



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Jogo do Par ou Ímpar

Pablo dos Santos Borges

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	PABLO DOS SANTOS BORGES.			CPF:	001. 301. 741 - 14		
E-mail:	pabloborgesufg@hotmail.com						
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não							
Vínculo empregatício do autor	PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO						
Agência de fomento:	Coord. De Aperf. de Pessoal de Niv. Superior			Sigla:	CAPES		
País:	BRASIL	UF:	GO	CNPJ:	00.889.834/0001-08		
Título:	Jogo do Par ou Ímpar.						
Palavras-chave:	Probabilidade, Par ou ímpar, passeio aleatório.						
Título em outra língua:	Set Odd or Even.						
Palavras-chave em outra língua:	Probability, odd or even, random walk.						
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.						
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	03 / 07 / 2014.						
Programa de Pós-Graduação:	MESTRADO.						
Orientador (a):	PROF. DR. VALDIVINO VARGAS JÚNIOR						
E-mail:	vvjunior@gmail.com						
Co-orientador(a):*							
E-mail:							

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: ____ / ____ / ____

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Pablo dos Santos Borges

Jogo do Par ou Ímpar

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr Valdivino Vargas Júnior.

Goiânia

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

B732j Borges, Pablo dos Santos.
 Jogo do par ou ímpar [manuscrito] / Pablo dos Santos
 Borges. - 2014.
 88 f. : il.; color., figs., tabs., qds.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Anexos.

1. Matemática 2 Jogos matemáticos. I. Título.

CDU 51-8

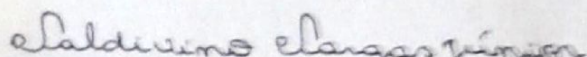


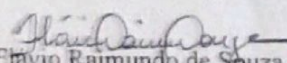
Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG

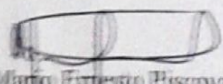


Campus Samambaia - Caixa Postal 130 - CEP 74100-970 - Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-4157 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Pablo dos Santos Borges - Aos três dias do mês de julho do ano de dois mil e quatorze (03/07/2014), às 17:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior - Orientador, Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza e Prof. Dr. Mario Ernesto Piscopya Díaz, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa intitulada: "**Jogo do Par ou Ímpar**", em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Pablo dos Santos Borges, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior
Presidente-IME/UFG


Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro-IFG/Goiânia


Prof. Dr. Mario Ernesto Piscopya Díaz
Membro-IME/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da Universidade Federal de Goiás, do autor Pablo dos Santos Borges e do orientador Professor Dr. Valdivino Vargas Junior.

Pablo dos Santos Borges graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, durante a graduação foi bolsista pela CAPES, obtendo o título de mestre em Matemática no período de 2012 e 2013.

Dedico este, bem como todas as minhas demais conquistas, a meus pais (Davi e Wagner(In Memoriam)), meus sogros (Wellington e Joelma) e ao meu precioso filho (Miguel). E o que dizer a você Gleyciele? Obrigado pela paciência, pelo incentivo pela força e principalmente pelo carinho. Valeu a pena todo sacrifício, todo sofrimento, todas as renúncias...Valeu a pena esperar...Hoje estamos colhendo, juntos, os frutos do nosso empenho! Esta vitória é muito mais sua do que minha!!!
Eu te amo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente, pela minha vida, saúde e ter me abençoado para chegar nesse momento. Meus sinceros agradecimentos a meu orientador Professor Dr. Valdivino Vargas Júnior pela dedicação, paciência e orientação desse trabalho. Muito obrigado Professor!! Também a todos os professores que contribuíram para a minha formação profissional, especialmente aos professores Mário José, Ole, Paulo Henrique, Rogério e Jesus Mota.

Quero agradecer a minha esposa, Gleyciele, pela ajuda, compreensão, carinho e paciência demonstrada ao longo desses anos. Obrigado meu amor. Também a meu pai (Davi) e ao meu filho (Miguel) o qual deixei-o algumas horas por dia, para a realização deste e pelo amor, carinho e compreensão. Me desculpe pelos momentos que tive que me ausentar para estudar. Vocês são muito importantes na minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial a meu sogro (Wellington) e minha sogra (Joelma) pela torcida. Aos meus amigos Henrique Lozzi, Luiz Carlos e Wesley de Paula pela amizade e ajuda nas horas de estudo (que não foram poucas). E a todos que me apoiaram durante os anos.

Não cesso de agradecer a SBM, pela criação deste Curso em Rede Nacional, a UFG, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e a CAPES pelo concessão da bolsa de estudos.

Resumo

O trabalho a seguir, foi realizado em cima do Jogo do Par ou Ímpar. Ao explorar esse jogo, analisamos uma disputa entre dois jogadores, sendo um deles estrategista e o outro leigo. Na primeira parte consideramos sucessivas apostas, nas quais, o estrategista tem vantagem probabilística sobre o leigo. Depois, consideramos o caso onde os jogadores jogam até que alguém fique sem dinheiro. A metodologia é investigativa e direcionada por atividade que buscam mostrar a importância desse conhecimento na formação cognitiva do aluno, propiciando-lhe uma reflexão teórico-prática acerca das experiências vivenciadas e estimulando o raciocínio lógico matemático. O trabalho foi dividido em partes. Antes de iniciar o detalhamento do trabalho, usamos um embasamento teórico direcionado a Teoria dos Jogos e a Probabilidade. No desenrolar deste, apresentamos resultados pertinentes a problemática do trabalho. Logo em seguida, temos quatro propostas de aulas utilizando o jogo do Par ou Ímpar. Sendo que uma delas foi executada aos alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave

Probabilidade, Par ou ímpar, passeio aleatório.

Abstract

The following work was carried out over the game of odd or even. By exploring this game, we analyze a dispute between two players, one being a strategist and another layman. In the first part were successive bets, in which the strategist had advantage over the layman. Then play until someone stay without money. The methodology is investigative and directed by activities that seek to show the importance of this knowledge in cognitive training of the student, giving it a theoretical reflection on the practice experienced and stimulating logical reasoning mathematical experiences. The work was divided into parts. Before starting the detail work, we use a theoretical basis directed to Game Theory and Probability. In the course of this, we present the relevant problems of work results. Shortly following section, we have four draft classes using the game of odd or even. One of which was performed at the High School students.

Keywords

Probability, odd or even, random walk.

Sumário

1	Introdução	12
2	Referencial Teórico	14
2.1	Teoria dos Jogos	14
2.1.1	Conceito de Jogos	14
2.1.2	Classificação de jogos	15
2.2	Definição de Probabilidade	15
2.2.1	Definição Clássica(Cardano(1663), De Moivre(1718), Laplace(1912)):	16
2.2.2	Definição Axiomática(Kolmogorov(1933)):	16
2.2.3	Definição Frequentista	18
2.2.4	Definição Subjetiva	19
2.2.5	Teoria Elementar de Probabilidade	19
2.3	Variáveis Aleatórias e suas Caracterizações	21
2.3.1	Definição de Variável Aleatória	21
2.3.2	Definição de Função de Distribuição	22
2.3.3	Definição de Esperança	24
2.3.4	Definição de Variância	26
2.3.5	Função Característica	27
2.3.6	Distribuição Normal	28
2.3.7	Distribuição de Bernoulli	31
2.3.8	Distribuição Binomial	33
2.3.9	Distribuição de Poisson	36
2.3.10	A Distribuição de Poisson como Aproximação da Distribuição Binomial	36
2.4	Vetores Aleatórios Discretos	39

2.5	Teorema Central do Limite	48
2.6	Processos Estocásticos	51
2.6.1	Passeios Aleatórios	51
3	Jogo do Par ou Ímpar	54
3.1	Introdução	54
3.2	Passeio Aleatório para o Jogo Par ou Ímpar	56
3.3	Caso Geral	66
4	Aplicação no Ensino Médio	73
4.1	Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás	73
4.2	Propostas de aulas aplicadas ao Ensino Médio	74
4.2.1	Proposta 01	74
4.2.2	Proposta 02	76
4.2.3	Proposta 03	77
4.2.4	Proposta 04	78
4.2.5	Execução da Proposta 02	79
5	Anexos	83
6	Conclusão	84
	REFERÊNCIAS	85

Capítulo 1

Introdução

O nosso problema consiste em um jogo de par ou ímpar onde cada jogador mostra a mão com uma quantidade aleatória de dedos para cima. O resultado depende da soma dos números de ambos jogadores. É um jogo de azar, pois não sabemos o que o outro jogador vai colocar. Suponha que o jogador 1 escolha par e o jogador 2 escolha ímpar. O jogador 1 confiando que o jogador 2 vai colocar par, então deve colocar par. Se o jogador 1 achar que o jogador 2 vai colocar ímpar, então deve colocar ímpar para que o resultado seja par. Há duas maneiras de jogar: aleatoriamente ou estrategicamente.

No capítulo 2 apresentamos algumas demonstrações de resultados que são utilizados no desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3, detalhamos o nosso problema, onde temos dois jogadores realizando apostas num jogo de par ou ímpar. Eles repetem apostas em sucessivas rodadas. Chamamos os dois jogadores de: Estrategista e Leigo. O Estrategista não joga aleatoriamente, adota estratégia de assumir que o outro joga aleatoriamente e joga de forma a maximizar suas chances de ganho. Já o Leigo, joga aleatoriamente e nunca usa estratégia para vencer. O objetivo é mostrar a vantagem que o estrategista tem no decorrer do jogo, mostrando-o qual é a melhor estratégia a ser adotada. Logo em seguida, calculamos a probabilidade do jogador ganhar o jogo colocando par ou ímpar. No decorrer do trabalho, obtemos a média e a variância do lucro do estrategista e do número de vitórias. No capítulo 4, detalhamos a parte do currículo de referência da Rede Estadual de Educação de Goiás que abrange os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade com suas respectivas expectativas de aprendizagem. Apresentamos quatro propostas de aulas para o ensino médio. Uma das propostas foi realizada em sala de aula. Os detalhes desta aula são apresentados.

A contribuição deste trabalho está relacionado a metodologia de aulas diferenciadas, utilizando o jogo, porém não deixando o conteúdo didático, mas sim conduzindo o aluno ao saber sistematizado.

Finalmente, na conclusão apresentamos algumas considerações e conclusões relacionadas ao problema.

Capítulo 2

Referencial Teórico

2.1 Teoria dos Jogos

Nesta parte do trabalho são abordadas teorias e visões de autores para definição de Teoria dos Jogos Estratégicos. Diante de situações de conflito e/ou cooperação mútua, tenta-se equacionar o quanto é mais vantajoso colaborar ou se abster e encarar uma decisão de competição.

2.1.1 Conceito de Jogos

O jogo é uma forma diferenciada de estimular o raciocínio do aluno, que se interessa em aprender o sentido do jogo para poder ganhar. Porém, para vencer estes jogos, utilizam-se de várias estratégias, pois cada jogo apresentam inúmeras possibilidades. As estratégias nem sempre são as mesmas, depende do andamento do jogo. Portanto, a Teoria dos Jogos pode ser entendida como uma grande abordagem que não resolve questões estratégicas, mas ajuda a organizar o processo de pensamento estratégico do aluno.

Com a ajuda da Teoria dos jogos, os indivíduos raciocinam mais, atentam para as jogadas do oponente e estudam melhor a opção a ser utilizada. Essas análises pode indicar uma solução para o jogo, ou indicar a melhor maneira de jogar. Ainda assim, na maioria dos jogos que descrevem problemas reais, ela só nos fornece uma visão geral, descartando algumas jogadas que não levarão a bons resultados.

Para introduzir um jogo, o professor deve explicar o conteúdo que será tratado no jogo e em seguida explicar as regras e pontuações deixando bem claras. Cada jogo pode ser composto com pelo menos dois jogadores, realizam-se sucessivas jogadas, sendo que ambos poderão utilizar estratégia ou não. No decorrer de cada jogada, são anotados os resultados, no fim do jogo, cada jogador obtém um payoff. Caso ele vença, o payoff é +1, caso empate, o payoff é 0, e caso perca, o payoff é -1.

2.1.2 Classificação de jogos

A classificação do jogo ocorre de acordo com os diversos tipos possíveis de jogos, permitindo que ele represente, com maior ou menor autenticidade, diversas situações de conflito real. Entre as possibilidades temos:

- Jogos baseados em regras x jogos de desenvolvimento livre;
- Jogos cooperativos x jogos não cooperativos;
- Jogos de informação perfeita x jogos de informação imperfeita;
- Jogos de soma zero x jogos de soma não zero.

A teoria básica pode ser encontrada em [12].

2.2 Definição de Probabilidade

Um modelo probabilístico é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde Ω é o espaço amostral que consiste dos possíveis resultados do experimento, \mathcal{F} é uma classe de eventos aleatórios e \mathbb{P} é uma probabilidade. A classe de eventos aleatórios \mathcal{F} é uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^C \in \mathcal{F}$;
3. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, \dots$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Exemplo 1. Uma urna possui cinco bolas verdes, três bolas vermelhas e uma bola preta. Uma bola é retirada ao acaso da urna. Um espaço amostral para esse experimento é: $\Omega = \{verde, vermelha, preta\}$ e uma classe de eventos aleatórios para Ω seria $\mathcal{F} = \{\phi, \{verde\}, \{vermelha\}, \{preta\}, \{verde, vermelha\}, \{verde, preta\}, \{vermelha, preta\}, \Omega\}$.

Há quatro definições de probabilidade conhecidas:

- clássica;
- axiomática;
- frequentista;
- subjetiva.

A seguir, definimos cada uma delas.

2.2.1 Definição Clássica(Cardano(1663), De Moivre(1718), Laplace(1912)):

Definição 1. Seja Ω finito, não-vazio, e suponhamos que cada subconjunto elementar de Ω é igualmente provável. Então, para qualquer $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade de A como:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (2.1)$$

Observação: A definição anterior formaliza a primeira definição conhecida de probabilidade: “relação entre o número de casos favoráveis ao acontecimento (evento) e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis”.

Exemplo 2. Extraem-se quatro cartas de um baralho com cinquenta e duas cartas. Se A é o evento “extrair duas cartas pretas e duas vermelhas” então

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{26,2} \cdot C_{26,2}}{C_{52,4}} = \frac{325}{833}.$$

2.2.2 Definição Axiomática(Kolmogorov(1933)):

Definição 2. Uma probabilidade é uma função $\mathbb{P}(\cdot)$ a valores reais definida em uma classe \mathcal{F} de eventos de um espaço amostral Ω , que satisfaz as seguintes condições:

(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, para todo $A \in \mathcal{F}$,

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(A3) Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois disjuntos;

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \quad (2.2)$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamada espaço de probabilidade.

