem nenhuma fundamentação que permita as ligações entre o concreto e as cognições necessárias à abstração. A proposta deste trabalho é que os materiais manipuláveis sejam utilizados pelo professor constantemente em suas aulas, visando recuperar a Matemática experimental, que foi suprimida do ensino durante um longo tempo, resgatando a História da Matemática e apresentando a Álgebra como processo geométrico e a importância da Geometria na fundamentação matemática. Resgatando a maneira como os matemáticos da antiguidade resolviam muitos problemas e faziam muitas demonstrações através da Geometria, como se pode verificar nos Elementos de Euclides. É necessário despertar o interesse dos alunos em relação à Matemática, mostrando que foi a partir de ideias simples, muitos experimentos, erros e acertos que foi possível se chegar à Matemática que conhecemos hoje.

O presente trabalho está dividido em capítulos.

No primeiro, relato brevemente a minha experiência com a Matemática desde os tempos de estudante até hoje, como docente, buscando entender os motivos da dificuldade no ensino-aprendizagem da Matemática. Essa contextualização tem como objetivo mostrar que o conhecimento matemático não é um dom que nasce com alguns poucos e que ele pode ser adquirido durante o percurso escolar. Ao fim do capítulo apresento a minha proposta para facilitar este aprendizado.

No segundo capítulo faço um breve histórico do ensino da Matemática no Brasil, a fim de entender as causas para este fracasso vivido hoje no ensino-aprendizagem da Matemática. Discuto a História da Matemática e a Geometria, aliada à Álgebra e à Aritmética, como maneira de humanizar a Matemática, a fim de despertar o interesse dos alunos e facilitar a aprendizagem desta tão bela Ciência.

No terceiro capítulo apresento o produto desenvolvido para a conclusão do mestrado, que por exigência da Capes, deveria ser algo de impacto no ensino da Matemática na educação básica. Explico detalhadamente a minha proposta de utilização de um quadro magnético para a manipulação de peças imantadas, desenvolvidas por mim, que permitem a construção e reconstrução do conhecimento em relação a diversos conteúdos matemáticos, possibilitando a visualização, o pensamento crítico e a aprendizagem dos alunos.

Em virtude do conhecimento da má formação dos professores de Matemática, no quarto capítulo falo sobre projetos futuros de aperfeiçoamento do material, inserção de novos *kits* com um complemento teórico do conteúdo a ser trabalhado e apresento uma proposta de formação continuada para professores de Matemática da rede pública em todos os níveis de ensino, pois precisamos porpocionar a formação continuada também aos professores formadores de professores, a fim de quebrar o círculo vicioso.

CAPÍTULO 1

MOTIVAÇÃO

"Mestre é aquele que às vezes para, para aprender."

Guimarães Rosa

1.1 Meu Primeiro Contato Verdadeiro com a Matemática

A escolha desse tema vem de uma antiga história de amor e sedução, entre a Matemática e eu, que se iniciou no meu ensino médio e perdura até hoje.

Cursei o ensino fundamental II em uma escola pública. No ensino médio fui para uma escola particular. Foi desesperador, recordo-me que não entendia nada do que o professor explicava, não sabia responder às perguntas que ele fazia. Ver grande parte da turma responder àquelas perguntas das primeiras aulas me deixava com a auto-estima muito baixa, eu pensava: "como eles sabem estas respostas?"

Mas uma coisa estava clara para mim: eu teria que aprender. Comecei, então, a ir para a escola no período da tarde e alguns dias à noite, além do período matutino, horário regular das aulas. Foi um ano árduo. No segundo ano continuei estudando muito, já conseguia compreender com mais facilidade. No terceiro ano as coisas ficaram mais fáceis, a Matemática, apesar de exigente, já não era tão difícil assim.

Quando terminei o terceiro ano, houve no meu município um concurso público para professor, os candidatos só precisavam ter o ensino médio. Eu, muito confiante, disse: *"a única matéria que eu me sinto capaz de ensinar é Matemática"*. Quando fui fazer a inscrição fiquei muito frustrada, pois descobri que, além do nível médio, era necessário ter dezoito anos ou mais.

No ano seguinte, no cursinho, eu me destacava nas aulas de Matemática e os colegas e professores sempre perguntavam: *"E aí, vai cursar faculdade de Matemática?"* E aqui estou eu, graduada em Licenciatura Plena em Ciências com habilitação em Matemática, pela UNEB, especialista em Matemática e Estatística, pela UFLA e concluindo o meu Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pela UESC.

Toda essa experiência que eu tive com a Matemática me fez acreditar piamente que esta ciência pode ser aprendida por todos. Como diz a essência do seu nome: *"MATEMÁTICA, aquilo que é aprendido"* (FILHO, 2010, p.116). Era tão boa a sensação de ter conquistado a Matemática que eu queria proporcionar isto a outras pessoas.

1.2 Minha Experiência como Docente

O Brasil ostenta um constrangedor 88º lugar em um *ranking* mundial publicado pela Organização das Nações Unidas para Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco). Vários fatores são apontados por especialistas, tais como gestão ineficiente, desprestígio do magistério, má formação dos professores, baixo investimento na educação, baixa participação da comunidade.

A Matemática continua sendo a maior vilã entre as disciplinas. O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que é realizado a cada dois anos e avalia o conhecimento de alunos em relação às disciplinas Português e Matemática, mostra que dos alunos avaliados em 2011 em Matemática, ao final do 5º ano apenas 33% adquiriram aprendizagem adequada, ao final do 9º ano, apenas 12% e a média dos alunos que concluem o 3º ano é $274,8$ sendo que para estarem num nível adequado de aprendizagem esta média deveria ser no mínimo $500,0$.

A dificuldade na aprendizagem da Matemática é algo que me aflige desde muito antes de pensar em ser professora de Matemática. Durante estes 13 anos de prática docente eu sempre procurei entender o porquê da tamanha dificuldade na aprendizagem da Matemática. Até nós professores ainda temos dificuldades em alguns conteúdos. E nem todos os professores têm condições de continuar estudando e pesquisando métodos de ensino da Matemática.

Muitos apresentam dificuldades para ensinar conteúdos básicos como frações e geometria. E no caso específico da geometria, a dificuldade é ainda maior por ser considerada por muitos uma das áreas mais complexas da Matemática. Essa dificuldade, muitas vezes, não se deve unicamente à falta de conhecimento do conteúdo, mesmo professores que dominam o conteúdo sentem falta de uma metodologia para ensinar, simplificadamente, de onde vêm estes conceitos, regras e fórmulas.

Para Druck (2004), o problema do ensino da Matemática está centrado na formação insipiente dos professores para o ensino da disciplina. *"A progressiva decadência da qualidade do ensino da Matemática atinge hoje a própria Licenciatura em Matemática, completando assim um círculo vicioso."*

Os professores saem da faculdade despreparados para fazer uso das diversas metodologias que vêm surgindo nos últimos tempos. Acabam por utilizá-las sem uma fundamentação ou objetivo específico, não conseguindo fazer a ligação entre a metodologia e a abstração necessária à Matemática.

Os principais problemas na formação de professores são o distanciamento entre o que aprendem na licenciatura e o que realmente necessitam na prática escolar, a falta de dicotomia entre teoria e prática e entre disciplinas específicas e pedagógicas e a ausência de uma formação histórica, filosófica e epistemológica do saber matemático, como confirma D'Ambrósio (1993).

É preciso pensar também na formação do professor formador de professores, mas isso é uma questão histórica e suas raízes estão bem profundas. Na verdade, se falando das causas da dificuldade na aprendizagem da Matemática, o que vemos é só a ponta do *iceberg*.

1.3 Contribuindo para Minimizar a Dificuldade no Ensino-Aprendizagem da Matemática

O governo brasileiro mostra preocupação com a educação, em especial com o ensino de Matemática que apresenta os piores índices. Foram traçadas várias metas e estratégias. Estudos mostram que o fator que realmente faz a diferença é a qualificação do professor aliada às metodologias utilizadas em sala de aula.

Esta não é uma preocupação só do governo, vários órgãos ligados à educação e muitos pesquisadores tentam encontrar saídas que garantam uma educação de qualidade, que melhorem os índices catastróficos que o Brasil exibe em relação à educação.

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), preocupado com a formação dos professores de Matemática oferece, desde 1990, o Programa de Aperfeiçoamento para Professores do Ensino Médio (PAPMEM). Este programa visa oferecer treinamento para professores de Matemática do Ensino Médio, dele resultou uma série de livros, voltados para o ensino médio, publicados na Coleção do Professor de Matemática da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Esta coleção representa no Brasil a melhor referência para a formação de professores de Matemática do ensino médio.

Em 2011 surgiu o programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), um projeto do IMPA e da SBM com o apoio da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. O programa tem como objetivo capacitar os professores de Matemática da educação básica da rede pública. *"É um mestrado para fortalecer o ensino da Matemática na educação básica. Não dá para termos no Brasil alunos analfabetos em números"*, diz Hilário Alencar, presidente da SBM.

Além do excelente ensino dos conteúdos a serem abordados na rede básica de ensino, o PROFMAT desempenha um importante papel na formação do professor por exigir que o trabalho de conclusão de curso verse sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.

Este ano concluirão o mestrado cerca de 800 professores inscritos em 2011, isto significa que teremos 800 trabalhos com sugestões de práticas didáticas que contribuam para a melhoria do ensino da Matemática, que poderão ser disponibilizados para professores de todo o Brasil. E já temos turmas iniciadas em 2012 e 2013, isto significa que em 2015 teremos cerca de três mil trabalhos nesta linha, sem falar no excelente amadurecimento e fortalecimento do conhecimento matemático destes professores.

Diante deste trabalho de conclusão de curso que teria que apresentar para obter o meu título de mestra em Matemática e na minha aflição diante da dificuldade no ensino-aprendizagem da Matemática enfrentada por professores e alunos, pensei em desenvolver um produto que fosse de fácil acesso e manipulação para os professores. Pensando mais especificamente na escola pública, este produto precisava ser de baixo custo.

Minha ideia inicial era usar materiais manipuláveis pelos benefícios que esta metodologia traz no desenvolvimento e construção do pensamento do aluno, por ser uma possibilidade muito rica de contextualizar os conteúdos matemáticos, relacionando-os com situações mais concretas e promovendo uma aprendizagem mais prazerosa e natural. Mas comecei a ver alguns pontos negativos:

- É um recurso que exige um planejamento prévio, pois é preciso ter em mãos os seguintes materiais necessários para a manipulação: papel, E.V.A., papelão, cartolina, régua, tesoura, cola, compasso, transferidor, enfim os materiais necessários para a atividade desejada. Nem sempre a escola tem condições de arcar com estes materiais e os alunos precisam levá-los, em muitos casos ocorrem os transtornos, alguns alunos esquecem de levar o material necessário, outros levam um material inadequado;

- Geralmente o material produzido é descartado;

- O professor precisa ter um bom domínio de sala para conseguir auxiliar todos os alunos em suas dificuldades e descobertas, para evitar a dispersão e garantir o sucesso da atividade, não permitindo que a aula seja vista pelos alunos apenas como diversão;

- Por exigir um planejamento prévio, esta metodologia não pode ser usada num momento em que a dúvida do aluno não esteja relacionada diretamente com o conteúdo da aula planejada para aquele dia;

- Este é um tipo de aula que demanda muito tempo, não sendo viável ser sempre utilizada, para não comprometer o conteúdo programático.

Por estes motivos as atividades experimentais deixam boa parte dos professores inseguros e resistentes em aplicá-las em sala de aula. Os professores precisam se sentir seguros para aplicar uma metodologia diferente da que estão habituados. Contudo, este recurso não deve ser descartado, ele é fundamental para a construção do pensamento, mas não é um recurso que se possa fazer uso a qualquer momento, por isso não atende às minhas expectativas. Pensei em outras metodologias, mas eu queria algo que realmente funcionasse, que fosse possível para todas as escolas e professores.

Computadores e projetores de multimídia são limitados nas escolas. Os professores precisam agendar a utilização destes equipamentos. E, ainda, muitos professores não se sentem preparados para utilizar este recurso, por não terem intimidade com este tipo de tecnologia.

Um laboratório de Matemática nas escolas talvez fosse uma boa solução, mas este sonho encontra-se distante da realidade da maioria das escolas. E ainda precisaria de um bom preparo dos professores para utilizá-lo, agendar horários e levar os alunos até o laboratório. Então, pensei se não é possível levá-los até o laboratório, por que não levar o laboratório até eles? Precisamos mesmo é de materiais concretos que possam ser facilmente manipulados e que permitam o estudo da Matemática por meio da construção e observação crítica. Um material que possa ser utilizado sempre que necessário, um material que esteja ali, ao alcance das mãos.

Muitas vezes estamos trabalhando, por exemplo, com equações elementares e percebemos que nossos alunos estão com dificuldades em operações de frações, mas nós não havíamos preparado uma aula sobre frações. Tendo, ali mesmo na sala de aula, um material concreto, poderíamos rapidamente fazer uma ponte até as frações, a fim de que os alunos visualizem e revisem este conteúdo.

Outro exemplo é quando estamos trabalhando com funções afim ou quadráticas e uma determinada questão envolve áreas de figuras planas, mas os alunos apresentam dificuldades. Manipulando o nosso material podemos minimizar estas dúvidas e voltar à questão.

Como muitas vezes somos obrigados a retomar conteúdos que não estavam em nossos planos para tirar as dúvidas que surgem dos nossos alunos, a praticidade deste material faz com que o professor aproveite melhor esta oportunidade, pois é aí que se dá a aprendizagem, este é um momento riquíssimo e devemos estar preparados para ele. A dúvida é um caminho necessário ao conhecimento. Nesta ocasião o educador vai identificar o que o aluno já sabe e o que pode vir a saber sobre o conteúdo em estudo e fortalecer o conhecimento a partir dele. Neste instante o aluno está sedento por conhecimento.

Os materiais manipuláveis com certeza atendem à essa minha expectativa de construir o conhecimento junto com os alunos, aproveitando as suas dúvidas e os seus conhecimentos prévios, viajando pela História da Matemática e descobrindo como os primeiros matemáticos perceberam todas essas propriedades e operações. Mas não queria algo que os alunos manipulassem e depois fosse descartado, como ocorre na maioria das vezes, queria um material permanente, de baixo custo, que não incentivasse a dispersão dos alunos e que o professor conseguisse aplicar e dar suporte a todos, atingindo o objetivo.

Sendo assim, pensei em um quadro fixo, para manipulação do professor. Algo que fizesse parte da sala de aula, que fosse prático para o professor e, ao mesmo tempo, interessante para o aluno. Que desenvolvesse a construção e a reconstrução do conhecimento, fazendo com que o aluno participasse do processo, mas sem perder o foco.

Os materiais manipuláveis permitem ao aluno a construção do pensamento lógico, uma concepção da Matemática como construção humana, acompanhar o processo e não apenas o produto final, aprender a aprender. Dessa forma, o aluno assimila o conteúdo através da construção e não apenas pelas regras e fórmulas prontas. Assim, a acomodação do conteúdo se dará de forma mais segura, consistente e significativa. Ele participou do processo, seu raciocínio lógico foi ativado para acompanhar as construções, com isso o aluno fica aberto a novas descobertas e compreende que a Matemática não é estática e fria, ela é obra do homem e está em constante movimento.

Minha proposta não é que se faça uma aula diferente com a utilização de materiais manipuláveis, mas que estes sejam parte integrante das aulas de Matemática. De acordo com os PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais a utilização dos recursos didáticos numa perspectiva problematizadora é um dos princípios norteadores do ensino da Matemática.

> "Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão".(BRASIL, 1998, p. 57)

Considerando que o ensino da Geometria é um grande problema, já que constata-se que os alunos possuem pouco conhecimento dos conceitos básicos da mesma, este material constitui-se numa alternativa para que os discentes tenham uma melhor compreensão dos conteúdos da Geometria, no que diz respeito à sua visualização, construção e contextualização.

