



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Elipse de Steiner

Gleisson Rodrigues Santana

Goiânia-Goiás-Brasil

Agosto-2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

- 1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	GLEISSON RODRIGUES SANTANA		
E-mail:	santanagleisson@yahoo.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	PROFESSOR DA REDE ESTADUAL DE GOIÁS		
Agência de fomento:	CAPES	Sigla:	CAPES
País:	BRASIL	UF:	GO CNPJ:
Título:	ELIPSE DE STEINER		
Palavras-chave:	ELIPSE DE STEINER, ELIPSE E SUAS PROPRIEDADES, APLICAÇÕES DA ELIPSE, ROTEIROS DE AULA SOBRE ELIPSE.		
Título em outra língua:	STEINER'S ELLIPSE		
Palavras-chave em outra língua:	STEINER'S ELLIPSE, ELLIPSES AND THEIR PROPERTIES, APPLICATIONS OF ELLIPSE, JOURNEYS LESSON ABOUT ELLIPSE.		
Área de concentração:	MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	26/09/2014		
Programa de Pós-Graduação:	MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA ProfMat-IME-UFG		
Orientador (a):	DR. PAULO HENRIQUE DE AZEVEDO RODRIGUES		
E-mail:	paulo_rodrigues@ufg.br		
Co-orientador(a):*	Não houve		
E-mail:	Não houve		

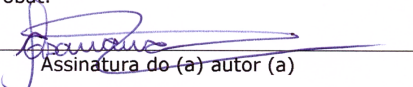
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 26 / 10 / 2014

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Elipse de Steiner

Gleisson Rodrigues Santana¹

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia-Goiás-Brasil

Agosto-2014

¹bolsista CAPES

Ficha catalográfica elaborada
automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santana, Gleisson Rodrigues
Elipse de Steiner [manuscrito] / Gleisson Rodrigues Santana. - 2014.
lxxvii, 77 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2014.

Bibliografia.


Inclui siglas, tabelas, lista de figuras.

1. Elipse de Steiner. 2. Elipses e suas Propriedades. 3. Aplicações da
Elipse. 4. Roteiros de Aula. I. Rodrigues, Dr. Paulo Henrique de
Azevedo, orient. II. Título.

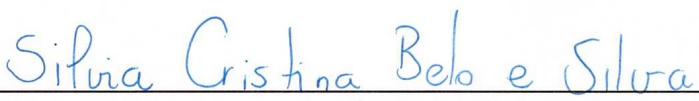
Gleisson Rodrigues Santana

Elipse de Steiner

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca, orientador



Prof.^a. Dr.^a. Sílvia Cristina Belo e Silva
Membro/MAF/PUC-GO



Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Membro, Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gleisson Rodrigues Santana nasceu em Goiânia Goiás em 1980, porém cresceu na zona rural de Parauapebas, Pará. Iniciou seus estudos no ano de 1987 aos 6 anos de idade, e sua vida estudantil não foi nada fácil. Até a quarta série estudou em um barraco de palha, que tinha o telhado de folhas de palmeira, não tinha parede, e o piso era de terra batida. Ali estudavam todos os alunos da alfabetização à quarta série, e a professora só tinha apenas um quadro negro de 1 metro quadrado e a boa vontade para ministrar suas aulas. Da quinta a oitava série estudou, também na zona rural, em um colégio feito de tábuas a uma distância de 7km de sua casa, e fazia o percurso à pé ou à cavalo passando por montanhas, vales e matas. Para cursar o ensino médio saiu de sua casa e foi morar longe dos pais, mais nada disso o fez desistir do seu sonho e de sua família que era cursar uma graduação. Em 2004 graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás e ingressou na carreira de professor secundarista através de concurso público. Em 2006 obteve o título de Especialista em Matemática Pura pela Universidade Federal de Goiás. É um defensor da família, da escola e um estudioso dedicado. Atualmente é professor universitário e secundarista, e dentre poucos dias mestre em matemática.

Dedico este trabalho à Julliana Gomes, esposa fiel e presente, à Gabriella Sophia, filha maravilhosa: um presente de Deus, e a meus familiares e amigos que sempre estiveram do meu lado me dando o suporte necessário para o cumprimento de mais esse desafio.

AGRADECIMENTOS

É com muita alegria que agradeço:

- A Deus, que me proporcionou mais essa conquista, pois sem Deus, na disso teria acontecido;
- A minha esposa Julliana que sempre esteve do meu lado durante todos esses dias, me compreendendo e dando o suporte necessário para cursar o mestrado;
- A miha filha Gabriella Sophia, que apesar de pequena, ao observar o seu sorriso e seu olhar me motivava ainda mais a passar por cima das dificuldades e fazer o curso;
- Aos meus pais, Divino e Alicia, que são meus incentivadores e provedores de meios para meus estudos desde a infância, deveria ter um diploma para os pais pois os meus são diplomados junto comigo;
- Aos meus irmãos Cleiton e Fernando, que sempre me incentivaram a ir adiante em meus estudos;
- Aos meus amigos Vitor Braga, que desde a graduação nos ajudamos um ao outro nos estudos, Mário Jonas que conhecemos nesse mestrado e parece que já nos conhecemos a muito mais tempo e Moraes, que foi um incetivador o tempo todo;
- Ao orientador Dr. Paulo Henrique, que desde o começo nos recebeu de braços aberto, e nos dispensou durante todo o tempo a atenção e todas as informações necessárias para o sucesso desse trabalho;
- E em geral a todos os familiares e amigos que de uma forma direta ou indireta me ajudaram com incentivos verbais ou com atitudes a concluir o curso;
- A todos, o meu muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem como tema central demonstrar, usando ferramentas geométricas, o teorema da Elipse de Steiner que diz que de todas as elipses inscritas em um triângulo dado, a de maior área é a que toca os lados do triângulo nos seus respectivos pontos médios. Para isto fizemos, no Capítulo um, uma abordagem sobre o estudo dos triângulos, da elipse, e da projeção ortogonal, e apresentamos alguns resultados de aritmética e geometria, neste trabalho intitulados como lemas preliminares, para serem as ferramentas (os pré-requisitos) para a demonstração do teorema principal, que é feita no Capítulo dois. Concluimos o trabalho apresentando, no Capítulo três, algumas aplicações e alguns roteiros de aulas, de como utilizar a elipse, e em particular a Elipse de Steiner, no dia-a-dia e na sala de aula.

Palavras-chave

Elipse de Steiner, Elipses e Suas Propriedades, Aplicações da Elipse, Roteiros de Aula Sobre Elipse.

Abstract

This work is focused on demonstrating, using geometric tools, the Steiner's Ellipse theorem which says that all ellipses entered in a given triangle, the larger area is touching the triangle sides in their respective middle points.

For this we did, in chapter one, an approach to the study of triangles, the ellipses, the orthogonal projection, and we present some results of arithmetic and geometry, this work titled as preliminary lemmas, to be the tools (prerequisites) for proof the theorem that the main is made in chapter two.

We conclude by presenting, in chapter three, some applications and some scripts for lessons in how to use the ellipse, and in particular Steiner's Ellipse, day-to-day and in the classroom.

Keywords

Steiner's Ellipse, Ellipses and Their Properties, Applications of Ellipse, Journeys Lesson About Ellipse.

Lista de Figuras

1	Triângulo de Descarga	18
2	Caravelas Portuguesas	19
3	Estádio de Futebol	20
4	Ponte de Ferro	20
5	Passarela de Pedestre	20
6	Construção Civil	21
7	Poligonal	21
8	Polígono	22
9	Triângulos	22
10	1º-Caso de Congruência: LLL	23
11	2º-Caso de Congruência: LAL	23
12	3º Caso de Congruência: ALA	23
13	1º Caso de Semelhança: AA	24
14	2º Caso de Semelhança: LLL	24
15	3º Caso de Semelhança: LAL	25
16	Mediana, Bissetriz e Altura	25
17	Baricentro, Circuncentro, Hortocentro e Incentro, Respectivamente	26
18	Classificação dos Triângulos Quanto aos Lados	27
19	Classificação dos Triângulos Quanto aos Ângulos	28
20	Circunferência Inscrita em um Triângulo	28
21	Círculo Inscrito em um Triângulo	29
22	Modelo de Ptolomeu	30
23	Modelo de Copérnio	30
24	Modelo de Kepler	31
25	Cônicas Apartir do Cone	32
26	Elementos da Elipse	33
27	Ecentricidade da Elipse	33
28	Ecentricidade da Elipse	34
29	Reta Tangente à Elipse	35
30	Elipse Incrita em um Triângulo	36
31	Projeção de um Ponto em um Plano	38
32	Projeção de uma Figura em um Plano	38
33	Projeção de uma Reta Perpendicular em um Plano	39

34	Projeção de uma Reta em um Plano	39
35	Projeção de um Segmento em um Plano	40
36	Projeção de Segmento	41
37	Projeção de Segmentos Proporcionais	41
38	Projeção de Retas Paralelas	42
39	Projeção de Elipse em Circunferencia	43
40	Projeção de Área de Triângulo	44
41	Triângulo Incrito em uma Circunferência	52
42	Triângulo Circunscrito em uma Circunferencia	54
43	Elipse Incrita em um Triângulo	56
44	Projeção da Elipse em um Triângulo	57
45	Exemplo de Treliça	61
46	Aplicações de Treliça	61
47	Seção de uma Treliça com Eletroduto	62
48	Traçado da Elipse Pelo Método do Jardineiro	64
49	Elipse Através dos Pontos	65
50	Construindo Elipse com Dobraduras	66
51	Construindo Elipse com Geogebra	67
52	Marcando Três Pontos	68
53	Rotacionando o Ponto Q	68
54	Ponto Médio M de $\overline{Q'Q}$	68
55	Circunferência de Centro M e Raio \overline{MO}	69
56	Determinando os Eixos da Elipse	69
57	Direção dos Eixos da Elipse	69
58	Determinando os Focos da Elipse	70
59	Traçando a Elipse	70
60	Elipse de Joseph Carnoy	71
61	Traçado do Triângulo ABC	73
62	Ponto $F1$ no Interior do Triângulo	73
63	Simétricos de $F1$ em Relação aos Lados do Triângulo	73
64	Centro $F2$ da Circunferência que Passa pelos Simétricos	74
65	Intersecção Entre os Segmentos que Ligam $F2$ e os Simétricos	74
66	Traçado da Elipse	74

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESTUDOS PRELIMINARES	18
2.1	Estudo dos Triângulos	18
2.1.1	Um Pouco de História dos Triângulos	18
2.1.2	Definições e Propriedades dos triângulos	21
2.1.3	Propriedades dos Triângulos	27
2.2	Estudo das Elipses	29
2.2.1	Um Pouco de História	29
2.2.2	Definições e Propriedades	32
2.3	Projeção Ortogonal	37
2.3.1	Projeção Ortogonal de um Ponto	37
2.3.2	Projeção Ortogonal de uma Figura	38
2.3.3	Projeção Ortogonal de uma Reta	39
2.3.4	Projeção Ortogonal de um Segmento	40
2.3.5	Propriedades da Projeção Ortogonal	40
3	A ELIPSE DE STEINER	46
3.1	Relato Histórico Sobre o Assunto	46
3.2	Lemas Preliminares	46
3.3	Elipse de Steiner	56
4	APLICAÇÕES E ROTEIROS DE AULA	60
4.1	Aplicações	60
4.1.1	Uma Aplicação da Elipse de Steiner	60
4.1.2	Aplicação 1: Na Engenharia	62
4.1.3	Aplicação 2: Na Astronomia	63
4.1.4	Aplicação 3: Na Medicina	63
4.2	Roteiros de Aula para Elipse	64
4.2.1	Roteiro 1	64
4.2.2	Roteiro 2	65
4.2.3	Roteiro 3	67
4.2.4	Roteiro 4	71
4.2.5	Roteiro 5	72

<i>SUMÁRIO</i>	16
5 CONCLUSÃO	76

1 INTRODUÇÃO

O estudo das elipses, como das cônicas de um modo geral, não é algo comum no ensino básico. Geralmente, embora muitos livros até chegam a abordar o assunto, mas na prática das aulas não se fala das cônicas, no máximo são abordados os assuntos referentes à circunferência, e geralmente as cônicas não são mencionadas nem nos planos de cursos dos professores.

A importância das cônicas, e em particular da elipse, para a formação, não só de um profissional da área de exatas mas para um cidadão ativo e participativo socialmente, é de suma importância. Pois, tal estudo agrega conhecimentos singulares para a compreensão do mundo em que estamos inseridos, no caso da elipse por exemplo, conhecer seus elementos são imprescindíveis para entender o funcionamento do sistema solar no qual o planeta terra, em que vivemos, faz parte.

Neste trabalho apresentamos argumentos e elementos cognitivos com a intensão de despertar nos alunos e nos professores o desejo de busca por um conhecimento mais aprofundado sobre a elipse. Abordamos um tema: "A Elipse de Steiner" que proporciona uma análise mais aprofundada do estudo da elipse, porém usando ferramentas da matemática básica, o que facilita o estudo e a compreensão do assunto.

Esperamos que este trabalho possa promover, nos alunos e nos professores, um olhar mais cuidadoso e investigativo sobre a elipse.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Nessa seção faremos uma abordagem das definições e propriedades dos triângulos e quando necessário apresentando alguns exemplos como justificativa. Apresentaremos um breve estudo sobre as elipse ressaltando seus elementos principais e suas propriedades. Faremos também uma abordagem sobre a teoria da projeção ortogonal. Todas essas abordagens tem o objetivo de ser um suporte teórico para a apresentação da parte principal do trabalho que é o estudo da Elipse de Steiner.

2.1 Estudo dos Triângulos

2.1.1 Um Pouco de História dos Triângulos

Os triângulos são as figuras geométricas mais importantes, já que qualquer polígono com um número maior de lados pode reduzir-se a uma sucessão de triângulos, ao traçar todas as suas diagonais a partir de um vértice. A geometria do triângulo é de uma riqueza incrível e tem apaixonado, durante séculos, os matemáticos e estudiosos amadores. A geometria de Euclides reserva um lugar preponderante ao triângulo. Com efeito, três pontos não alinhados (não colineares) determinam um e um só plano; e o triângulo é neste plano o polígono mais simples.

Não existe qualquer referência pontual a quem ou como terá sido inventado ou descoberto o triângulo. Terá sido, talvez, o homem que ao longo da sua evolução terá sentido necessidade na sua vida prática de tornar rígidas e seguras algumas das suas construções. Por exemplo, nos tempos primitivos da civilização Grega, foi usado pelos gregos o triângulo de descarga.



Figura 1: Triângulo de Descarga

O triângulo de descarga era uma construção que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e das cidades. Devido ao peso, as portas podiam romper-se, mas com o triângulo, esse peso era suportado por pilares laterais que eram feitos com material rígido.

No princípio da Idade Média, apareceu no Mediterrâneo, uma vela triangular, alinhada com o eixo longitudinal do casco do navio, contrariando a até então utilizada, que era perpendicular ao mesmo eixo e de configuração quadrada, chamada Redonda, pelo fato de vista de longe parecer redonda. Não se sabe quem a utilizou pela primeira vez. Árabes, Indianos ou até Indonésios, são apontados como os percussores de tal sistema, que permite à embarcação navegar contra o vento a uns 50 ou 60 graus.