Observação: No caso de Ω finito ou infinito enumerável, podemos definir a probabilidade na classe \mathcal{F} de todos os subconjuntos de Ω , a qual é usualmente denotada por 2^Ω ou $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Neste caso, escrevendo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, associamos a cada ω_i , $i = 1, 2, \dots$, um número $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, \dots$, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples ω_i . A probabilidade de um evento $A \in \mathcal{F}$ é definida por:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \quad (2.3)$$

Quando Ω é infinito não-enumerável, é em geral impossível associar uma probabilidade bem definida a todos os subconjuntos de Ω . Define-se então uma probabilidade em uma classe mais restrita de subconjuntos de Ω ; apenas esses subconjuntos são denominados eventos aleatórios. O ponto essencial é que essa classe contém todos os subconjuntos (eventos aleatórios) de interesse prático. Um exemplo importante é Ω igual a um intervalo da reta, para o qual se considera a classe de subconjuntos conhecida como σ -álgebra de Borel.

Exemplo 3. Todas as cores do mundo são obtidas a partir da mistura de apenas três: vermelho, amarelo e azul, as chamadas cores primárias. As cores secundárias são formadas pela mistura de duas cores primárias. O verde vem da mistura de azul com amarelo. O roxo, de vermelho com azul. E o laranja, de amarelo com vermelho. Considere uma urna com a seguinte composição:

Composição da Urna.

<i>Cor</i>	<i>Vermelha</i>	<i>Amarela</i>	<i>Azul</i>	<i>Verde</i>	<i>Roxa</i>	<i>Laranja</i>
<i>Número de Bolas</i>	4	5	3	8	2	3

Fonte: Dados Hipotéticos.

Uma bola é retirada ao acaso desta urna.

a) Um espaço amostral para este experimento é $\Omega = \{\text{vermelha}, \text{amarela}, \text{azul}, \text{verde}, \text{roxa}, \text{laranja}\}$.

b) Uma classe de eventos aleatórios é dada por $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Note que $|\Omega| = 6$ e $|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$. Ou seja, temos 64 eventos aleatórios.

c) Para definir probabilidade note que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\textit{vermelha}) &= \frac{4}{25}, & \mathbb{P}(\textit{amarela}) &= \frac{5}{25}, & \mathbb{P}(\textit{azul}) &= \frac{3}{25}, \\ \mathbb{P}(\textit{verde}) &= \frac{8}{25}, & \mathbb{P}(\textit{roxa}) &= \frac{2}{25}, & \mathbb{P}(\textit{laranja}) &= \frac{3}{25}. \end{aligned}$$

d) Se A é o evento “bola retirada tem cor primária” então;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\textit{vermelha}) + \mathbb{P}(\textit{amarela}) + \mathbb{P}(\textit{azul}) \\ \mathbb{P}(A) &= \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{3}{25} = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

2.2.3 Definição Frequentista

A definição clássica é ambígua, pois a ideia de igualmente provável é a mesma de com probabilidade igual, e, além disso, essa definição não pode ser aplicada quando o espaço amostral for infinito. Por exemplo, a probabilidade de tirar uma carta de ouros em um baralho é: $13/52 = 1/4 = 25\%$. Considerando meu espaço amostral finito é válido essa probabilidade, agora, caso altere a quantidade de cartas do meu baralho essa probabilidade não permanece a mesma.

Por causa dessas limitações surge a segunda definição de probabilidade, denominada empírica ou a posteriori, ou ainda frequentista mais abrangente. Esta é consequência da “Lei dos grandes números”, atribuída ao matemático austríaco Richard von Mises (1883-1953).

Para calcularmos uma probabilidade frequentista procedemos da seguinte forma. Admita que estamos interessados na probabilidade de um evento A associado a um experimento aleatório. Se o experimento pode ser realizado muitas vezes sob condições rigorosamente idênticas, então repetimos o procedimento uma quantidade grande n de vezes. Anotamos o número de vezes que A ocorre nessas repetições e assim podemos obter uma boa estimativa da probabilidade de ocorrência de A . Logo, a probabilidade empírica ou a posteriori de A é dada por

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n},$$

onde $n(A)$ é o número de vezes que A ocorre nas n repetições.

Exemplo 4. Lançamos um dado honesto várias vezes e anotamos numa tabela o número de vezes que a face sorteada foi o número 5. Os dados obtidos encontram-se na tabela a seguir:

Número de Repetições da Face 5.

<i>Número de lançamentos</i>	<i>Face 5</i>	<i>Frequência</i>
100	24	0,2400
1.000	172	0,1720
10.000	1.685	0,1685
100.000	16.650	0,1665

Fonte: Dados Hipotéticos.

Se calcularmos a probabilidade pela forma convencional, teremos $p = 1/6 = 0,166\dots$. Note que a frequência obtida nos lançamentos se aproxima do resultado dessa probabilidade conforme aumentamos a quantidade de lançamentos.

2.2.4 Definição Subjetiva

A probabilidade subjetiva é o grau de convicção ou crença que cada pessoa atribui à ocorrência ou não de um evento. A probabilidade subjetiva é frequentemente empregada naquelas situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada ou que não pode ser realizada em idênticas condições, como por exemplo:

- a) Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e deseja-se saber se ele ficará bom;
- b) Num jogo de futebol entre dois times, deseja-se saber quem vencerá;
- c) Uma pessoa deseja saber se seu relacionamento afetivo terá ou não sucesso;
- d) Uma pessoa pode acreditar fortemente que ganhará na loteria, ainda que a probabilidade teórica indique o contrário.

A probabilidade subjetiva não deve ser confundida com a probabilidade frequentista, uma vez que as condições de realização do experimento não são as mesmas.

2.2.5 Teoria Elementar de Probabilidade

Proposição 1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então:

- i) $\mathbb{P}(\phi) = 0$;
- ii) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Definição: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ dois

eventos aleatórios tais que $\mathbb{P}(B) > 0$. A probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é dada por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (2.4)$$

Exemplo 5. Voltando ao Exemplo 3 (das cores), seja B o evento “bola retirada tem cor verde ou vermelha”. Temos que:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\omega_i \in B} \mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\text{verde}) + \mathbb{P}(\text{vermelha}) = \frac{8}{25} + \frac{4}{25} = \frac{12}{25}.$$

Além disso;

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{vermelha}) = \frac{4}{25}.$$

Logo;

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{1}{3}.$$

Em palavras, dado que a bola retirada tem cor verde ou vermelha a probabilidade que ela tenha cor primária é $\frac{1}{3}$.

Proposição 2. (Regra da multiplicação) Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ eventos aleatórios tais que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, então

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)P(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (2.5)$$

Exemplo 6. Considere uma urna contendo inicialmente oito bolas verdes e duas bolas vermelhas. Três bolas são retiradas uma a uma de forma aleatória desta urna segundo o seguinte processo: após cada retirada, a bola extraída é devolvida junto com duas bolas de mesma cor. Defina os eventos A_i : “Sair bola verde na i -ésima retirada”, com $i = 1, 2, 3$ e A : “Sair bola vermelha em pelo menos uma das retiradas”. A probabilidade de sair bola verde nas três retiradas é

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{8}{10} \cdot \frac{(8+2)}{(10+2)} \cdot \frac{(8+2+2)}{(10+2+2)} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{12}{14} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Definição 3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios A_1, A_2, \dots, A_n em \mathcal{F} são ditos *independentes* se e somente se:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

para todo $k = 2, 3, 4, \dots, n$ com $i_j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Observação: No experimento retirar uma a uma ao acaso e com reposição 5 bolas de uma urna contendo inicialmente 8 bolas verdes e 2 bolas vermelhas, os eventos A_i : retirar bola verde na i -ésima retirada para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ são independentes.

2.3 Variáveis Aleatórias e suas Caracterizações

A seguir, apresentamos a definição e a caracterização de uma variável aleatória. Logo em seguida, definições de esperança, variância, distribuição Normal, distribuição de Bernoulli, distribuição Binomial e distribuição de Poisson são dadas.

2.3.1 Definição de Variável Aleatória

Definição 4. Uma *variável aleatória* X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função a valores reais definida em Ω , tal que

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F};$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. As variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto finito ou infinito enumerável são chamadas discretas e aquelas que assumem valores em um intervalo da reta real são chamadas contínuas.

Exemplo 7. Considere uma urna contendo quatro bolas vermelhas e seis verdes. Duas bolas são retiradas da urna, uma a uma, ao acaso e sem reposição. Defina X como o número de bolas verdes retiradas. Escreva $\Omega = \{(verde, verde); (vermelha, verde); (verde, vermelha); (vermelha, vermelha)\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Logo,

$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x < 0; \\ (vermelha, vermelha), & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ (verde, verde)^C, & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ \Omega, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Concluimos então que X é variável aleatória pois $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ para todo x real.

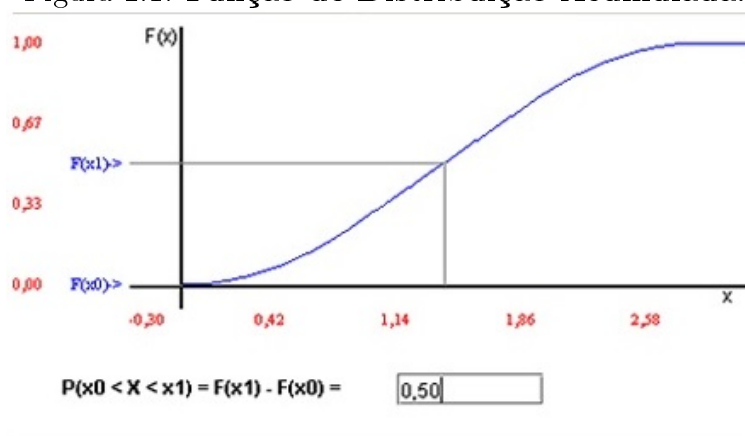
2.3.2 Definição de Função de Distribuição

Definição 5. A função de distribuição acumulada de uma variável X é a função $F = F_x$ definida por

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

A Figura 2.1 apresenta a função de distribuição de uma variável aleatória contínua X . Dados dois valores x_0 e x_1 , a diferença $F(x_1) - F(x_0)$ representa a probabilidade de X assumir valores entre x_0 e x_1 . No exemplo dado esse valor é 0,50.

Figura 2.1: Função de Distribuição Acumulada.



Fonte: <http://www.dpi.ufv.br/peternelli/applets/helpvac/dist.htm>

Propriedades fundamentais de uma função de distribuição:

(F1) F é uma função não-decrescente: $x < y$, então $F(x) \leq F(y)$.

(F2) F é contínua a direita: se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$; se $x_n \downarrow +\infty$, então $F(x_n) \downarrow 1$.

Observação: Uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (F1), (F2) e (F3) é a função de distribuição de alguma variável aleatória X .

Exemplo 8. Voltando ao Exemplo 7, defina A_i como o evento “sair bola verde na i -ésima retirada”. Então:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\text{verde}, \text{verde})) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{5}{15}; \\ \mathbb{P}((\text{vermelha}, \text{verde})) &= \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2|A_1^C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}; \\ \mathbb{P}((\text{verde}, \text{vermelha})) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^C|A_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}; \\ \mathbb{P}((\text{vermelha}, \text{vermelha})) &= \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2^C|A_1^C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\text{verde}, \text{verde})^C) &= 1 - \frac{5}{15} = \frac{10}{15}; \\ \mathbb{P}((\text{vermelha}, \text{vermelha})) &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Logo,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \frac{2}{15}, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ \frac{10}{15}, & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Definição 6. Seja X uma variável aleatória discreta. A função $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ é chamada *função de probabilidade* de X .

Exemplo 9. Voltando ao Exemplo 8:

$$\begin{aligned}p(0) &= \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((\text{vermelha}, \text{vermelha})) = \frac{2}{15}; \\ p(1) &= \mathbb{P}(X = 1) = \sum_{\omega_i \in \{X=1\}} \mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}((\text{verde}, \text{vermelha})) + \mathbb{P}((\text{vermelha}, \text{verde})) \\ &= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}; \\ p(2) &= \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((\text{verde}, \text{verde})) = \frac{5}{15}.\end{aligned}$$

Definição 7. Seja X uma variável aleatória contínua. Então, existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação: A função $f(x)$ é chamada *função de densidade de probabilidade* de X .

i) Se $f(x)$ é densidade de probabilidade de X , então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

ii) Se $f(x)$ é densidade de probabilidade de X , então

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo 10. Suponha que a densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

onde λ é uma constante positiva e X é conhecida como variável aleatória exponencial (Use a notação $X \sim \exp(\lambda)$). Se $x < 0$, $F(x) = 0$. Por outro lado, se $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.3.3 Definição de Esperança

Definição 8. A *esperança* (média, valor esperado) de uma variável aleatória X é definida por

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x), \quad \text{se } X \text{ discreta};$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f.$$

Observação: A esperança está definida somente quando a soma (integral) é bem definida.

Exemplo 11. Voltando ao Exemplo 9.

$$E(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{5}{15} = \frac{18}{15} = 1,2.$$

Exemplo 12. Voltando ao Exemplo 10.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Proposição 3. Seja $h(X)$ uma variável aleatória (função de X). Então

$$E[h(X)] = \sum_x h(x)\mathbb{P}(X = x), \text{ se } X \text{ é discreta;}$$

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx, \text{ se } X \text{ é contínua.}$$

Demonstração: *Omitida.*

Proposição 4. Seja X uma variável aleatória e a e b constantes reais. Então:

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Demonstração:

Se X é discreta, temos que:

$$E(aX + b) = \sum_x (ax + b)\mathbb{P}(X = x), \text{ (Proposição 3)}$$

$$E(aX + b) = \sum_x ax\mathbb{P}(X = x) + \sum_x b\mathbb{P}(X = x),$$

$$E(aX + b) = a \sum_x x\mathbb{P}(X = x) + b \sum_x \mathbb{P}(X = x),$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b \cdot 1,$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b. \quad \square$$

Se X é contínua:

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)f(x)dx, \quad (\text{Proposição 3})$$

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} ax \cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot f(x)dx,$$

$$E(aX + b) = a \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b \cdot 1,$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b. \quad \square$$

Lema 1. Se $X = c$ com probabilidade 1, então $E(X) = c$.