Acredito que esta proposta para as aulas de Matemática vem ao encontro dos anseios dos professores e dos alunos que buscam meios alternativos na sala de aula. Além de tornar as aulas de Matemática mais interessantes, esse caráter experimental da matemática, que foi removido do ensino, busca facilitar a fixação do conteúdo, a fim de melhorar a relação de ensino e aprendizagem, já que funciona como uma ponte para a transição do pensamento concreto para o abstrato, dando à Matemática um sentido especial e uma razão de ser.

CAPÍTULO 2

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A GEOMETRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

"A essência da Matemática não está nas fórmulas, mas nas ideias que impulsionam a criatividade de suas teorias."
Geraldo Ávila

2.1 Breve Histórico do Ensino de Matemática no Brasil

O problema da dificuldade do ensino-aprendizagem da Matemática não é só uma responsabilidade dos professores e alunos de hoje e sim um problema histórico.

Desde o momento em que a Matemática começou a tomar forma como área do conhecimento, ainda na era pitagórica, já estava associada a uma classe privilegiada. Sendo considerada uma ciência nobre, desligada dos ofícios e das atividades manuais, tinha o papel de encontrar *"espíritos talentosos"*. Dava-se ênfase a demonstrações de teoremas e a uma matemática puramente abstrata. A matemática que surgiu da necessidade de resolver problemas cotidianos, principalmente ligados ao comércio, às construções e às medidas de terras, foi deixada de lado, sob o julgamento de não engrandecer o espírito e não desenvolver o pensamento humano. Por tudo isso, recebeu *status* de nobreza e ainda hoje é vista da mesma maneira.

A implantação definitiva da disciplina Matemática ocorre com Platão, filósofo que já demonstrava uma preocupação com o ensino da Matemática. Ele defendia um ensino voltado para a resolução de problemas adequados à idade dos alunos e desenvolvidos de maneira lúdica, além de defender uma educação sem punições corporais por acreditar que esta não seria a forma mais adequada para solucionar o problema do desinteresse dos alunos pelos estudos.

No Brasil, as escolas foram implantadas pelos jesuítas e tinham um caráter clássico-humanista. Pouco se ensinava Matemática, quando muito, se ensinava a escrita dos números e as operações fundamentais, ainda assim destinada a uma pequena elite. As Ciências eram uma ameaça ao caráter religioso que se dava às escolas jesuítas. Os jesuítas fundaram 17 escolas no Brasil nos seus mais de 200 anos de permanência. Em apenas oito delas se ensinava algum tipo de Matemática.

As escolas superiores do Brasil não eram reconhecidas por Portugal. Os jesuítas ensinavam em causa própria, com interesses religiosos que os fortaleciam. Como a ordem jesuíta não atendia aos interesses de Portugal, ela foi expulsa em 1759 e suas escolas, fechadas. Com isso, surgiram novas escolas e a coroa portuguesa instaurou as *"aulas régias"*, instituídas pelo Marques de Pombal, onde as disciplinas eram ministradas isoladamente sem nenhuma articulação. Surgem aí, as disciplinas Álgebra, Aritmética e Geometria o que aparentemente representava um avanço no ensino da Matemática, mas que muito pouco contribuiu com este, pois, ensinadas isoladamente, de maneira dispersa e fragmentada, poucos alunos alcançavam a aprendizagem das mesmas.

Enquanto a educação no Brasil nascia com os jesuítas e chegava à adolescência com o Marques de Pombal, na Europa a Matemática prosperava com a resolução de vários questionamentos e o desencadear de muitas descobertas. Um importante acontecimento que contribuiu para esta prosperidade foi o surgimento da Geometria Analítica com Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) que permitiu uma fecunda identificação da Geometria com a Álgebra. Esta novidade permitiu a invenção do Cálculo Diferencial e Integral por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Tudo isso proporcionou uma explosão de descobertas no século XVII e futuramente veio a mudar o rumo do ensino da Matemática.

A democratização do ensino da Matemática nas salas de aula aconteceu somente após a revolução industrial no final do século XVIII. Desde então, sentiu-se a necessidade de ter trabalhadores com algum conhecimento matemático para operar as máquinas e trabalhar no comércio e também com conhecimentos bancários. À medida que a ciência moderna e a tecnologia avançavam, tornava-se inevitável discutir a educação dessa nova classe trabalhadora.

No fim do século XIX os norte-americanos resolveram reorganizar o currículo da escola secundária. A reforma mais audaciosa aconteceria no ramo da Matemática: a fusão da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. Os EUA resolveram unificar a Matemática no ensino secundário para torná-la mais utilitária, pois, até o momento, o seu principal objetivo era garantir o acesso ao ensino superior. Mas, com a revolução industrial, era necessário expandir o estudo das ciências na escola pública.

Ernest R. Breslich, matemático e defensor da fusão das áreas da Matemática, no prefácio do seu primeiro livro, intitulado *Fist-year Mathematics for Secundary School*, publicou:

> Álgebra e Geometria acrescentam uma à outra. Ambas são usadas para expressar fatos sobre quantidades, por exemplo, tanto o gráfico quanto a fórmula expressam a lei de grupo de fatos numéricos. Ambas dão estes fatos em forma facilmente entendida por olhos treinados, estabelecem os fatos de forma generalizada e, além disso, tornam as deduções de qualquer número de instância particular possível. Ao correlacionar as duas formas de pensar em um único curso de instrução a compreensão de quantidade do aluno é ao mesmo tempo simplificada e aprofundada, simplificada porque o duplo método de ataque torna mais fácil superar dificuldades, aprofundada por causa de uma impressão mais duradoura feita na mente. No curso apresentado neste livro, a Geometria é usada através de todo o livro para ilustrar processos algébricos, enquanto a Álgebra leva o raciocínio nos símbolos compactos e abstratos que generalizam fatos quantitativos em grau que é impossível na representação gráfica. (BRESLICH apud MIRANDA, 2003, p.49)

Na década de 30, ocorreu no Brasil, a exemplo do que ocorreu nos EUA, a unificação da Matemática por meio da proposta de Euclides Roxo ao Colégio Pedro II, estabelecimento de educação secundária, fundado em 1838, conhecido como *uma ilha de excelência do ensino brasileiro*. Mas esta unificação não foi efetivamente realizada, não foram interligados os conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria, eles não se misturaram e as aulas continuaram tradicionais e não poderiam ter tido outro resultado a não ser um grande número de reprovações e aversão à disciplina.

Após a 2ª Guerra, os EUA começam uma grande reforma no ensino da Matemática, com um excesso de informação que assustou a todos e em nada contribuiu para facilitar a aprendizagem da matéria. A Matemática era focada na forma dedutiva de abordar os conteúdos com exagero de formalismo e simbolismo, o que empobreceu e muito o ensino da Matemática.

Na década de 60 este movimento chega com muita força no Brasil, mudando todo o sistema de ensino. Adota-se novos livros e cria-se programas de ensino totalmente voltados para a Matemática Moderna. Porém, com os mesmos embates dos EUA, os exageros e a falta de preparação dos professores levaram a uma sucessão de fatos fracassados no ensino da Matemática.

Os primeiros indícios deste fracasso foram debatidos num Congresso Nacional de Ensino da Matemática, em 1973, que contou com a presença de professores do IMPA, que criticavam os excessos do Ensino da Matemática Moderna. Com isso, surgem movimentos contrários que se manifestaram em favor de uma Matemática que fizesse sentido ao aluno e valorizasse sua cultura e seus conhecimentos prévios. Surge, então, a tão conhecida Educação Matemática vislumbrando uma Matemática capaz de colaborar na educação de crianças, jovens e adultos.

A busca por metodologias que facilitassem o ensino da Matemática foi objeto de estudo de vários pesquisadores. Muitas metodologias surgiram e muitos professores, na ânsia por encontrar uma forma de melhorar suas aulas, testam diversas destas metodologias sem saber muito bem como utilizá-las e fundamentá-las. As metodologias mais utilizadas são os jogos e os materiais manipuláveis, mas sem uma contextualização e fundamentação matemática estes recursos não passam de tentativas vãs que só servem para tornar a aula mais divertida e não realizam o seu principal objetivo que é a aprendizagem matemática.

Para que essas novas metodologias tenham a eficácia esperada é necessário que os professores estejam bem preparados para utilizá-las. E vale salientar que a formação oferecida a futuros professores fica muito aquém de uma formação de qualidade. Nossos professores não saem da graduação preparados para o exercício da docência. Como reconhece os PCN's:

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática está relacionada ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. (BRASIL, 1997, p.22)

Os cursos de licenciatura precisam passar por uma reformulação. De nada adianta metodologias, como se fossem receitas, se os professores não estão capacitados para usá-las.

2.2 A História da Matemática como Recurso Didático

"A matemática é um esforço humano continuado. Tem um passado, um futuro, bem como um presente" (BERLINGHOFF, 2010).

Muitos alunos perguntam: *"Pra que serve a Matemática?", "Por que temos que aprender todas essas coisas, se nunca vamos usar?".*

É preciso mostrar ao aluno o verdadeiro papel da Matemática. Que seu ensino proporciona excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver as faculdades intelectuais, devido à riqueza dos diferentes processos de criatividade que exibe. Faz-se necessário ainda levá-lo a perceber que a Matemática tem papel fundamental na construção de todo o conhecimento e que foi graças a ela que grandes questionamentos foram respondidos como: *"Há quanto tempo o universo existe?", "Como os planetas se movimentam?", "De que é formada a matéria?", "O átomo é divisível?", "Será que a Terra é redonda?".*

Quanto a esta última pergunta, parece inacreditável, mas por muito tempo acreditou-se que a Terra era plana. Há aproximadamente 285 anos antes de Cristo, Eratóstenes descobriu que a Terra é redonda percebendo que a sombra de um objeto era levemente diferente no solstício de verão em duas cidades diferentes (Syene e Alexandria), pois raios de sol paralelos deveriam projetar sombras de tamanho igual se a Terra fosse plana. E, mais do que isso, conseguiu calcular a circunferência quase exata do nosso planeta, com uma precisão incrivelmente correta para a época, com uma simples regra de três, a aproximação angular entre duas cidades e a distância entre as mesmas.

É aí que está a beleza da Matemática, ela surgiu para responder a perguntas que mudaram a ideia do homem a respeito do mundo em que vivia. A partir do século VI a.C. muitas perguntas começaram a ser respondidas. Foram ideias matemáticas simples como as de semelhança de figuras e proporcionalidade que permitiram aos astrônomos, no século III a.C., calcular o tamanho da Terra, do Sol e da Lua e as distâncias a que se encontram estes astros da Terra.

É interessante ressaltar para os alunos a época em que estas descobertas foram feitas e levá-los a pensar como isso seria possível sem a Matemática, se naquela época não existia a tecnologia que temos hoje? Assim, os alunos começam a reconhecer a importância e ao mesmo tempo a simplicidade da Matemática.

É importante ainda ressaltar que as ideias de Copérnico, Galileu e Kepler sobre o sistema solar, que culminaram com a teoria de gravitação de Newton, no século XVII, resgataram a antiga ideia de Pitágoras (séc. VI a.C.) de que *"o número é a chave para a compreensão dos fenômenos"*, pois confirmaram que os movimentos dos planetas seguiam a leis matemáticas precisas.

No século XIX a Matemática ajuda a resolver as questões sobre a constituição da matéria. E as descobertas, graças a Matemática, não param. Temos tido vários avanços na Biologia Molecular e na Tecnologia. Até mesmo a Arte, a Música, a Arquitetura e a Pintura têm sofrido influências matemáticas.

Com todo esse aparato, o professor pode guiar o aluno pelos caminhos da história, levando-os a refazer os passos que foram dados por esses matemáticos de modo a despertar-lhes a admiração e fazê-los lançar um outro olhar sobre o largo alcance que essa ciência pode ter.

Ávila, em seu livro *Várias Faces da Matemática*, assim justifica o ensino da Matemática:

> A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa.
> O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.
> O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade. (ÁVILA, 2010, p.8)

Não basta expor a História da Matemática, é necessário também dar a devida atenção aos teoremas e demonstrações. É importante que os alunos refaçam a trajetória que os matemáticos fizeram para comprovarem as suas intuições. Segundo Ávila:

> "É importante ter sempre presente que em todos os tópicos do ensino, inclusive nas demonstrações, é de suma importância ressaltar as ideias envolvidas, pois são elas que podem despertar o interesse do aluno, se é que o ensino esteja sendo bem conduzido. (ÁVILA, 2010, p.12)

Chega a ser um crime privar os alunos das demonstrações. Não podemos sobrecarregá-los com demonstrações pesadas e tediosas, mas também, como diz o professor Sérgio Mota Alves, não podemos roubar a Matemática dos alunos. E, se bem enunciados, situados historicamente e, se possível, fazendo uso de material concreto, estes teoremas podem ser demonstrados com leveza e fazer com que os alunos se encantem com a Matemática.

2.3 A Geometria: Uma Grande Aliada da Álgebra e da Aritmética

"A palavra geometria deriva das palavras gregas geo (terra) + metros (medir) e literalmente significa medir a terra. Eis aí uma explicação etimológica para os alunos compreenderem que a Geometria realmente nasceu de uma necessidade prática de medição de terras" (FILHO, 2010, p.115), dessa maneira podem perceber a utilização e aplicação da Matemática mais concretamente.

Fazer uma ponte entre os tópicos da Matemática com o dia-a-dia do aluno nem sempre é fácil ou possível. Mas há uma forma de maximizar esta contextualização usando a própria Matemática. Muitos tópicos da Aritmética e da Álgebra podem ser introduzidos a partir da Geometria. Como sugere os PCN's:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência." (BRASIL, 1998, p.43)

O objetivo é aproveitar a história da criação da geometria, utilizar toda a riqueza da História da Matemática com seus aspectos culturais para traçar estratégias que humanizem a Matemática. Fazer com que o aluno perceba que as fórmulas matemáticas têm fundamento e que antes de todas aquelas demonstrações algébricas houve a descoberta, a percepção do homem de que isso ocorreria. Só então foram feitas as demonstrações. É importante também informar aos alunos que muitas descobertas foram feitas por um matemático, por meio da intuição, visualização e comprovação, mas só foram de fato demonstradas tempos depois por outros matemáticos.

Não se deve esquecer de que a Geometria não só pode, como deve ser usada para contribuir no aprendizado da Matemática, dinamizar as aulas, facilitar a visualização de diversas propriedades matemáticas, levar o aluno a construções que permitam o seu pensamento crítico e reflexivo em relação a diversas áreas da Matemática. Além disso, deve-se considerar trabalhar a Geometria e a Álgebra de forma integrada com a utilização de materiais manipuláveis como uma forma de tornar a Matemática palpável ao aluno, uma vez que as formas geométricas podem ser facilmente observadas no dia-a-dia e na natureza.

Confirmam isso, Miguel, Miorim e Fiorentini (1992), ao dizerem que a Geometria tende a desempenhar um papel facilitador para a construção de conceitos e na percepção de propriedades algébricas e aritméticas. Na Álgebra, por exemplo, pode auxiliar nas propriedades das operações com expressões algébricas e ainda nos casos de resolução de equações de 2º grau.

O que se propõem aqui nada mais é do que de fato a unificação da Aritmética, da Álgebra e da Geometria que ocorreu no Brasil na década de 30, a exemplo do que ocorria nos EUA, mas que não foram de fato entrelaçadas. Para justificar esse movimento de unificação dessas três áreas do conhecimento os matemáticos favoráveis a ele assim as correlacionaram: *A Álgebra está correlacionada com Aritmética pela introdução da fórmula algébrica e da equação linear; a Geometria com a Aritmética pela mensuração; a Geometria com a Álgebra pela introdução de problemas geométricos simples, capazes de solução algébrica.*

Os pioneiros desta unificação foram René Descartes e Fermat com a criação da Geometria Analítica. Descartes escrevia sobre os fundamentos da Geometria Analítica com maestria. Em sua obra mais famosa, *Discurso Sobre o Método*, apresentou suas ideias sobre a unificação da Álgebra e da Geometria.

D'Ambrósio (2007) ao relatar sua experiência em um curso que ministrou para futuros professores de Matemática destacou a importância da História da Matemática e da sinergia necessária entre as ideias da Álgebra e da Geometria. Ela falou do quanto o estudo da História da Matemática surpreende futuros professores ao perceberem como a Geometria estabelece o alicerce da Álgebra e a base geométrica das operações numéricas.