Os Árabes usavam na pesca e no transporte de gêneros, uma embarcação robusta, de formas finas, de perfil baixo, chamada "Caravo" que era armada com uma vela triangular.

Com a ocupação da Península Ibérica, é de prever que este tipo de embarcação tenha vindo com os invasores e tenha chamado a atenção dos construtores de embarcações da costa do Atlântico, devido às suas qualidades náuticas. Os Portugueses então introduziram grandes melhoramentos e nasceu a Caravela Portuguesa.



Figura 2: Caravelas Portuguesas

A Caravela Portuguesa foi o navio escolhido para a demanda dos descobrimentos substituindo as embarcações de vela retangular. A vela triangular ou latina (como muitos a chamam) permitiu aos portugueses navegar contra o vento. Durante mais de 450 anos a Caravela tornou-se célebre pelo Mundo. Na base desta invenção está o triângulo.

Na atualidade, são muitas as situações em que se recorre à robustez do triângulo. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para as tornar mais seguras. Apresentamos abaixo alguns exemplos onde se aplica o triângulo:

Na cobertura de estádios como os da copa.



Figura 3: Estádio de Futebol

Na construção de pontes de ferro.



Figura 4: Ponte de Ferro

Nas passarelas para passagens de pedestres



Figura 5: Passarela de Pedestre

Na construção civil, para evitar quedas de operários e outros acidentes, triangularizam-se os andaimes e guindastes.



Figura 6: Construção Civil

E em muitas outras situações importantes.

Como Vimos, ter o domínio das definições, propriedades e aplicações dos triângulos é de fundamental importância para o desempenho de muitas profissões, daí a importância do professor de matemática ter o cuidado de fornecer um bom curso sobre esse assunto a seus alunos.

2.1.2 Definições e Propriedades dos triângulos

Chamamos de *poligonal* a uma figura formada por uma sequência de pontos

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$$

e pelos segmentos

$$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n.$$

Os pontos são os *vértices* da poligonal e os segmentos são os seus *lados*.

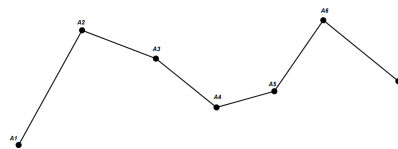


Figura 7: Poligonal

Um *polígono* é uma poligonal em que as três condições abaixo são satisfeitas:

a) $A_n = A_1,$

- b) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades e
 c) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Abaixo temos exemplos de polígonos.

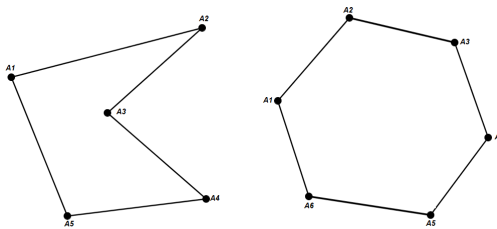


Figura 8: Polígono

Definição 2.1. Chamamos de triângulo a toda poligonal com três vértices e três lados.

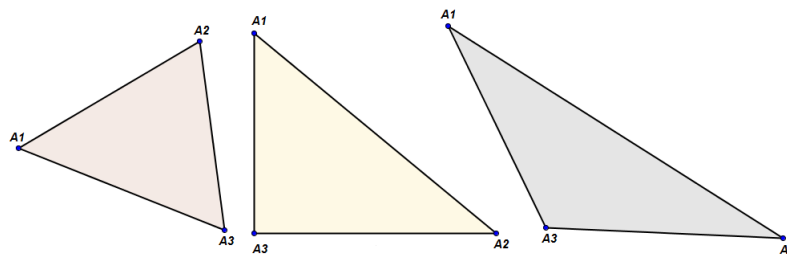


Figura 9: Triângulos

Definição 2.2. Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

A verificação da congruência entre dois triângulos pode ser feita, de maneira abreviada, de acordo com os três casos relacionados abaixo:

- **1º Caso LLL (Lado, Lado, Lado)**

Se todos os lados de um triângulo forem congruentes aos lados de outro, os dois triângulos são congruentes. Por exemplo na figura abaixo temos $a \cong a'$, $b \cong b'$ e $c \cong c'$ logo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

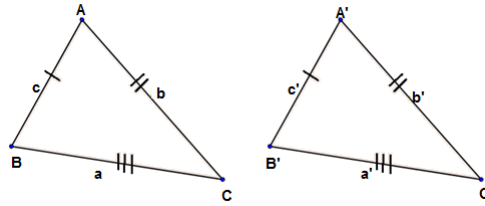


Figura 10: 1º-Caso de Congruência: LLL

- 2º Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado)

Se dois lados de um triângulo forem congruentes a dois lados de outro triângulo, e o ângulo formado por esses lados congruentes também forem congruentes, os dois triângulos são congruentes. Por exemplo na figura abaixo temos $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $b \cong b'$ e $c \cong c'$ logo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

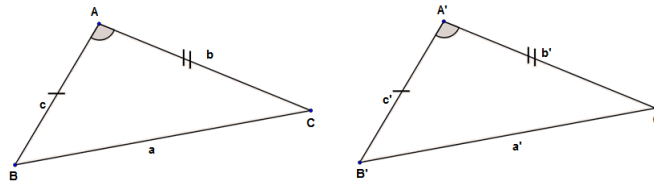


Figura 11: 2º Caso de Congruência: LAL

- 3º Caso ALA (Ângulo, Lado, Ângulo)

Se um lado de um triângulo for congruente a um lado de outro triângulo, e os ângulos adjacentes a esses lados também forem congruentes, os dois triângulos são congruentes. Por exemplo na figura abaixo temos $c \cong c'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$ logo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

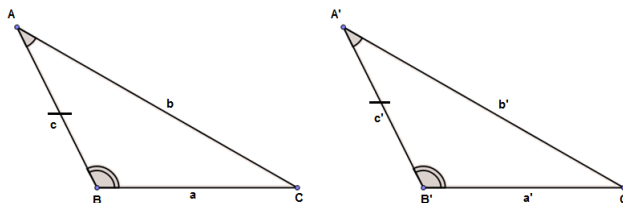


Figura 12: 3º Caso de Congruência: ALA

Definição 2.3. Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer

uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Não é necessário conferir se todos os ângulos de dois triângulos são congruentes e se todos os lados dos mesmos são proporcionais para saber se ambos são semelhantes, basta que eles apresentem algumas das condições necessárias. Mostraremos, a seguir, três casos que facilitam determinar quando triângulos são semelhantes.

- **1º Caso AA (Ângulo, Ângulo)**

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, os dois triângulos são semelhantes. Por exemplo na figura abaixo temos $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$ logo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

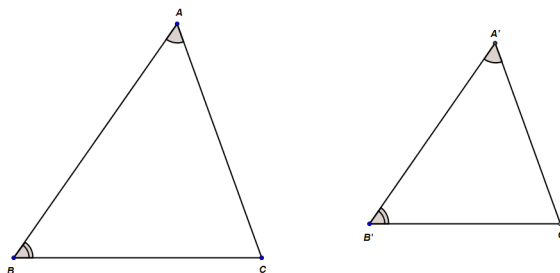


Figura 13: 1º Caso de Semelhança: AA

- **2º Caso LLL (Lado, Lado, Lado)**

Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes. Por exemplo na figura abaixo temos $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ logo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

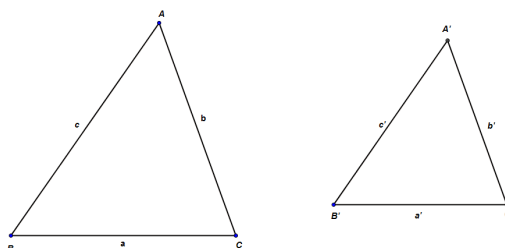


Figura 14: 2º Caso de Semelhança: LLL

- **3º Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado)**

Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes. Por exemplo na figura abaixo temos $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ logo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

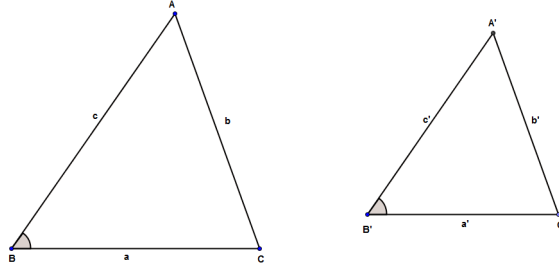


Figura 15: 3º Caso de Semelhança: LAL

Definição 2.4. *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C . O segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se bissetriz do ângulo \hat{A} se a semirreta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos iguais. O segmento AD chama-se altura do triângulo referente ao lado BC , se AD for perpendicular a reta que contém BC . E chama-se mediatriz a reta que passa por D e é perpendicular a BC .*

Por exemplo na figura abaixo, em (a) AD é mediana, em (b) AD é bissetriz e em (c) AD é altura.

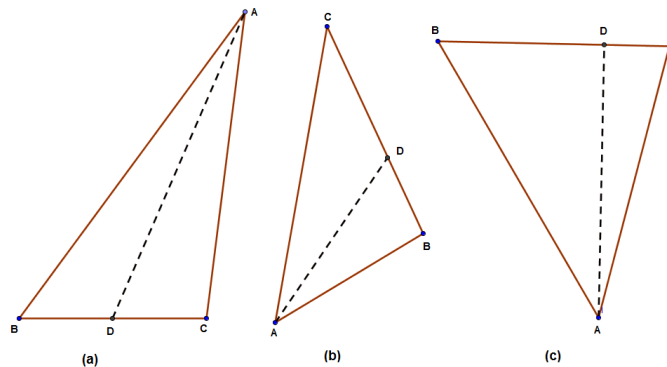


Figura 16: Mediana, Bissetriz e Altura

Definição 2.5. *Seja ABC um triângulo qualquer. Nesse triângulo temos:*

- As mediatrizes dos três lados do triângulo se interceptam em um único ponto O , chamado circuncentro. Este ponto está equidistante (à mesma distância) dos três vértices do triângulo e é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo.*
- As bissetrizes dos três ângulos internos do triângulo se interceptam em um único ponto I chamado incentro, que está equidistante (à mesma distância) dos lados do triângulo e é o centro de uma circunferência inscrita no triângulo.*
- As alturas referentes aos três vértices do triângulo se interceptam em um único ponto H , chamado ortocentro.*
- As medianas do triângulo se interceptam em um único ponto G chamado baricentro, que dista dois terços do vértice da mediana correspondente. O baricentro é o centro de gravidade do triângulo. Isto quer dizer que, se suspendermos um triângulo de material homogêneo pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio.*

Veja as ilustrações nas figuras abaixo

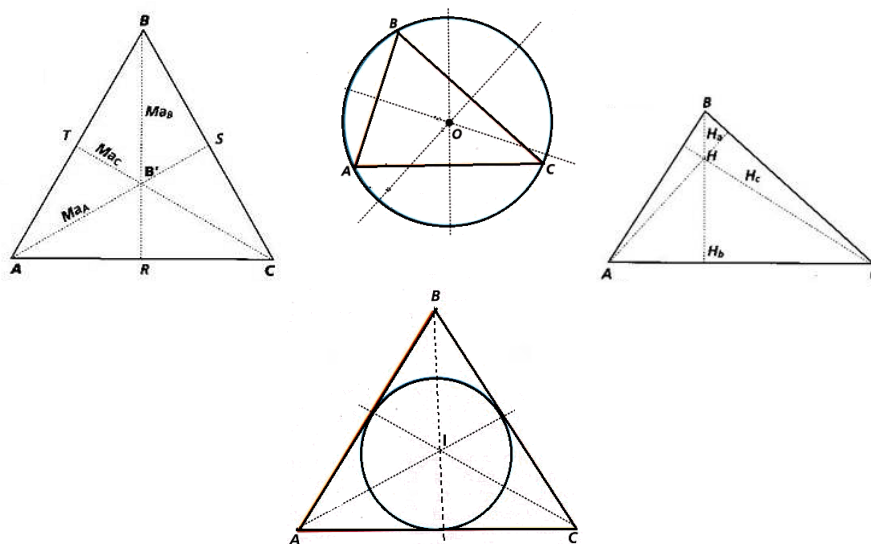


Figura 17: Baricentro, Circuncentro, Hortocentro e Incentro, Respectivamente

Observação: Se o triângulo é equilátero então a mediana, a altura, a bissetriz, e a mediatriz de cada lado e vértice coincidem.

Definição 2.6. A área de um triângulo T , de vértices A , B e C é dada por

$$A[T] = \frac{\overline{AB} \cdot h_c}{2}$$

Onde \overline{AB} é a base do triângulo e h_c é a altura referente ao vértice C perpendicular ao lado \overline{AB} .

A fórmula da área do triângulo foi apresentada como definição nesse trabalho, mais sua demonstração pode ser encontrada na referência bibliográfica [3].

2.1.3 Propriedades dos Triângulos

Apresentaremos a seguir alguns fatos decorretes da definição de triângulo, neste trabalho denominados de propriedades. As propriedades dos triângulos serão importantes para a demonstração do teorema principal do nosso trabalho. Queremos ressaltar que o objetivo não é apresentar um estudo completo sobre os triângulos, mais sim algumas ferramentas importantes para justificar o estudo proposto.

Propriedade 2.1. *Todo triângulo pode ser classificado quanto aos lados como equilátero, quando possui todos os lados com a mesma medida, isósceles, quando possui dois lados com mesma medida, ou escaleno, quando todos os lados possuem medidas diferentes*

Na figura abaixo temos a ilustração geométrica da propriedade



Figura 18: Classificação dos Triângulos Quanto aos Lados

Propriedade 2.2. *Todo triângulo pode ser classificado quanto aos ângulos como acutângulo, quando possui todos os ângulos agudos, obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso, ou retângulo, quando possui um ângulo reto.*

Na figura abaixo temos a ilustração geométrica da propriedade



Figura 19: Classificação dos Triângulos Quanto aos Ângulos

Definição 2.7. *Um círculo está inscrito em um polígono, em particular em um triângulo, se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. quando isto ocorre diz-se que o polígono circunscreve o círculo.*

Veja a figura abaixo.

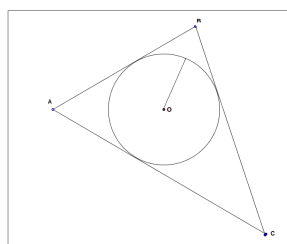


Figura 20: Circunferência Inscrita em um Triângulo

Propriedade 2.3. *A soma de todos os ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Proposição 2.1. *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Trace as bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . Estas se encontram em um ponto P . deste ponto, baixe perpendiculares aos lados do triângulo. Sejam E , F e G os pés destas perpendiculares nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Vamos provar que

$$PE = PF = PG.$$

Assim o ponto P é o centro de um círculo que passa pelos pontos E , F e G , além disto, como os lados do triângulo ABC são perpendiculares aos raios PE , PF e PG eles são também tangentes ao círculo. Logo o círculo está inscrito no triângulo. Veja a figura abaixo.