Demonstração:

$$E(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) = c \cdot \mathbb{P}(X = c) = c \cdot 1 = c.$$

2.3.4 Definição de Variância

Definição 9. A variância de uma variável aleatória X integrável com esperança μ é dada por

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x), \quad \text{se } X \text{ é discreta};$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx, \quad \text{se } X \text{ é contínua.}$$

Proposição 5.

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Demonstração:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mu + \mu^2]$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] + E[-2 \cdot X \cdot \mu] + E[\mu^2]$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - 2 \cdot \mu^2 + \mu^2$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - \mu^2. \quad \square$$

Exemplo 13. No Exemplo 9, usando a Proposição 3, temos que:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \mathbb{P}(X = x) = 0^2 \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \mathbb{P}(X = 2).$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{5}{15} = \frac{28}{15}.$$

Logo, pela Proposição 5, temos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{28}{15} - \left(\frac{18}{15}\right)^2 = \frac{96}{225}.$$

Exemplo 14. No Exemplo 10, usando a Proposição 3, temos:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Logo, pela Proposição 5, temos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.3.5 Função Característica

Seja X uma variável aleatória. A função característica de X é uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\varphi(t) = E(e^{itX}), t \in \mathbb{R}.$$

Se X é discreta

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itk} \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

Se X é contínua

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

Exemplo 15. Se X tem densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

então,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exemplo 16. Voltando ao Exemplo 9 temos:

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \sum_x e^{itx} \mathbb{P}(X = x)$$

$$\varphi(t) = e^{it \cdot 0} \mathbb{P}(X = 0) + e^{it \cdot 1} \mathbb{P}(X = 1) + e^{it \cdot 2} \mathbb{P}(X = 2)$$

$$\varphi(t) = 1 \cdot \frac{2}{15} + e^{it} \cdot \frac{8}{15} + e^{2it} \cdot \frac{5}{15}$$

$$\varphi(t) = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} \cdot e^{it} + \frac{5}{15} \cdot e^{2it}.$$

2.3.6 Distribuição Normal

Definição 10. *Distribuição Normal*

Uma variável aleatória contínua tem distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Note que a distribuição normal é especificada por dois parâmetros: μ e σ . Sendo que, μ representa a média populacional, e σ representa o desvio-padrão populacional. Cada par de parâmetros (μ, σ) define uma distribuição normal distinta. Se X é uma variável aleatória com distribuição normal usamos a notação:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Proposição 6. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

a) $E(X) = \mu;$

b) $Var(X) = \sigma^2;$

c) $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}.$

Demonstração: a)

$$a) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$E(X) = \mu. \quad \square$$

Demonstração: b)

$$b) Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$E(X) = \sigma^2. \quad \square$$

Demonstração: c)

$$c)\varphi(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}. \quad \square$$

Definição 11. Uma variável aleatória normal é dita ter Distribuição Normal Padrão se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Proposição 7. Seja X uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 . Então,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tem distribuição Normal Padrão.

Demonstração:

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X - \mu \leq z\sigma) = P(X \leq z\sigma + \mu)$$

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z\sigma + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Tome

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Então, $du = \frac{dx}{\sigma}$

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2} du = \phi(z).$$

Lema 2.

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z)$$

Demonstração: Basta observar que o integrando é uma função par. Então, temos que:

$$\int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx = \int_z^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx + \int_z^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx &= 1 \\ \phi(z) + \int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx &= 1 \\ \phi(z) + \phi(-z) &= 1 \\ \phi(z) &= 1 - \phi(-z). \quad \square \end{aligned}$$

As probabilidades associadas a distribuições normais não podem ser obtidas analiticamente. Seus valores são obtidos via cálculo numérico. A distribuição normal padronizada facilita os cálculos de probabilidade, pois utilizamos uma única tabela para calcularmos probabilidades associadas a qualquer distribuição normal. Na tabela da distribuição Normal Padrão (veja anexo), os resultados são projetados mediante a análise de ESCORES Z (indica o quanto acima ou abaixo da média está, em termos de unidades padronizadas de desvio).

Observe que o valor padronizado representa o número de desvios-padrão pelo qual um valor x dista da média (para mais ou para menos). Ou seja, como a distribuição normal padronizada é aquela que tem média 0 e desvio-padrão 1, temos que Z tem distribuição normal padrão expressa por:

$$Z \sim N(0, 1).$$

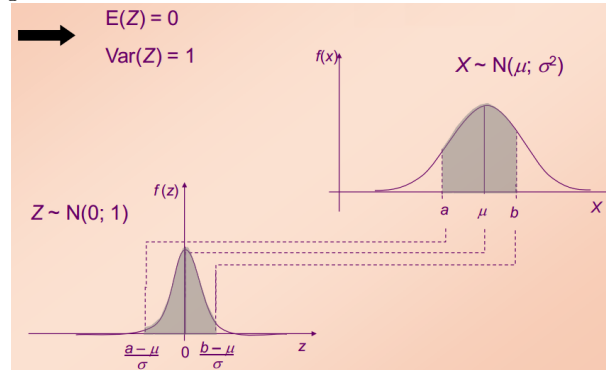
Cálculo de Probabilidades

Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros (μ, σ^2) , com a e b valores na reta real, cuja a probabilidade de X assumir valores entre eles é $\mathbb{P}(a < X < b)$. Esta probabilidade é exatamente a área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b . Veja Figura 2.2:

Escreva $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$. Então pela Proposição 7, X tem distribuição Normal Padrão. Portanto;

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right).$$

Figura 2.2: Curva de Probabilidade Normal.

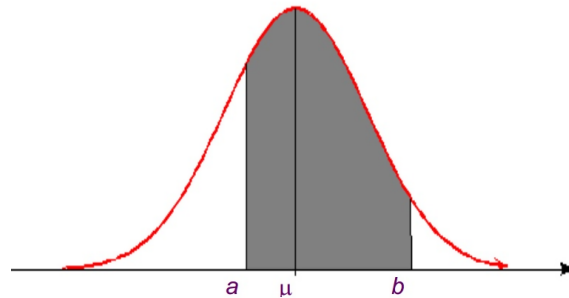


Fonte: http://www.ime.usp.br/~chang/home/mae116/aulas/Aula%206_distribui%E7%E3o%20Normal.pdf

Note que, podemos obter a variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ através da transformação inversa:

$$X = \mu + Z\sigma.$$

Figura 2.3: Curva de Probabilidade.



Fonte: http://www.ime.usp.br/~chang/home/mae116/aulas/Aula%206_distribui%E7%E3o%20Normal.pdf

2.3.7 Distribuição de Bernoulli

Definição 12. *Ensaio de Bernoulli:* Ensaio de Bernoulli é um experimento cujo o resultado apresenta ou não determinada característica. Usa-se a terminologia sucesso e fracasso.

Definição 13. *Distribuição de Bernoulli:* Dizemos que uma variável aleatória X tem uma distribuição denominada Bernoulli, se a sua função de probabilidade é:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x=1; \\ 1 - p, & \text{se } x=0. \end{cases}$$

Como a probabilidade de fracasso é $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$ e a probabilidade de sucesso é $\mathbb{P}(X = 1) = p$, então a variável aleatória de Bernoulli possui parâmetro p .

Notação:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p).$$

Nessas condições a variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli se sua função de probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0 \text{ ou } 1.$$

Lema 3. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli, a esperança e a variância é:

$$a) E[X] = p;$$

$$b) \text{Var}[X] = p \cdot (1 - p).$$

Demonstração: A esperança é:

$$E[X] = \mathbb{P}(X = x_1) \cdot x_1 + \mathbb{P}(X = x_2) \cdot x_2$$

$$E[X] = \mathbb{P}(X = 1) \cdot 1 + \mathbb{P}(X = 0) \cdot 0$$

$$E[X] = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0$$

$$E[X] = p;$$

e

$$E[X^2] = \mathbb{P}(X = x_1) \cdot x_1^2 + \mathbb{P}(X = x_2) \cdot x_2^2$$

$$E[X^2] = \mathbb{P}(X = 1) \cdot 1 + \mathbb{P}(X = 0) \cdot 0$$

$$E[X^2] = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0$$

$$E[X^2] = p.$$

A variância é:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$Var[X] = p - p^2$$

$$Var[X] = p \cdot (1 - p). \quad \square$$

2.3.8 Distribuição Binomial

Definição 14. *Experimento binomial:* Chama-se experimento binomial ao experimento:

- i) que consiste de n repetições de ensaios de Bernoulli;
- ii) cujos ensaios são independentes;
- iii) para o qual a probabilidade de sucesso de cada ensaio é sempre igual a p , com $0 < p < 1$.

Definição 15. *Distribuição binomial:* A distribuição binomial é a generalização da distribuição de Bernoulli. Denotemos por n o número de tentativas independentes, cada uma delas resultando em um sucesso com probabilidade p e em um fracasso com probabilidade $q = 1 - p$. Se X representa o número de sucessos nas n tentativas, então diz-se que X segue a distribuição binomial com parâmetro n e p cuja função de probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o número de modos de obter k sucessos em n repetições.

Notação:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p).$$

Lema 4. Seja X uma variável aleatória binomial. Então, para X a Esperança, o Segundo Momento, a Variância e Desvio Padrão são dados por:

$$a) E(X) = n \cdot p;$$

$$b) E(X^2) = n \cdot (n - 1) \cdot p^2 + n \cdot p;$$

$$c) Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p);$$

$$d) DP(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

Demonstração: do item a):

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^n i \cdot P(x = i) \\ E[X] &= \sum_{i=1}^n i \cdot \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \\ E[X] &= \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot p^i (1 - p)^{n-i} \\ E[X] &= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(n-i)! \cdot (i-1)!} \cdot p^i (1 - p)^{n-i} \\ E[X] &= np \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-i)! \cdot (i-1)!} \cdot p^{i-1} (1 - p)^{n-i} \end{aligned}$$

Seja, $k = i - 1$. Temos,

$$\begin{aligned} E[X] &= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \cdot p^k (1 - p)^{n-1-k} \\ E[X] &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k (1 - p)^{n-1-k} \end{aligned}$$

Pelo Teorema Binomial, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k (1 - p)^{n-1-k} = (p + 1 - p)^{n-1} = 1.$$

Portanto,

$$E[X] = n \cdot p. \quad \square$$

Demonstração: do item b):

$$E[X^2] = E[X(X - 1) + X] = E[X(X - 1)] + E[X]$$

Usando a Proposição 3, temos:

$$E[X(X - 1)] = \sum_{k=0}^n k(k - 1)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^n k(k - 1) \binom{n}{k} \cdot p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E[X(X - 1)] = \sum_{k=2}^n \frac{n! \cdot p^k (1 - p)^{n-k}}{(n - k)! \cdot (k - 2)!}$$

$$E[X(X - 1)] = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n! \cdot p^{j+2} (1 - p)^{n-2-j}}{(n - 2 - j)! \cdot j!}$$

$$E[X(X - 1)] = n \cdot (n - 1) \cdot p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n - 2}{j} p^j \cdot (1 - p)^{n-2-j}$$

$$E[X(X - 1)] = n \cdot (n - 1) \cdot p^2.$$

Logo,

$$E[X^2] = n(n - 1)p^2 + np. \quad \square$$

Demonstração: do item c):

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$Var[X] = n(n - 1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$Var[X] = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$Var[X] = np - np^2$$

$$Var[X] = np(1 - p). \quad \square$$

Demonstração: do item d):

$$DP[X] = \sqrt{Var[X]}$$

$$DP[X] = \sqrt{np(1 - p)} \quad \square$$

Em resumo, as três propriedades básicas que caracterizam um experimento binomial são:

1. Temos repetições de ensaio de Bernoulli;
2. As repetições devem ser independentes;
3. A probabilidade de sucesso é a mesma a cada repetição do experimento.

2.3.9 Distribuição de Poisson

Definição 16. A variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ se para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k=0,1,2,3,\dots$$

Notação:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

O símbolo “ e ” representa uma constante que é aproximadamente igual a 2,7183... O seu nome é uma homenagem ao matemático suíço Leonard Euler, e constitui a base do chamado logaritmo natural.

De acordo com (Morettin,1999), na construção de modelos aleatórios para fenômenos observáveis algumas distribuições de probabilidade surgem com mais frequência do que outras. A distribuição de Poisson pertence a esse grupo. A distribuição de Poisson é muito usada na distribuição do número de:

1. carros que passam por um cruzamento por minuto, durante uma certa hora do dia;
2. erros tipográficos por página, em um material impresso;
3. defeitos por unidade ($m^2, m^3, m, etc.$) por peça fabricada;
4. mortes por ataque de coração por ano, numa cidade. É aplicada também em problemas de filas de espera em geral, e outros.

2.3.10 A Distribuição de Poisson como Aproximação da Distribuição Binomial

Teorema 1. *Seja $X \sim \text{binomial}(n, p)$. Isto é:*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Admita que $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$ de modo que $np = \lambda$. Nestas condições:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k+1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Faça $np = \lambda$ onde $p = \frac{\lambda}{n}$ e $1-p = 1 - \frac{\lambda}{n} = \frac{n-\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(k+1))}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = k) &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-\lambda)^{n-k}}{n^n} \right] \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ de modo que $np = \lambda$, o que significa também $p \rightarrow 0$ junto com $n \rightarrow \infty$ de maneira a ter $np = \lambda$, logo;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Lema 5. Seja X uma variável aleatória de Poisson(λ). Então a esperança de X e a variância de X são:

$$a) E(X) = \lambda;$$

$$b) Var(X) = \lambda.$$

Demonstração: a):

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \\ E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{(k-1)!} \end{aligned}$$

Chamando $k - 1 = j$, temos que:

$$E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda. \quad \square$$

Demonstração: b):

Note que $X^2 = X(X - 1) + X$. Pela Proposição 3, temos que:

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k - 1) \mathbb{P}(X = k)$$

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k - 1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k - 1) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$E(X(X - 1)) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{(k - 2)!}.$$

Chamando $k - 2 = j$, temos que:

$$E(X(X - 1)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{j+2}}{j!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$E(X(X - 1)) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Logo,

$$E(X^2) = E(X(X - 1) + X) = E(X(X - 1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda.$$

Assim,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda. \quad \square$$

A distribuição de Poisson é adequada em contagens ou eventos onde temos as 3 condições a seguir:

- i) os incrementos são estacionários, isto é, a probabilidade de ocorrência de k eventos no intervalo $(s, s + t)$ depende somente de t e não de s .
- ii) os incrementos são independentes, isto é, o número de ocorrências durante intervalos disjuntos de tempo são independentes.
- iii) as ocorrências ocorrem sozinhas e não simultaneamente. Isto é, a probabilidade de se obter mais de um evento num intervalo de tempo muito pequeno é desprezível.