Alguns algoritmos rotineiros da Álgebra se tornam explicados geometricamente. Por exemplo, o quadrado da soma, hoje representado por $(a + b)^2$, aparece nos Elementos de

Euclides e sua prática é baseada na Geometria, bem como todas as proposições nos Elementos de Euclides.

D'Ambrósio relata, ainda neste artigo, que muitos professores nunca viram uma prova geométrica das relações algébricas conhecidas e utilizadas como triviais. E também nunca viram a resolução de equações quadráticas geometricamente.

A utilização de materiais manipuláveis pode facilitar a visualização geométrica de todos esses conceitos. Este uso não deve ser feito apenas para que a aula fique mais divertida, mas para que o aluno possa visualizar a construção do conhecimento matemático de maneira fundamentada, facilitando assim a compreensão do mesmo.

CAPÍTULO 3

QUADRO MAGNÉTICO

Ao pensar em um material permanente para a sala de aula, pensei em algo que tivesse mobilidade. Deveria ser um material que pudesse ficar na sala e que tivesse dinâmica. Não queria uma coisa estática. Pensei então num quadro de metal onde fosse possível trabalhar com peças imantadas.

Sendo assim, desenvolvi um quadro de metal de dimensões 100 cm x 80 cm e *kits* com peças em acrílico com imã no verso. Assim, o professor pode mover essas peças construindo e reconstruindo figuras que levem o aluno a pensar, fazer grandes descobertas e refazer alguns passos feitos por grandes matemáticos.

Confeccionei, inicialmente, seis *kits*. Fotos no Anexo B.

- Um quebra cabeça chinês, o tangram, para trabalhar com a ideia de frações, frações equivalentes e adição e subtração de frações;

- Áreas de figuras planas com decomposição ou composição de figuras de áreas já conhecidas como o retângulo e o paralelogramo;

- Área do círculo decompondo-o em um paralelogramo;

- Demonstração das relações métricas no triângulo retângulo através de áreas de figuras planas;
- Demonstração dos produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, diferença de quadrados e quadrado da soma de três termos;
- Resolução de equações de 2º grau e demonstração da fórmula de Bháskara completando quadrados.

Muitos outros *kits* podem ser inseridos. O próprio professor pode descobrir outros *kits* e confeccioná-los em acrílico mesmo, ou em E.V.A. que também dá um bom resultado.

3.1 Tangram

O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por sete peças. Surgiu há mais de 2.000 anos e seu nome original, "Tchi Tchião Pan", significa "Sete Peças da Sabedoria".

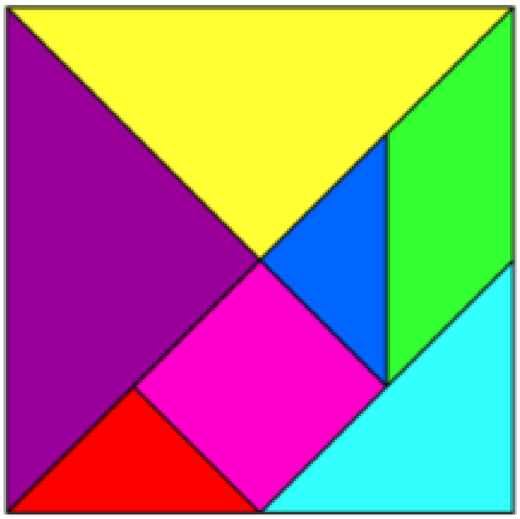

Figura 3.1: Tangram 01

Este *kit* é composto por:

- um *banner* com uma base quadrangular;

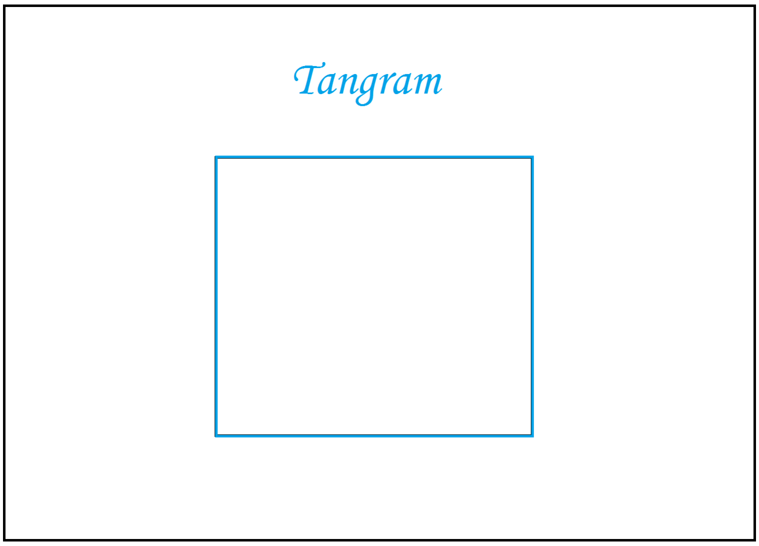

Figura 3.2: Tangram 02

- um paralelogramo;
- um quadrado;
- 21 triângulos.

3.1.1 Frações equivalentes

O tangram é composto por sete peças, dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Como é possível perceber, nem todas tem a mesma área. Vamos dividí-lo em partes iguais. O triângulo pequeno compõe todas as peças do tangram.

- Cada triângulo grande é composto por quatro triângulos pequenos;
- O paralelogramo, o quadrado e triângulo médio, cada um, é composto por dois triângulos pequenos.

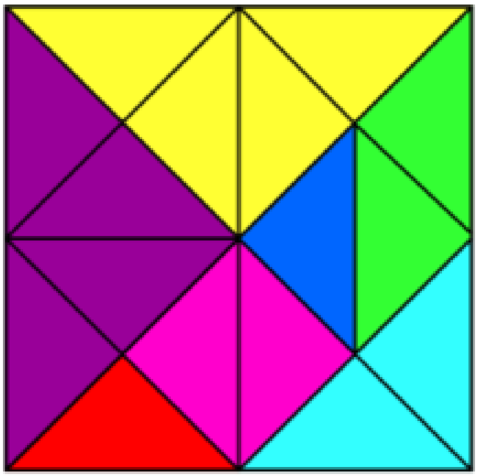

Figura 3.3: Tangram 03

Assim, o tangram pode ser dividido em 16 partes iguais, cada uma representada por um triângulo pequeno.

Queremos saber que fração do tangram o triângulo grande representa.

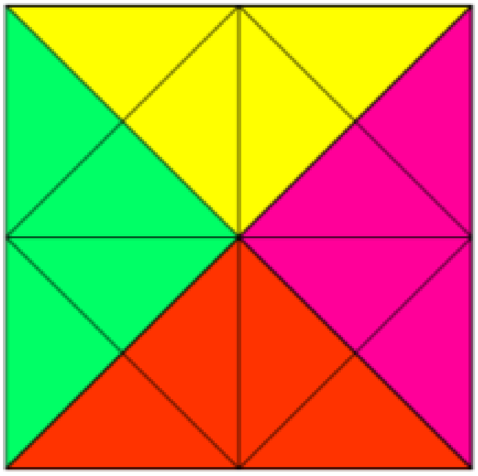

Figura 3.4: Tangram 04

Cada triângulo grande representa $\frac{4}{16}$ do tangram. Como o tangram também pode ser composto por quatro triângulos grandes, cada um desses triângulos pode ser representado, também, por $\frac{1}{4}$.

Assim, $\frac{4}{16}$ e $\frac{1}{4}$ representam a mesma parte do tangram, dizemos que $\frac{4}{16}$ e $\frac{1}{4}$ são frações equivalentes.

Matematicamente,

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Queremos saber que fração do tangram o triângulo médio representa.

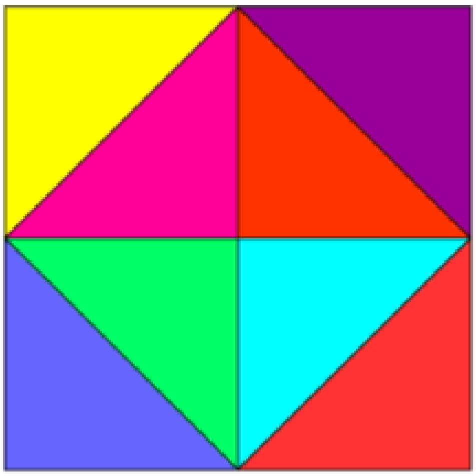

Figura 3.5: Tangram 05

Cada triângulo médio é composto por dois triângulos pequenos, então ele representa $\frac{2}{16}$ do tangram. Como o tangram também é composto por oito triângulos médios, cada um desses triângulos representa, também, $\frac{1}{8}$ do tangram.

Assim, $\frac{2}{16}$ e $\frac{1}{8}$ são frações equivalentes.

Matematicamente,

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Outro exemplo:

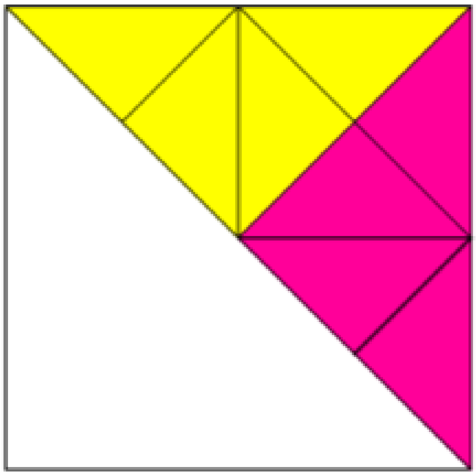

Figura 3.6: Tangram 06

Dois triângulos grandes representam $\frac{1}{2}$ do tangram. Como dois triângulos grandes são compostos por oito triângulos pequenos, temos que

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}.$$

Observação: Estes são alguns exemplos de frações equivalentes que podem ser trabalhadas com o tangram. Outros exemplos podem, e devem, ser trabalhados.

Representados por frações do tangram, temos:

- um triângulo grande: $\frac{1}{4}$;
- um triângulo médio: $\frac{1}{8}$;
- um triângulo pequeno: $\frac{1}{16}$;
- um paralelogramo: $\frac{1}{8}$;
- um quadrado: $\frac{1}{8}$.

3.1.2 Adição e subtração de frações

- Se somarmos as frações que representam dois triângulos pequenos, um paralelogramo, um triângulo médio e um quadrado encontramos como resultado que fração do tangram?

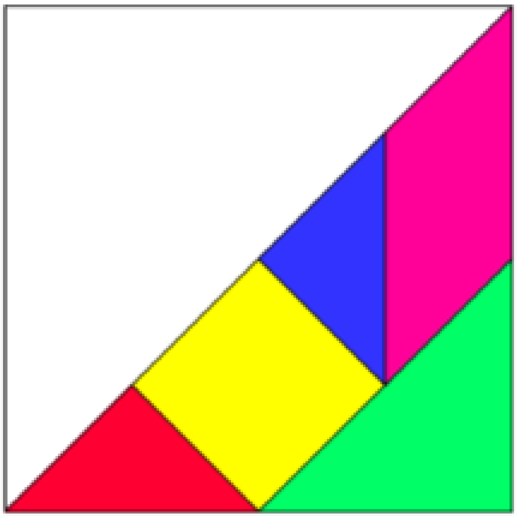

Figura 3.7: Tangram 07

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

- E se somarmos as frações que representam um triângulo grande e um paralelogramo?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

- E se somarmos as frações que representam todas as peças do tangram?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{16}{16}=1.$$

- Se retirarmos do tangram o quadrado e o paralelogramo vamos encontrar como resultado que fração?

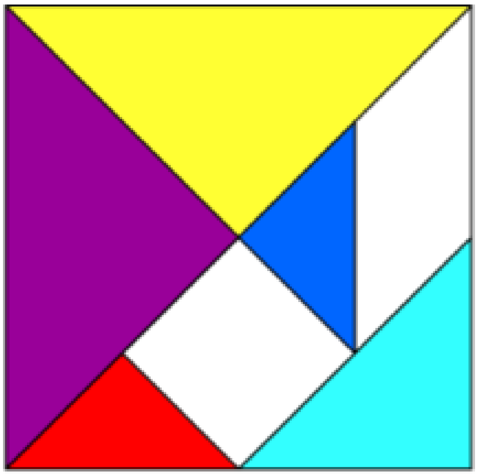

Figura 3.8: Tangram 08

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{16}{16} - \frac{2}{16} - \frac{2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

- Se do triângulo grande retirarmos a fração equivalente ao triângulo pequeno encontramos como resultado que fração?

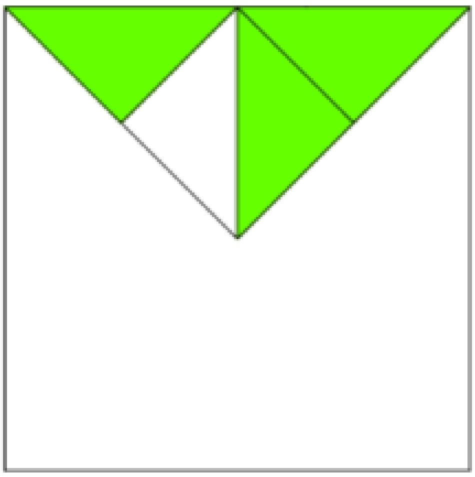

Figura 3.9: Tangram 09

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Observação: Estes são alguns exemplos de adição e subtração de frações. Outros exemplos podem, e devem, ser usados.

3.2 Áreas de Figuras Planas

Para a utilização deste *kit* é necessário que os alunos já tenham um conhecimento prévio da definição de polígonos e conheçam as propriedades dos quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

Este *kit* é composto por:

- nove quadrados, cinco triângulos e três trapézios;
- um *banner*.

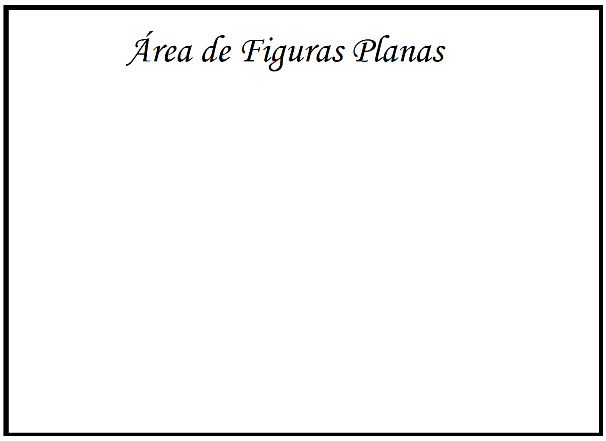

Figura 3.10: Área de Figuras Planas 01

3.2.1 Área do quadrado

Axioma: Se ABCD é um quadrado de lado medindo a, então, sua área é a^2.

Consideremos como unidade de área um quadrado cujo lado mede a, com área, por definição, igual a a^2.

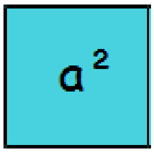

Figura 3.11: Área de Figuras Planas 02

Vamos, agora, construir um quadrado cujo lado mede $2a$.

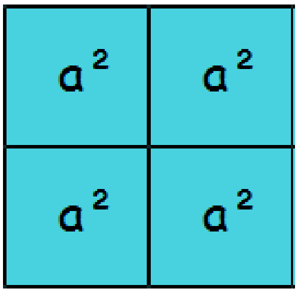

Figura 3.12: Área de Figuras Planas 03

Este quadrado tem como área $4a^2$.

Vamos, agora, construir um quadrado cujo lado mede $3a$.

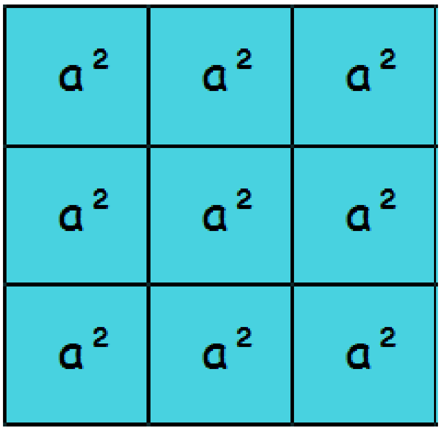

Figura 3.13: Área de Figuras Planas 04

Este quadrado tem como área $9a^2$.