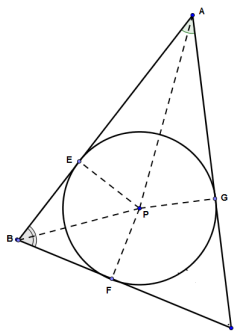


Figura 21: Círculo Inscrito em um Triângulo

Para provar que

$$PE = PF = PG$$

vamos comparar os triângulos PGA e PEA , e os triângulos PEB e PEF , todos eles são triângulos retângulos.

Nos dois primeiros temos

$$P\hat{A}G = P\hat{A}E \text{ (PA é bissetriz) e PE, PF e PG são raios.}$$

Nos dois últimos temos

$$P\hat{B}E = P\hat{B}F \text{ (PB é bissetriz) e PE, PF e PG são raios.}$$

Portanto os dois pares de triângulos são congruentes, pelo 3º caso de congruência. Da congruência dos dois primeiros concluímos que $PG = PE$. Da congruência dos dois últimos obtemos $PE = PF$. E concluímos a demonstração. ■

2.2 Estudo das Elipses

2.2.1 Um Pouco de História

As seções cônicas são um exemplo marcante de como a Matemática pode ser desenvolvida para resolver problemas matemáticos, como, por exemplo, a duplicação do cubo. Mais tarde tais procedimento mostraram ter aplicações inesperadas. Entre as aplicações importantes da elipse, merecem destaque os estudos sobre as órbitas dos planetas e de alguns cometas que descrevem órbitas elípticas em torno do Sol.

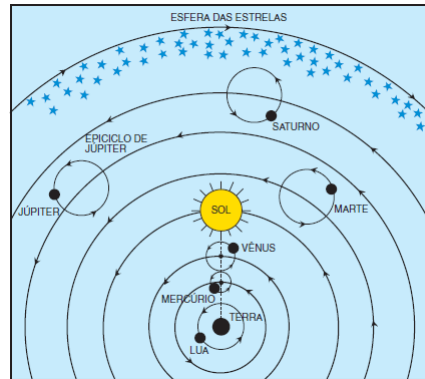


Figura 22: Modelo de Ptolomeu

Platão (427-347 a.C.) é importante na história da Matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros filósofos e matemáticos. Talvez a Platão se deva a distinção clara que se fazia na Grécia antiga entre Aritmética (no sentido de teoria dos números, o estudo das propriedades dos números inteiros) e Logística (a técnica de computação, hoje chamada de Aritmética). Há registros de que a Academia Platônica de Atenas tornou-se o centro matemático do mundo e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores nos meados do século IV a.C. Desses, o maior foi Eudoxo de Cnido (408-355 a.C. aproximadamente), discípulo de Platão que se tornou o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.

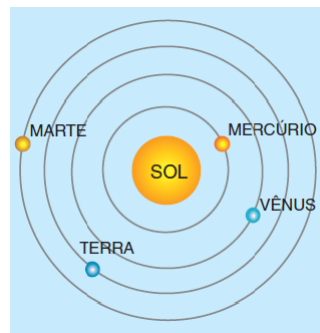


Figura 23: Modelo de Copérnico

Conta-se que Platão propôs a seus associados que tentassem dar uma representação geométrica dos movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos. Eudoxo conseguiu dar para cada um dos sete corpos celestiais uma representação satisfatória, por meio de uma composição de esferas concêntricas com a Terra no centro. Cada um

desses raios girava uniformemente em torno de um eixo fixo em relação à superfície da esfera. Esse modelo tornava extremamente complicada a descrição dos movimentos planetários. No século XVI, Nicolau Copérnico retomou a teoria de Aristarco de Samos (século III a.C.) e propôs o sistema heliocêntrico. Sugeriu que os planetas, inclusive a Terra, descrevem órbitas circulares em torno do Sol. Um século depois, a teoria heliocêntrica começa a ser aperfeiçoada e mais bem compreendida, a partir dos estudos de Galileu e do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, nascido em 1546. Em 1609, Galileu passou a observar o planeta Júpiter através de um telescópio. Descobriu objetos que se moviam juntamente com o planeta e que cada um deles apresentava órbita e período diferentes em sua trajetória ao redor de Júpiter. Durante 20 anos, Tycho catalogou milhares de estrelas de maneira precisa. Elaborou mapas celestes que tornaram possível uma descrição mais realista das órbitas planetárias. Essa descrição só ficou conhecida após sua morte, por um de seus alunos, o alemão Johannes Kepler (1571-1630) que, por meio de cálculos matemáticos, chegou às órbitas elípticas para os planetas e às leis que fizeram avançar a Astronomia. A primeira lei de Kepler, chamada Lei das Órbitas, diz exatamente que cada planeta descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse.

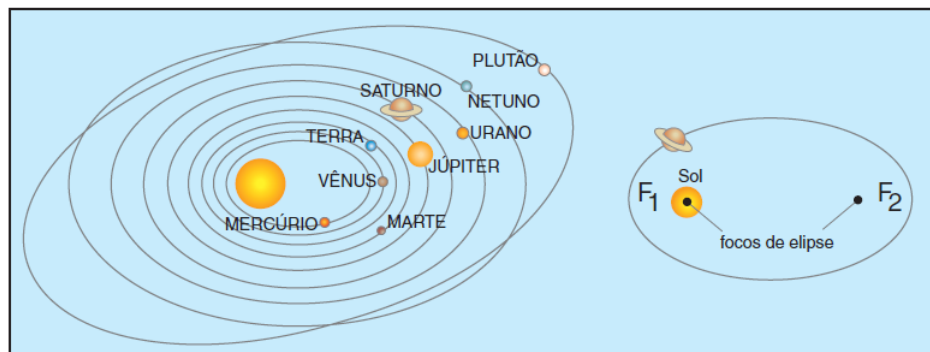


Figura 24: Modelo de Kepler

Agora uma das origens do estudo da elipse, na realidade das cônicas em geral, está no livro de Apolônio de Perga (c.261a.C.), intitulado *Cônicas*, no qual se estudam as figuras que podem ser obtidas ao se cortar um cone com ângulo do vértice reto por diversos planos. Anteriormente a este trabalho existiam estudos elementares sobre determinadas interseções de planos perpendiculares às geratrizes de um cone, obtendo-se elipses, parábolas e hipérbolas, conforme o ângulo do corte fosse agudo, reto ou obtuso, respectivamente na figura abaixo.

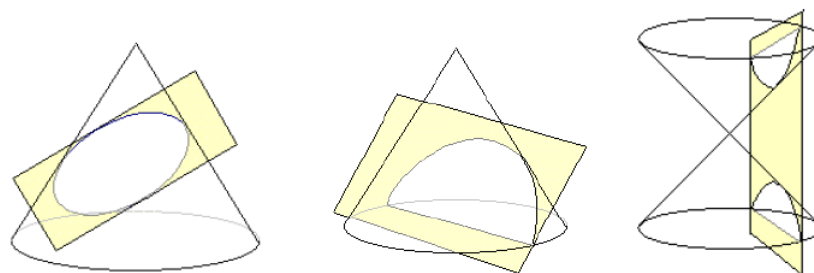


Figura 25: Cônicas Apartir do Cone

Se bem que nessa época, não se dispunha da geometria analítica; Apolônio faz um tratamento das cônicas apenas geometricamente, mas que se aproxima muito do modelo analítico conhecido hoje. Os resultados obtidos por ele foram os únicos que existiram até que Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), em uma das primeiras aplicações da geometria analítica, retomaram o problema estudando-o quase que completamente, mesmo não manejando coordenadas negativas, com as restrições que isto impõe.

2.2.2 Definições e Propriedades

Definição 2.8. Chamamos de *elipse* ao lugar geométrico dos pontos P tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante, igual a $2a$, e maior do que a distância entre os pontos fixos.

Veja a figura abaixo

Observando a elipse da figura acima vamos identificar alguns elementos importantes.

- Os pontos fixos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse e a distância entre eles é $2c$, denominada *distância focal*.
- A_1A_2 é o *eixo maior* da elipse e sua medida é igual a $2a$.
- B_1B_2 é o *eixo menor* da elipse e sua medida é igual a $2b$.
- O é o *centro* da elipse (interseção do eixo maior A_1A_2 com o eixo menor B_1B_2).
- Os pontos A_1A_2 são denominados *vértices* da elipse.
- A razão $\frac{c}{a}$ é chamada de *excentricidade* da elipse e é representada pela letra e .

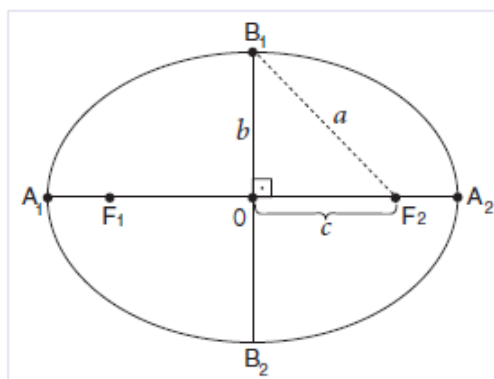


Figura 26: Elementos da Elipse

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1OF_2 , podemos escrever a relação notável da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

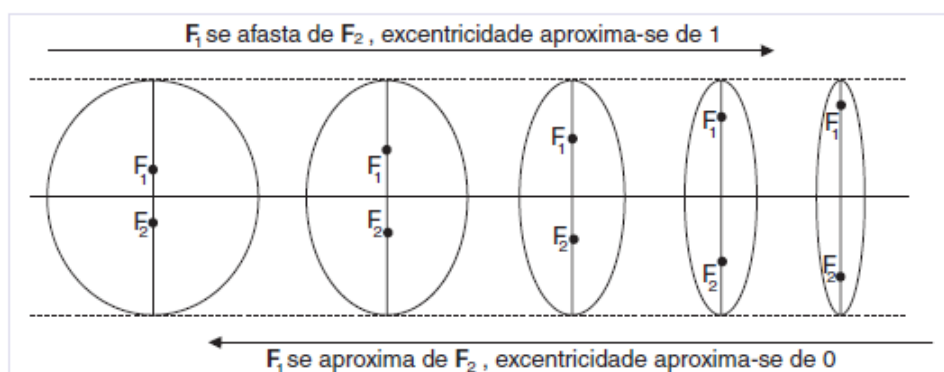


Figura 27: Excentricidade da Elipse

A figura acima mostra o que a excentricidade afeta na elipse, podemos dizer que:

- I) Quando a excentricidade se aproxima de 1, a elipse é mais achatada.
- II) Quando a excentricidade se aproxima de zero, a elipse é mais arredondada.

O que torna a excentricidade e uma medida importante no estudo das elipses. Veja na figura abaixo algumas elipses com suas respectivas excentricidades e a distância entre o centro e um dos focos.

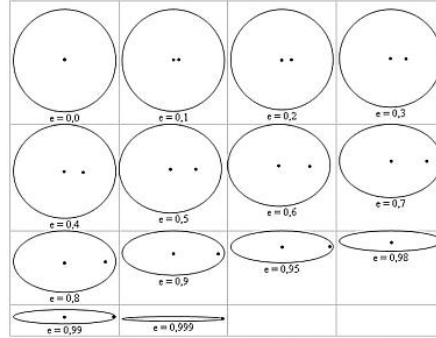


Figura 28: Ecentricidade da Elipse

Definição 2.9. A área de uma elipse ε de eixo maior medindo $2a$, e de eixo menor medindo $2b$ é dado por

$$A[\varepsilon] = \pi ab$$

A fórmula da área da elipse foi apresentada como definição nesse trabalho, mais sua demonstração pode ser encontrada na referência bibliográfica [3].

Definição 2.10. Dizemos que uma elipse está inscrita em um triângulo se a elipse é tangente aos três lados do triângulo.

A definição acima é importante para podermos fazer o estudo da elipse de Steiner, agora uma questão oportuna nesse momento é sobre a existência da elipse inscrita no triângulo, o que as duas proposições seguintes respondem.

Proposição 2.2. Dada uma elipse ε de focos F e F' , e um ponto $P \in \varepsilon$, a reta tangente a ε em P é a mediatriz do segmento FQ onde Q é um ponto pertencente à semirreta $F'P$ tal que $F'Q = 2a$.

Demonstração. Sabemos, pela definição de Elipse, que dados dois pontos F e F' e seja a um número real positivo de modo que $2a > FF'$. A elipse ε de focos F e F' e semieixo maior a é o conjunto ε formado pelos pontos P do plano tais que

$$PF + PF' = 2a.$$

Agora, Dado $P \in \varepsilon$, consideremos o ponto Q pertencente à semirreta $F'P$ tal que $F'Q = 2a$, isto implica que

$$PF' + PQ = 2a.$$

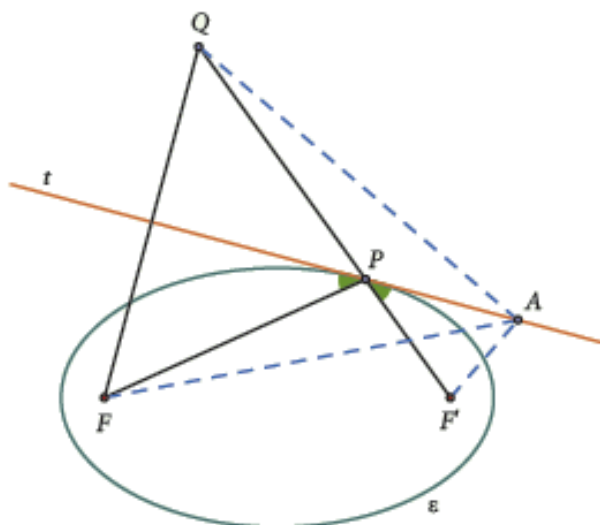


Figura 29: Reta Tangente à Elipse

Consideremos a mediatriz t do segmento FQ , como mostra a figura acima.

O que queremos provar é que a mediatriz t do segmento FQ é a reta tangente à elipse ε em P . Observando o fato de que P é o ponto da elipse que está entre os pontos F' e Q e as duas equações acima, segue que

$$\begin{aligned} PQ &= FQ - PF' \\ &= 2a - PF' \\ &= PF \end{aligned} \tag{1}$$

logo o triângulo $\triangle FPQ$ é isósceles e a mediatriz t do segmento FQ passa pelo ponto P . Agora temos que mostrar que t é tangente à elipse ε , ou seja que P é o único ponto da elipse por onde a reta t passa. Para isto consideremos um dado ponto A pertencente a reta t , A distinto de P , temos que

$$\begin{aligned} AF + AF' &= AQ + AF' \text{ pois como } t \text{ é mediatriz de } FQ, AF = AQ \\ &> F'Q \\ &= 2a. \end{aligned} \tag{2}$$

como mostra a figura 2.2.2 acima. Portanto, A não pertencem à elipse ε e concluímos

que $t \cap \varepsilon = P$, ou seja P é o único ponto da elipse que está na mediatriz t do segmento AQ . Portanto t é tangente à elipse ε . ■

Observe que o ponto Q nada mais é do que o ponto em que a semirreta $F'P$ intercepta uma das circunferências diretrizes da elipse ε , aquela de centro F' e raio $2a$. Além disso, a construção efetuada revela imediatamente a validade de uma conhecida propriedade refletora da elipse: os ângulos que os raios focais PF e PF' formam com a reta tangente a ε em P são congruentes.