Em resumo, a distribuição de Poisson é longamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, ou superfície, ou volume, satisfazendo i), ii) e iii) acima.

2.4 Vetores Aleatórios Discretos

Definição 17. Um vetor aleatório (X_1, X_2, \dots, X_n) é um vetor de n -entradas onde cada entrada é uma variável aleatória. Se todas as variáveis aleatórias do vetor forem discretas o vetor (X_1, X_2, \dots, X_n) é discreto.

Definição 18. A função $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ é chamada função de probabilidade conjunta.

Definição 19. As variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são independentes se para quaisquer conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$ (borelianos), $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, A_2, \dots, A_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Demonstração: Omitida.

Proposição 8. (Critério para independência no caso discreto) As variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, \dots, X_n são independentes se e somente se

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)\dots\mathbb{P}(X_n = x_n)$$

para qualquer escolha de x_1, x_2, \dots, x_n .

Proposição 9. Seja X_1, X_2, \dots, X_n um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Então

$$E[h(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} h(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposição 10.

a) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias discretas. Então

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

b) Se as variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, \dots, X_n são independentes então,

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

c) Se as variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, \dots, X_n são independentes então,

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i).$$

d) Se as variáveis aleatórias discretas X_1, X_2, \dots, X_n são independentes então,

$$E\left[\prod_{i=1}^n h_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n E[h_i(X_i)],$$

onde $h_i(X_i)$ são funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{C} .

Demonstração: a)

Faremos por indução, para $n = 2$, temos:

$$E(X_1 + X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} (x_1 + x_2) \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2), \quad (\text{Proposição } 7)$$

$$E(X_1 + X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) + \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_2 \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$E(X_1 + X_2) = \sum_{x_1} x_1 \sum_{x_2} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) + \sum_{x_2} x_2 \sum_{x_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$E(X_1 + X_2) = \sum_{x_1} x_1 \mathbb{P}(X_1 = x_1) + \sum_{x_2} x_2 \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2).$$

Agora, suponha por indução que

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

então:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1}\right) \stackrel{\text{caso } n=2}{=} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + E(X_{n+1}) \\ &\stackrel{H.I.}{=} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + E(X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} E(X_i). \quad \square \end{aligned}$$

Demonstração: b)

Faremos por indução, para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 \cdot x_2 \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ E(X_1 \cdot X_2) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 \cdot x_2 \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ E(X_1 \cdot X_2) &= \sum_{x_1} x_1 \mathbb{P}(X_1 = x_1) \sum_{x_2} x_2 \mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ E(X_1 \cdot X_2) &= E(X_1) \cdot E(X_2). \end{aligned}$$

Agora, suponha por indução que

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i),$$

então:

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{n+1} X_i\right) &= E\left(\prod_{i=1}^n X_i \cdot X_{n+1}\right) \stackrel{\text{caso } n=2}{=} E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \cdot E(X_{n+1}) \\ &\stackrel{H.I.}{=} E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \cdot E(X_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} E(X_i). \quad \square \end{aligned}$$

Demonstração: c)

Faremos por indução, para $n = 2$, temos:

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = E[(X_1 + X_2)^2] - [E(X_1 + X_2)]^2, \text{ (Proposição 5)}$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = E[X_1^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + X_2^2] - [E(X_1) + E(X_2)]^2, \text{ (Proposição 8a)}$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = E(X_1^2) + 2E(X_1 \cdot X_2) + E(X_2^2) - E(X_1)^2 - 2 \cdot E(X_1) \cdot E(X_2) - E(X_2)^2,$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 + E(X_2^2) - E(X_2)^2, \text{ (Proposição 8b)}$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2). \quad \square$$

Agora, suponha por indução que

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i),$$

então:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \right) &= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1} \right) \stackrel{\text{caso } n=2}{=} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) + \text{Var}(X_{n+1}) \\ &\stackrel{H.I.}{=} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) + \text{Var}(X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \text{Var}(X_i). \quad \square \end{aligned}$$

Demonstração: d)

Faremos por indução, para $n = 2$, temos:

$$E(h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$E(h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} h_1(x_1) \cdot h_2(x_2) \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

$$E(h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)) = \sum_{x_1} h_1(x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_1) \sum_{x_2} h_2(x_2) \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

$$E(h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)) = E(h_1(X_1)) \cdot E(h_2(X_2)).$$

Agora, suponha por indução que

$$E \left(\prod_{i=1}^n h_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^n E(h_i(X_i)),$$

então:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n+1} h_i(X_i)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n h_i(X_i) \cdot h_{n+1}(X_{n+1})\right) \stackrel{\text{caso } n=2}{=} E\left(\prod_{i=1}^n h_i(X_i)\right) \cdot E(h_{n+1}(X_{n+1}))$$

$$\stackrel{H.I.}{=} \prod_{i=1}^n E(h_i(X_i)) \cdot E(h_{n+1}(X_{n+1})) = \prod_{i=1}^{n+1} E(h_i(X_i)). \quad \square$$

Exemplo 17. Suponha dez urnas numeradas de um a dez, tal que a urna de número i contém i bolas verdes e $10 - i$ bolas vermelhas. Suponha que cinco bolas são retiradas uma a uma ao acaso e com reposição de cada uma dessas dez urnas. Defina X_i como o número de bolas verdes retiradas na i -ésima urna. Então

$$X_i \sim \text{binomial}\left(5, \frac{i}{10}\right).$$

Escreva agora $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ como o número de bolas verdes retiradas ao fim do processo. Então

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i).$$

Mas $E(X_i) = \frac{5 \cdot i}{10} = \frac{i}{2}$. Assim

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{2} = 27,5.$$

Além disso, como as X_i 's são independentes

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} \text{Var}(X_i).$$

e

$$\text{Var}(X_i) = \frac{5 \cdot i}{10} \cdot \frac{(10 - i)}{10} = \frac{i(10 - i)}{20}.$$

Logo;

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i(10 - i)}{20} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{10} i(10 - i) =$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{20} \left(\sum_{i=1}^{10} 10i - \sum_{i=1}^{10} i^2 \right) = \frac{1}{20} \left(10 \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^{10} i^2 \right) =$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{20} (10 \cdot 55 - 385) = \frac{165}{20} = 8,25.$$

Proposição 11. Seja X uma variável aleatória discreta com $E(X) < \infty$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Demonstração:

$$Var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

$$Var(X) = \sum_{x \leq \mu - k} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x) + \sum_{\substack{x < \mu + k \\ x > \mu - k}} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \geq \mu + k} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

$$Var(X) \geq \sum_{x \leq \mu - k} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \geq \mu + k} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

pois, o somatório $\sum_{\substack{x < \mu + k \\ x > \mu - k}} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x)$ é, obviamente, não negativo. Agora, se $x \leq \mu - k$ ou $x \geq \mu + k$, então $(x - \mu)^2 \geq \varepsilon^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} Var(X) &\geq \sum_{x \leq \mu - k} \varepsilon^2 \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \geq \mu + k} \varepsilon^2 \mathbb{P}(X = x) = \varepsilon^2 \left[\sum_{x \leq \mu - k} \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \geq \mu + k} \mathbb{P}(X = x) \right] \\ &\geq \varepsilon^2 \{ \mathbb{P}[X \leq (\mu - k)] + \mathbb{P}[X \geq (\mu + k)] \} \\ &\geq \varepsilon^2 \mathbb{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \geq (\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon)). \quad \square$$

Definição 20. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X_n converge quase certamente, se o evento $\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ tem probabilidade 1. Notação: $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

Definição 21. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X_n converge para X em distribuição se $\mathbb{P}(X_n \leq x) \rightarrow \mathbb{P}(X \leq x)$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo ponto x em que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é contínua. Notação: $X_n \xrightarrow{d} X$.

Teorema 2. Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov: Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média finita μ . As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu.$$

Demonstração: A prova apresentada a seguir tem como base [13]. Observe que basta mostrarmos para $\mu = 0$, pois no caso geral em que $\mu \neq 0$ fazemos uma mudança de variável, usando $G_n = X_n - \mu$. Neste caso as variáveis aleatórias G_n serão independentes e identicamente distribuídas com $E[G_n] = 0$.

Seja Y_n definida da seguinte forma.

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } X_n \in (n, -n] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E seja $Z_n = X_n - Y_n \rightarrow X_n = Y_n + Z_n$, temos que:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} + \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n}$$

Vamos dividir a demonstração deste teorema em três partes. Primeiro mostramos que:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

observamos que $Z_n \neq 0 \Leftrightarrow Y_n \neq X_n \rightarrow X_n \notin (-n, n]$. Assim,

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \mathbb{P}(X_n \notin (-n, n]) < \mathbb{P}(|X_n| > n).$$

Mas os eventos $A_n = [Z_n \neq 0]$ satisfazem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$$

Notemos que se os X_i são identicamente distribuídos, então temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq n) < \infty,$$

no qual a última passagem é consequência da integabilidade de X_1 . Assim pelo lema de Borel-Cantelli (Veja Lebensztayn e Coletti(2012)) decorre que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$, o que implica que:

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq 0) = 0$$

Ou seja,

$$\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(Z_m = 0) = 1,$$

com $m > n$ para algum n suficientemente grande, isto é, $Z_n \rightarrow 0$ e ainda

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \rightarrow 0\right) = 1$$

Logo;

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$$

Mostramos agora que:

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - \frac{E[Y_1] + \dots + E[Y_n]}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$$

Agora, precisamos mostrar que $\frac{E[Y_1] + \dots + E[Y_n]}{n} \rightarrow 0$. Desta forma, basta mostrarmos que $E[Y_n] \rightarrow 0$. De fato,

$$E[Y_n] = E[X_n] = E[X_1] \rightarrow E[X_1] = 0,$$

onde $X_n \in (-n, n]$. Portanto

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$$

e no caso mais geral:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu. \quad \square$$

Corolário 1. Lei Forte dos Grandes Números de Borel: Seja X_1, X_2, \dots

X_n, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$ para todo n . As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} p.$$

Exemplo 18. Uma urna possui 8 bolas verdes e 2 bolas vermelhas. Bolas são retiradas desta urna uma a uma ao acaso e com reposição. Defina

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i\text{-ésima bola retirada é verde;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

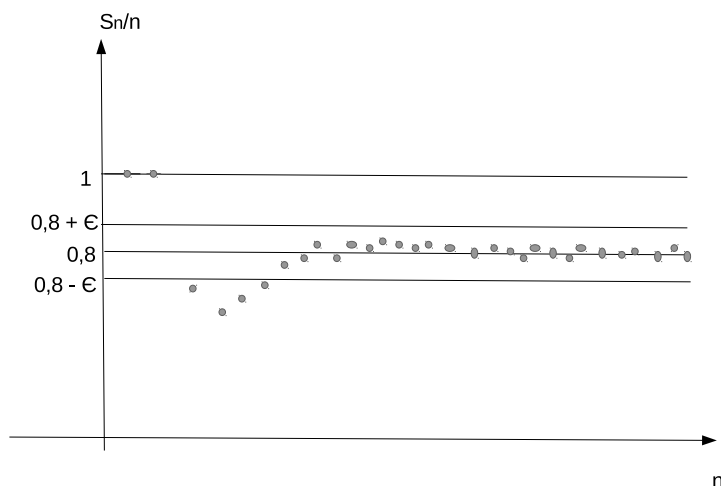
Seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ o número de bolas verdes retiradas após a n -ésima extração. Pela Lei Forte dos Grandes Números

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} E(X_1) = 0 \cdot \mathbb{P}(X_i = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{4}{5}.$$

Intuitivamente podemos concluir que para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, haverá uma extração a partir da qual

$$\frac{S_n}{n} \in \left(\frac{4}{5} - \varepsilon; \frac{4}{5} + \varepsilon \right).$$

Figura 2.4: **A Propção de Bolas Verdes Retiradas na n -ésima Extração.**



Fonte: Exemplo 18.

Além disso, pela Desigualdade de Chebyshev

$$\mathbb{P}(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Mas,

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot E(X_1) = \frac{4n}{5}.$$

e

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \cdot \text{Var}(X_1)$$

$$\text{Var}(S_n) = n[E(X_1^2) - E(X_1)^2] = n \cdot \left[0^2 \cdot P(X_1 = 0) + 1^2 \cdot P(X_1 = 1) - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right]$$

$$\text{Var}(S_n) = n \left[\frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right] = n \left[\frac{4}{5} - \frac{16}{25}\right]$$

$$\text{Var}(S_n) = \frac{4n}{25} \quad \square.$$

Logo,

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{4n}{5}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4n}{25 \cdot \varepsilon^2}.$$

Tomando $n = 1.000$ e $\varepsilon = 50$, temos que:

$$\mathbb{P}(|S_{1.000} - 800| > 50) \leq \frac{4.000}{25 \cdot 2.500} = \frac{8}{125} = 0,064.$$

Isto é;

$$\mathbb{P}(S_{1.000} \notin (750; 850)) \leq 0,064.$$

Proposição 12. Seja $\{X_n\}_{n>1}$ uma sequência de variáveis aleatórias discretas com funções características correspondentes $\{\varphi_n(t)\}_{n>1}$. Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é a função característica da variável aleatória X . Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ para todo ponto x onde $\mathbb{P}(X \leq x)$ é contínua. Em particular, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Demonstração: Omitida.

2.5 Teorema Central do Limite

O teorema central do limite surge de um importante resultado da estatística, sendo que a demonstração de vários outros teoremas estatísticos dependem dele. Este Teorema afirma que quando a média de uma amostra de n elementos de uma população sob

determinadas condições aumenta, a distribuição amostral da sua média aproxima-se a uma distribuição normal. Ou seja, quando nos distanciarmos da média, a probabilidade de ocorrência diminui, sendo que, é mais provável ocorrer um evento que se encontra próximo da média do que um evento de um dos extremos.

Sabemos que é válido (em se tratando de amostras discretas), considerando amostras suficientemente grandes da população. Esse termo “suficientemente grande”, varia de acordo com a população, para populações com distribuição quase simétrica, a amostra pode ser menor do que para populações cuja distribuição seja assimétrica. De acordo com Willian (2012,p.168) em geral consideramos o tamanho da amostra maior do que trinta, pois produz uma boa aproximação. Consideremos que a curva normal obtida, pode então ser convertida em uma curva binomial ou em uma curva de poisson, e posteriormente pode-se ainda realizar uma correção de continuidade. A precisão da correção de continuidade também pode ser medida.