Concluímos, então, que um quadrado de lado l tem área l^2.

$$\textit{Área do quadrado} = l^2.$$

3.2.2 Área do retângulo

Construindo um retângulo com a composição de dois quadrados de lado a, temos:

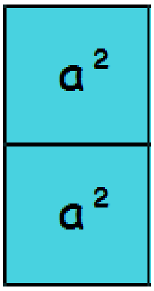

Figura 3.14: Área de Figuras Planas 05

A área deste retângulo, de base a e altura $2a$, é igual a $2a^2$, que pode ser representada por $(a \times 2a)$.

Construindo um retângulo com a composição de oito quadrados de lado a, podemos ter:

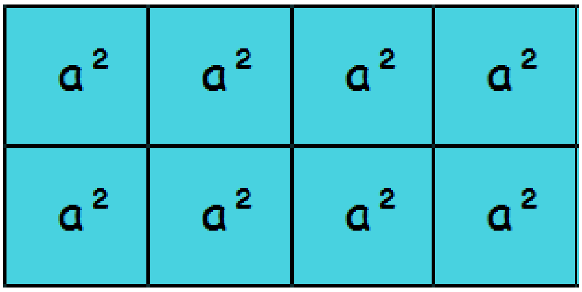

Figura 3.15: Área de Figuras Planas 06

A área deste retângulo, de base $4a$ e altura $2a$, é igual a $8a^2$, que pode ser representada por $(4a \times 2a)$.

Construindo um retângulo com a composição de seis quadrados de lado a, obtemos:

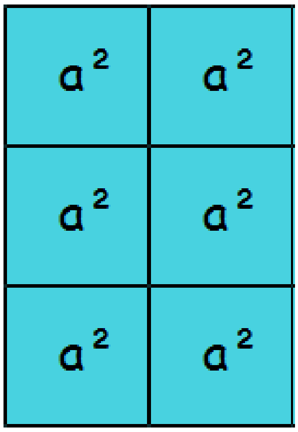

Figura 3.16: Área de Figuras Planas 07

A área deste retângulo, de base $2a$ e altura $3a$, é igual a $6a^2$, que pode ser representada por $(2a \times 3a)$.

Podemos concluir que um retângulo de base b e altura h tem como área $(b \times h)$.

$$\textit{Área do retângulo} = b \times h.$$

3.2.3 Área do paralelogramo

Axioma: Polígonos congruentes possuem a mesma área.

Com o paralelogramo abaixo:

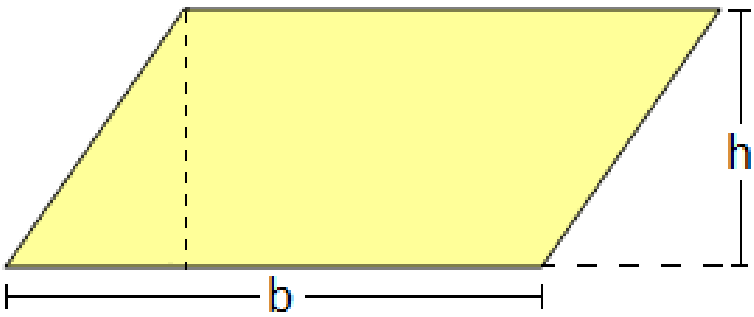

Figura 3.17: Área de Figuras Planas 08

Podemos formar o seguinte retângulo:

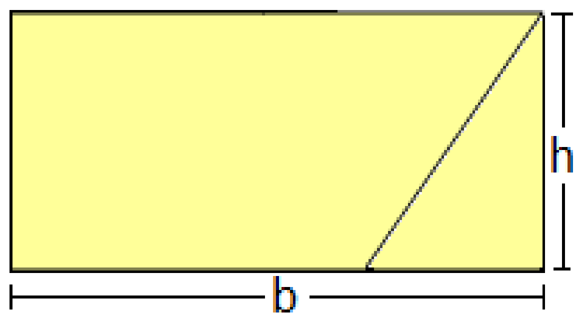

Figura 3.18: Área de Figuras Planas 09

Como o retângulo e o paralelogramo foram construídos pela composição dos mesmos polígonos, suas áreas são iguais.

$$\text{\textit{Área do paralelogramo}} = \text{\textit{Área do retângulo}}.$$

$$\text{\textit{Área do paralelogramo}} = b \times h.$$

3.2.4 Área do triângulo

Da composição destes triângulos congruentes de base b e altura h:

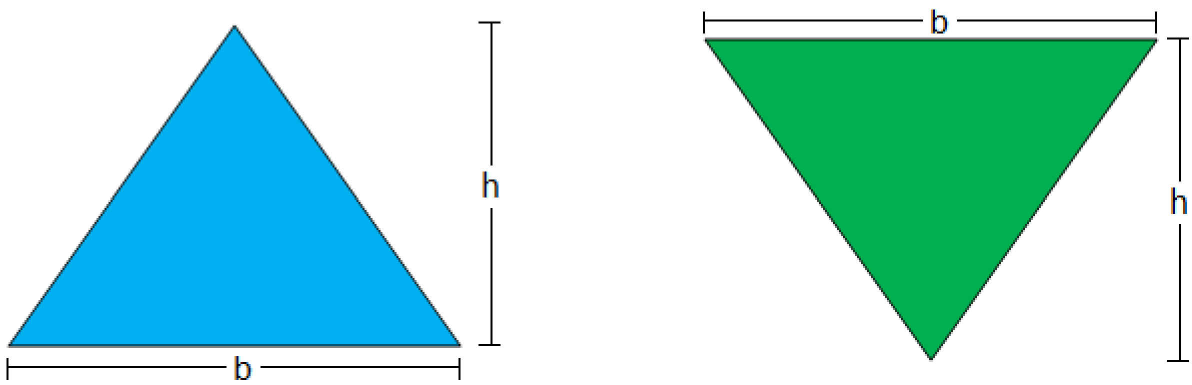

Figura 3.19: Área de Figuras Planas 10

Podemos obter um paralelogramo de base b e altura h.

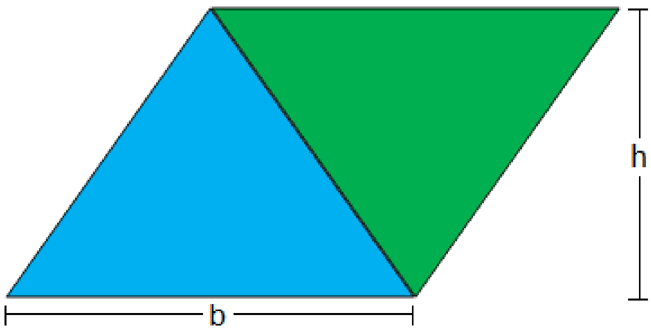

Figura 3.20: Área de Figuras Planas 11

Sendo assim, a área de um triângulo de base b e altura h é igual à metade da área de um paralelogramo de base b e altura h.

$$\textit{Área do triângulo} = \frac{1}{2}\textit{Área do paralelogramo}.$$

$$\textit{Área do triângulo} = \frac{b \times h}{2}.$$

3.2.5 Área do trapézio

Da composição destes dois trapézios congruentes de base maior B, base menor b e altura h:

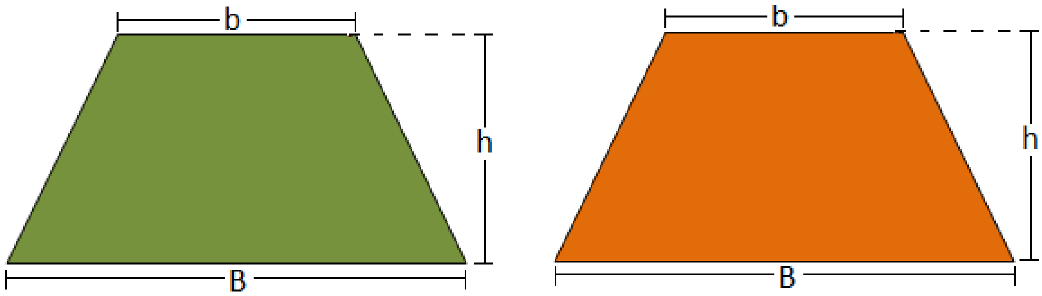

Figura 3.21: Área de Figuras Planas 12

Podemos obter um paralelogramo de base $(B + b)$ e altura h.

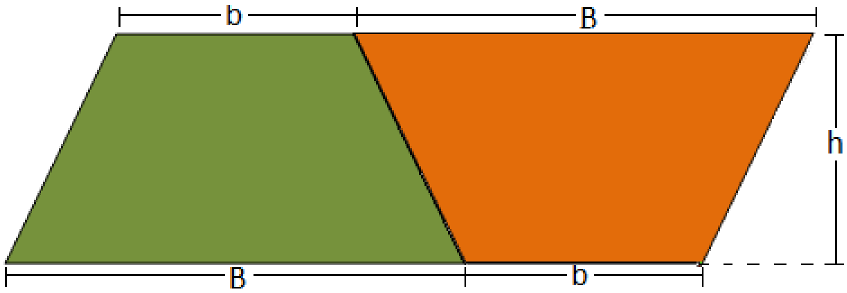

Figura 3.22: Área de Figuras Planas 13

Sendo assim, a área de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual à metade da área de um paralelogramo de base $(B + b)$ e altura h.

$$\acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \frac{1}{2}\acute{A}rea\ do\ paralelogramo.$$

$$\acute{A}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

3.2.6 Área do losango

Da decomposição de um losango de diagonal maior D e diagonal menor d:

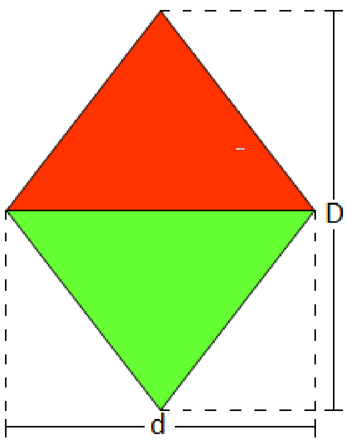

Figura 3.23: Área de Figuras Planas 14

Podemos obter um paralelogramo de base d e altura $\frac{D}{2}$.

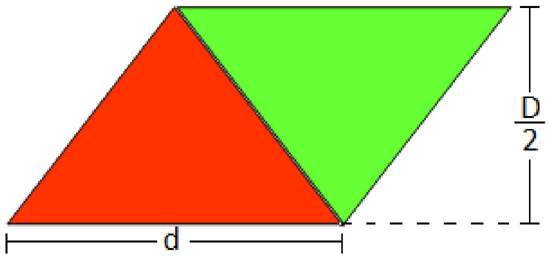

Figura 3.24: Área de Figuras Planas 15

Assim, a área de um losango de diagonal maior D e diagonal menor d é igual à área de um paralelogramo de base d e altura $\frac{D}{2}$.

$$\acute{A}rea\ do\ losango = \acute{A}rea\ do\ paralelogramo.$$

$$\acute{A}rea\ do\ losango = \frac{D \times d}{2}.$$

3.3 Área do Círculo

Para a utilização deste *kit* é necessário que os alunos já tenham um conhecimento prévio da área do paralelogramo, do comprimento do círculo e da propriedade de que o raio é perpendicular à reta tangente ao círculo no ponto de tangência.

Este *kit* é composto por:

- 48 setores circulares;
- Um *banner*.

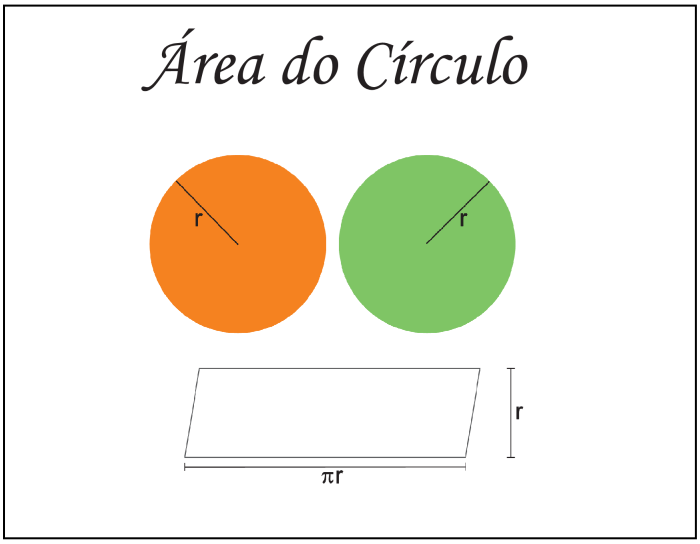

Figura 3.25: Área do Círculo 01

Montamos, então, duas figuras:

- Um círculo com 12 setores laranja e 12 setores verde-limão;

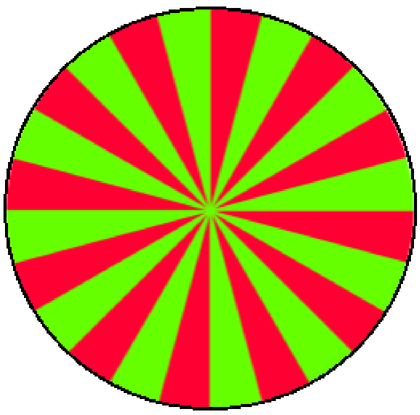

Figura 3.26: Área do Círculo 02

Temos aqui um círculo de raio r.

- Um paralelogramo (aproximado) com 12 setores laranja e 12 setores verde-limão.

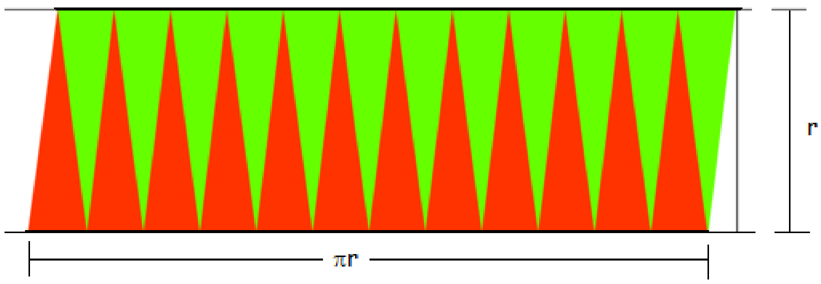

Figura 3.27: Área do Círculo 03

Aqui, temos um paralelogramo (aproximado) de altura r e comprimento πr.

Como já sabemos, a área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

$$\text{\textit{Área do paralelogramo}} = \pi r \times r = \pi r^2.$$

Como a área do círculo de raio r é igual à área do paralelogramo de altura r e comprimento πr, temos que a área do círculo é dada por πr^2.

$$\text{\textit{Área do círculo}} = \pi r^2.$$

Quando falamos que o paralelogramo é aproximado é por que a sua base é formada por setores circulares e, portanto, não é um segmento de reta. É interessante o professor dizer aos alunos que quanto mais setores fizermos mais próximo de um segmento de reta ficará a base deste paralelogramo. Pode-se trabalhar com a ideia do número de setores tendendo para o infinito.

3.4 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Este *kit* permite mostrar experimentalmente as relações métricas no triângulo retângulo, através da comparação de áreas de figuras planas. Para tanto é necessário que os alunos tenham um conhecimento prévio de área do quadrado, do retângulo, do triângulo e, também, dos elementos de um triângulo retângulo tais como: hipotenusa, catetos, altura e projeção ortogonal do cateto em relação à hipotenusa.

O *kit* é composto por seis triângulos retângulos, cinco quadrados, três retângulos e um *banner*.

- Os triângulos retângulos: Dois de hipotenusa a e catetos b e c. Dois de hipotenusa c e catetos n e h, projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa e altura relativa à hipotenusa, respectivamente. Dois de hipotenusa b e catetos m e h, projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa e altura relativa à hipotenusa, respectivamente.