Proposição 2.3. *Para cada ponto F pertencente ao interior do triângulo, existe uma elipse inscrita nesse triângulo, tendo F como um de seus focos.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo arbitrário e F um ponto qualquer no seu interior. Vamos determinar uma elipse ε tendo F como um de seus focos de modo que as retas AB , BC e CA sejam tangentes a ε .

Motivados pelo exposto na proposição 2.2, considere um triângulo ABC . Seja F um ponto no interior do triângulo e sejam Q , R e S pontos simétricos ao ponto F dado em relação às retas AB , BC e CA respectivamente. Consideremos o centro F' da circunferência circunscrita no triângulo QRS e sejam P_1 , P_2 e P_3 as intersecções entre os raios $F'Q$, $F'R$ e $F'S$ da circunferência que contém os pontos Q , R e S e os lados AB , BC e CA do triângulo ABC , respectivamente. Como mostra a figura abaixo.

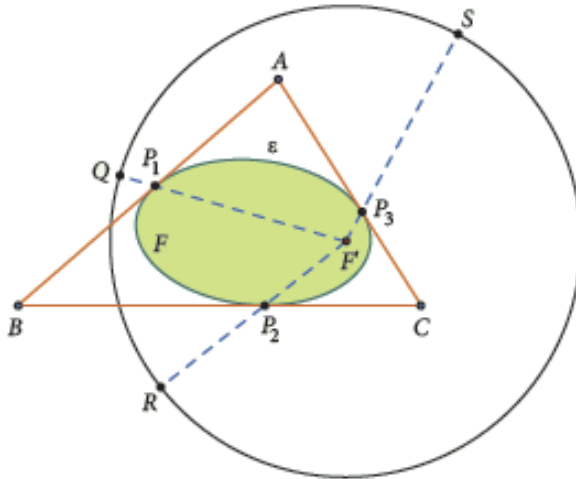


Figura 30: Elipse Inscrita em um Triângulo

A elipse ε de focos F e F' e que passa por P_1 é tal que as retas AB , BC e CA são tangentes a elipse ε em P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente.

Note que o ponto F' , assim como F , também pertence ao interior do triângulo ABC . Na realidade, F e F' são conjugados isogonais com relação ao triângulo ABC . Isso significa que as semirretas AF e AF' são simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo de vértice A do triângulo ABC e propriedades análogas valem para os pares de semirretas BF , BF' e CF , CF' . Vejamos uma prova.

Seja

$$x = m(\widehat{BAF})^1 = m(\widehat{BAQ}) \quad \text{e} \quad y = m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{CAS}),$$

temos que

$$m(\widehat{QAS}) = 2(x + y).$$

Por outro lado, AQS é um triângulo isósceles, pois

$$AQ = AF = AS$$

e, como F' pertence a mediatriz do segmento QS , pois F' é o centro da circunferência que passa por Q e S , segue que

$$m(\widehat{SAF'}) = x + y.$$

Mas $m(\widehat{SAC}) = y$, donde

$$m(\widehat{CAF'}) = x = m(\widehat{BAF}).$$

Logo, AF e AF' são semirretas simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo do vértice A do triângulo ABC . Portanto pela proposição anterior o segmento AB é tangente à elipse ε em P_1 . Analogamente provamos a tangência da elipse em AC e BC . ■

2.3 Projeção Ortogonal

2.3.1 Projeção Ortogonal de um Ponto

¹ $m(\widehat{BAF})$ quer dizer medida do ângulo \widehat{BAF} .

Definição 2.11. Chama-se projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α o pé da perpendicular P' ao plano conduzida pelo ponto P . O plano α é chamado de plano de projeção e a reta perpendicular a α passando por P e P' é chamada de projetante do ponto P .

Na figura abaixo exemplificamos geometricamente a definição acima.

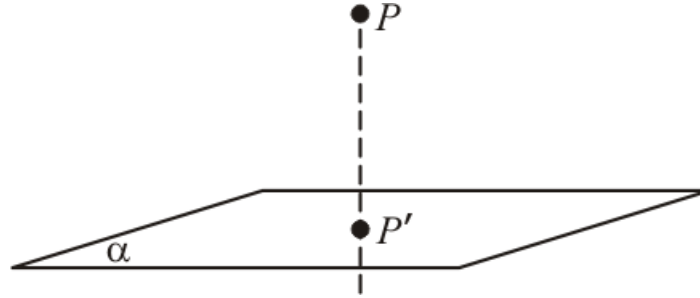


Figura 31: Projeção de um Ponto em um Plano

Para representar a projeção P' do ponto P no plano α de projeção, usaremos a notação $P' = proj_{\alpha}P$.

2.3.2 Projeção Ortogonal de uma Figura

Definição 2.12. Chama-se projeção ortogonal de uma figura F sobre um plano α ao conjunto de todas as projeções ortogonais dos pontos que compõem a figura F .

Como mostra a figura abaixo

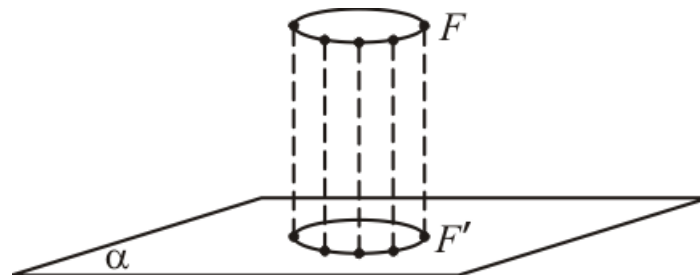


Figura 32: Projeção de uma Figura em um Plano

Para representar a projeção F' da figura F no plano α de projeção, usaremos a notação $F' = proj_{\alpha}F$.

2.3.3 Projeção Ortogonal de uma Reta

A projeção de uma reta em um plano depende da posição da reta em relação ao plano. Se uma reta r é perpendicular ao plano α , como a intersecção entre a reta e o plano é um ponto P , então pelas definições anteriores chegamos que a projeção ortogonal da reta r no plano α é exatamente o ponto P . como mostra a figura abaixo.

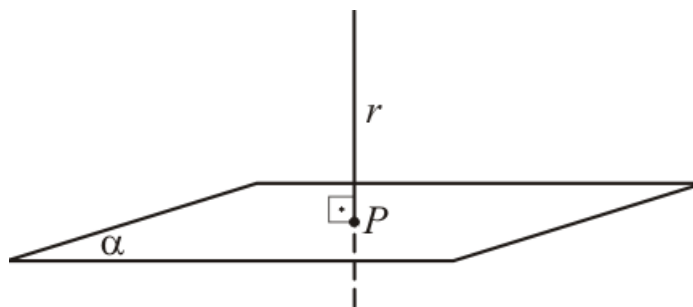


Figura 33: Projeção de uma Reta Perpendicular em um Plano

Agora se a reta r não é perpendicular ao plano α a projeção é de acordo com a definição abaixo

Definição 2.13. *Chama-se projeção ortogonal de uma reta r não-perpendicular ao plano α , o traço em α provocado por um plano β perpendicular a α que contém a reta r .*

A figura abaixo ilustra a definição acima.

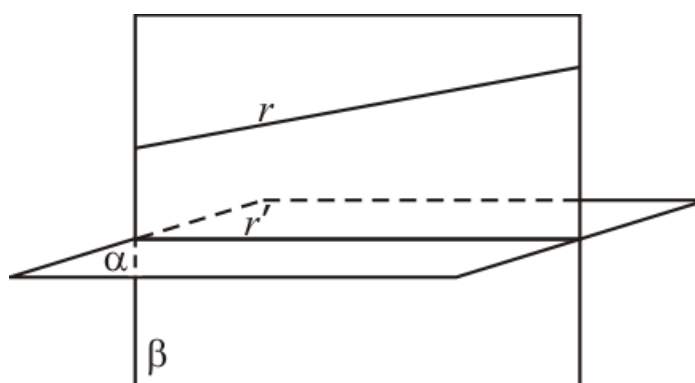


Figura 34: Projeção de uma Reta em um Plano

Para representar a projeção r' da reta r no plano α de projeção, usaremos a notação $r' = proj_{\alpha} r$.

2.3.4 Projeção Ortogonal de um Segmento

Definição 2.14. Chama-se projeção ortogonal sobre um plano α de um segmento \overline{AB} , contido numa reta r não-perpendicular ao plano α , ao segmento $\overline{A'B'}$ contido em α , onde $A' = \text{proj}_\alpha A$ e $B' = \text{proj}_\alpha B$.

Na figura abaixo está a representação geométrica da definição acima.

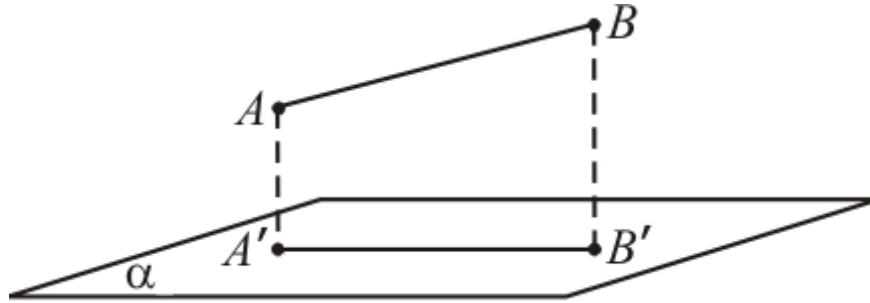


Figura 35: Projeção de um Segmento em um Plano

Para representar a projeção $\overline{A'B'}$ do segmento \overline{AB} no plano α de projeção, usaremos a notação $\overline{A'B'} = \text{proj}_\alpha \overline{AB}$.

2.3.5 Propriedades da Projeção Ortogonal

Apresentamos nessa seção algumas propriedades importantes da projeção ortogonal. Essas propriedades estão apresentadas através de algumas proposições são justificadas usando as definições apresentadas acima.

Proposição 2.4. *proposição* Seja $A'B'$ a projeção ortogonal do segmento AB em um plano α . Se θ é o ângulo entre a reta que contém AB e o plano α , então $A'B' = AB \cdot \cos(\theta)$. Em particular, se $A'B'$ é paralelo a α , então $A'B' = AB$.

Demonstração. Conduzimos por A uma reta paralela ao segmento $\overline{A'B'}$, interceptando a reta projetante de B em B'' , temos que $AA'B'B''$ é um retângulo.

Então, $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$. Já o triângulo ABB'' é retângulo em B'' e o ângulo $\widehat{BAB''} = \theta$, então temos que $\cos(\theta) = \frac{AB''}{AB} = \frac{A'B'}{AB}$ portanto

$$A'B' = AB \cdot \cos(\theta)$$

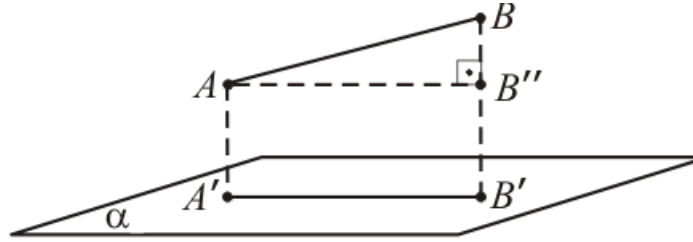


Figura 36: Projeção de Segmento

Agora se $A'B'$ é paralelo a α então $\theta = 0^\circ$, logo da equação acima chegamos que

$$A'B' = \cos(0^\circ) \cdot AB = AB.$$

■

Proposição 2.5. *Sejam A, B e C três pontos de uma reta r , A', B' e C' projeções ortogonais dos pontos A, B e C sobre um plano α , e seja θ o ângulo entre a reta r e o plano α . então $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.*

Demonstração. Temos por hipótese que a reta que passa por A, B e C faz um ângulo θ com a reta que passa por A', B' e C' .

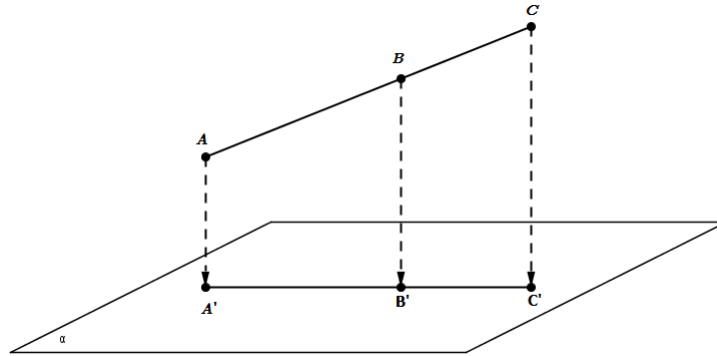


Figura 37: Projeção de Segmentos Proporcionais

Temos também que $A' = Proj_\alpha A$, logo $\overline{AA'}$ é ortogonal ao plano α , do mesmo modo $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são ortogonais ao plano α , de onde concluímos que $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são segmentos paralelos. Logo pelo Teorema de Tales² chegamos que \overline{AB} e \overline{BC} são

²O enunciado e a demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência bibliográfica [3]

proporcionais, respectivamente, a $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$. Ou seja,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

■

Proposição 2.6. *Sejam r' e s' projeções ortogonais de duas retas r e s em um plano α . Se r é paralela a s , então r' é paralela a s' .*

Demonstração. Sejam A e B pontos sobre r . Sejam também C e D pontos sobre s , de modo que \overline{AC} seja ortogonal a r e s , e \overline{BD} também sejam ortogonal a r e s . Como r é paralela a s então

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 1.$$

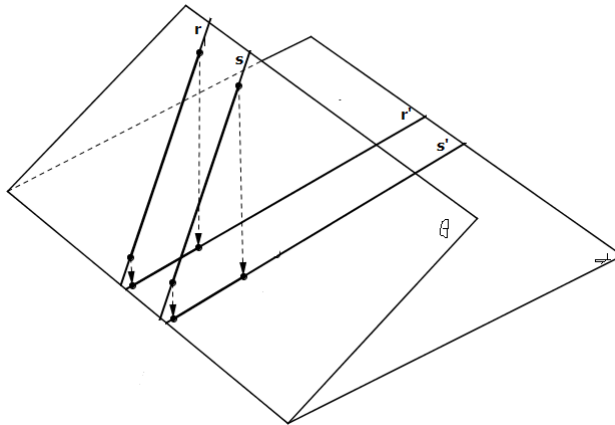


Figura 38: Projeção de Retas Paralelas

Consideremos A' , B' , C' e D' projeções ortogonais sobre o plano α de A , B , C e D sobre r' e s' respectivamente. Temos pela proposição 2.5 que

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 1$$

Logo r' e s' são paralelas.

■

Proposição 2.7. *Dada uma elipse qualquer, sempre é possível fazer uma projeção ortogonal do plano da elipse em um outro plano, de modo que a elipse seja projetada em uma circunferência.*

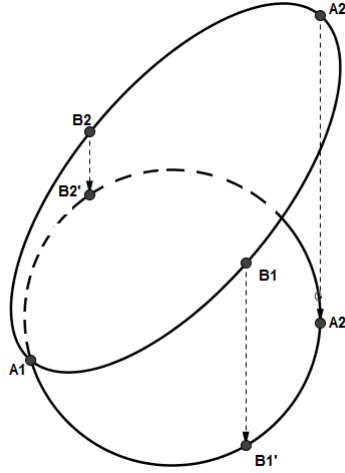


Figura 39: Projeção de Elipse em Circunferencia

Demonstração. Seja β o plano que contém a elipse ε , e seja α o plano onde queremos projetar ortogonalmente a elipse na circunferência c .