Portanto, na estatística é permitido inferir sobre a população através da média amostral e do desvio padrão amostral. Se extraíssemos todos os elementos da população, os dados sobre a amostra seriam exatamente iguais aos da população, mas isso é demasiadamente custoso e/ou lento e/ou impossível (por exemplo, é impossível medir a resistência máxima de qualquer produto para todos os elementos da população).

Há inúmeras maneiras de enunciar o teorema central do limite, todas elas equivalentes, ainda que com maior ou menor rigor formal. A seguir veremos a versão particular e geral do teorema, assim como suas aplicações a estimação intervalar.

Teorema 3. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de tamanho n com média μ e variância σ^2 finita.

$$\text{Seja } \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \text{ a média amostral.}$$

Seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a soma das observações amostrais.

Então, se n suficientemente grande, \bar{X} tem distribuição aproximadamente normal com parâmetros μ e $\frac{\sigma^2}{n}$. Equivalentemente S_n tem distribuição aproximadamente normal com parâmetros $n\mu$ e $n\sigma^2$.

A pergunta natural a fazer é: o que significa “suficientemente grande”? A resposta depende da forma da distribuição da população. Se a amostra for extraída de uma

distribuição quase simétrica, a aproximação normal pode ser boa até mesmo para um valor relativamente pequeno de n . Entretanto, se a população for bastante assimétrica, será necessário um n relativamente grande.

Teorema 4. *Versão geral:* Seja $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma com média μ e variância σ^2 ($0 < \sigma^2 < \infty$). Então, a distribuição de;

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende a distribuição normal padrão quando $n \rightarrow \infty$. Isto é, para $-\infty < a < +\infty$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Demonstração: A prova a seguir tem como base [14]. Provaremos para X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias discretas. O caso contínuo é inteiramente análogo. Sem perda de generalidade, seja $E(X_n) = 0$ e $E(X_n^2) = 1$ (caso este não seja o caso, pode-se provar o resultado para

$$X_i^* = \frac{X_i - \mu}{\sigma},$$

já que $E(X_n^*) = 0$ e $E(X_n^*)^2 = 1$). Seja $\varphi_n(t) = E(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}})$ e $\varphi(t) = E(e^{itX_i})$. Como a função característica de uma soma de variáveis aleatórias independentes é igual ao produto das funções características das variáveis aleatórias, tem-se que

$$\varphi(t) = \left(E\left(e^{it\frac{X_i}{\sqrt{n}}}\right)\right)^n = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Como os dois primeiros momentos existem, φ possui duas derivadas contínuas. Então, utilizando a expansão de Taylor de φ e o fato que $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X_1^k)$, temos que

$$\varphi(t) = 1 + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(\theta(t)),$$

onde $|\theta(t)| \leq |t|$. Logo, como φ'' é contínua em 0, temos que $\varphi''(\theta(t)) - \varphi''(0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Então, tem-se

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}e(t),$$

onde $e(t) = \varphi''(\theta(t)) + 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0} e(t) = 0$. Então, para t fixo

$$\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{2n}e\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{-t^2}{2n}\left[1 - e\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]\right]^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}},$$

quando $n \rightarrow \infty$ pois $\left[1 - e\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \rightarrow 1$ e para números complexos $c_n \rightarrow c \Rightarrow \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n \rightarrow e^c$ (Esse limite é conhecido como limite de Euler e sua prova será omitida).

Um caso especial do Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas é quando estas variáveis são distribuídas de acordo com a distribuição de Bernoulli, este caso é conhecido como Teorema Central do Limite de De Moivre e Laplace.

2.6 Processos Estocásticos

Definição 22. Um processo estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ é uma família de variáveis aleatórias $X(t), t \in T$ onde T é um conjunto de índices e fixado um parâmetro $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Lembre que uma variável aleatória é uma função definida num espaço amostral Ω . Então, o processo estocástico $X(t), t \in T$ é uma função de dois argumentos $X(t, w), t \in T, w \in \Omega$. Para um $t = t_0$ fixo, $X(t_0, w) = X_{t_0}(w)$ é uma variável aleatória denotada por $X(t_0)$ já que w varia no espaço amostral Ω . Por outro lado, fixando $w = w_0$, $X(t; w_0) = X_{w_0}(t)$ é uma função que só depende de t , e é chamada de uma realização do processo. É claro que se t e w são fixos, $X(t; w)$ é um número real.

O conjunto T é chamado de espaço de parâmetro. Os valores assumidos por $X(t)$ são chamados de estados, e o conjunto de todos os possíveis estados é chamado de espaço de estados do processo estocástico e é denotado por E . Se o conjunto T é discreto, então o processo estocástico é dito ser de tempo discreto, nesse caso ele também pode ser chamado de uma sequência aleatória. Se T é contínuo, então o processo é dito ser de tempo contínuo. Se é discreto, então o processo é dito ser um processo de estados discretos, e pode ser chamado também de uma cadeia. Se é contínuo, então o processo é dito ser de espaço contínuo.

2.6.1 Passeios Aleatórios

Definição 23. Vargas J.(2009, p.1) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que a média destas variáveis aleatórias é

$E|X_i| < \infty$. Seja $S_0 = C$ e

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado passeio aleatório.

Exemplo 19. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que:

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Temos um passeio aleatório simples. Se, $p = q$ temos um passeio aleatório simples simétrico.

Definição 24. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias. N é dito ser tempo de parada para a sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ se o evento $\{N = n\}$ independe de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots

Teorema 5. Equação de Wald Sejam $X_i, i \geq 1$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que a média destas variáveis seja $E|X_i| < \infty$. Se N é um tempo de parada para as variáveis X_1, X_2, \dots, X_n com média de $E[N] < \infty$; então:

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E[N]E[X_1].$$

Prova: Ver conforme (Wald, 1984) [3].

Exemplo 20. Considere $E(X_i)$ a média das variáveis aleatórias $X_i, i \geq 1$ com $p > \frac{1}{2}$. O número esperado de passos até o passeio alcançar a posição $k, k > 0$ é

$$E[N] = \frac{k}{2p - 1}.$$

Demonstração: Note que $E|X_i| = 1 < \infty$ e $\{N = n\} = \{X_1 \neq k, X_1 + X_2 \neq k, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} \neq k, X_n \neq k\}$. Logo, N é tempo de parada

$$\sum_{j=1}^N X_j = k \Rightarrow E \left[\sum_{j=1}^N X_j \right] = k.$$

Sabendo que a média dos X_i é $E(X_i) = (2p - 1)$ com $p > \frac{1}{2}$.

A Equação de Wald nos dá:

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E[N]E[X_1]$$

$$k = E[N] \cdot (2p - 1)$$

$$E[N] = \frac{k}{2p - 1} \quad \square$$

Proposição 13. Seja S_n um passeio aleatório com sucessivas realizações. A distribuição de probabilidade de S_n é dada por:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}, & \text{se } \frac{n+k}{2} \text{ for par;} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja $S_n = k$, r o número de passos positivos e s o número de passos negativos. Assim, $r - s = k$ e $r + s = n$.

$$\begin{cases} r - s = k; \\ r + s = n. \end{cases}$$

Logo $r = \frac{n+k}{2}$ e $s = \frac{n-k}{2}$. O número de realizações onde isto ocorre é $\binom{n}{r}$ e cada uma tem a mesma probabilidade, a saber $p^r \cdot (1-p)^s$. Então

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r \cdot (1-p)^s$$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}. \quad \square$$

Capítulo 3

Jogo do Par ou Ímpar

O jogo Par ou Ímpar é um jogo que ocorre entre duas pessoas sendo o objetivo resolver de maneira aleatória um impasse. Há duas opções para cada jogador(par ou ímpar), porém, as opções dos oponentes devem ser distintas. Logo em seguida, mostram as mãos com alguns dedos levantados ou não, contam-se os dedos levantados e vence quem tiver acertado a paridade do número de dedos. O jogo Par ou Ímpar pode ser jogado de várias maneiras, sendo que o resultado do jogo depende de como ele é jogado.

3.1 Introdução

Considere a seguinte versão do jogo “Par ou Ímpar”. Um dos jogadores escolhe a opção par e o outro ímpar. Então, num mesmo instante, cada jogador apresenta, com os dedos, um número de um a cinco. Se o total de dedos mostrados for par, ganha o jogador que escolheu par, caso contrário o outro jogador ganha.

Começemos com as seguintes análises:

Lema 6. *Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, o que tem a maior chance de ganhar é aquele que escolher par.*

Demonstração: Cada jogador poderá escolher números entre 1 e 5. O conjunto

de casos possíveis são:

$$\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Seja o evento A “jogador que escolheu par ganhar”.

$$A = \{(i, j), i + j, \text{par}\}.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13}{25} = 0,52. \quad \square$$

Assumindo que os dois jogadores jogam aleatoriamente, terá maior chance de ganhar aquele jogador que escolher par. O jogador que escolher par, terá 52 % de chance de ganhar e 48 % de chance de perder.

Lema 7. *Suponha que, o jogador que escolheu par assuma que o outro jogará aleatoriamente. Então, a estratégia adotada para maximizar suas chances de ganho será de colocar um número ímpar de dedos.*

Demonstração: Seja Ω o espaço amostral.

$$\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

Seja o evento A “jogador que escolheu par, joga um número ímpar”.

Seja o evento B “jogador que escolheu ímpar, joga um número ímpar”.

$$A \cap B = \{(i, j), i + j, \text{par}, \text{com } i, j \text{ números ímpares}\}.$$

Portanto, a probabilidade que ocorra o evento A sabendo que ocorreu o evento B é de:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9/25}{15/25} = 0,60. \quad \square$$

Lema 8. *Suponha que os jogadores pensem estrategicamente, assumindo que o oponente jogará aleatoriamente e adotam o tipo de estratégia (quem escolher par jogará ímpar e quem escolher ímpar jogará par) para tentar aumentar suas chances. Ganhará o jogador que escolher ímpar.*

Demonstração: Seja A e B os jogadores. O jogador A se escolher par, deverá jogar números ímpares, e o jogador B escolhendo ímpar, jogará par. Logo o jogador B será o vencedor. Agora se o jogador A escolher ímpar, deverá jogar números pares, pois o outro jogador B escolhendo par e adotando a mesma estratégia jogará ímpar, logo o vencedor será o jogador A. Portanto, vencerá a disputa quem escolher ímpar. Mesmo jogando estrategicamente, ainda há vantagem para aquele jogador que escolher ímpar. \square

3.2 Passeio Aleatório para o Jogo Par ou Ímpar

Definição 25. Seja S_m o lucro do estrategista após m rodadas e k o valor de cada aposta. Podemos escrever:

$$S_m = \sum_{i=1}^m X_i;$$

onde as variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ tem distribuição de probabilidade:

$$\mathbb{P}(X_i = j) = \begin{cases} 0,6; & \text{se } j = k; \\ 0,4; & \text{se } j = -k. \end{cases}$$

Lema 9. *Seja V_m o número de vitórias do estrategista. Então:*

$$S_m = k \cdot (2V_m - m).$$

Demonstração: Em m rodadas o estrategista obtém V_m vitórias e $(m - V_m)$ derrotas. Em cada vitória, lucra k e em cada derrota perde k . Logo:

$$S_m = k \cdot V_m + (-k)[m - V_m]$$

$$S_m = k \cdot V_m + k \cdot V_m - k \cdot m$$

$$S_m = 2k \cdot V_m - k \cdot m$$

$$S_m = k(2V_m - m) \quad \square.$$

Lema 10.

$$S_m \in \{-mk, -mk + 2k, \dots, mk\} = R_{m,k}.$$

Demonstração:

$$V_m \in \{0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Mas no Lema 8, temos:

$$S_m = k \cdot (2V_m - m).$$

Logo;

$$S_m \in \{-mk, -mk + 2k, \dots, mk\} \quad \square$$

Lema 11. Seja V_m o número de vitórias do estrategista em m rodadas. Temos que:

i) $V_m \sim \text{binomial}(m; 0,6)$;

ii) $E(V_m) = 0,6.m$;

iii) $\text{Var}(V_m) = 0,24.m$.

Demonstração:

i) Basta observar que V_m pode ser visto como o número de sucessos em m repetições de ensaios de Bernoulli independentes, cada um com probabilidade 0,6 de sucesso.

ii) Pelo Lema 4a), a média esperada para V_m é:

$$E(V_m) = n \cdot p$$

$$E(V_m) = m \cdot 0,6$$

$$E(V_m) = 0,6m \quad \square$$

iii) Pelo Lema 4c), a variância de V_m é:

$$\text{Var}[V_m] = 0,6 \cdot m \cdot (1 - 0,6)$$

$$\text{Var}[V_m] = 0,6 \cdot m \cdot 0,4$$

$$\text{Var}[V_m] = 0,24 \cdot m \quad \square$$

Teorema 6. A distribuição de probabilidade do lucro do estrategista após m rodadas é:

$$\mathbb{P}(S_m = i) = \begin{cases} \binom{m}{\frac{1}{2} \cdot (\frac{i}{k} + m)} \cdot 0,6^{\frac{1}{2} \cdot (\frac{i}{k} + m)} \cdot (0,4)^{m - \frac{1}{2} \cdot (\frac{i}{k} + m)}; & \text{se } i \in R_{m,k}; \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Temos:

$$S_m = k \cdot (2V_m - m).$$

A distribuição de S_m satisfaz:

$$\begin{aligned} P(S_m = i) &= P(k(2V_m - m) = i) \\ P(S_m = i) &= P\left(2V_m - m = \frac{i}{k}\right) \\ P(S_m = i) &= P\left(2V_m = \frac{i}{k} + m\right) \\ P(S_m = i) &= P\left(V_m = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{k} + m\right)\right) \quad \square \end{aligned}$$

Como V_m é o número de vitórias em m repetições de ensaio de Bernoulli. Temos que:

$$V_m \sim \text{binomial}(m; 0,6).$$

Mas;

$$P(V_m = j) = \binom{m}{j} \cdot 0,6^j \cdot (0,4)^{m-j};$$

Logo;

$$P\left(V_m = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{k} + m\right)\right) = \binom{m}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{k} + m\right)} \cdot 0,6^{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{k} + m\right)} \cdot (0,4)^{m - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{i}{k} + m\right)}. \quad \square$$

Proposição 14. Seja $E(S_m)$ a média do lucro do estrategista e $Var(S_m)$ a variância do lucro do estrategista, temos que:

- i) $E(S_m) = 0,2km$;
- ii) $Var(S_m) = 0,96k^2m$.