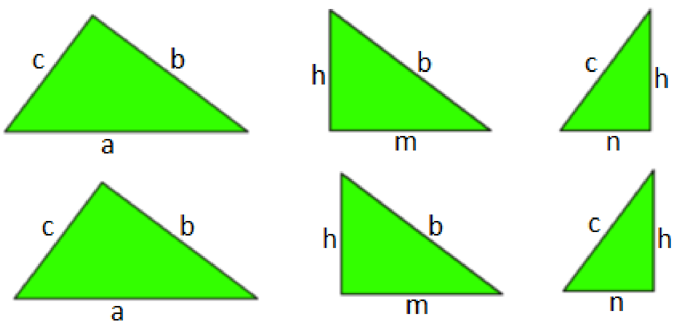

Figura 3.28: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 01

- Os quadrados: São quadrados cujos lados medem a, b, c, h e n

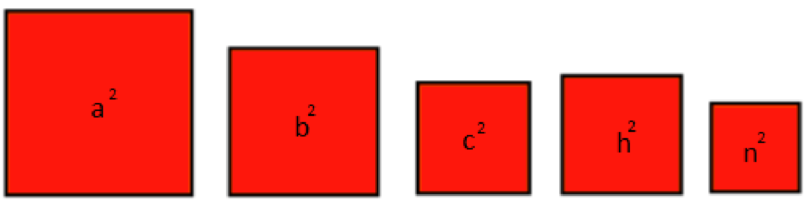

Figura 3.29: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 02

- Os retângulos: São retângulos de dimensões: $a \times m$, $a \times n$ e $m \times n$.

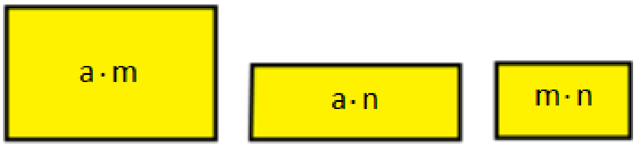

Figura 3.30: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 03

- O *banner*: É um *banner* com uma base quadrangular com área $(b+c)^2$, para auxiliar nas demonstrações.

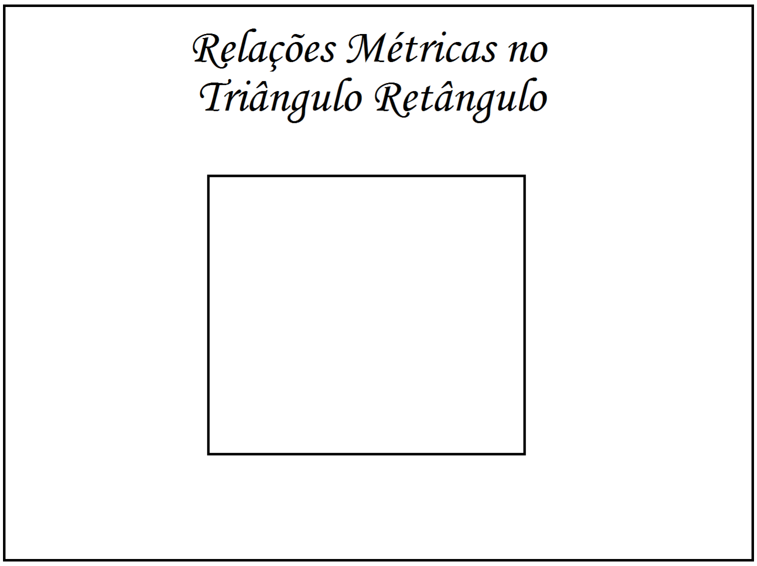

Figura 3.31: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 04

3.4.1 Teorema de Pitágoras: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos

.

Para demonstrar geometricamente esta relação posicionamos o quadrado de lado a e todos os triângulos.

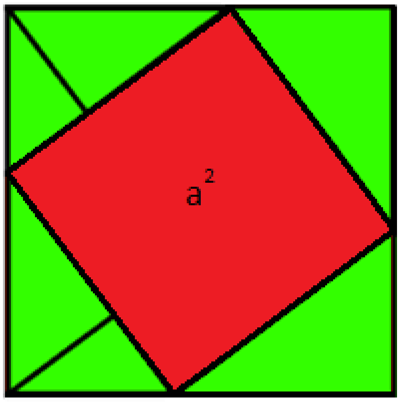

Figura 3.32: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 05

O quadrado de lado a é substituído pelos quadrados de lados b e c, e os triângulos, reposicionados.

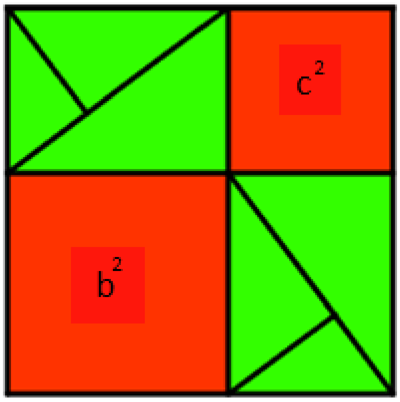

Figura 3.33: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 06

Logo, a área do quadro de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.4.2 Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida do cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do cateto

.

Para demonstrar geometricamente esta relação posicionamos os quadrados cujos lados medem b e c e todos os triângulos.

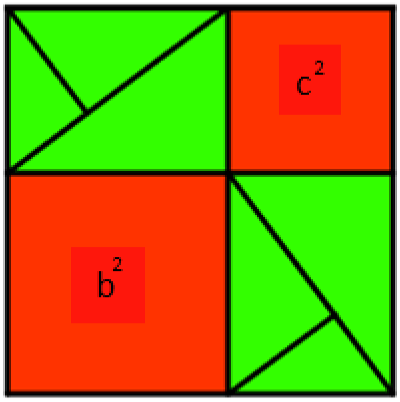

Figura 3.34: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 07

O quadrado de lado b é substituído pelo retângulo de área $a \times m$, e os triângulos, reposicionados.

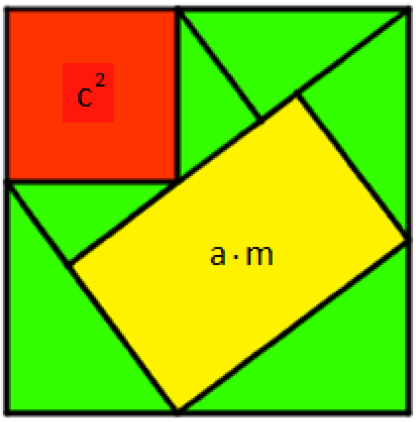

Figura 3.35: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 08

Logo, a área do quadrado de lado b é igual à área do retângulo de área $a \times m$, ou seja,

$$b^2 = a \times m.$$

3.4.3 Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da altura é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos relativas à hipotenusa.

Para demonstrar geometricamente esta relação posicionamos os quadrados cujos lados medem b, h e n e todos os triângulos.

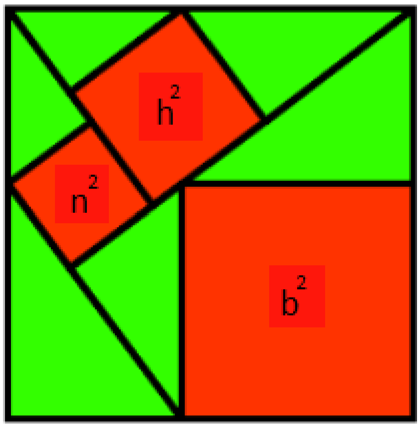

Figura 3.36: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 09

O quadrado de lado h é substituído pelo retângulo de área $m \times n$, e os triângulos, reposicionados.

Logo, a área do quadrado de lado h é igual à área do retângulo de área $m \times n$, ou seja,

$$h^2 = m \times n.$$

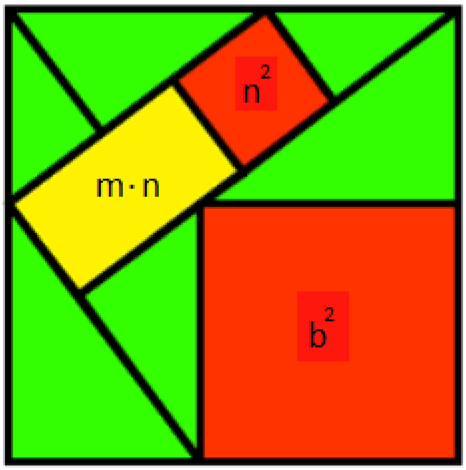

Figura 3.37: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 10

3.4.4 Em todo triângulo retângulo o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a esta é igual ao produto das medidas dos catetos.

Para demonstrar geometricamente esta relação posicionamos os triângulos de hipotenusa a e catetos b e c, hipotenusa c e catetos n e h e hipotenusa b e catetos m e h, formando um retângulo cuja área é dada pelo produto da hipotenusa a pela altura h.

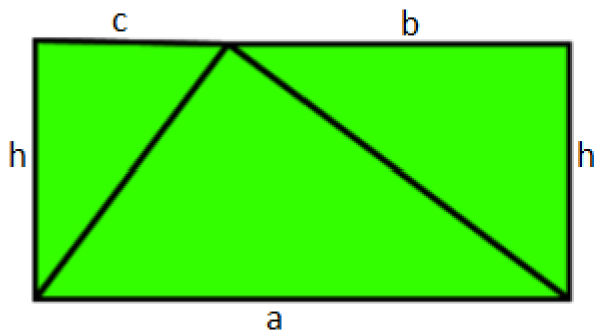

Figura 3.38: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 11

Os triângulos são reposicionados de modo que as projeções m e n dos triângulos menores coincidam com a hipotenusa a, formando um retângulo cuja área é dada pelo produto dos catetos b e c.

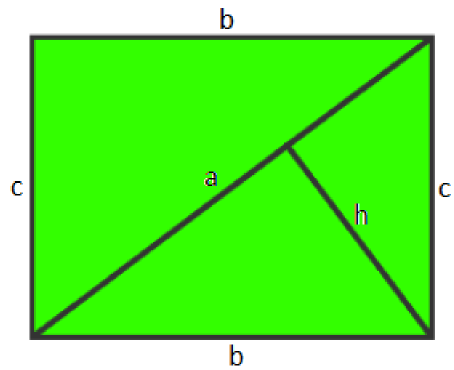

Figura 3.39: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 12

Logo, a área do retângulo de dimensões $a \times h$ é igual à área do retângulo de dimensões $b \times c$, ou seja,

$$a \times h = b \times c.$$

Esta é uma demonstração experimental, geométrica, das relações métricas no triângulo retângulo. A fim de levar os alunos do concreto para o abstrato, estas mesmas relações podem ser demonstradas, posteriormente, através da semelhança de triângulos. Realizar estas demonstrações das duas maneiras é interessante, por mostrar aos alunos que não existe uma única maneira de se chegar aos resultados desejados. E, ainda, por permitir a revisão de dois conteúdos: áreas de figuras planas e semelhança de triângulos.

3.5 Produtos Notáveis

Para a utilização deste *kit* é necessário que os alunos tenham um conhecimento prévio de áreas de quadrados e retângulos, potenciação e operações com polinômios.

Este *kit* é composto por:

- seis quadrados e 12 retângulos;
- um *banner*.

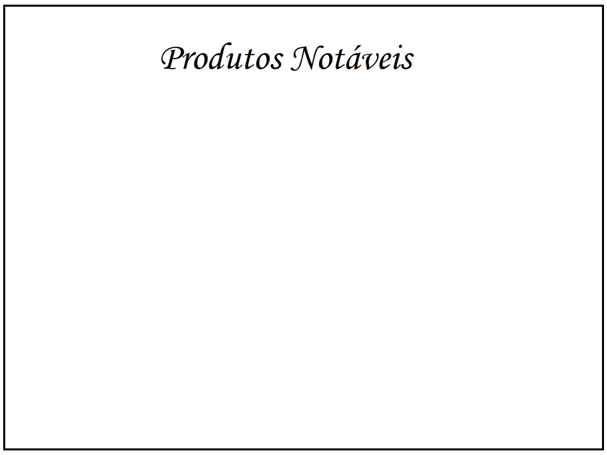

Figura 3.40: Produtos Notáveis 01

3.5.1 Quadrado da soma de dois termos

Temos na figura abaixo, um quadrado de lado medindo $(a + b)$, resultante da composição de um quadrado de lado medindo a, um quadrado de lado medindo b e dois retângulos congruentes de dimensões $a \times b$.

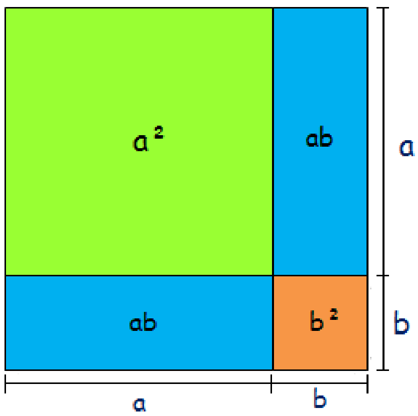

Figura 3.41: Produtos Notáveis 02

Como a área do quadrado de lado medindo $(a + b)$ é igual a soma das áreas dos polígonos que o compõem, temos que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3.5.2 Quadrado da diferença de dois termos

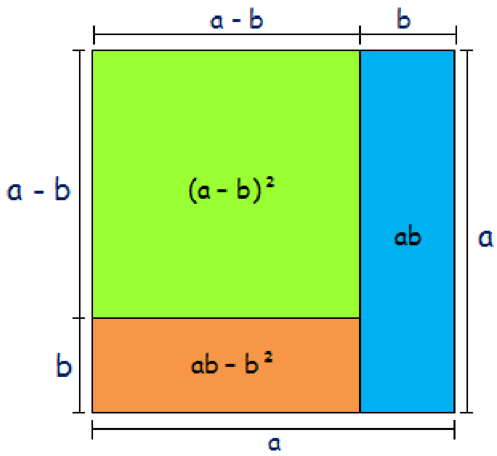

Figura 3.42: Produtos Notáveis 03

Na figura 3.42 temos um quadrado de lado medindo a, composto por um quadrado de lado medindo $(a-b)$, um retângulo de dimensões $b \times a$ e um retângulo de dimensões $(a-b) \times b$.

A expressão para a área do quadrado de lado medindo $(a-b)$ pode ser obtida retirando-se do quadrado de lado medindo a, o retângulo de dimensões $b \times a$ e o retângulo de dimensões $(a-b) \times b$.

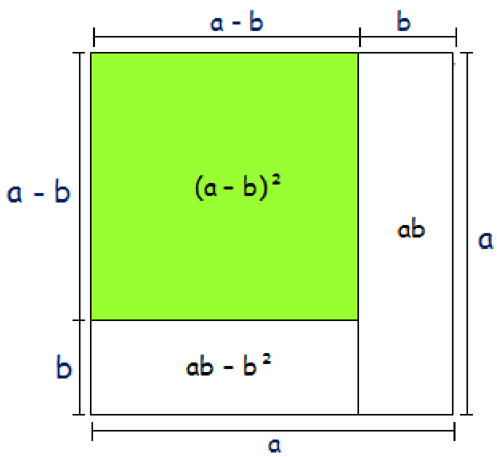

Figura 3.43: Produtos Notáveis 04

Assim, a área do quadrado de lado medindo $(a-b)$, pode ser dada por

$$(a-b)^2 = a^2 - (ab - b^2 + ab) = a^2 - 2ab + b^2.$$

3.5.3 Produto da soma pela diferença de dois termos

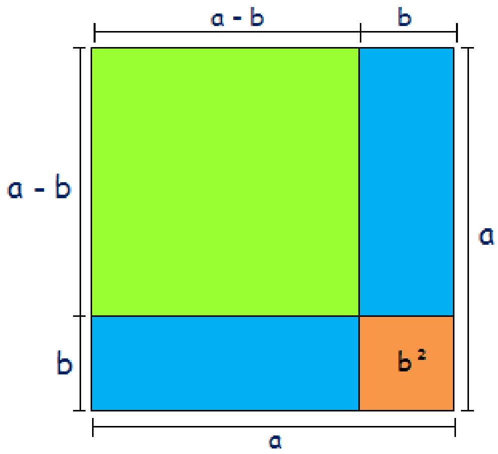

Figura 3.44: Produtos Notáveis 05

Na figura 3.44 temos um quadrado de área a^2. O que queremos é calcular a área de um retângulo de base $(a+b)$ e altura $(a-b)$. Para isso vamos retirar do quadrado original, de lado medindo a, o quadrado menor de lado medindo b.