Tracemos pelo vértice A_1 da elipse uma reta i paralela ao eixo B_1B_2 . Agora basta traçar o plano α de modo que o ângulo θ entre α e β seja tal que $\cos(\theta) = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. Desse modo pela Proposição 2.4 $A_1A_2 \cdot \cos(\theta) \equiv R$ e $B_1B_2 \equiv R$. E isso demonstra a proposição, ou seja, dada uma elipse qualquer sempre é possível projetar ortogonalmente uma elipse em uma circunferência de raio igual ao eixo menor. ■

Proposição 2.8. *Seja o triângulo T de vértices A , B e C contido em um plano β , e seja T' de vértices A' , B' e C' a projeção ortogonal do triângulo T em um plano α . Se θ é o ângulo entre α e β então $A[T'] = A[T] \cdot \cos(\theta)$. Onde $A[T]$ é a área do triângulo T e $A[T']$ é a área do triângulo T' .*

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, que a reta i de intersecção entre os planos α e β passe pelo vértice A do triângulo T , desse modo $A \equiv A'$. Sejam O e P pontos sobre i de maneira que BO e CP sejam perpendiculares a i , isto implica que $B'O$ e $C'P$ também são perpendiculares a i .

Temos que

$$A[T] = A[OPBC] - A[ABO] - A[ACP]$$

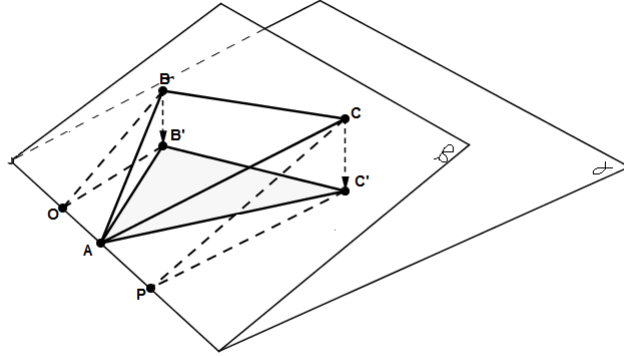


Figura 40: Projeção de Área de Triângulo

agora, como os triângulos ABO e ACP são retângulos e $OPBC$ é um trapézio temos que

$$A[T] = \frac{(OB + PC) \cdot OP}{2} - \frac{OB \cdot OA}{2} - \frac{PC \cdot PA}{2}$$

de maneira análoga chegamos que

$$A[T'] = \frac{(OB' + PC') \cdot OP}{2} - \frac{OB' \cdot OA}{2} - \frac{PC' \cdot PA}{2}$$

mais pela proposição 2.4 temos que

$$\begin{cases} OB' = OB \cdot \cos(\theta) \\ OC' = OC \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

de onde chegamos que

$$\begin{aligned} A[T'] &= \frac{(\cos(\theta)OB + \cos(\theta)PC) \cdot OP}{2} - \frac{\cos(\theta)OB \cdot OA}{2} - \frac{\cos(\theta)PC \cdot PA}{2} \\ &= \cos(\theta) \cdot \left(\frac{(OB + PC) \cdot OP}{2} - \frac{OB \cdot OA}{2} - \frac{PC \cdot PA}{2} \right) \\ &= \cos(\theta) \cdot A[T] \end{aligned} \tag{3}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 2.9. *Seja ε uma elipse de eixos A_1A_2 e B_1B_2 , consideremos $A_1A_2 > B_1B_2$, contida em um plano β , e seja c uma circunferência que é a projeção ortogonal*

da elipse ε em um plano α . Se θ é o ângulo entre α e β então $A[c] = \cos(\theta) \cdot A[\varepsilon]$. Onde $A[c]$ é a área da circunferência c e $A[\varepsilon]$ é a área da elipse ε .

Demonstração. Consideremos, sem perda de generalidade, que a reta i de intersecção entre os planos α que contém a elipse e β que contém a projeção ortogonal da elipse ε passe pelo vértice $A1$ da elipse, desse modo $A1 \equiv A1'$. Temos pela proposição 2.7 da projeção da elipse em um círculo que $r = B1B2 = \cos(\theta) \cdot A1A2$. Veja a figura 2.3.5 Logo das fórmulas das áreas da circunferência e da elipse temos que

$$\begin{aligned}
 A[c] &= \pi \cdot r^2 \\
 &= \pi \cdot r \cdot r \\
 &= \pi \cdot \cos(\theta) \cdot A1A2 \cdot B1B2 \\
 &= \cos(\theta) \cdot (\pi \cdot A1A2 \cdot B1B2) \\
 &= \cos(\theta) \cdot A[\varepsilon]
 \end{aligned} \tag{4}$$

Como queríamos demonstrar. ■

3 A ELIPSE DE STEINER

Queremos demonstrar através dos elementos de geometria plana um resultado conhecido como a Elipse de Steiner, apresentado nesse trabalho como teorema, que diz que de todas as elipse inscritas em um triângulo, a de maior área é a que toca os lados do triângulo em seus pontos médios. Este é um resultado no mínimo interessante, que desperta nos amantes da matemática de imediato uma reflexão sobre o assunto.

3.1 Relato Histórico Sobre o Assunto

A elipse de Steiner é assim chamada por ter sido resultados de estudos e pesquisas realizadas pelo matemático Jakob Steiner.

Jakob Steiner foi um matemático Suíço, que nasceu em 18 de março de 1796 na cidade de Berna, e morreu em 1 de abril de 1863 aos 67 anos. Apesar de ser suíço, Steiner desenvolveu seus estudos na Universidade de Berlim Alemanha, por isso muitas vezes é considerado um matemático alemão.

O objeto de estudo de Steiner na matemática era a geometria. Seus estudos nessa área eram baseados na geometria pura, excluindo a parte analítica, há registros que dizem que Steiner dizia que a parte analítica dificultava o entendimento da geometria. Em geometria Jakob Steiner desenvolveu o estudo da geometria projetiva, nesse campo fez um estudo completo sobre as cônicas e suas construções.

Nosso trabalho é sobre a Elipse de Steiner, assim conhecida pelo fato desse resultado ter sido enunciado e provado pelo matemático Jakob Steiner.

3.2 Lemas Preliminares

Para a demonstração do teorema que comprova a Elipse de Steiner, usaremos alguns resultados, que estão apresentados abaixo como lemas acompanhados de suas respectivas demonstrações.

Lema 3.1. *De dois pares de números positivos com somas iguais e constante S , o par com maior produto P é o par com a menor diferença em módulo. Ou seja, dados x, y, X e Y tais que $x + y = X + Y = S$, se $|x - y| < |X - Y|$ então $x \cdot y > X \cdot Y$.*

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned} 4xy &= (x+y)^2 - (x-y)^2 \\ &= S^2 - (x-y)^2, \text{ pois por hipótese } x+y = S \end{aligned} \quad (5)$$

a afirmação acima vem de $(x+y)^2 - (x-y)^2 = (x^2+y^2+2xy) - (x^2+y^2-2xy) = 4xy$ e que

$$\begin{aligned} 4XY &= (X+Y)^2 - (X-Y)^2 \\ &= S^2 - (X-Y)^2, \text{ pois por hipótese } X+Y = S \end{aligned} \quad (6)$$

a afirmação acima vem de $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = (X^2+Y^2+2XY) - (X^2+Y^2-2XY) = 4XY$

Agora, como por hipótese $x+y = X+Y = S$ concluímos das equações (5) e (6) que se $|x-y| < |X-Y|$ então $x \cdot y > X \cdot Y$ como queríamos demonstrar. ■

Vamos usar o lema 3.1 anterior para demonstrar o lema abaixo que é um resultando ainda mais forte.

Lema 3.2. *O produto P de n números positivos com soma constante S é maior quando todos os números possuem o mesmo valor M , ou seja, são iguais.*

Demonstração. Sejam, $a, b, c, d, \dots n$ números não todos iguais com soma constante igual a S . Como não são todos iguais, pelo menos um deles será maior que M , seja $a > M$, e pelo menos um deles menor que M , seja $b < M$.

Formemos um novo conjunto de n números a', b', c', d', \dots com $a' = M, a'+b' = a+b, c' = c, d' = d, \dots$. Este novo conjunto de números também possui soma constante igual S , no entanto pelo lema 3.1

$$a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \dots > a \cdot b \cdot c \cdot d \dots$$

pois, $a' - b' < a - b$ e $c' = c, d' = d, \dots$. E como $a' = M$ logo

$$M \cdot b' \cdot c' \cdot d' \dots > a \cdot b \cdot c \cdot d \dots$$

Formemos, outra vez, um outro conjunto de n números $a'', b'', c'', d'', e'', \dots$ com $a'' = a' = M, b'' = M, b'' + c'' = b' + c', d'' = d' = d, e'' = e' = e, \dots$ etc. Este novo

conjunto de números também possuem soma constante igual S , no entanto pelo Lema 3.1

$$a'' \cdot b'' \cdot c'' \cdot d'' \cdot e'' \dots > a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot e' \dots > a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \dots$$

pois, $b'' - c'' < b' - c'$ e $a'' = a'$, $d'' = d'$, $e'' = e'$, E como $a'' = M$, $b'' = M$ logo

$$M \cdot M \cdot c'' \cdot d'' \cdot e'' \dots > a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \dots$$

Continuando este processo n -vezes faremos com que todos os fatores do primeiro membro da desigualdade acima sejam iguais a M , e portanto concluímos a demonstração. ■

Lema 3.3. *De dois pares de ângulos cuja soma é uma constante menor que 180° , o par que gera o maior produto de senos é o par com a menor diferença em módulo. ou seja, dados x, y, X, Y ângulos tais que*

$$x + y = X + Y = k \leq 180^\circ, \quad \text{se } |x - y| < |X - Y|$$

então

$$\text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) > \text{sen}(X) \cdot \text{sen}(Y).$$

Demonstração. Temos por hipótese que

$$x + y = X + Y = k,$$

sabemos pelas propriedades da função cosseno que

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

e que

$$\begin{aligned} \cos(a - b) - \cos(a + b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) - (\cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)) \\ &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) - \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) \\ &= 2\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) \end{aligned} \quad (7)$$

Logo

$$\begin{aligned} 2\text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) &= \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ &= \cos|x - y| - \cos(k) \end{aligned} \quad (8)$$

pois $\cos(x - y) = \cos(-(x - y)) = \cos|x - y|$ e $x + y = k$
e

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(X)\operatorname{sen}(Y) &= \cos(X - Y) - \cos(X + Y) \\ &= \cos|X - Y| - \cos(k) \end{aligned} \quad (9)$$

pois, $\cos(X - Y) = \cos(-(X - Y)) = \cos|X - Y|$ e $X + Y = k$.
Consideremos por hipótese que $|x - y| < |X - Y|$ isto implica que

$$\cos|x - y| > \cos|X - Y|$$

somando $\cos(k)$ em ambos os membros da equação acima chegamos que

$$\cos|x - y| - \cos(k) > \cos|X - Y| - \cos(k)$$

de onde concluímos, pelas equações (8) e (9) que

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) > \operatorname{sen}(X) \cdot \operatorname{sen}(Y).$$

Portanto, o par de ângulos positivos com a menor diferença em módulo, é o par que produz o maior produtos de senos. ■

Lema 3.4. *O produto dos senos de três ângulos de soma constante menor ou igual a 180° é máximo quando os ângulos são iguais. Ou seja,*

se

$$\alpha + \beta + \gamma = 3k \quad e \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \quad (10)$$

então

$$\operatorname{sen}(k) \cdot \operatorname{sen}(k) \cdot \operatorname{sen}(k) > \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \quad (11)$$

Demonstração. Sejam α , β e γ ângulos tais que

$$\alpha + \beta + \gamma = 3k \leq 180^\circ.$$

Suponhamos que nenhum desses ângulos sejam iguais a k , então pelo menos um deles é maior que k , suponhamos, sem perda de generalidade, que α seja maior que k .

Do mesmo modo, existe um desses ângulos que é menor que k , suponhamos sem perda de generalidade, que β seja menor que k .

Consideremos os ângulos α' , β' e γ' do seguinte modo:

$$\alpha' = k \quad (12)$$

$$\beta' = \alpha + \beta - \alpha' \quad (13)$$

$$\gamma' = \gamma \quad (14)$$

Veja que,

$$\begin{aligned} \beta' - \alpha' &= \alpha + \beta - \alpha' - \alpha' \\ &= \alpha + \beta - k - k, \text{ pois por hipótese } \alpha' = k \\ &= \alpha - k + \beta - k \\ &= (\alpha - k) + (\beta - k). \end{aligned} \quad (15)$$

Agora, por hipótese $\alpha > k$ e $\beta < 0$ isto implica que $\alpha - k > 0$, $\beta - k < 0$.

Consideremos, para facilitar a compreensão dos cálculos, que

$$\Delta_1 = \alpha - k > 0$$

e

$$\Delta_2 = \beta - k < 0$$

daí, da equação (12) temos que

$$\beta' - \alpha' = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (16)$$

Agora, da equação (15) $\beta' = \alpha + \beta - \alpha'$ chegamos que

$$\alpha = \beta' - \Delta_2 \quad (17)$$

e que

$$\beta = \beta' - \Delta_1 \quad (18)$$

de onde chegamos que

$$\beta - \alpha = -\Delta_1 + \Delta_2$$

Como $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 < 0$ temos que $|\Delta_1 + \Delta_2| < |\Delta_1 - \Delta_2|$ de onde chegamos das equações (17) e (18) acima que

$$|\beta' - \alpha'| < |\beta - \alpha|$$

Logo pelo Lema 3.2 temos que

$$\text{sen}\alpha' \cdot \text{sen}\beta' > \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \quad (19)$$

$$\text{sen}\alpha' \cdot \text{sen}\beta' \cdot \text{sen}\gamma' > \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma \quad (20)$$

de onde chegamos que

$$\text{sen}k \cdot \text{sen}\beta' \cdot \text{sen}\gamma' > \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma \text{ pois } \alpha' = k \text{ e } \gamma' = \gamma \quad (21)$$

Agora, como por hipótese

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 3k \\ \alpha' = k \\ \beta' = \alpha + \beta - \alpha' \\ \gamma' = \gamma \end{array} \right.$$

temos que

$$\beta' + \gamma' = \alpha + \beta - k + \gamma = 3k - k = 2k$$

como $\beta' \neq \gamma'$ podemos afirmar que

$$|k - k| < |\beta' - \gamma'|$$

logo pelo Lema 3.2 temos que

$$\text{sen}k \cdot \text{sen}k > \text{sen}\beta' \cdot \text{sen}\gamma' \quad (22a)$$

Portanto, multiplicando a equação (22) por $\text{sen}k$ chegamos pela equação (21) que

$$\text{sen}k \cdot \text{sen}k \cdot \text{sen}k > \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma$$

Como queríamos demonstrar. ■

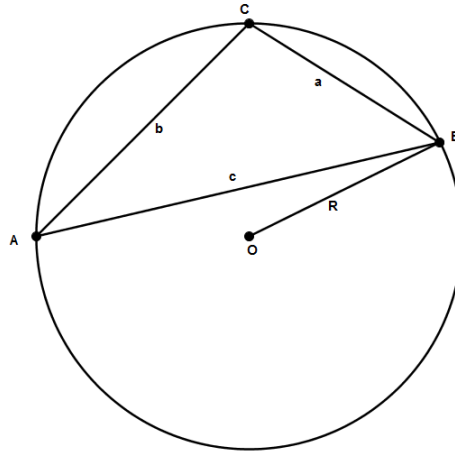


Figura 41: Triângulo Incrito em uma Circunferência

Lema 3.5. *De todos os triângulos inscritos em um círculo, o com maior área é o triângulo equilátero, e a razão entre a área do círculo e a área do triângulo é $\frac{4\pi}{\sqrt{27}}$*

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R , e sejam α , β e γ os ângulos desse triângulo como mostra a figura abaixo.