Demonstração:

i) A média de S_m é:

$$E(S_m) = E[k(2V_m - m)]$$

$$E(S_m) = kE[(2V_m - m)]$$

$$E(S_m) = k[2E(V_m) - m]$$

$$E(S_m) = k[2 \cdot 0,6m - m]$$

$$E(S_m) = k[1,2m - m]$$

$$E(S_m) = k[0,2m]$$

$$E(S_m) = 0,2km \quad \square$$

ii) A variância de S_m é:

$$Var[S_m] = Var[k(2V_m - m)]$$

$$Var[S_m] = Var[(2kV_m - km)]$$

$$Var[S_m] = (2k)^2 \cdot Var[V_m]$$

$$Var[S_m] = 4k^2 \cdot Var[V_m]$$

$$Var[S_m] = 4k^2 \cdot 0,24m$$

$$Var[S_m] = 0,96k^2m \quad \square$$

Exemplo 01: Considere apostas de 1,00 real.

Esperança e Variância do Lucro do Estrategista com Aposta de 1 Real.

m	10	20	50	100	200	500	1000
$E(S_m)$	2	4	10	20	40	100	200
$Var(S_m)$	9,6	19,2	48	96	191	480	960

Podemos observar que, nas 10 primeiras rodadas, $E(S_{10})$ a média do lucro do estrategista é 2,00 reais e $Var(S_{10})$ a variância do lucro do estrategista é 9,6. Para 200 rodadas, $E(S_{200})$ a média do lucro do estrategista é 40,00 reais e $Var(S_{200})$ a variância

do lucro do estrategista é 191. Se jogarmos 1.000 rodadas, $E(S_{1.000})$ a média do lucro do estrategista é 200,00 reais e $Var(S_{1.000})$ a variância do lucro do estrategista é 960.

Exemplo 02: Agora considere apostas de 5,00 reais.

Esperança e Variância do Lucro do Estrategista com Aposta de 5 Reais.

m	10	20	50	100	200	500	1000
$E(S_m)$	10	20	50	100	200	500	1.000
$Var(S_m)$	240	480	1.200	2.400	4.800	12.000	24.000

Neste exemplo podemos observar que, nas 20 primeiras rodadas, $E(S_{20})$ a média do lucro do estrategista é 20,00 reais e $Var(S_{20})$ a variância do lucro do estrategista é 480. Quando houver 100 rodadas, $E(S_{100})$ a média do lucro do estrategista é 100,00 reais e $Var(S_{100})$ a variância do lucro do estrategista é 2.400. Se jogarmos 1.000 rodadas, $E(S_{1.000})$ a média do lucro do estrategista é 1.000,00 reais e $Var(S_{1.000})$ a variância do lucro do estrategista é 24.000.

Exemplo 03: Agora considere apostas de 7,00 reais.

Esperança e Variância do Lucro do Estrategista com Aposta de 7 Reais.

m	10	20	50	100	200	500	1000
$E(S_m)$	14	28	70	140	280	700	1.400
$Var(S_m)$	470,4	940,8	2.352	4.704	9.408	23.520	47.040

Neste exemplo, nas 20 primeiras rodadas, $E(S_{20})$ a média do lucro do estrategista é 28,00 reais e $Var(S_{20})$ a variância do lucro do estrategista é 940,8. Quando houver 500 rodadas, $E(S_{500})$ a média do lucro do estrategista é 700,00 reais e $Var(S_{500})$ a variância do lucro do estrategista é 23.520. Se jogarmos 1.000 rodadas, $E(S_{1.000})$ a média do lucro do estrategista é 1.400,00 reais e $Var(S_{1.000})$ a variância do lucro do estrategista é 47.040.

Quanto maior for o valor da aposta e quanto maior o número de rodadas, maior será a média do lucro do estrategista.

Teorema 7. A distribuição do lucro do Estrategista satisfaz

$$P(|S_m - 0,2km| > \varepsilon) \leq \frac{0,96k^2m}{\varepsilon^2}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração:

Temos $E(S_m) = 0,2km$ e $Var(S_m) = 0,96k^2m$. Usando a Desigualdade de Chebyshev, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_m - E(S_m)| > \varepsilon) &\leq \frac{Var(S_m)}{\varepsilon^2} \\ \mathbb{P}(|S_m - 0,2km| > \varepsilon) &\leq \frac{0,96k^2m}{\varepsilon^2}. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 8. A distribuição de probabilidade de S_m satisfaz:

$$\mathbb{P}(S_m \leq a) \simeq \Phi\left(\frac{a - 0,2km}{2k\sqrt{0,24m}}\right);$$

Onde $\mathbb{P}(S_m \leq a)$ é a probabilidade do lucro do estrategista não ser superior a a reais após o término da m -ésima rodada.

Demonstração: Utilizando o Teorema Central do Limite para m grande, temos que se $Z \sim N(0,1)$ e

$$\begin{aligned}Z_m &= \frac{V_m - E(V_m)}{\sqrt{Var(V_m)}} = \frac{V_m - 0,6m}{\sqrt{Var(0,24m)}}. \text{ Então, quando } m \rightarrow \infty : \\ Z_m &\xrightarrow{d} Z.\end{aligned}$$

A probabilidade será de:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_m \leq a) &= \mathbb{P}(k(2V_m - m) \leq a) \\ &= \mathbb{P}\left(2V_m - m \leq \frac{a}{k}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(2V_m \leq m + \frac{a}{k}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(V_m \leq \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{km + a}{k}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(V_m \leq \left(\frac{km + a}{2k}\right)\right)\end{aligned}$$

Pelo Teorema Central do Limite, implica que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{V_m - 0,6m}{\sqrt{0,24m}} \leq \frac{\frac{km+a}{2k} - 0,6m}{\sqrt{0,24m}}\right) \\ & \mathbb{P}\left(Z_m \leq \frac{km + a - 1,2km}{2k\sqrt{0,24m}}\right) \\ & \mathbb{P}\left(Z_m \leq \frac{a - 0,2km}{2k\sqrt{0,24m}}\right) \simeq \phi\left(\frac{a - 0,2km}{2k\sqrt{0,24m}}\right) \end{aligned}$$

onde;

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbb{P}(Z \leq z)$$

Corolário 2. Suponha k igual a um real. A probabilidade do estrategista não estar em lucro após m rodadas será:

$$\mathbb{P}(S_m \leq 0) \simeq \phi\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{6}}\right).$$

Demonstração:

Segundo o Teorema 8, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_m \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-0,2km}{2k\sqrt{0,24m}}\right) \\ \mathbb{P}(S_m \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-\sqrt{m}}{\sqrt{24}}\right) \\ \mathbb{P}(S_m \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{6}}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo 21. A probabilidade do estrategista não estar em lucro após 24 rodadas é de $\phi(-1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{24} \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{24}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 0) & \simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \cdot 2\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 0) & \simeq \phi(-1) = 1 - 0,8413 = 0,1587. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo 22. A probabilidade do estrategista não estar em lucro após 600 rodadas é de $\phi(-5)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{600} \leq 0) &\simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 0) &\simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{600}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 0) &\simeq \phi\left(\frac{-1}{2} \cdot 10\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 0) &\simeq \phi(-5) \simeq 0 \quad \square\end{aligned}$$

Os valores de $\phi(-1)$ e $\phi(-5)$ são dados retirados da Tabela de Distribuição Normal Padrão. Portanto, é muito improvável que o Estrategista não esteja em lucro após 600 rodadas.

Corolário 3. Seja o capital inicial do leigo $b = 0, 1m$ e o valor de cada aposta do jogo par ou ímpar de $k = 1$. A distribuição de probabilidade do lucro S_m será de:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_m \leq 0, 1m) &\simeq \phi\left(\frac{0, 1m - 0, 2km}{2k\sqrt{0, 24m}}\right) = \phi\left(\frac{m(0, 1 - 0, 2k)}{2k\sqrt{0, 24m}}\right) \\ \mathbb{P}(S_m \leq 0, 1m) &\simeq \phi\left(\frac{-0, 1m}{2\sqrt{0, 24m}}\right) = \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{m}{6}}\right).\end{aligned}$$

Logo, a probabilidade do leigo perder todo o capital inicial após m rodadas é

$$\mathbb{P}(S_m > 0, 1m) \simeq 1 - \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{m}{6}}\right).$$

Exemplo 23. Seja o capital inicial do leigo $b = 2, 4$. A probabilidade do leigo perder todo o seu dinheiro após 24 rodadas é $1 - \phi(-0, 5)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{24} \leq 0, 1 \cdot 24) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{m}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 2, 4) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{24}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 2, 4) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot 2\right) \\ \mathbb{P}(S_{24} \leq 2, 4) &\simeq \phi(-0, 5) = 1 - 0, 6915 = 0, 3085. \quad \square\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}(S_{24} > 2, 4) \simeq 0, 6915$.

Exemplo 24. Seja o capital inicial do leigo $b = 60$. A probabilidade do leigo perder todo o seu dinheiro após 600 rodadas é $1 - \phi(-2, 5)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_m \leq 0, 1m) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{m}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 0, 1 \cdot 600) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{600}{6}}\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 60) &\simeq \phi\left(-\frac{1}{4} \cdot 10\right) \\ \mathbb{P}(S_{600} \leq 60) &\simeq \phi(-2, 5) = 1 - 0,9938 = 0,0062. \quad \square\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}(S_{600} > 60) \simeq 0,9938$.

Fato: Independente do valor da aposta, o Estrategista sempre terá em média vantagem sobre o leigo.

Proposição 15. O número médio de rodadas até o estrategista lucrar C reais é

$$E(N) = 5C.$$

Demonstração:

Use a Equação de Wald com $p = 0,6$.

$$\begin{aligned}E[N] &= \frac{k}{2p - 1} \\ E[N] &= \frac{C}{2 \cdot 0,6 - 1} \\ E[N] &= \frac{C}{1,2 - 1} \\ E[N] &= \frac{C}{0,2} \\ E[N] &= 5C. \quad \square\end{aligned}$$

Exemplo:

Número Médio de Rodadas até o Estrategista Lucrar C Reais

C	5	10	15	20	100
$E(N)$	25	50	75	100	500

Portanto, o número médio de rodadas até o estrategista lucrar C reais é diretamente proporcional a C .

Teorema 9. Suponha que existam d duplas de jogadores jogando par ou ímpar (em cada dupla há um estrategista - time A e um leigo - time B). Admita que cada dupla jogará l rodadas. Para cada par de jogadores diremos que o jogador 1 venceu o jogador 2 caso tenha vencido mais rodadas. Seja Y o número de vitórias dos leigos ao fim de todas as disputas. Então $Y \sim \text{binomial}(d, p)$ onde

$$p = \mathbb{P}(S_l < 0) \simeq \phi\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{6}}\right)$$

Logo;

$$\mathbb{P}(Y = y) \simeq \binom{d}{y} \left[\phi\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{6}}\right) \right]^y \cdot \left[1 - \phi\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{6}}\right) \right]^{d-y},$$

com $y = 0, 1, 2, 3, \dots, d$. Em particular, se d é grande, temos;

$$\mathbb{P}(Y = y) = \frac{\exp\left\{d\phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}}\right)\right\} \left[d\phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}}\right)\right]^y}{y!},$$

e assim

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \left[1 - \phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}}\right) \right]^d \simeq e^{-d\phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}}\right)}. \quad \square$$

Exemplo 25. Suponha 20 duplas onde cada dupla jogará 54 rodadas. Temos:

$$p \simeq \phi\left(-\frac{1}{2} \cdot 3\right) = \phi(-1, 5) = 1 - 0,9332 = 0,0668.$$

Então $Y \sim \text{binomial}(20; 0,0668)$. Logo,

$$\mathbb{P}(Y = y) \simeq \binom{20}{y} \cdot 0,0668^y \cdot 0,9332^{20-y}, \quad \text{com } y = 0, 1, 2, 3, \dots, 20.$$

Em particular, temos que $\mathbb{P}(Y = 0) \simeq 0,9332^{20} \simeq 0,25$.

Teorema 10. Suponha que existam d duplas de jogadores jogando par ou ímpar (em cada dupla há um estrategista - time A e um leigo - time B). Admita que cada dupla jogará l rodadas. Para cada par de jogadores diremos que o jogador 1 venceu o jogador

2 caso tenha vencido mais rodadas. Seja Y o número de vitórias os leigos ao fim de todas as disputas. Se d é grande, então:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) \simeq \phi \left(\frac{y - d\phi \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}} \right)}{\sqrt{d\phi \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}} \right) \cdot \phi \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}} \right)}} \right).$$

Demonstração: Basta usar o Teorema Central do Limite para aproximar

$$Z_d = \frac{Y - dp}{\sqrt{dp(1-p)}}$$

de uma normal padrão. Aqui

$$p = \phi \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{6}} \right).$$

Exemplo 26. Suponha 40 duplas e que cada dupla jogará 54 rodadas. Temos:

$$p = \phi \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{54}{6}} \right)$$

$$p = \phi \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \right)$$

$$p = \phi(-1,5)$$

$$p = 1 - \phi(1,5)$$

$$p = 1 - 0,9332$$

$$p = 0,0668.$$

Então;

$$\mathbb{P}(Y \leq y) \simeq \phi \left(\frac{y - 40 \cdot 0,0668}{\sqrt{40 \cdot 0,0668 \cdot 0,9332}} \right) = \phi \left(\frac{y - 2,672}{\sqrt{2,49351}} \right) = \phi \left(\frac{y - 2,672}{1,579} \right).$$

Em particular, $P(Y \leq 5) \simeq \phi(1,47) = 0,9292$ e $P(Y \leq 10) \simeq \phi(4,64) \simeq 1$. Portanto, $P(Y > 10) \simeq 0$.

3.3 Caso Geral

Considere que os dois jogadores realizam apostas num jogo de par ou ímpar. Como antes, repetem apostas em rodadas, apostando k reais em cada rodada. Chamamos os

dois jogadores por:

Estrategista: Não joga aleatoriamente, adota a estratégia de assumir que o outro jogará aleatoriamente e joga de forma a maximizar suas chances de ganho. Assim, quando escolhe par colocar uma quantidade ímpar de dedos e quando escolhe ímpar colocar uma quantidade par de dedos.

Leigo: Joga aleatoriamente e nunca usa estratégia para tentar aumentar suas chances de ganho.

A partir de agora vamos considerar que o estrategista começa com a reais e o leigo com b reais. Admita que o jogo acaba quando um dos jogadores perder todo seu dinheiro e por simplicidade suponha $k = 1$, isto é, em cada rodada a aposta vale 1 real.