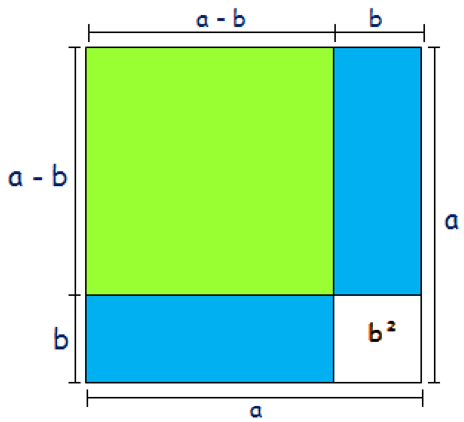

Figura 3.45: Produtos Notáveis 06

A área desta figura é igual a área do quadrado de lado medindo a menos a área do quadrado de lado medindo b, isto é, $a^2 - b^2$.

Agora, vamos rearrumar esta figura da seguinte forma:

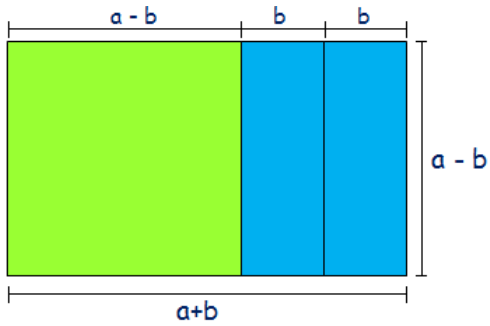

Figura 3.46: Produtos Notáveis 07

Este retângulo de base $(a+b)$ e altura $(a-b)$ possui a mesma área da figura anterior, pois é composta pelos mesmos polígonos. Como a área do retângulo é dada pelo produto da medida base pela medida da altura, temos que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

3.5.4 Quadrado da soma de três termos

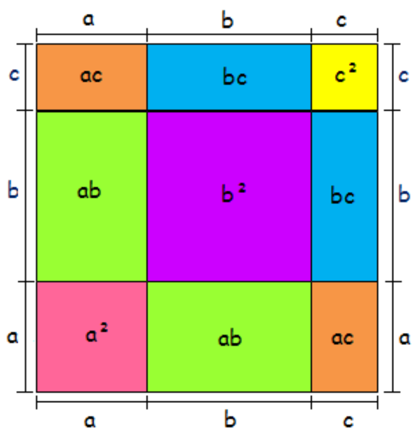

Figura 3.47: Produtos Notáveis 08

Na figura 3.47 está representado um quadrado cujo lado mede $(a+b+c)$ e é composto por três quadrados, cujos lados medem a, b e c, retângulos congruentes, dois de dimensões $b \times c$, dois de dimensões $a \times c$ e dois de dimensões $a \times b$.

A área deste quadrado cujo lado mede $(a+b+c)$ é dada pela soma das áreas dos polígonos que o compõem:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

3.6 Equações do 2º Grau

Este *kit* permite mostrar geometricamente a resolução de equações do 2º grau, através do completamento de quadrados, que era a forma como estes problemas eram resolvidos na antiguidade, antes do surgimento da Álgebra. Devido ao grau de abstração empregado para a demonstração da fórmula de Bháskara, considerei viável, antes da generalização, apresentar um problema típico dos livros envolvendo equações do 2º grau.

Para tanto é necessário que os alunos tenham um conhecimento prévio de áreas do quadrado e do retângulo e, também, de produtos notáveis e fatoração.

O *kit* é composto por:

- quatro quadrados e quatro retângulos;
- um *banner*.

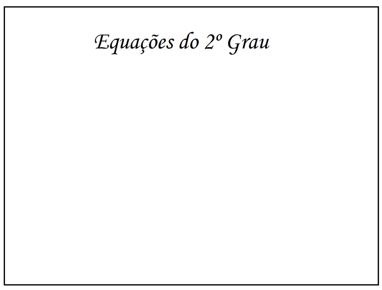

Figura 3.48: Equações do 2º Grau 01

3.6.1 Resolvendo geometricamente um problema típico de equações do 2º grau

Quais as dimensões de um retângulo cujo comprimento excede a largura em 10 unidades e cuja área é igual a 39 unidades de área?

Esta resolução é uma adaptação da apresentada por Berlinhoff em seu livro *A Matemática através dos tempos*.

Para representar geometricamente este problema desenhamos um retângulo como na figura 3.49 cuja largura ainda não conhecemos, chamando esta largura de x, temos o comprimento deste retângulo igual a $(x + 10)$, e cuja área é 39.

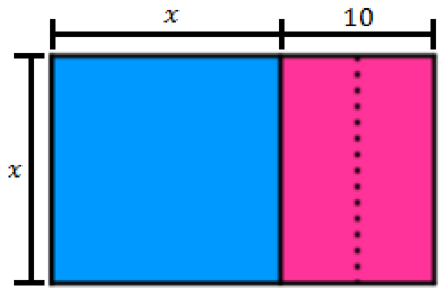

Figura 3.49: Equações do 2º Grau 02

Movemos uma das metades do retângulo para a base do quadrado, como na figura 3.50:

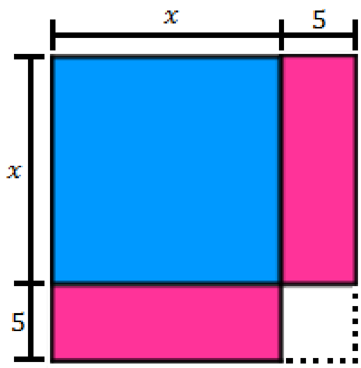

Figura 3.50: Equações do 2º Grau 03

A área total ainda é 39. Adicionando o pequeno quadrado faltante no canto direito inferior, obtemos um quadrado grande, como na figura 3.51. Como os dois retângulos têm lado 5, a área do pequeno quadrado é 25.

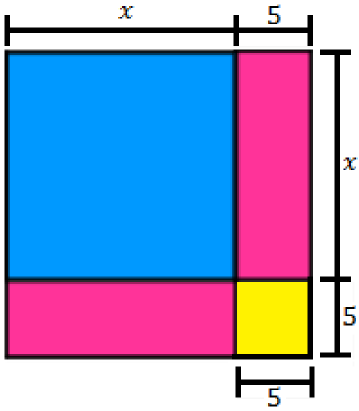

Figura 3.51: Equações do 2º Grau 04

Quando completamos o quadrado adicionando o pequeno que faltava, nossa figura se torna um quadrado cuja área é $39 + 25 = 64$. Mas isso significa que seu lado é igual à raiz de 64, que é 8. E, como o lado do quadrado grande é $(x + 5)$, podemos concluir que

$$x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3.$$

Logo, as dimensões do retângulo são 3×13.

Equacionando este problema, temos

$$x(x - 10) = 39 \Rightarrow x^2 + 10x = 39.$$

Cuja solução positiva é $x = 3$. Na antiguidade não se acreditava na existência de números negativos, então, só eram consideradas as soluções positivas.

3.6.2 Demonstração da fórmula de Bháskara

Generalizando temos uma equação do tipo

$$x^2 + bx = k.$$

Representando geometricamente, temos

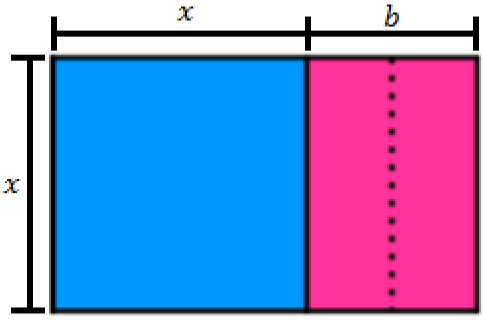

Figura 3.52: Equações do 2º Grau 05

Movemos uma das metades do retângulo para a base do quadrado, como na figura 3.53:

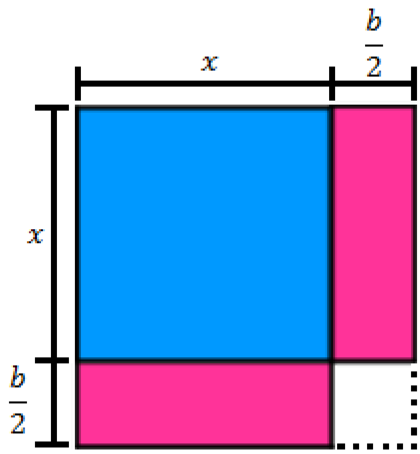

Figura 3.53: Equações do 2º Grau 06

A área total ainda é k. Adicionando o pequeno quadrado faltante no canto direito inferior, obtemos um quadrado grande. Como os dois retângulos têm lado $\frac{b}{2}$, a área do pequeno quadrado é $\frac{b^2}{4}$.

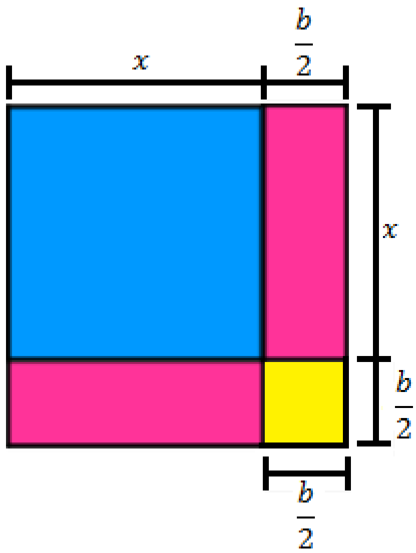

Figura 3.54: Equações do 2º Grau 07

Quando completamos o quadrado adicionando o pequeno que faltava, nossa figura se torna um quadrado cuja área é $k + \frac{b^2}{4}$. Mas isso significa que seu lado é igual à raiz de $k + \frac{b^2}{4}$. E, como o lado do quadrado grande é $x + \frac{b}{2}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
(x + \frac{b}{2})^2 &= k + \frac{b^2}{4} \\
\Rightarrow x + \frac{b}{2} &= \sqrt{k + \frac{b^2}{4}} \\
\Rightarrow x &= -\frac{b}{2} + \sqrt{k + \frac{b^2}{4}} \\
&= -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{4k + b^2}{4}} \\
&= \frac{-b + \sqrt{4ak + b^2}}{2a}.
\end{aligned}$$

Quando trabalhamos com idéia de áreas, consideramos apenas valores positivos, por exemplo, na equação $x^2 + bx = k$ consideramos que k representa o valor de uma área, portanto $k \geq 0$. Mas algebricamente sabemos que é possível fazer o completamento de quadrados para qualquer valor real de k. A partir daqui generalizaremos a resolução de equações do 2º grau algebricamente, o que não é muito diferente da forma geométrica, mas, agora, podemos considerar valores reais para k.

Consideremos a equação $ax^2 + bx = k$, agora temos uma forma ainda mais geral, onde o coeficiente de x^2 pode ser qualquer número real. Vamos multiplicá-la por a para obtermos um quadrado perfeito, teremos, então

$$a^2x^2 + abx = ak.$$

Completando com o quadrado faltante, $\frac{b^2}{4}$, temos

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = ak + \frac{b^2}{4}.$$

Efetuando a fatoração da expressão do primeiro membro, obtemos

$$\begin{aligned}
(ax + \frac{b}{2})^2 &= ak + \frac{b^2}{4} = \frac{4ak + b^2}{4} \\
\Rightarrow ax + \frac{b}{2} &= \pm\frac{\sqrt{4ak + b^2}}{2} \\
\Rightarrow ax &= -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4ak + b^2}}{2} \\
\Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{4ak + b^2}}{2a}
\end{aligned}$$

Que é a solução geral para toda equação de 2º grau.

Se escrevermos a equação original, $ax^2 + bx = k$, na forma geral, $ax^2 + bx - k = 0$, e substituirmos $-k$ por c, teremos a equação de 2º grau representada na sua forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Substituindo k por $-c$ na solução geral, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a famosa fórmula resolutiva de Bháskara!

CAPÍTULO 4

PROJETOS FUTUROS

4.1 Aperfeiçoamento do Produto

Futuramente, com a ajuda de colegas da área, serão desenvolvidos outros *kits* para que uma grande quantidade de conteúdos seja contemplada com a utilização deste quadro, a fim de permitir uma contextualização e visualização de grande parte dos conteúdos matemáticos.

O quadro e os *kits* foram produzidos com uma visão, prioritária, do desenvolvimento do raciocínio e construção do conhecimento por parte dos professores e alunos. Como leiga, não me preocupei muito com o custo, durabilidade ou viabilidade dos materiais utilizados. Assim, faz-se necessário encaminhar o produto para um projetista para que seja aperfeiçoado e colocado em condições para produção em larga escala.

Como já foi dito anteriormente, para a utilização de quaisquer metodologias é de suma importância que o professor esteja preparado em relação ao conteúdo que será abordado e se sinta confiante ao utilizá-las. Somente desta forma a passagem do concreto para o abstrato ocorrerá com sucesso e o objetivo, a aprendizagem do conteúdo, será alcançado.

Sabe-se que a formação dos professores nem sempre é satisfatória e praticamente o único apoio que estes encontram está nos livros didáticos, estes não dão o suporte necessário.

Diante disto, veio a preocupação em dar uma base maior, no sentido de suporte teórico, para o professor que vá fazer uso deste material durante as suas aulas. Além dos encartes explicativos, descritos no capítulo 3, a ideia é que o *kit* vá acompanhado de outro encarte, sendo este, sobre História da Matemática ou uma videoaula ou com problemas interessantes relacionados com o conteúdo a ser abordado.

Por causa da confiança, do respeito e do reconhecimento na área da Matemática, serão mais utilizadas as informações que constam na RPM – Revista do Professor de Matemática e na Videoteca de Matemática. O suporte será apresentado ao professor seguindo a visão de que o professor deve sempre saber um pouco além do que vai ensinar, para que a Matemática seja vista por ele "de cima", de forma ampla, dessa forma, ele poderá fazer uma abordagem mais completa do conteúdo. Quando o professor entende o sentido do conteúdo, sabendo onde quer chegar, fica mais fácil conduzir os alunos e fazer com que eles embarquem em busca do conhecimento.

> Nenhum professor consegue criar, planejar, realizar, gerir e avaliar situações didáticas eficazes para a aprendizagem e para o desenvolvimento dos alunos se ele não compreender, com razoável profundidade e com a necessária adequação à situação escolar, os conteúdos das áreas do conhecimento que serão objeto de sua atuação didática, os contextos em que se inscrevem e as temáticas transversais ao currículo escolar. (BRASIL, 2002, p. 16)

A RPM, como seu nome diz, é uma revista dedicada aos professores de Matemática da Educação Básica, a alunos e professores de cursos de Licenciatura em Matemática e a todos aqueles que se interessam pela Matemática. O tratamento dado aos temas abordados procura ser acessível e agradável, sem sacrificar o rigor. A revista é uma publicação da SBM e tem sido editada e distribuída sem interrupções desde 1982.

A revista publica crônicas, artigos e seções, tais como, *PROBLEMAS, O LEITOR PERGUNTA, LIVROS, OLHANDO MAIS DE CIMA*, etc. Nos artigos, temas interessantes de nível elementar ou avançado são apresentados de modo acessível ao professor e ao aluno do ensino médio ou de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido podem compor um artigo da revista. Nas seções, a revista "conversa" com os leitores, publicando problemas e/ou soluções propostas por eles, cartas, resenhas de livros, erros encontrados em textos didáticos, etc., sempre visando ao aperfeiçoamento do trabalho do professor na sua sala de aula. O endereço do site da RPM é www.rpm.org.br.