Temos que a área do triângulo ABC é dada por

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\gamma$$

pois $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, onde h é a altura do triângulo referente ao vértice C . Por outro lado

$$h = a \cdot \text{sen}\beta$$

mais pela lei dos senos

$$\text{sen}\beta = \frac{b}{c} \cdot \text{sen}\gamma$$

logo

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\gamma \tag{23a}$$

Como o triângulo está inscrito em uma circunferência de raio R , então

$$\begin{aligned}\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= 2R \\ \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} &= 2R \\ \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} &= 2R\end{aligned}\tag{24a}$$

Logo de (12) e (15) temos que a área do triângulo é dada por

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (2R\operatorname{sen}\alpha) \cdot (2R\operatorname{sen}\beta) \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

onde chegamos que a área do triângulo é dada por

$$A_{\Delta} = 2R^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

más pelo Lema 3.3 sabemos que o produto

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

tem valor máximo se $\alpha = \beta = \gamma$, pois $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Isto implica que para a área ser máxima então $a = b = c$ isto implica em dizer que o triângulo ABC é equilátero.

Logo a área é máxima se os ângulos do triângulo são iguais, isto implica em dizer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ \\ a = b = c = R\sqrt{3} \\ A_{\Delta} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 \end{array} \right.$$

Então, a razão entre a área do círculo e do triângulo é:

$$\frac{A_o}{A_{\Delta}} = \frac{\pi R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{27}}$$

onde A_o é a área do círculo e A_{Δ} é a área do triângulo ABC . Portanto a razão entre a área do círculo e a área do triângulo inscrito no círculo com área máxima é $\frac{4\pi}{\sqrt{27}}$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.6. *De todos os triângulos circunscritos em um círculo, o que possui menor área é o triângulo equilátero. E a razão entre a área do círculo e a área do triângulo é $\frac{4\pi}{\sqrt{27}}$, a maior possível.*

Demonstração. Considere um triângulo qualquer circunscrito em um círculo de raio r fixado como na figura abaixo

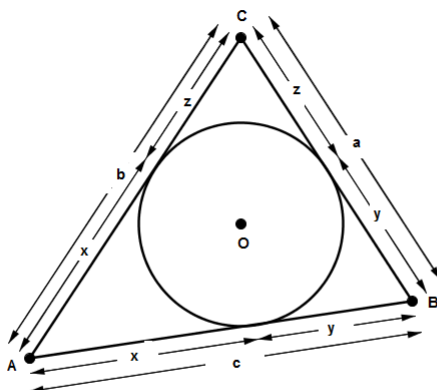


Figura 42: Triângulo Circunscrito em uma Circunferencia

Observe as medidas x , y e z no triângulo e seja s o semiperímetro do triângulo ABC , dessas medidas obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a + b + c}{2} \\ s = x + y + z \\ x = s - a \\ y = s - b \\ z = s - c \end{array} \right.$$

É fácil ver que a área do triângulo ABC é dada por

$$\Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot ar + \frac{1}{2} \cdot br + \frac{1}{2} \cdot cr$$

logo a área do triângulo é o produto do raio pelo semiperímetro, ou seja

$$A_{\Delta} = r \cdot s$$

A fórmula de Heron diz que a área de um triângulos pode ser dada por

$$A_{\Delta} = \sqrt{sxyz} = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\Delta}^2 = sxyz \\ r^2 s^2 = sxyz \\ r^2 s = xyz \\ \frac{s}{r^2 s} = \frac{s}{xyz} \\ \frac{1}{r^2} = \frac{s}{xyz} \end{array} \right.$$

das conclusões acima chegamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{x+y+z}{xyz} \\ &= \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \end{aligned} \quad (25a)$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{yz} \cdot \frac{1}{zx} \cdot \frac{1}{xy} &= \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \\ &= \frac{1}{r^4 s^2}, \text{ pois } sr^2 = xyz \\ &= \frac{1}{A_{\Delta}^2 r^2}, \text{ pois } A_{\Delta} = rs \end{aligned} \quad (26a)$$

Para facilitar a visualização das contas vamos considerar $u = \frac{1}{yz}$, $v = \frac{1}{xz}$ e $w = \frac{1}{xy}$ isto reduz as equações 25 e 26 em respectivamente

$$u + v + w = \frac{1}{r^2} \quad (27a)$$

$$u \cdot v \cdot w = \frac{1}{A_{\Delta}^2 r^2} \Rightarrow A_{\Delta}^2 = \frac{1}{r^2 \cdot u \cdot v \cdot w} \quad (28a)$$

Como r^2 é constante por hipótese, temos pela equação 27 que $u + v + w$ também é constante, e queremos que a área do triângulo ABC seja mínima, mais como r^2 é constante para que isso ocorra temos pela equação 28 que o produto $u \cdot v \cdot w$ precisa ser máximo.

Por um outro lado temos pelo Lema 3.1 que o produto será máximo se $u = v = w$ isto implica em dizer que $yz = xz = xy$ logo $x = y = z$. Portanto para que a área seja mínima o triângulo ABC terá que ser equilátero.

Como a área de um triângulo equilátero circunscrito em um círculo de raio r fixado é dada por $A_{\Delta} = 3\sqrt{3}r^2$ chegamos que a razão entre a área do círculo pela área do triângulo é

$$\frac{A_o}{A_{\Delta}} = \frac{\pi R^2}{3\sqrt{3}R^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{27}}$$

onde A_o é a área do círculo e A_{Δ} é a área do triângulo ABC . Portanto a razão entre a área do círculo e a área do triângulo circunscrito no círculo é a maior possível pois o círculo possui área fixa (constante) e o triângulo possui área mínima e o valor dessa razão é $\frac{\pi}{\sqrt{27}}$, como queríamos demonstrar. ■

3.3 Elipse de Steiner

Teorema 3.1. *Dado um triângulo qualquer, de todas as elipses inscritas no triângulo a que possui maior área é a elipse que toca os lados do triângulo no seus pontos médios.*

Demonstração. Consideremos inicialmente um triângulo T de vértices ABC . Tome-mos uma elipse ε inscrita no triângulo T , como na figura abaixo.

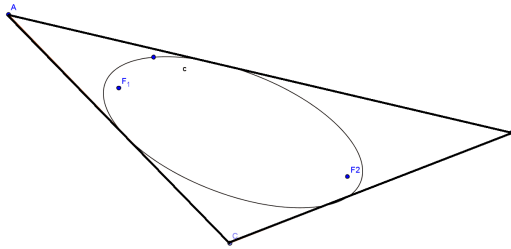


Figura 43: Elipse Inscrita em um Triângulo

Sabemos pela Proposição 2.7 que há uma projeção ortogonal que leva a elipse ε em um círculo c , veja a afigura abaixo.

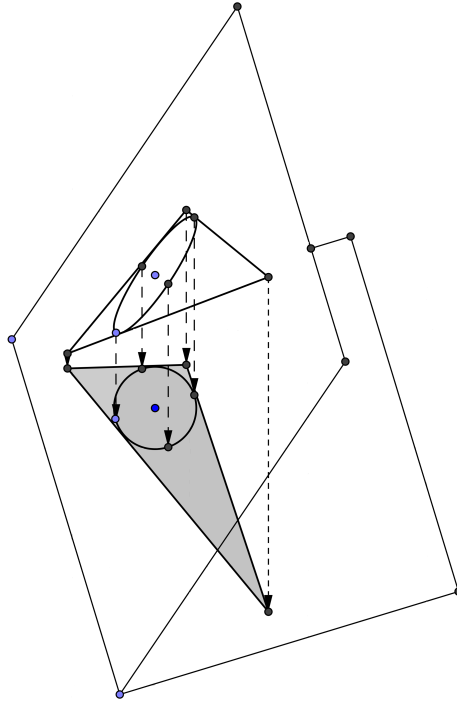


Figura 44: Projeção da Elipse em um Triângulo

Como a elipse ε está inscrita no triângulo T de vértices ABC , temos pelas propriedades da projeção ortogonal, Proposições 2.4 até 2.9, que o círculo c estará inscrito em um triângulo T' de vértices $A'B'C'$.

Seja θ o ângulo entre o plano β que contém a elipse e o plano α que contém o círculo, e sejam $A[e]$ a área da elipse, $A[c]$ a área do círculo, $A[T]$ a área do triângulo ABC e $A[T']$ a área do triângulo $A'B'C'$. Temos pelas propriedades da projeção ortogonal, proposições 2.8 e 2.9 que

$$A[c] = A[e] \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{A[c]}{A[e]} \quad (29)$$

e que

$$A[T'] = A[T] \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{A[T']}{A[T]}. \quad (30)$$

Agora, das equações 29 e 30 chegamos que

$$\frac{A[e]}{A[c]} = \frac{A[T]}{A[T']} \quad (31)$$

de onde obtemos

$$\frac{A[e]}{A[T]} = \frac{A[c]}{A[T']} \quad (32)$$

Mais o triângulo T é dado, logo é fixo, então $A[T]$ é constante. Logo podemos afirmar da equação (32) que $A[e]$ assume valor máximo quando a razão $\frac{A[c]}{A[T']}$ também atinge valor máximo.

Agora pelo que foi demonstrado no Lema 3.6 a razão $\frac{A[c]}{A[T']}$ só atinge valor máximo se T' for um triângulo equilátero. Ora, existe uma propriedade de triângulo equilátero que diz que o círculo inscrito em um triângulo equilátero toca os lados do triângulo nos seus respectivos pontos médios, ou seja o círculo c tocará os lados do triângulo T' nos pontos médios $M1'$, $M2'$ e $M3'$ referentes aos lados $A'B'$, $B'C'$ e $A'C'$ respectivamente. Isto implica que

$$\frac{A'M1'}{M1'B'} = \frac{B'M2'}{M2'C'} = \frac{A'M3'}{M3'C'} = 1$$

Ora, $M1'$, $M2'$ e $M3'$ é intersecção do círculo com os lados do triângulo T' , ou seja, são projeções ortogonais das intersecções $M1$, $M2$ e $M3$ da elipse ε com o triângulo T nos lados AB , BC e AC respectivamente. Então usando as propriedades da projeção ortogonal referentes à preservação do paralelismo entre retas e preservação da razão das distâncias entre dois segmentos, e em particular de dois segmentos da mesma reta, mais precisamente a Proposição 2.5, podemos concluir que

$$\frac{AM1}{M1B} = \frac{BM2}{M2C} = \frac{AM3}{M3C} = 1$$

Isto implica em dizer que os pontos $M1$, $M2$ e $M3$ são pontos médios dos lados AB , BC e AC triângulo T respectivamente, ou seja a elipse ε toca os lados do triângulo T em seus pontos médios. Portanto, se o círculo c tocar os lados do triângulo T' nos seus pontos médios, então a elipse ε também toca os lados do triângulo T nos seus pontos médios, como queríamos demonstrar. Ou seja, a elipse de maior área inscrita em um triângulo dado é a que toca o triângulo nos pontos médios. ■

Agora, podemos estabelecer mais precisamente a Elipse de Steiner usando as propriedades da projeção ortogonal descritas na seção 1.3. Pois sabemos que o centro O do círculo c é o encontro das medianas, bissetrizes, mediatrizes, ou seja o centróide do triângulo equilátero T' . Isto implica em dizer que o centro G da elipse ε é o centróide

do triângulo T . Logo conhecemos o centro da elipse e três pontos por onde a Elipse de Steiner passa, que são os pontos médios do triângulo T . Na seção três, mais precisamente no roteiro 5, mostraremos como traçar uma elipse conhecendo o seu centro e dois pontos por onde ela passa, desse modo, podemos seguir esses passos e determinar a Elipse de Steiner.

4 APLICAÇÕES E ROTEIROS DE AULA

Esperamos que as sugestões e os modelos apresentados neste trabalho possam ter utilidade tanto para formação de professores, quanto como material complementar para alunos que desejam estudar sobre a elipse. Nesse sentido, esperamos que o material possa servir também como uma motivação adicional para integração e utilização de ferramentas geométricas para o ensino de elipse.

Acreditamos que a exploração de um determinado assunto através de múltiplos enfoques tem maior probabilidade de despertar uma motivação legítima no aluno, além de tornar o estudo do tema em questão mais abrangente, aumentando a compreensão das definições e dos conceitos geométricos envolvidos neste estudo. Além disso, a construção de modelos usando construções geométricas permite o exame de uma ampla variedade de exemplos, favorecendo o estabelecimento de conjecturas razoáveis e mostrando caminhos a serem seguidos para a obtenção da necessária prova matemática dessas suposições.

No que diz respeito à formação continuada de professores, trabalhar e compreender uma conexão clara entre propriedades geométricas inerentes à elipse e a representação geométrica da mesma, permite uma melhor visualização e aprofundamento no estudo desta cônica.

4.1 Aplicações

Nossa intenção é apresentar situações práticas de onde o conhecimento de elipse pode ser usado para motivar os estudantes e os professores a trabalharem com mais empolgação esse tema tão rico. É claro que o conhecimento por si só já é motivador, mais quando encontramos aplicações práticas capazes de promover uma transformação social, sem sombra de dúvida, torna o estudo bem mais prazeroso.

4.1.1 Uma Aplicação da Elipse de Steiner

Apresentaremos nessa sessão uma aplicação da elipse de Steiner na engenharia civil, mais especificamente em construções. Vamos definir uma treliça e em seguida enunciar um problema para entendermos onde a Elipse de Steiner pode ser uma ferramenta

importante para o desenvolvimento científico e acadêmico.

Definição 4.1. *Denomina-se treliça plana, o conjunto de elementos de construção (barras redondas, chatas, cantoneiras, etc.), interligados entre si, sob forma geométrica triangular, através de pinos, soldas, rebites, parafusos, que visam formar uma estrutura rígida, com a finalidade de resistir a esforços normais apenas.*

Na figura abaixo temos a exemplificação de uma treliça.