Definição 26. Seja C_m , $m \geq 0$ o capital após m rodadas. Então se o estrategista inicia o jogo com a reais, temos:

$$C_0 = a \quad e \quad C_m = a + S_m$$

Teorema 11. A probabilidade do leigo em algum momento perder todo seu dinheiro é

$$P_a = \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right)$$

Demonstração: Seja P_i a probabilidade de iniciando com i reais, o Estrategista alcance $a + b$ antes de 0. Com $0 < i < (a + b)$;

Temos que:

$$P_0 = 0;$$

$$P_{a+b} = 1.$$

De acordo com a Definição 9 a probabilidade do Estrategista ganhar o jogo é 60% e do Leigo é de 40%. Então:

$$\begin{aligned}
P_i &= 0,6P_{i+1} + 0,4P_{i-1} \\
P_i(0,6 + 0,4) &= 0,6P_{i+1} + 0,4P_{i-1} \\
0,6P_i + 0,4P_i &= 0,6P_{i+1} + 0,4P_{i-1} \\
P_{i+1} - P_i &= \frac{0,4}{0,6} \cdot (P_i - P_{i-1}) \\
P_{i+1} - P_i &= \frac{2}{3} \cdot (P_i - P_{i-1}).
\end{aligned}$$

Assim; com $i = 1$, temos:

$$P_2 - P_1 = \frac{2}{3}(P_1 - P_0)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{2}{3}P_1,$$

Com $i = 2$, temos:

$$P_3 - P_2 = \frac{2}{3} \cdot (P_2 - P_1)$$

$$P_3 - P_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}P_1\right)$$

$$P_3 - P_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 P_1. \quad (3.1)$$

Generalizando os casos acima, temos que:

$$P_i - P_{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} P_1. \quad (3.2)$$

Para quaisquer valores de i , entre 0 e $a + b$. O nosso problema termina quando o estrategista alcançar $C_n = a + b$. Então; com $i = a + b$, temos:

$$P_{a+b} - P_{a+b-1} = \frac{2}{3}(P_{a+b-1} - P_{a+b-2})$$

$$P_{a+b} - P_{a+b-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b-1} P_1. \quad (3.3)$$

Somando as $i - 1$ primeiras equações:

$$(P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots + (P_i - P_{i-1})$$

temos que:

$$\begin{aligned} (P_i - P_1) &= \left(\frac{2}{3}\right) P_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 P_1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} P_1 \\ P_i &= P_1 + \left(\frac{2}{3}\right) P_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 P_1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} P_1 \\ P_i &= P_1 \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \right] \end{aligned}$$

Mas, $\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \right]$ é uma Progressão Geométrica de razão $\frac{2}{3}$. De acordo com (Bonjorno e Giovanni) temos que, a soma de uma Progressão Geométrica finita (P.G.) é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Logo, temos i termos nesta (P.G.), portanto:

$$\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^i \right] = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$P_i = P_1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

Como $P_{a+b} = 1$ segue:

$$1 = P_{a+b} = P_1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

Portanto:

$$P_1 = \left(\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right)$$

Porém;

$$P_i = P_1 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

$$P_i = \left(\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

$$P_i = \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right)$$

Sendo, $i = a$ temos que:

$$P_i = \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^i}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right)$$

$$P_a = \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right). \quad \square$$

Corolário 4. Suponha que o Leigo possua um capital inicial muito grande, $b \rightarrow \infty$, mesmo assim ele terá chance de perder todo o seu dinheiro. Temos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P_a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a.$$

Demonstração:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P_a = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right)$$

Como $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}$ tende a 1 com $b \rightarrow \infty$. Portanto, temos que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P_a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a. \quad \square$$

Exemplo 27. Suponha valores fixos para a , temos:

Probabilidade do Leigo Perder todo o seu Dinheiro em Função do Capital Inicial do Estrategista.

a	1	2	3	4	5	10
P_a	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{65}{81}$	$\frac{211}{243}$	$\frac{58025}{59057}$

A tabela apresentada mostra a Probabilidade do Leigo perder todo o seu dinheiro em função do capital inicial do Estrategista. Note que para valores grandes do capital inicial do Estrategista, a probabilidade do Leigo perder todo o seu dinheiro se aproxima de 1.

Observação: Segundo o Corolário 4, a medida que o capital inicial do leigo cresce a probabilidade dele perder todo seu dinheiro converge para $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a$.

Teorema 12. Seja B o número de passos até o capital do Estrategista atingir $a + b$ ou 0. A média de B é:

$$E(B) = 5 \cdot \left[(a + b) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) - a \right].$$

Demonstração: Defina B como o número de passos até o capital atingir $a + b$ ou 0. Em outras palavras B é o número de rodadas do jogo acabar. C_m é o valor do capital do estrategista após m rodadas.

$$B = \min \{m : C_m = 0 \text{ ou } C_m = a + b\}$$

Escreva:

$$C_m = C_0 + \sum_{j=1}^m X_j.$$

Onde X_j é a variável aleatória que dá o ganho do estrategista na j -ésima rodada, sendo sua distribuição igual a;

$$\mathbb{P}(X_j = i) = \begin{cases} 0,6, & \text{se } i=1; \\ 0,4, & \text{se } i=-1. \end{cases}$$

Logo;

$$B = \min \left\{ m : \sum_{j=1}^m X_j = -a \text{ ou } \sum_{j=1}^m X_j = b \right\}.$$

Temos que:

$$E(X_j) = 1 \cdot 0,6 + (-1) \cdot 0,4 = 0,6 - 0,4 = 0,2.$$

Pela equação de Wald:

$$E \left(\sum_{j=1}^B X_j \right) = E(X_1) \cdot E(B) = 0,2 \cdot E(B).$$

Mas,

$$\sum_{j=1}^B X_j = \begin{cases} b, & \text{com probabilidade } \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) \\ -a, & \text{com probabilidade } 1 - \left[\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) \right] \end{cases}$$

Portanto;

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=1}^B X_j\right) &= b \cdot \left[\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) \right] + (-a) \cdot \left[1 - \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) \right] \\ E\left(\sum_{j=1}^B X_j\right) &= (a+b) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) - a \\ 0,2 \cdot E(B) &= (a+b) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) - a \\ E(B) &= 5 \cdot \left[(a+b) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^a}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+b}} \right) - a \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo 28. Suponha que o capital inicial do estrategista é 10 reais e do leigo 20 reais. Neste caso

$$\begin{aligned} E(B) &= 5 \cdot \left[(10 + 20) \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10+20}} \right) - 10 \right] \\ E(B) &= 5 \cdot \left[30 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30}} \right) - 10 \right] \\ E(B) &= 5 \cdot \left[30 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30}} \right) - 10 \right] \\ E(B) &= 97,4. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Aplicação no Ensino Médio

4.1 Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás

Segundo o currículo de referência da Rede Estadual de Educação de Goiás, os conteúdos Análise Combinatória e Probabilidade estão inseridos no terceiro bimestre da 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

Segundo o currículo de referência da Rede Estadual de Educação de Goiás, as expectativas de aprendizagem são:

- Efetuar cálculos envolvendo os agrupamentos de permutação, arranjo e combinação.
- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinação simples.
- Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
- Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.
- Resolver problemas utilizando noções de arranjos simples, permutação e combinação simples.
- Realizar cálculos utilizando Binômio de Newton.
- Conceituar evento e espaço amostral de um experimento.
- Calcular a probabilidade de um evento.

- Resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades.
- Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos.
- Resolver problemas envolvendo a probabilidade de eventos complementares.
- Resolver problemas envolvendo a probabilidade condicional.

Tendo em vista a didática atual no ensino destes conteúdos, podemos inserir algumas propostas alternativas com objetivo de dar abertura na participação dos alunos e predominância do pensamento combinatório e probabilístico ao invés da ênfase às fórmulas. Uma razão que motivou este trabalho, foi que boa parte dos professores consideram Probabilidade como algo complicado. Consideram-na um assunto de difícil entendimento por parte dos alunos. Estes, por sua vez, acabam vendo-se frente a várias fórmulas e nomenclaturas para eles “sem sentido”. Na maioria das vezes, essas expectativas de aprendizagem não são alcançadas com sucesso.

4.2 Propostas de aulas aplicadas ao Ensino Médio

Estas propostas de aulas diversificadas em sala constitui-se em uma alternativa capaz de atender às diferenças individuais, envolvendo os alunos em diversas atividades, criando um ambiente de trabalho extremoso e aprazível, onde todos tenham a oportunidade de trabalhar a cooperação, o respeito e a convivência em grupo, e entendendo que, apesar das diferenças pessoais, existem interesses, objetivos maiores, que são comuns para serem conquistados. Nessas aulas, o professor deve utilizar os recursos didáticos oferecidos pela escola, como datashow, lousa digital e outros.

4.2.1 Proposta 01

Título: A probabilidade de vencer em um jogo de par ou ímpar.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Ano/semestre de estudo: 2º ano.

Componente curricular: Matemática.

Tema: Probabilidade.

Duração da aula: 1 aula(45 minutos).

Modalidade de ensino: Educação presencial.

Objetivos

- Calcular a probabilidade de vencer em um jogo de par ou ímpar.
- Representar na forma de razão e porcentual a chance de ocorrência de um evento.

Desenvolvimento

1ª etapa

No início da aula, o professor chamará atenção dos alunos dizendo que ele consegue vencer a maioria das vezes do jogo par ou ímpar. Neste momento, espera-se que os alunos fiquem entusiasmados, pois em vários jogos no colégio, utilizam o par ou ímpar (para começar ou até para determinar o vencedor). Divida os alunos em duplas e proponham 10 disputas de par ou ímpar. Observe atentamente as reações dos estudantes conforme as rodadas avancem, pois a turma pode estranhar a repetição de resultados. Os resultados vão sendo anotados no quadro. Explique que, antes de iniciar, cada aluno tem de decidir quem será par e quem será ímpar.

2ª etapa

Discuta com os alunos qual dos resultados mais apareceu. Provavelmente os alunos responderão "par". Questione o motivo. É provável que, num primeiro momento, o grupo descreva as possibilidades utilizando os registros da tabela. Explique que conhecendo todas as possibilidades de resultados, é possível pensar na chance que o resultado par ou ímpar tem de vencer, comparando o número de possibilidades favoráveis em relação ao número de possibilidades. O professor adota a ideia de jogar **ESTRATEGICAMENTE**. Em seguida, o professor passa em mesa em mesa jogando 5 vezes com cada aluno. Novamente, esses resultados serão anotados no quadro negro.

3ª etapa

Após o término dos jogos, questione-os sobre a chance que o aluno que escolher ímpar tem de vencer? Represente em forma de fração a chance de cada jogador? Qual a forma percentual desses registros? Explique que muitas vezes nos deparamos com situações que possibilitam diferentes resultados e precisamos saber qual é a chance de um desses resultados se realizar ou não e que o campo da Matemática que se dedica a esse estudo é chamado probabilidade.

Avaliação

- Participação e cooperação.
- Trabalho em grupo.
- Ensino Recíproco.

4.2.2 Proposta 02

Título: A probabilidade de um grupo vencer em um jogo de par ou ímpar.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Ano/semestre de estudo: 2º ano.

Componente curricular: Matemática.

Tema: Probabilidade.

Duração da aula: 2 aulas(90 minutos).

Modalidade de ensino: Educação presencial.

Desenvolvimento

Primeira etapa: Explique aos alunos que ao longo de duas aulas eles aprenderão probabilidade jogando o jogo par ou ímpar. Para introduzir o tema, mobilize o interesse deles com algumas perguntas comum por exemplo: Onde eles utilizavam o jogo do Par ou Ímpar? Algum aluno tem interesse de aprender técnicas de vencer o jogo par ou ímpar? Quanto maior a diversidade das perguntas, melhores as possibilidades de sucesso na aula. No segundo momento, divida a sala de aula em dois grupos de mesma quantidade. O primeiro grupo é formado pelo estrategistas e o segundo grupo pelos leigos. O professor orientar cada grupo. Realize 37 partidas de par ou ímpar, sendo que cada jogo seja realizado com um elemento de cada grupo.

Segunda etapa: Anote os resultados em uma tabela. Cada dupla tem sua própria súmula.

Terceira etapa: Verifique quantos vencedores temos em cada grupo.

Quarta etapa: Discuta com a turma qual dos resultados mais apareceu. Questione o motivo e qual a justificativa dos resultados.

Quinta etapa: Explique o que aconteceu.

Metodologia - Explicação oral do professor com ajuda de esquemas no quadro ou data-show;

- Observação e análise através de experimentos.

Avaliações:

- Participação individual em resoluções de atividades propostas em sala de aula;

- Participação em grupo em resoluções de atividades propostas em sala de aula;

- Oralidade e participação em sala relacionada ao conteúdo proposto;

- Interesse e participação do aluno pelas atividades propostas.

4.2.3 Proposta 03

Título: A probabilidade de vencer em um jogo de par ou ímpar qualquer.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Ano/semestre de estudo: 2º ano.

Componente curricular: Matemática.

Tema: Probabilidade.

Duração da aula: 1 aula(45 minutos.)

Modalidade de ensino: Educação presencial.

Objetivo geral

Mostrar aos alunos que na 2ª e 3ª maneira o jogo é honesto e justo, já na 1ª e 4ª maneira o jogo não é justo.

Objetivos específicos - Conceituar evento e espaço amostral de um experimento;

- Calcular a probabilidade de um evento;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades.

Desenvolvimento

No início da aula, o professor convida os alunos a listarem as diferentes maneiras de jogar o par ou ímpar. Jogo este, utilizado por eles para definir várias coisas. As maneiras de jogar são:

- 1ª) Cada jogador usa uma mão podendo levantar 1,2,3,4, ou 5 dedos.
- 2ª) Cada jogador usa uma mão podendo levantar 0,1,2,3,4, ou 5 dedos.
- 3ª) Cada jogador usam as duas mãos podendo levantar 1,2,3,4,5,6,7,8,9, ou 10 dedos.
- 4ª) Cada jogador usam as duas mãos podendo levantar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, ou 10 dedos.

Após a listagem das maneiras de jogar, o professor desafia a turma para um jogo usando a 1ª regra. O professor joga de maneira estratégica sem que eles percebam, 10 vezes com cada aluno. No decorrer das partidas o professor alterna a escolha de par ou ímpar, para que outros alunos não descubram a regra. Obtém as vitórias e derrotas. Coloca os dados em tabela. Logo em seguida, os alunos analisam os resultados. Com grande probabilidade, neste momento os alunos percebem que o professor venceu a maioria das partidas. Alguns alunos entendem que o professor venceu devido a quantidade de números pares e ímpares em cada partida não ser igual, pois escolhemos a primeira maneira de jogar onde temos três números par e dois números ímpar. Porém,

o professor diz aos alunos que eles tem a oportunidade de escolha no par ou ímpar, isso implica que cada jogo foi justo. Novamente os alunos opinam.

Conclusão:

Somente após os alunos darem opinião o professor calcula a chance de ganho em cada caso e diz que jogou estrategicamente e qual estratégia usou.

4.2.4 Proposta 04

Título: Análise de resultados em um jogo de par ou ímpar.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Ano/semestre de estudo: 2º ano.

Componente curricular: Matemática.

Tema: Probabilidade.

Duração da aula: 1 aula(45 minutos.)

Modalidade de ensino: Educação presencial.

Objetivo geral:

Levar o aluno a aprender probabilidade de forma lúdica, interagindo com os outros educandos e o professor e assimilando o conteúdo de forma espontânea.

Objetivos específicos:

- Fazer com que o educando consiga montar e analisar dados em tabelas.
- Levar o aluno a resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades.
- Relembrar os conteúdos básicos.
- Promover a interação e a socialização entre os alunos.

Metodologia:

No início da aula o professor conversa com os alunos que a aula é dinâmica, onde todos vão participar. Nessa aula utilizamos o jogo do par ou ímpar, diz o professor. A turma é dividida em 3 grupos A, B e C. O professor instrui os grupos separadamente. Cada grupo deve guardar suas instruções sem que os grupos vizinhos percebam. Os alunos do grupo A recebem instruções para jogar sempre usando estratégia (modo estrategista), os alunos do grupo B recebem instruções para jogar de modo aleatório (modo leigo) e o grupo C não participa do jogo, pois são os observadores, cujo objetivo

é anotar o que acontece, ver e detalhar o que viu e concluiu. Cada jogador deve escolher números de 1 ao 5, segundo nossa regra.

Após informá-los da maneira de jogar, realizam-se as partidas. Cada partida é realizada com um integrante do grupo A e um integrante do grupo B. Além disso, em cada partida há um aluno do grupo C. Todos devem participar. Após todos integrantes jogarem 41 vezes cada, o jogo cessa. Com esses dados, o grupo C que tinha como objetivo contabilizar os resultados, monta uma tabela contendo os dados e as informações retiradas das partidas.

Cada grupo comenta sobre o que percebeu. Começamos com o grupo C, onde eles relatam os resultados em forma de tabelas. Os alunos do grupo B, explicam que todos os jogadores jogaram aleatoriamente e os alunos do grupo A explicam que jogaram estrategicamente. Após cada fala, o professor orientador desta aula, dirá tudo o que ocorreu. Na primeira parte ele dividiu toda a sala em 3 grupos, sendo o grupo A o dos estrategistas, o grupo B o dos leigos e o grupo C os observadores. Cada jogador do grupo A, por utilizar nas jogadas a estratégia dada, tinha 60% de chance de vencer enquanto cada jogador do grupo B tinha 40% de chance de vencer. O professor deve se certificar se algum aluno do grupo B não usou algum tipo de estratégia.

Avaliação:

Os alunos são avaliados através da participação e cooperação em sala de aula e resolução de exercícios propostos. Trabalho em grupo.

4.2.5 Execução da Proposta 02

A aula foi realizada no Colégio Estadual Novo Horizonte, localizado na cidade de Goiânia-Goiás, no dia 29 de maio de 2014. A duração foi de duas aulas com os alunos do 2º Ano E do ensino médio vespertino. Nosso tema foi aplicação da probabilidade no jogo Par ou Ímpar.

Desenvolvimento

Primeira etapa: No início da aula, perguntei aos alunos onde eles utilizavam o jogo do Par ou Ímpar. Muitos alunos responderam que em várias disputas de jogos, no caso do futebol, no início da partida e em caso de empate, eles disputam a vitória em um jogo de Par ou Ímpar. No segundo momento da aula dividi os 40 alunos em dois grupos de mesma quantidade. Os alunos do primeiro grupo foram os estrategistas

e os alunos do segundo grupo foram os leigos. Após reunir os grupos, eu orientei o primeiro grupo a jogarem estrategicamente, ensinando a regra (nossa regra, jogando apenas números de 1 a 5) sem eles desconfiarem. Foram realizadas 37 partidas de par ou ímpar, sendo que cada jogo foi realizado com 1 elemento de cada grupo. Tivemos um total de $20 \times 37 = 740$ resultados.

Segunda etapa: Cada integrante anotou as suas vitórias. Perguntei a eles os resultados e anotei-os em uma tabela. Os resultados foram:

Resultado das 20 disputas.

<i>DUPLAS</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>VITÓRIAS DO 1º GRUPO</i>	<i>23</i>	<i>17</i>	<i>22</i>	<i>24</i>	<i>27</i>	<i>30</i>	<i>25</i>	<i>18</i>	<i>13</i>	<i>22</i>
<i>VITÓRIAS DO 2º GRUPO</i>	<i>14</i>	<i>20</i>	<i>15</i>	<i>13</i>	<i>10</i>	<i>7</i>	<i>12</i>	<i>19</i>	<i>24</i>	<i>15</i>
<i>DUPLAS</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>20</i>
<i>VITÓRIAS DO 1º GRUPO</i>	<i>27</i>	<i>28</i>	<i>25</i>	<i>17</i>	<i>16</i>	<i>19</i>	<i>21</i>	<i>15</i>	<i>27</i>	<i>23</i>
<i>VITÓRIAS DO 2º GRUPO</i>	<i>10</i>	<i>9</i>	<i>12</i>	<i>20</i>	<i>21</i>	<i>18</i>	<i>16</i>	<i>22</i>	<i>10</i>	<i>14</i>

Analisando esta tabela, temos que na dupla de número 14, houve 17 vitórias do primeiro grupo e 20 vitórias do segundo grupo. Nesse momento percebemos que apenas seis integrantes do segundo grupo venceu a disputa. Um fato de pequena probabilidade ocorrido foi na dupla de número 9 acontecer 24 vitórias do segundo grupo contra 13 vitórias do primeiro grupo. A duas hipóteses. Primeira estamos diante de um evento muito improvável. Ou segundo, o integrante do primeiro grupo não entendeu a maneira de jogar ou, o integrante do segundo grupo resolveu jogar de maneira diferente.

Terceira etapa: Discuti com a turma qual dos resultados mais apareceu. De maneira rápida disseram “par”. Questionei novamente: Qual o motivo? Qual a justificativa dos resultados? Porque no segundo caso, a regra utilizada pelo grupo 1 teve falha?

Quarta etapa: Neste momento, todos os alunos queriam participar, tive dificuldade em conter a ordem da sala, pois vários alunos queriam opinar. No entanto, embora vários alunos omitiram opinião, nenhum deles foi capaz de entender por que houve vantagem do primeiro grupo. Alguns alunos desconfiaram que havia alguma estratégia por trás. Porém nenhum foi capaz de indentificá-la.

Quinta etapa: Logo após, coloquei no quadro todo o espaço amostral obtido neste

jogo e expliquei por que tudo isso aconteceu. Quando o grupo 01 joga estrategicamente, a chance dele ganhar em cada rodada é 60%. Supondo é claro que cada leigo jogou aleatoriamente.

Cálculos Realizados em cima da Aula Executada.

Percebemos que na dupla de número 9 houve 24 vitórias do grupo 2 contra 13 vitórias do grupo 1. Vamos calcular a probabilidade disto ocorrer. Utilizando o Lema 8, considerando apostas de 1 real para $V_{37} = 13$ obtemos:

$$S_m = k \cdot (2V_m - m)$$

$$S_{37} = 1 \cdot (2 \cdot 13 - 37)$$

$$S_{37} = 1 \cdot (26 - 37)$$

$$S_{37} = 1 \cdot (-11)$$

$$S_{37} = -11. \quad \square$$

Usando o Teorema 8 temos que:

$$\mathbb{P}(S_{37} \leq -11) \simeq \phi \left(\frac{-11 - 0,2 \cdot 1 \cdot 37}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{0,24 \cdot 37}} \right)$$

$$\mathbb{P}(S_{37} \leq -11) \simeq \phi \left(-\frac{18,4}{5,96} \right) = \phi(-3,09)$$

$$\mathbb{P}(S_{37} \leq -11) = 1 - \phi(3,09)$$

$$\mathbb{P}(S_{37} \leq -11) = 1 - 0,9990$$

$$\mathbb{P}(S_{37} \leq -11) = 0,001. \quad \square$$

Isso significa que há 0,001 de chance de acontecer esse placar. Assim, em média, a cada 1.000 duplas jogando 37 partidas isso ocorreria 1 vez.

Usando o Teorema 9 no contexto da nossa aula, temos que:

$$Y \sim \text{Binomial}(20; p).$$

Mas,

$$p = \mathbb{P}(S_{37} < 0) \simeq \phi \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{37}{6}} \right) \simeq \phi(-1,24)$$

$$p = 1 - \phi(1,24) = 1 - 0,8925 = 0,1075.$$

Como Y é uma variável aleatória binomial, o valor médio esperado é:

$$E(Y) = 20 \cdot 0,1075 = 2,15.$$

Isso significa que para 20 duplas jogando 37 partidas espera-se, em média, 2,15 vitórias de leigos.

Usando o Teorema 10 temos que:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) \simeq \phi\left(\frac{y - 2,15}{\sqrt{1,918875}}\right)$$
$$\mathbb{P}(Y \leq y) \simeq \phi\left(\frac{y - 2,15}{1,3852}\right).$$

A probabilidade de na nossa aula no máximo 6 leigos vencerem seus desafiantes é:

$$\mathbb{P}(Y \leq 6) \simeq \phi\left(\frac{6 - 2,15}{1,3852}\right)$$
$$\mathbb{P}(Y \leq 6) \simeq \phi(2,78) = 0,9973.$$

Portanto, temos $\mathbb{P}(Y > 6) \simeq 0$. Observe que na realização da aula os leigos venceram em 6 dos desafios.

Capítulo 5

Anexos

Tabela da Distribuição Normal Padrão
P(Z < z)

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho abordamos o assunto do jogo Par ou Ímpar o qual tínhamos dois grupos, o grupo dos estrategistas e o grupo dos leigos, jogando entre si, apostando k reais em cada rodada. No início do problema, percebemos que, se os jogadores jogassem aleatoriamente, quem escolhesse par teria a maior chance de ganhar. Em seguida, se um dos jogadores jogar estrategicamente, teria maior chance de ganhar. Se ambos os jogadores jogassem estrategicamente, venceria quem escolhesse ímpar. Após essas análises iniciais, realizamos sucessivas rodadas. Verificamos empiricamente que quem joga estrategicamente tem maior vantagem de vencer. Teoricamente se repetirem o jogo indefinidamente, o jogador que joga estrategicamente, tem grande chance de sempre estar em lucro. No decorrer do trabalho, obtemos a média e a distribuição de probabilidade do lucro do estrategista após m rodadas.

Esse trabalho foi muito importante para meu conhecimento, pois utilizei-o em uma aula do ensino médio, onde os alunos ficaram entusiasmados e empolgados. Ao repetir quatrocentos e setenta(470) vezes o jogo Par ou Ímpar, obtive resultados satisfatórios. Consegui mostrar aos alunos que determinado grupo tinha maior chance de vencer os jogos pois seus componentes jogaram estrategicamente. No término da aula, diversos alunos descobriram o método de jogar estrategicamente o jogo Par ou Ímpar. Como mencionado no trabalho, o conteúdo de Probabilidade é um assunto em que os alunos apresentam grandes dificuldades, por esse motivo, este trabalho contribuiu com quatro propostas de aulas diversificadas. O aprofundamento desse tema, gerou um enriquecimento no meu conteúdo didático. O ensino didático com aulas diversificadas gera um excelente aproveitamento em sala de aula. Por fim, concluímos que se o jogador jogar

estrategicamente terá grande chance de vencer mais do que perder em uma sequência de rodadas de Par ou Ímpar. Os alunos ficaram entusiasmados com o resultado.

Referências Bibliográficas

- [1] MORETTIN, LUIZ GONZAGA., *Estatística Básica, Volume 1, Probabilidade, 7ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.*
- [2] VARGAS JUNIOR, VALDIVINO, *Tópicos em passeios aleatórios, XXIII Semana do IME.*
- [3] WALD, ABRAHAM, *Somas cumulativas de variáveis aleatórias, The Annals of Mathematical Statistics 15 (3):. 283-296*
- [4] CAPIVARI, A.C., *Teoria dos Jogos: uma abordagem exploratória Revista Conteúdo, v.1, n.2, jul./dez. 2009, ISSN 1807 a 9539*
- [5] C.A.B., *Probabilidade: um curso introdutório, 3.ed.São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008. (Coleção Acadêmica).*
- [6] J. ALBUQUERQUE, J.P. FORTES, W.FINAMORE, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos, Interciência, Rio de Janeiro, 2008.*
- [7] NAVIDI, WILLIAN, *Probabilidade e estatística para ciências exatas. Página 168.*
- [8] FRANÇA, REGINA, http://portal.virtual.ufpb.br/biblioteca-virtual/files/uca_matematica_sou_par_ou_ampar_1317334200.pdf; pag. 1 e 2.
- [9] LOPES, HÉLIO, *Processos Estocásticos, INF2035, Introdução a Simulação Estocástica.pdf*
- [10] GIOVANNI, JOSE RUY E BONJORNO, JOSÉ ROBERTO, *Matemática para o Ensino Médio.*
- [11] LEBENSZTAYN, ÊLCIO E COLETTI, CRISTIAN FAVIO, *Probabilidade: Teoria e exercícios*, editora IME-USP-SP, 2012.

[12] COSTA, CARLO ARRIAGA, *Universidade de Minho, Escola de Economia e Gestão.*

[13] [HTTP://WWW.PORTALACTION.COM.BR/1283-712-LEI-FORTE-DOS-GRANDES-NÚMEROS](http://www.portalaction.com.br/1283-712-lei-forde-dos-grandes-numeros), Acesso em: 17 set. 2014.

[14] [HTTP://WWW.PORTALACTION.COM.BR/1281-72-TEOREMA-CENTRAL-DO-LIMITE](http://www.portalaction.com.br/1281-72-teorema-central-do-limite), Acesso em: 17 set. 2014.