A Videoteca de Matemática é um site direcionado ao professor de Matemática que tem o interesse de estudar e continuar se atualizando, mesmo que não possa fazer um curso de aperfeiçoamento presencial, seja por questões financeiras ou até mesmo por causa das condições de trabalho, pois muitos possuem uma grande carga horária, não dispondo de tempo para os estudos. Neste site o professor encontra todos os vídeos produzidos pelo IMPA, agrupados por conteúdo. Os vídeos possuem uma descrição detalhada, facilitando a procura pelo conteúdo desejado. Estes vídeos que foram gravados durante os PAPMEM's, além de apresentarem o conteúdo matemático de forma exemplar por serem produzidos por grandes professores de Matemática com a intenção de melhorar a formação do professor, possuem uma didática excelente, proporcionando um amadurecimento matemático. O endereço do site da videoteca é www.videotecadematematica.com.br.

Outro recurso didático de grande valor são os livros paradidáticos. Vamos recorrer a um famoso livro escrito pelo talentoso professor de Matemática e prolífico escritor brasileiro Júlio César de Mello e Souza, que escreveu mais de cem obras, muitas delas abordando o lado recreativo e histórico da Matemática. Muitas de suas obras foram assinadas com o seu pseudônimo Malba Tahan. *O homem que Calculava*, foi o seu mais famoso livro, traduzido em doze idiomas e com dezenas de edições em Português. O professor Mello e Souza nasceu em Queluz (SP), a 6 de maio de 1895, foi um dos maiores divulgadores da Matemática no país, realizando mais de duas mil palestras. Hoje, em sua homenagem, o dia da Matemática é comemorado no dia 6 de maio. Vamos utilizar alguns de seus contos, na tentativa de despertar nos alunos o interesse pela Matemática.

Deixo uma pequena amostra da minha intenção em equipar melhor os *kits*. O *kit* do tangram poderia ser acompanhado, também, por alguns artigos da RPM e um capítulo do livro *O Homem que Calculava*.

4.1.1 Material auxiliar para o tangram

Vamos fazer o casamento de duas publicações da RPM, uma da edição 35 que conta um pouco da História da Matemática e faz uma menção ao papiro de Rhind, especificamente a respeito do que consta nele sobre as frações unitárias utilizadas pelos egípcios. A demonstração para as conversões apresentadas nesta edição era dotada de um certo rigor, talvez além daquele necessário para despertar no aluno o interesse sobre esse curioso método dos egípcios. Na 2ª edição do número especial da RPM, que foi inicialmente elaborado para a utilização no Estágio da 2ª Edição das Olimpíadas Brasileiras de Matemática para as Escolas Públicas - OBMEP, este assunto é abordado também, mas apresenta um método interessante, descoberto por Fibonacci. Este método, além de apresentar uma solução simples para a conversão desejada, permite que se trabalhe outros conteúdos como divisão, desigualdade e comparação de frações, e ainda apresenta Fibonacci, conforme o Anexo A.

4.2 Formação Continuada para Professores de Matemática

> A questão principal a ser enfrentada é a baixíssima qualidade do ensino básico, principalmente nas escolas públicas, onde estuda a maioria dos brasileiros. Claro está que uma situação desse porte não nasce de repente; é construída ao longo de décadas de ensino deficiente, quadro que tristemente se agrava a cada geração. (DRUCK, 2004)

Já é sabido que a formação do professor de Matemática está muito aquém de uma formação de qualidade. Uma reformulação urgente nos cursos de licenciatura faz–se necessária, mas como implantar uma nova grade curricular, uma nova metodologia para os licenciandos se os professores formadores são frutos deste sistema que se arrasta há décadas? Para Cury, a prática docente geralmente está pautada pelas experiências de aprendizagem dos professores, pois *"estes concebem a Matemática a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim, das influências sócio culturais que sofreram"*. (CURY, 1999, p.40)

O Brasil tem se destacado nos cursos de pós-graduação em Matemática, em especial nos que se referem ao ensino da Matemática. Mas o número de professores que tem acesso a esses cursos ainda é muito pequeno, sendo insuficiente para suprir todos os cursos de graduação em Matemática, aproximadamente 400, em todo país.

Para D'ambrósio (1993), dificilmente um professor de Matemática formado em um programa tradicional estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares.

Ainda que se consiga fazer uma reformulação nos cursos de licenciatura, há um enorme contingente de profissionais despreparados para lidar com um ensino de Matemática que vise à investigação, à resolução de problemas, à contextualização, às aplicações, assim como uma análise sociológica e política do desenvolvimento da disciplina. E ainda, despreparados para o ensino da Matemática, uma vez que muito pouco viram na graduação os assuntos que realmente precisam para atuarem na rede básica de ensino.

Portanto, cursos de formação continuada para estes professores, fazem-se necessários. A formação de um professor se dá em longo prazo, ainda que ele recebesse uma formação adequada e de qualidade, durante a sua experiência em sala de aula novos problemas irão surgir e para resolvê-los é necessário um grande conhecimento e destrezas que não são possíveis adquirir durante a formação. Além disso, as tendências metodológicas surgem com uma velocidade que exige do professorado uma formação permanente.

Para que o ensino da Matemática ocorra com sucesso o professor precisa ter domínio de seus objetos de ensino, liberdade de escolha de metodologia e competência matemáticopedagógica para o exercício dessa liberdade, para tal é fundamental que haja uma oferta de formação e atualização de qualidade, com incentivo e com as facilidades necessárias para ter acesso à mesma.

A proposta é que o curso de formação de professores de Matemática, tenha como meta a melhoria do ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio, com ênfase no fortalecimento do conteúdo matemático, inclusive com técnicas de demonstrações, bem como a contextualização dos conteúdos abordados, principalmente através da História da Matemática e da Geometria, enfocando novas metodologias, em especial o quadro magnético para as salas de aula. Que os professores participantes tenham direito ao certificado de conclusão de curso e material didático-pedagógico. E que as escolas, cujos professores participarem do curso, recebam os quadros instalados em suas salas de aula, acompanhado dos *kits*. Espera-se que o programa conte com o apoio dos municípios e do estado e o certificado sirva como título para a progressão salarial do professor. O público alvo será professores de Matemática da rede pública de ensino.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nasceu da expectativa em contribuir com o ensino-aprendizagem da Matemática e da inquietude ao constatar que as metodologias que surgiram nos últimos anos, apesar de promissoras, não atingiam o seu objetivo.

Como o trabalho de conclusão do mestrado deveria ser uma interferência positiva no ensino da Matemática, comecei a pensar de que forma eu poderia contribuir, já que muitas sugestões já haviam sido apresentadas, mas que, diante dos resultados apresentados pelos índices de avaliação do ensino, não proporcionavam os resultados esperados. Durante o mestrado adquiri um amadurecimento matemático e pude então perceber o que acontecia de errado com a aplicação das novas metodologias: os professores não têm o embasamento teórico necessário, seja em relação ao domínio do conteúdo, seja no que diz respeito à aplicação das metodologias.

Foi iniciada, então, uma investigação sobre as possíveis causas do desempenho catastrófico apresentado pelos alunos e ficou claro, analisando a história do ensino de Matemática no Brasil, que a dificuldade enfrentada hoje é reflexo de um ensino tradicional com forte predominância da conceituação em detrimento da manipulação e aplicação dos conceitos matemáticos (LIMA, 2007), o que causou uma tremenda aversão à Matemática por parte dos alunos. Sendo assim, é perceptível a necessidade de uma reformulação nos cursos de Licenciatura em Matemática e uma formação continuada para o grande contingente de professores que atuam no ensino da Matemática.

É inegável a contribuição dos materiais manipuláveis no que diz respeito a visualização, contextualização e concretização dos conhecimentos matemáticos, a falha está na forma como eles são utilizados. A aplicação ocorre, geralmente, de forma solta, sem a contextualização e as ligações necessárias entre a prática e a teoria. A participação em demasia dos alunos na construção dos materiais também é prejudicial, pois promove a dispersão dos alunos e demanda muito tempo das aulas.

Foi necessário, então, encontrar uma forma de fundamentar a Matemática na utilização destes materiais. A alternativa explorada foi a História da Matemática e a ligação fecunda entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, sendo esta última fundamental para a visualização e contextualização das outras duas.

Dessa forma, professores e alunos poderão perceber como se deu a construção do conhecimento matemático ao longo da história da humanidade. O que é muito importante para o desenvolvimento cognitivo, uma vez que especialistas apontam uma grande semelhança entre o processo histórico e a construção de novos conhecimentos pelos indivíduos.

Com a expectativa de que em 2015 o PROFMAT tenha formado, aproximadamente, três mil mestres, espero, juntamente com meus colegas, contribuir de maneira significativa para a melhoria do ensino da Matemática. E que os índices apresentados em 2015 revelem que nossos alunos tenham conhecido uma matemática investigadora, dinâmica, interessante, divertida e curiosa apresentada por professores capacitados, pois eles merecem se apaixonar pela Matemática e por ela serem correspondidos.

REFERÊNCIAS

[1] AVILA, Geraldo Severo de Souza. *Várias faces da Matemática:* tópicos para a licenciatura e leitura geral. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

[2] BERLINGHOFF, William P. *A Matemática através dos tempos:* um guia prático para professores e entusiastas / William P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouvêa; tradução Elza F. Gomide, Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

[3] BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. [A history of mathematics]. Elza F. Gomide (Trad.). 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999. 496 p.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC, 1998.

[7] CURY, Helena N. Concepções e crenças dos professores de Matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. *BOLEMA*, Campus de Rio Claro, São Paulo, vol 12, nº 13, p. 29-43.

[8] D'AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a história da matemática na formação de professores. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Natal, SBHMat, nº 1 (Especial), p. 399-406, dez. 2007.

[9] D'AMBROSIO, Beatriz S. Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, Campinas, São Paulo, 1993, vol. 4, nº 1[10], p. 38, mar. 1993.

[10] DRUCK, Suely. Crise no ensino de Matemática no Brasil. *RPM*, Rio de Janeiro, SBM, nº 53, 2004.

[11] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. *Manual de redação matemática:* com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação. Campina Grande, PB. Fábrica de Ensino, 1ª edição, 2010. 149 p.

[12] LIMA, Elon Lages. *Matemática e ensino.* Rio de Janeiro. SBM. 2007

[13] MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?. *Pro-Posições*, Campinas, São Paulo, 1992, vol. 3, nº 1[7], p. 49-50, mar. 1992.

[14] MIRANDA, Marilene Moura, *A experiência norte-americana de fusão da aritmética, álgebra e geometria e sua apropriação pela educação matemática brasileira*, PUC/SP, 2003.

[15] NELSEN, Roger B. *Proofs without words:* exercises in visual thinking (classroom resource materials). v. 1. Washington/DC: Editora MMA, 1993. 152 p.

[16] TAHAN, Malba. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro: Editora Record, 1965.

LISTA DE FIGURAS

ANEXO A

Material auxiliar para o tangram

Papiro de Hind e as Frações Unitárias - RPM 35

Arthur C. Almeida

Francisco J.S. de A. Corrêa

UFPA - PA

Introdução

As origens da Matemática seguramente se perdem nas brumas da aurora da humanidade. O ser humano, desde o mais primitivo, ao abrir os olhos se dá conta das diversas formas espaciais; ao deslocar-se entre duas posições, ele o faz de forma a minimizar o seu esforço, escolhendo a distância mais curta. E, assim, esse nosso ancestral estava desenvolvendo uma forma primitiva de geometria intuitiva. No entanto, a utilização da Matemática de uma forma deliberada talvez tenha sido realizada pela primeira vez associada a processos de contagem que estavam relacionados com problemas práticos.

Nesse sentido, relacionar os elementos de uma determinada coleção ao número de dedos das mãos e dos pés pode ter sido a primeira tentativa de fazer uma contagem. Porém, se o conjunto a ser contado fosse muito grande, esse método tornar-se-ia impraticável. Nesse caso, o homem primitivo poderia valer-se de um conjunto de pedrinhas e colocá-lo em correspondência, por exemplo, com os componentes de um rebanho.

Assim fazia o personagem Polifemo, o gigante de apenas um olho da *Odisseia*, do escritor grego Homero. O gigante, morador da ilha de Cyclops, após ter sido cegado por Ulisses, postava-se todas as manhãs à entrada de uma caverna, tocando cada ovelha que dali saísse, associando-a a uma pedrinha. No final da tarde, cada ovelha que retornasse era novamente relacionada a uma pedrinha do conjunto obtido pela manhã; caso esse último fosse completamente exaurido, o gigante estaria seguro de que seu rebanho teria retornado integralmente à caverna.

Esses processos precisavam ser registrados e, para isso, o homem começou a criar símbolos de modo que os dados coletados não se perdessem. Em princípio, esses registros eram efetivados fazendo marcas em bastões ou em pedaços de ossos. Sobre isso transcrevemos abaixo um trecho de Boyer ([1], pág. 3):

"Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia, foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinquenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a ideia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás."

Vê-se assim que a pré-história da Matemática recua no tempo para muito antes de Homero, cujas obras datam do século VIII a.C.

Neste artigo faremos uma ligeira incursão em um dos documentos mais antigos da História da Matemática, o *Papiro de Rhind*, ou *de Ahmes*, detendo-nos nas chamadas frações unitárias, para as quais será demonstrado um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma fração da forma $\frac{2}{p}$ possa ser decomposta em uma soma de duas frações unitárias (numerador igual a 1) com denominadores diferentes de p.

As origens egípcias

Inicialmente, faremos algumas conjecturas sobre as origens da Matemática, enquanto atividade intelectual.

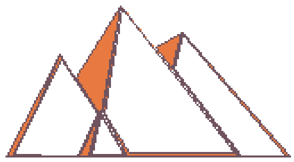

Figura 1: Tangram 01

O historiador Heródoto, assim como outros intelectuais gregos, viajou por vários lugares, entre os quais o Egito, e, sobre um certo rei egípcio de nome Sesóstris, Heródoto nos diz:

"Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia."

Platão, em sua obra *Fedro*, também atribui aos egípcios a criação da Matemática. Mais precisamente, é dito:

"Na cidade egípcia de Náucratis, existiu um antigo e famoso deus, cujo nome era Thoth; o pássaro chamado íbis lhe era consagrado e ele foi inventor de muitas artes, tais como a aritmética, a arte de calcular, a geometria, a astronomia e os dados, mas sua maior descoberta foi o uso das letras."

Aristóteles, por sua vez, sugere que a Matemática tenha origem egípcia como consequência da ascensão de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo suficiente para o estudo, contrastando, assim, com a tese de Heródoto que apontava origens práticas para a

Matemática.

Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática matemática se deu antes da civilização egípcia.

Papiro de Rhind ou de Ahmes

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagem por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro ($30cm$ de altura e $5m$ de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em Tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico.

Esse documento, que passou a ser chamado *Papiro de Rhind*, foi escrito por volta de 1700 a.C. por um escriba chamado Ahmes, ou Ah-mose (sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*), por solicitação de um certo rei Hyksos que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 e 1800 a.C. Assim, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4 000 anos, sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

O *Papiro de Rhind* é uma coleção ou, mais precisamente, um manual, contendo problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica com instruções para as soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos, coisas só registradas muito tempo depois, pelos gregos, a partir de Thales.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blucher Ltda., 1974.

[2] Heath, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements*, vol. 2, New York, 1956.

[3] Newman, J. M. *The Rhind Papyrus, The World of Mathematics*, vol. 1, Simon and Schuster, New York, 1956.

Frações egípcias - 2ª Edição Especial da RPM/2008

Baseado no artigo *Um problema de Fibonacci*

João Pitombeira de Carvalho, RPM 17

Quando se menciona Fibonacci, ou seja, Leonardo Fibonacci $(1170, 1240?)$, também conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, pensa-se logo no célebre problema dos coelhos, apresentado e resolvido no seu Liber Abaci, conduzindo à célebre sequencia $1, 1, 2, 3, 5, 13, \ldots$, que até hoje leva seu nome. Mas o livro contém muito mais: entre os problemas nele tratados, a maioria sem grande interesse para nós, leitores de hoje, pois tratam de Aritmética usando os algarismos indoarábicos ou de Matemática Comercial, encontramos verdadeiras joias matemáticas, como um relacionado com a maneira egípcia de lidar com frações.