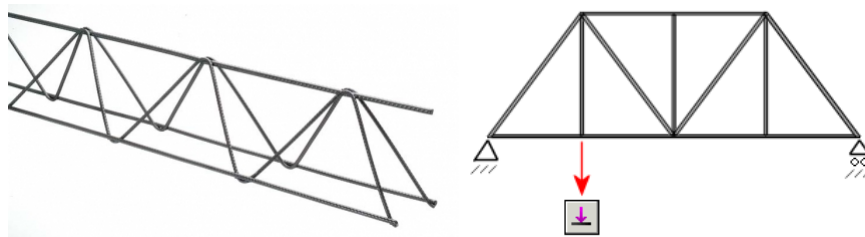


Figura 45: Exemplo de Treliça

A denominação treliça plana deve-se ao fato de todos os elementos do conjunto pertencerem a um único plano. A sua utilização na prática pode ser observada em pontes, viadutos, coberturas, guindastes, torres, etc. Na figura abaixo temos a exemplificação da aplicação de treliça.



Figura 46: Aplicações de Treliça

Situação problema

Consideremos que um engenheiro necessite projetar um eletroduto que comporte o maior número possível de fios. O problema é que o eletroduto deve estar todo dentro de uma treliça. Como o engenheiro deve projetar esse eletroduto, considerando que por razões técnicas, a seção do eletroduto deve ser uma degeneração de círculo?

Como a treliça é de seção triangular, então para que o eletroduto tenha maior seção possível o engenheiro deve projetar um eletroduto cuja seção seja uma elipse que toque

a treliça nos pontos médios de sua seção triangular, pois demonstramos nesse trabalho que a elipse é uma degeneração do círculo com maior área inscrita em um triângulo.

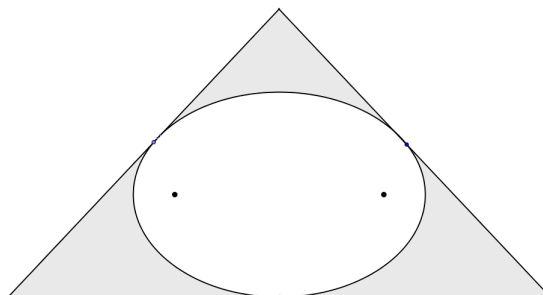


Figura 47: Seção de uma Treliça com Eletroduto

Concluimos então que, para que o eletroduto tenha maior área possível e esteja no interior de uma treliça, o engenheiro deverá projetar um eletroduto de seção elíptica que toque os lados do triângulo seção da treliça nos seus pontos médios.

Aplicação da Elipse em Geral

4.1.2 Aplicação 1: Na Engenharia

A elipse é frequentemente usada na Arquitetura, no Design e na Engenharia. As superfícies geradas por cônicas elipsóides têm propriedades refletoras que se usam para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas. Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.

Arcos em forma de semi-elipse são muito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos). Temos várias outras aplicações como na Engenharia Civil: em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia. Na Engenharia Elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias. E na Engenharia Mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricas) na construção de peças e equipamentos industriais.

4.1.3 Aplicação 2: Na Astronomia

Na astronomia o conhecimento sobre elipse é importantíssimo, já apresentamos no Capítulo 2 algumas razões para isto, mais listamos abaixo algumas curiosidades sobre a importância do conhecimento sobre elipse para os cientistas que trabalham com astronomia, como os da NASA.

- A Terra descreve uma trajetória elíptica em torno do sol, que é um dos focos dessa trajetória. A lua em torno da terra e os demais satélites em relação a seus respectivos planetas também apresentam esse comportamento (não considerando o deslocamento do sistema solar). Foi Kepler (1571-1630) quem desenvolveu esta teoria. No caso da Terra os semi-eixos são $a = 153.493.000km$ e $b = 153.454.000km$. Donde podemos obter a excentricidade da órbita da Terra: (quase uma circunferência). O eixo maior apresenta dois pontos: o periélio (janeiro) e o afélio (julho), que correspondem às distâncias mínimas e máxima da Terra ao Sol, respectivamente. Ademais, no globo terrestre o Equador tem aproximadamente a forma de uma circunferência e o meridiano de uma elipse.
- O cometa Halley segue uma órbita elíptica, tendo o Sol como um dos focos.
- Ao estudar a órbita de Marte, Kepler pôde verificar que esta não podia ser circular ela mais se parecia com uma oval. Vários cálculos foram feitos e ele verificou que a órbita de Marte era uma elipse de excentricidade 0,093 com o Sol em um dos focos.

Logo as tomadas de decisões desses cientistas dependem dos cálculos envolvendo as elipses descritas por esses corpos celestes.

4.1.4 Aplicação 3: Na Medicina

Na medicina bem como nas ciências aplicadas à saúde temos também algumas aplicações da elipse. Como por exemplo, uma aplicação óptica pode ser encontrada no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este aparelho consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e uma lâmpada que é colocada no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada através do espelho no outro foco, que é ajustado pelo dentista para ser refletido num ponto dentro da boca de seu paciente. Uma aplicação semelhante pode ser encontrada nos aparelhos utilizados em tratamentos radioterápicos, principalmente contra o câncer.

4.2 Roteiros de Aula para Elipse

Nosso objetivo nessa seção é apresentar alguns roteiros para apresentação da elipse do ponto de vista geométrico, lembrando que nesse trabalho não estamos apresentando a parte algébrica e/ou analítica da elipse, afim de facilitar a compreensão da cônica de um modo geral.

4.2.1 Roteiro 1

Objetivo: O objetivo desse roteiro é apresentar passos para a construção mecânica de uma elipse na forma mais simples, seguindo apenas as definições básica e noções lúdicas.

Sequência de Passos

- Passo 1 Pegue 15 cm de barbante ou linha, duas tachinhas ou pregos pequenos, uma folha de papel de desenho colada sobre uma placa de madeira ou isopor e um lápis.
- Passo 2 Fixe os preguinhos no papel sobre a placa de modo que a distância entre eles seja inferior a 15cm.
- Passo 3 Amarre o barbante de 15 cm nos dois preguinhos e coloque um lápis mantendo o barbante esticado.
- Passo 4 Movimente o lápis ao longo do barbante, mas sempre mantendo-o esticado.
- Passo 5 O traçado obtido será de uma elipse de focos nos preguinhos

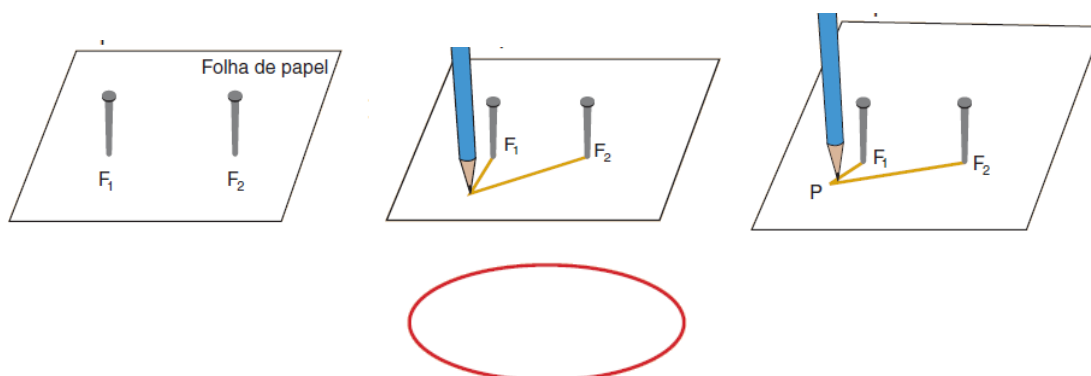


Figura 48: Traçado da Elipse Pelo Método do Jardineiro

A elipse obtida com os passos acima mantém os focos F_1 e F_2 satisfazendo a equação $PF_1 + PF_2 = k$, k constante, para todo o ponto P da elipse, o que satisfaz a definição focal de uma elipse. Esse método é conhecido como o método do jardineiro.

Veja que nessa atividade F_1 e F_2 são dois pontos fixos do plano e P é um ponto que pertence à elipse, então a soma das distâncias de P aos focos, $F_1P + F_2P$, é constante e a chamaremos de $2a$. Seja $2c$ a distância entre os dois pontos distintos, F_1 e F_2 , do plano. Vamos marcar alguns pontos de forma que a soma de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e maior do que $2c$:

$$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = DF_1 + DF_2 = \dots = 2a \text{ (constante)}.$$

A elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.

$$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = DF_1 + DF_2 = \dots = 2a \text{ (constante)}.$$

Veja a ilustração do exposto acima nas figuras abaixo.

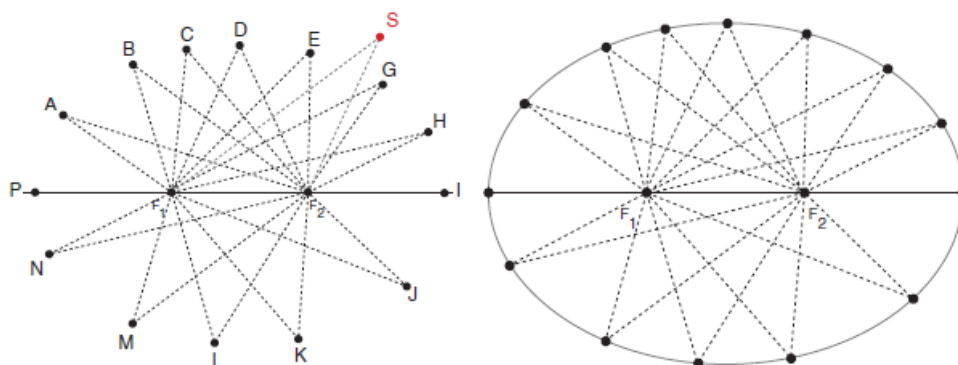


Figura 49: Elipse Através dos Pontos

4.2.2 Roteiro 2

Objetivo: O objetivo desse roteiro é apresentar passos para a construção de uma elipse usando apenas uma folha de papel e um compasso, fazendo dobraduras;

Sequência de passos

Passo 1 Pegue uma folha de papel (de maior transparência possível) e um compasso;

Passo 2 Com o compasso trace uma circunferência de raio qualquer e marque seu centro O ;

Passo 3 Marque um ponto F no interior da circunferência;

Passo 4 Marque vários pontos sobre a circunferência;

Passo 5 Dobre a folha de papel de modo que o ponto F coincida com cada ponto marcado sobre a circunferência e destacando cada dobradura;

passo 6 As dobraduras são tangentes à elipse, então basta traçar a elipse de modo que seja tangente a cada dobradura;

Para marcar mais precisamente os pontos da elipse, basta marcar o ponto de intersecção entre a dobradura e o segmento que liga o centro da circunferência e o ponto da circunferência usado para fazer a dobradura. Veja nas figuras abaixo um exemplo do roteiro acima.

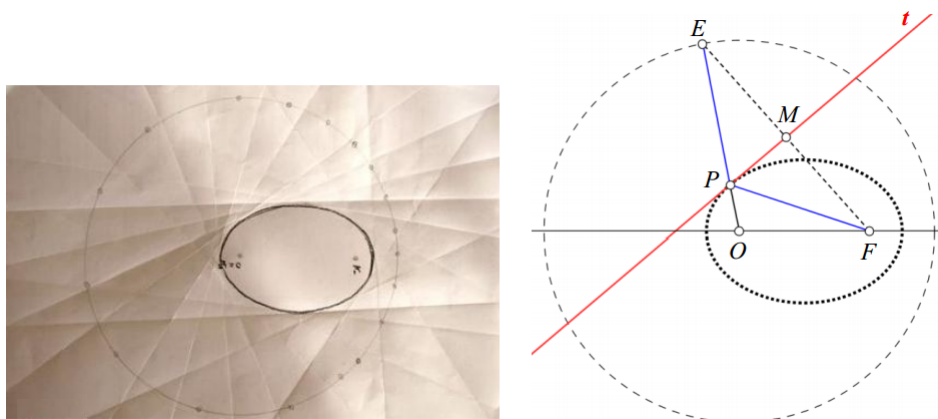


Figura 50: Construindo Elipse com Dobraduras

Usando o Geogebra

Podemos traçar a elipse descrita acima usando o software Geogebra. Para isso basta seguir os passos abaixo

- Abra uma janela do Geogebra exibindo os eixos coordenados;
- Trace uma circunferência de centro na origem e raio r_1 (escolher um valor);
- Marque um Ponto F no interior da circunferência;

- Marque um ponto E sobre a circunferência;
- Trace a mediatriz t do segmento \overline{FE} ;
- Trace o segmento \overline{OE} ;
- Marque o ponto P de intersecção entre a reta mediatriz t e o segmento \overline{OE} ;
- Marque a opção habilitar rastro para a reta mediatriz t ;
- Mova o ponto E ao longo da circunferência;
- O rastro da mediatriz t descreverá a elipse;

A elipse descrita acima possui como focos o centro O da circunferência e o ponto F marcado no seu interior. O ponto P é um ponto da elipse e a reta t é tangente à elipse. Logo quando movemos o ponto E ao longo da circunferência vamos obtendo uma sequencia de pontos da elipse e de retas tangentes à ela, como mostra a figura abaixo.

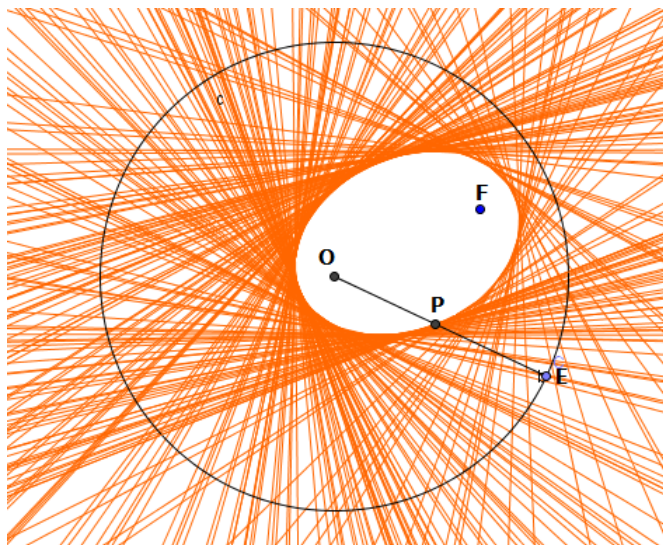


Figura 51: Construindo Elipse com Geogebra

4.2.3 Roteiro 3

Objetivo: O objetivo desse roteiro é apresentar passos para a construção de uma elipse cujo o centro é dado e que passa por dois pontos conhecidos.

Sequência de passos

Sejam O o centro, P e Q pontos por onde pretende-se que a elipse passe.

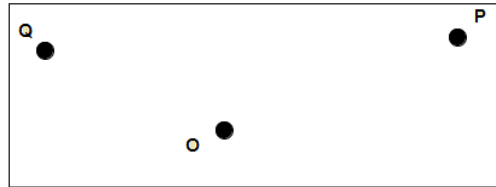


Figura 52: Marcando Três Pontos

Passo 1 Rotacione o segmento OQ 90 graus de modo que o segmento OQ' , resultado da rotação, esteja no interior do ângulo $P\hat{O}Q$.