Como sabemos, os egípcios só trabalhavam com frações unitárias, isto é, da forma $\frac{1}{n}$, sendo n um número natural [à exceção de $\frac{2}{3}$ e, às vezes, das frações da forma $\frac{n}{n+1}$]. Obviamente, em seus problemas matemáticos apareciam frações da forma $\frac{m}{n}$, que deviam então ser escritas usando-se somente frações unitárias distintas. Ou seja, era necessário escrever

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k},$$

com $n_1, n_2, \ldots, n_k$ naturais distintos.

Não discutiremos aqui as interpretações apresentadas pelos eruditos para essa insistência egípcia em trabalhar com frações unitárias. Esse hábito, embora pesado e inconveniente, sobreviveu até a Idade Média. Em verdade, os egípcios, por meio de tabelas apropriadas e métodos engenhosos, conseguiam lidar muito bem com as frações unitárias. O leitor mais curioso poderá consultar o livro Mathematics in the Time of the Pharaohs de autoria de R. J. Gillings, Dover, 1982, ou, para uma leitura leve, a RPM 15, p. 21.

Não é óbvio que qualquer número racional $\frac{m}{n}$, com $m < n$, possa ser escrito como soma de frações unitárias. Uma prova da acuidade matemática de Fibonacci é ter percebido a necessidade de mostrar isso. Ele não apresenta uma demonstração formal, como o faríamos hoje, mas dá um método inteiramente geral que resolve o problema.

> A regra ... é que você divide o número maior pelo menor; e quando a divisão não é exata, verifique entre que dois naturais a divisão está. Tome a maior parte, subtraia-a, e conserve o resto...

Em linguagem de hoje, a regra seria:

> Subtraia da fração dada a maior fração unitária que não é maior do que ela. Repita o processo até obter *zero*.

Por exemplo, escrevamos a fração $\frac{4}{13}$ como soma de frações unitárias distintas:

$$3 < \frac{13}{4} < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{4}{13} > \frac{1}{4}$$

Portanto,

$$\frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{3}{52}.$$

Mas, então,

$$17 < \frac{52}{3} < 18 \Rightarrow \frac{1}{17} > \frac{3}{52} > \frac{1}{18}.$$

Logo,

$$\frac{3}{52} - \frac{1}{18} = \frac{2}{936} = \frac{1}{468}.$$

Aqui, a divisão de 936 por 2 é exata, e o processo termina. Assim,

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}.$$

Não é difícil demonstrar que o processo descrito por Fibonacci sempre funciona. Para mostrar que o método funciona, demonstraremos que os numeradores das diferenças sucessivas (mesmo antes de simplificar) decrescem estritamente (no exemplo acima, as diferenças são $\frac{3}{52}$ e $\frac{2}{936}$). Então, como toda sucessão estritamente decrescente de números naturais não negativos é finita (veja *O princípio da descida infinita* de *Fermat*, RPM 32), o processo obrigatoriamente tem fim.

Com efeito, consideremos a fração $\frac{a}{b}$ com $a < b$.

Suponha que $b = q.a + r$, $0 \leq r < a$. Se $r = 0$, então, demonstração está terminada. Podemos, portanto, supor que $r \neq 0$.

Então,

$$\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$$

implicando

$$q < \frac{b}{a} < q + 1,$$

ou

$$\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q+1}.$$

Assim,

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{q+1} = \frac{-r+a}{b.(q+1)}.$$

Mas, como $a - r < a$, os numeradores das diferenças sucessivas são estritamente decrescentes quando $r \neq 0$, o que queríamos demonstrar.

O Homem que Calculava – Capítulo III

Onde é narrada a singular aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos por três árabes. Beremiz Samir efetua uma divisão que parecia impossível, contentando plenamente os três querelantes. O lucro inesperado que obtivemos com a transação.

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmãos - esclareceu o mais velho. - E recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

- É muito simples - atalhou o Homem que Calculava.

- Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

- Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! - replicou-me em voz baixa Beremiz. - Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

- Vou, meus amigos - disse ele, dirigindo-se aos três irmãos - fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem, em número de 36.

E, voltando-se ao mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

- E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir - partilha em que todos três saíram lucrando - couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado $(18 + 12 + 4)$ de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

Sois inteligente, ó Estrangeiro! - exclamou o mais velho dos três irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e eqüidade!

E o astucioso Beremiz - o Homem que Calculava - tomou logo posse de um dos mais belos *"jamales"* do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

- Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

E continuamos a nossa viagem para Bagdá.

Explicação

A soma das partes que caberia a cada irmão é menor do que um

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}=\frac{34}{36}\leq 1.$$

A herança estava mal dividida. Vejamos quantos camelos estavam inclusos na divisão:

O que caberia ao irmão mais velho

$$\frac{35}{2}=\frac{34}{2}+\frac{1}{2}=17+\frac{1}{2}.$$

O que caberia ao irmão do meio

$$\frac{35}{3}=\frac{33}{3}+\frac{2}{3}=11+\frac{2}{3}.$$

O irmão mais novo

$$\frac{35}{9}=\frac{27}{9}+\frac{8}{9}=3+\frac{8}{9}.$$

Total de camelos inclusos na partilha

$$17+11+3+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{8}{9}\right)=31+\frac{37}{18}=31+\frac{36}{18}+\frac{1}{18}=33+\frac{1}{18}.$$

Chegamos à conclusão de que estavam inclusos 33 camelos mais $\frac{1}{18}$ de camelo. Sobravam um camelo e $\frac{17}{18}$ de camelo, quase dois camelos. Poderia ser dado um pouco mais a cada irmão, repartindo $\frac{17}{18}$ de camelo entre eles, e ainda sobraria um camelo.

Ao acrescentar um camelo aos 35 da herança, Beremiz passou a ter 36 camelos para repartir, sendo 36 divisível por $2,3$ e 9, a partilha foi uma quantia exata para cada irmão.

ANEXO B

Fotos do Quadro Magnético

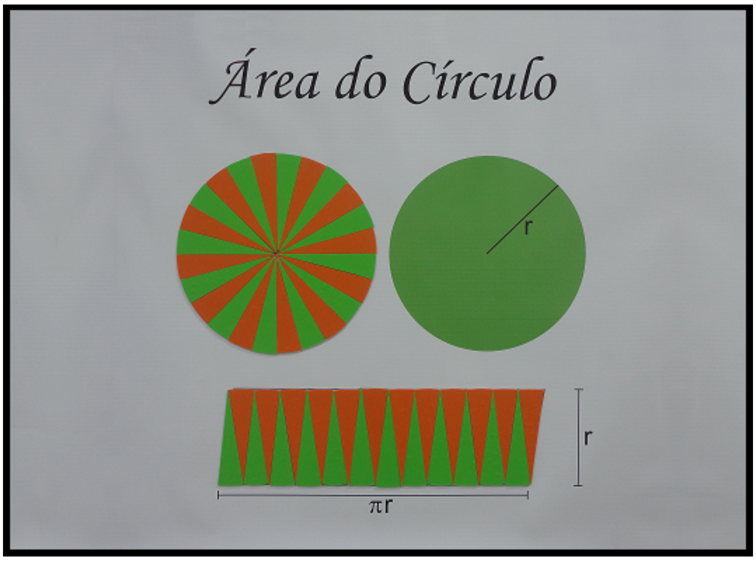

Figura 2: Área do Circulo 01

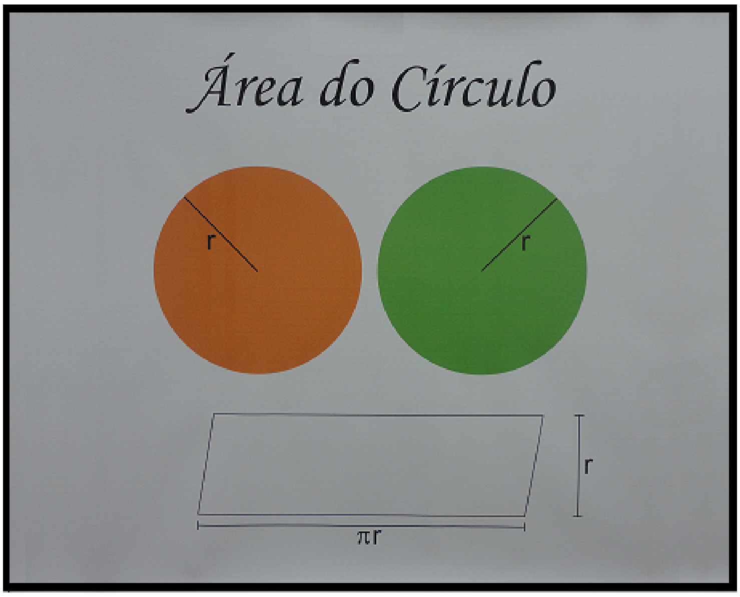

Figura 3: Área do Circulo 02

Figura 4: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 01

Figura 5: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 02

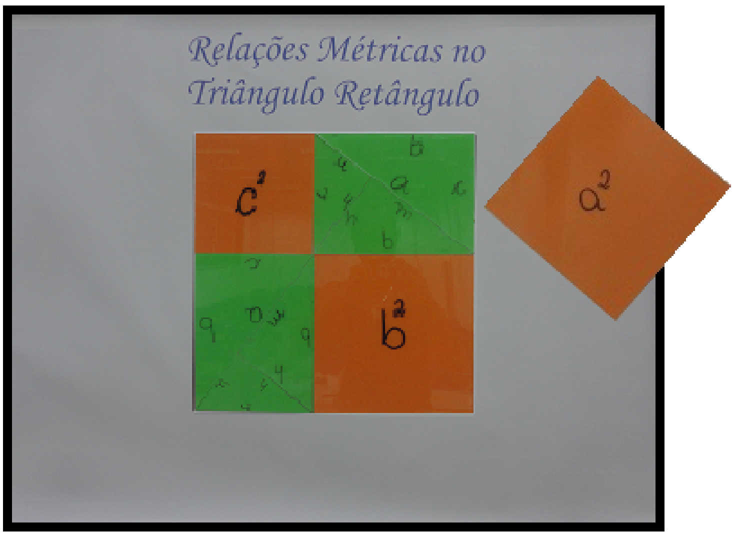

Figura 6: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 03

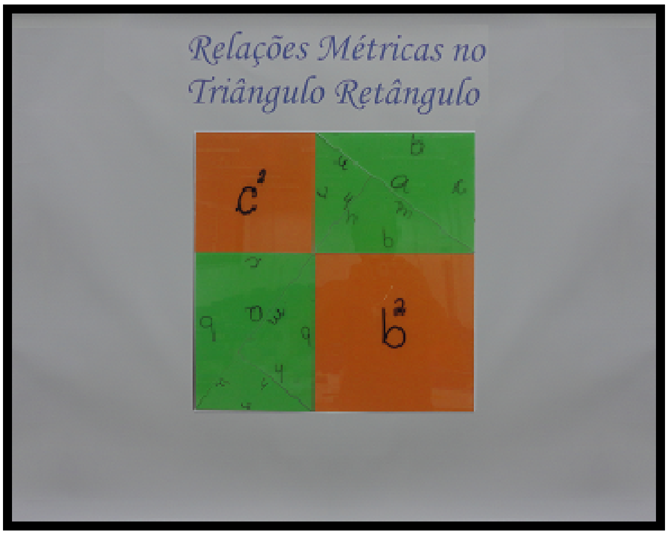

Figura 7: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 04

Figura 8: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 05

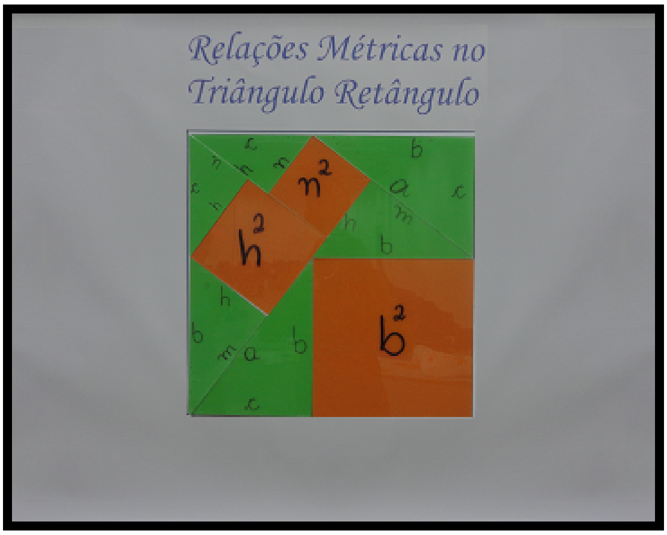

Figura 9: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 06

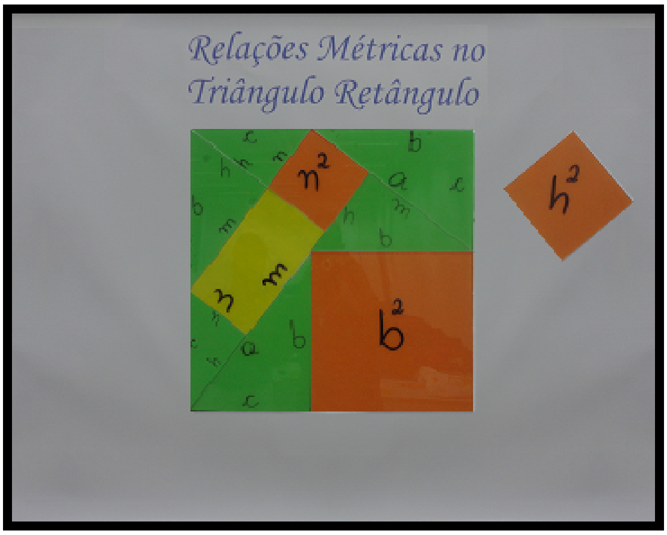

Figura 10: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 07

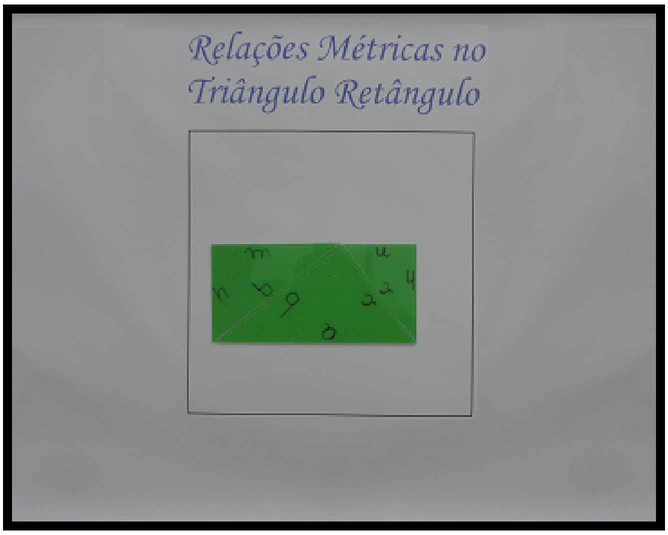

Figura 11: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 08

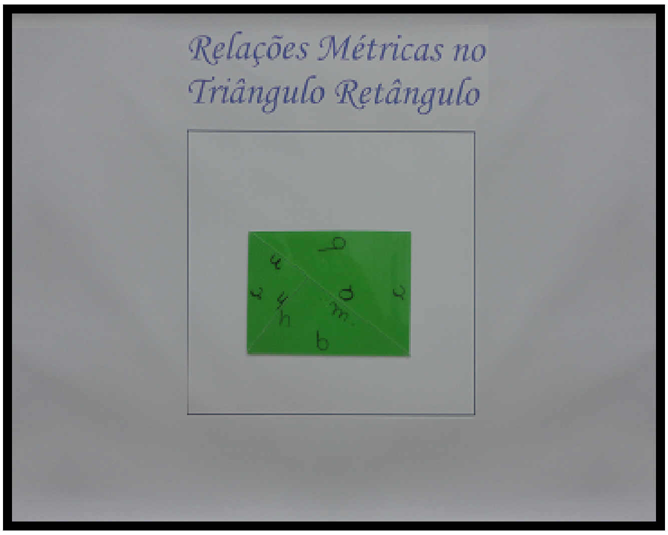

Figura 12: Relações Métricas no Triângulo Retângulo 09