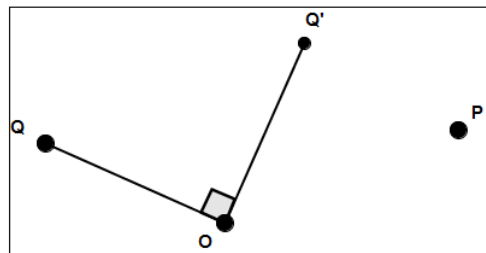


Figura 53: Rotacionando o Ponto Q

Passo 2 Marque o ponto médio M do segmento PQ' .

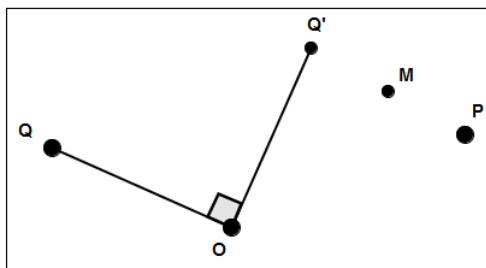


Figura 54: Ponto Médio M de $\overline{PQ'}$

Passo 3 Marque os pontos, H e K , de intersecção entre o círculo de centro M e raio MO e a reta que passa pelos pontos P e Q' .

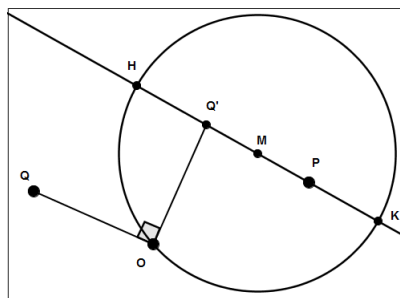


Figura 55: Circunferência de Centro M e Raio \overline{MO}

Passo 4 KP e HP são numericamente iguais à metade dos eixos da elipse, ou seja, o menor deles será igual b e o maior será igual a a .

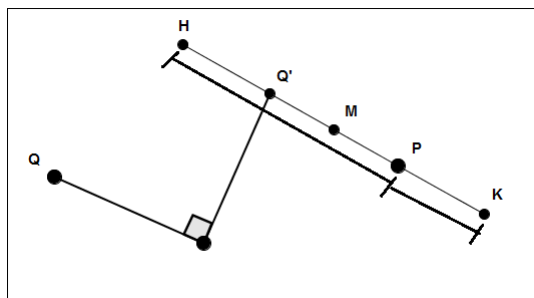


Figura 56: Determinando os Eixos da Elipse

Passo 5 OH e OK indicam a direção dos eixos da elipse, e como conhecemos o tamanho dos eixos, podemos marcar os vértices da elipse A_1 , A_2 , B_1 e B_2 .

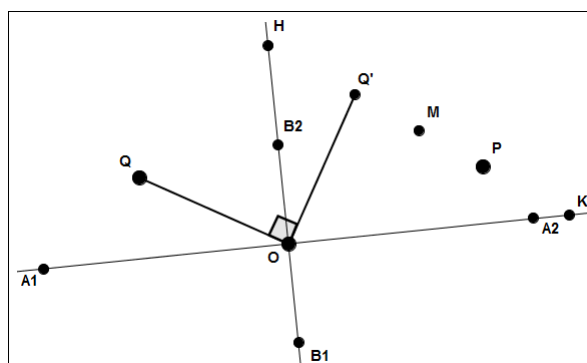


Figura 57: Direção dos Eixos da Elipse

Passo 6 Uma vez conhecidos os valores de a e b podemos usar a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e determinar o valor de c .

Passo 7 Conhecendo o valor de c , e os semi-eixo focais OA_1 e OA_2 , podemos marcar os focos F_1 e F_2 .

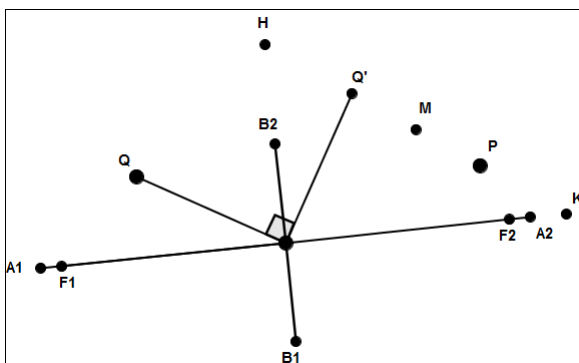


Figura 58: Determinando os Focos da Elipse

Agora, além dos pontos dados conhecemos os vértices e os focos da elipse, logo podemos usar a maneira mais conveniente para o traçado da elipse.

Passo 8 Com os elementos expostos acima podemos desenhar a elipse.

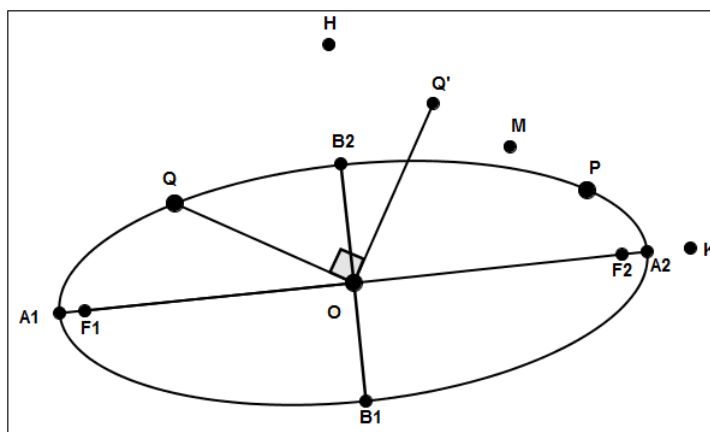


Figura 59: Traçando a Elipse

Vejam que é possível esboçar o gráfico de uma elipse conhecendo apenas o seu centro e dois pontos por onde ela passa.

4.2.4 Roteiro 4

Objetivo: O objetivo desse roteiro é apresentar passos para a construção de uma elipse a partir de duas circunferências concêntricas e raios distintos.

Sequência de Passos

- Passo 1 Tracemos duas circunferências de mesmo centro O e raios distintos.
- Passo 2 Sejam H um ponto na circunferência maior e K um ponto na circunferência menor de modo que os raios OH e OK sejam perpendiculares.
- Passo 3 Marquemos um ponto A , arbitrário, na circunferência de raio OK .
- Passo 4 Consideremos o ponto B , fruto da intersecção da reta OA e a circunferência de raio OH .
- Passo 5 Seja P o ponto da intersecção entre a perpendicular a OH passando por B e a perpendicular a OK passando por A .
- Passo 6 O conjunto de todos os pontos P construídos dessa forma, formam uma elipse de eixo maior $2OH$ e eixo menor $2OK$

Veja na figura abaixo a construção dessa elipse.

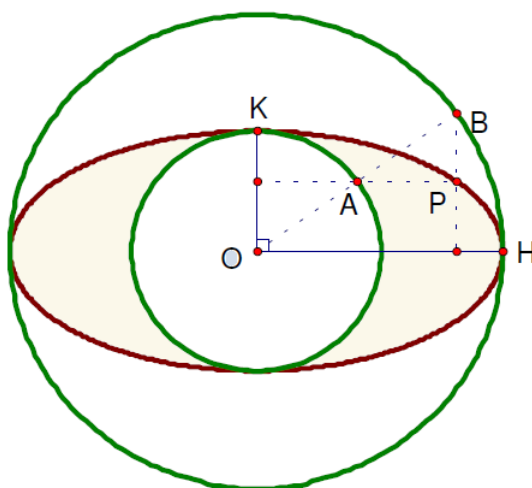


Figura 60: Elipse de Joseph Carnoy

Pensou-se inicialmente que o autor desse método fosse Danny Viscaino (estudante californiano da Mountain View High School) que o teria publicado, até que se veio a concluir tratar-se de uma meritória redescoberta, pois o mesmo método estava incluído numa publicação de 1912, da autoria de Joseph Carnoy.

Usando o Geogebra

Podemos traçar a elipse descrita acima usando o software Geogebra. Para isso basta seguir os passos abaixo

- Abra uma janela do geogebra exibindo os eixos coordenados;
- Trace uma circunferência de centro na origem e raio r_1 (escolher um valor);
- Trace uma circunferência de centro na origem e raio r_2 (escolher um valor) com $r_2 > r_1$;
- Marque um ponto B sobre a circunferência de raio r_2 ;
- Trace o segmento \overline{OB} ;
- Marque o ponto A intersecção entre \overline{OB} e o a circunferência de raio r_1 ;
- Trace uma reta r vertical passado pelo ponto B ;
- Trace uma reta s horizontal passando pelo ponto A ;
- Marque o ponto P intersecção entre as retas r e s ;
- Marque a opção habilitar rastro para o ponto P ;
- Mova o Ponto B ao longo da circunferência de raio r_2 , que o ponto P vai descrever a elipse;
- O desenho gerando é igual ao da figura 4.2.5 ;
- Para uma melhor aparência do desenho desabilite as retas r e s ;

4.2.5 Roteiro 5

Objetivo: O objetivo desse roteiro é mostrar como traçar uma elipse inscrita em um triângulo qualquer.

Sequência de Passos

Passo 1 Desenhemos um triângulo ABC qualquer.

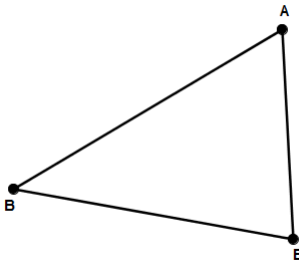


Figura 61: Traçado do Triângulo ABC

Passo 2 Tomemos um ponto $F1$ qualquer no interior do triângulo.

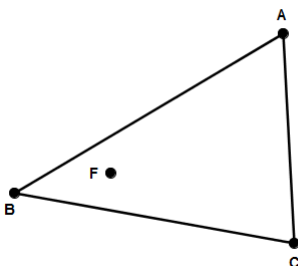


Figura 62: Ponto $F1$ no Interior do Triângulo

Passo 3 Consideremos os simétricos Q , R e S do ponto F em relação às retas AB , BC e CA , respectivamente.

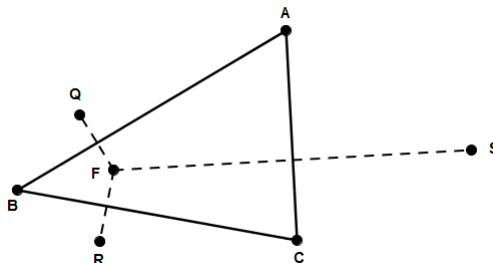


Figura 63: Simétricos de $F1$ em Relação aos Lados do Triângulo

Passo 4 Seja $F2$ o circuncentro do triângulo QRS , ou seja, o centro da circunferência que contém Q , R e S .

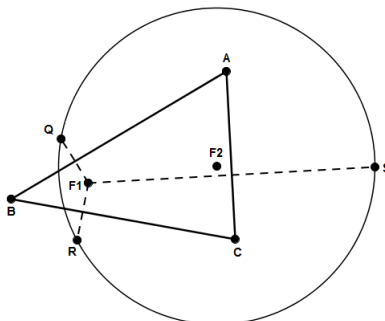


Figura 64: Centro $F2$ da Circunferência que Passa pelos Simétricos

Passo 5 Marquemos os pontos P_1 , P_2 , e P_3 da intersecção entre os raios $F2Q$, $F2R$ e $F2S$ e os lados AB , BC e CA , respectivamente do triângulo.

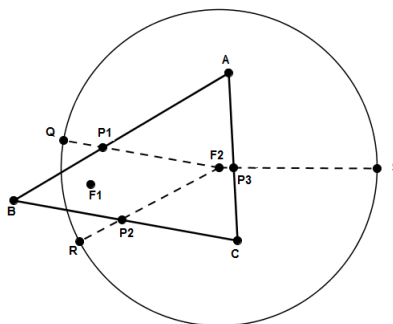


Figura 65: Intersecção Entre os Segmentos que Ligam $F2$ e os Simétricos

Passo 6 Tracemos a elipse ε de focos $F1$ e $F2$ que passa pelos pontos P_1 , P_2 , e P_3 .

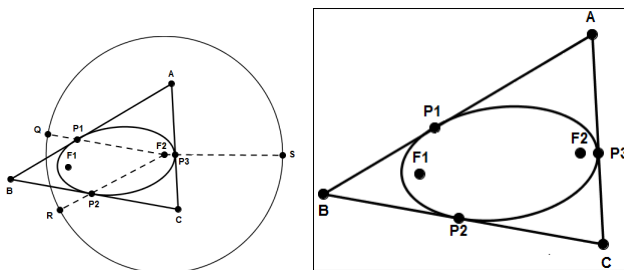


Figura 66: Traçado da Elipse

A elipse desse roteiro é tangente aos lados do triângulo ABC .

Faça o desenho da elipse obedecendo esse roteiro para vários pontos F no interior do triângulo e observe que à medida que P_1 , P_2 , e P_3 vão se aproximando dos pontos médios dos lados AB , BC e CA do triângulo, a elipse ε vai aumentando sua área como foi provado no Capítulo 2 desse trabalho.

5 CONCLUSÃO

Descrever uma elipse com todas as suas propriedades e aplicações é um desafio, mais se fazemos isso de maneira construtiva, começando a abordagem baseadas em ferramentas matemáticas e cognitivas conhecidas podem tornar o trabalho bem mais fácil e muito mais prazeroso.

A elipse de Steiner é um caso particular do estudo das elipses, e é visto por muitos como um conteúdo inacessível para alunos do ensino básico, mais mostramos nesse trabalho que se abordado de maneira correta e usando as ferramentas certas é possível abordá-lo em sala de aula.

Concluimos esse trabalho deixando claro que o ensino de cônicas, e em especial da elipse, não requer conhecimentos avançados, do ponto de vista matemático, para sua compreensão.

Referências

- [1] Figueredo.I.C. Elementos de Geometria. Rio de Janeiro.
- [2] Miskulin, R. G. S. (2003). As Possibilidades Didático-Pedagógicas de Ambientes Computacionais na Formação Colaborativa de Professores de Matemática. Formação de Professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares. pp. 217-248. São Paulo
- [3] BARBOSA, J. L. M.; Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 7a edição, (2004).
- [4] Osvaldo, D. José, N. P. Fundamentos de Matemática Elementar V.10, Geometria Espacial: Posição e Métrica.
- [5] LIMA, E. L.; A Matemática do Ensino Médio, V.3, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 4a edição, (2004).
- [6] LIMA, E. L.; A Matemática do Ensino Médio, V.2, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 4a edição, (2004).
- [7] Pitombeira.J.B;Matemática Estudo e ensino (Ensino médio). Fundação Roberto Marinho. 3a série.
- [8] Sergio, A.; Elipse Inscrita num Triângulo, Revista Professor de Matemática, SBM, No 82, pp. 46 e 47.
- [9] EVES, H.; Introdução à História da Matemática, Trad.: Hygino H. Domingues - Campinas - SP, Editora da UNICAMP, (2004).
- [10] Hartung, G., Construção das Cônicas por Dobragens, Petropolis, 2010 <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219>
- [11] mwoltermann, D., Steiner s Ellipse Problem. <http://www2.washjeff.edu>
- [12] Scimemi, B. Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle