Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio

Robison Luiz Alves de Lima

Goiânia

2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Robison Luiz Alves de Lima				
E-mail:	robisonluizlima@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio				
Palavras-chave:	Otimização. Ensino Médio. Geometria Plana.				
Título em outra língua:	Geometric Methods for Optimization in High School				
Palavras-chave em outra língua:	Optimization. High School. Geometry.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	19/7/2013				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador (a):	Dr. Rogerio de Queiroz Chaves				
E-mail:	rogerio@mat.ufg.br e rqchaves@gmail.com				
Co-orientador(a):*	-				
E-mail:	-				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Robison Luiz Alves de Lima

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 8 / 1 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Robison Luiz Alves de Lima

Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves

Goiânia

2013

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Lima, Robison Luiz Alves de
Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio [manuscrito] / Robison Luiz Alves de Lima. - 2013.
48 f.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2013.
Bibliografia.

1. Otimização. 2. Ensino Médio. 3. Geometria Plana. I. Chaves, Rogerio de Queiroz, orient. II. Título.

Robison Luiz Alves de Lima

Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 19 de julho de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

RQChaves

Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

WBatista Santos

Prof. Dr. Walter Batista dos Santos
UnB

Rosângela Maria da Silva

Profª. Drª. Rosângela Maria da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Robison Luiz Alves de Lima graduado em Licenciatura Plena em Matemática pelo Centro Universitário de Brasília - UniCeuB, durante a graduação fez uso do Financiamento Estudantil - FIES oferecido pelo Governo Federal e administrado pela Caixa Econômica Federal.

Dedico este trabalho a minha amada esposa Lidiane Fernandes Valença Alves, aos meus filhos Miguel Cecilio Valença Alves e Arthur Samuel Valença Alves e minha mãe Odezina Alves de Oliveira (*in memorian*).

Agradecimentos

Aprendi através das escrituras sagradas que em tudo devemos dar graças. Ter um coração grato é um exercício difícil, porém necessário à vida, pois não seria possível caminhar e construir a história sem perceber as grandes contribuições que muitos vão deixando ao longo do percurso. Neste momento e emocionado agradeço:

A Deus, na pessoa de Jesus Cristo, que pela cruz me chamou, gentilmente me atraiu e eu sem palavras me aproximo, quebrantado por Seu amor. A Ele minha gratidão e amor.

Ao Professor Rogerio de Queiroz Chaves, que com simplicidade requintada e amizade contribuiu significativamente para o meu crescimento acadêmico. Destaco sua postura compreensiva e tolerante, sem faltar com a veracidade. Obrigado!

A minha família, esposa Lidiane Fernandes Valença Alves, filhos Miguel Cecílio e Arthur Samuel, mãe (*in memorian*), pai e irmãos que tão generosamente acompanharam, apoiaram e observaram o meu caminhar incansavelmente e assumem comigo o ônus desta escolha. Perdoem-me pela ausência, impaciência e exigências.

Aos professores Dilermano Arruda e Alan Rocha, amigos e profissionais, com quem compartilho experiências acadêmicas e princípios válidos pra toda vida e que marcadamente são as pessoas a quem agradecerei sempre por seu empenho, compromisso e ética com o ensino de Matemática.

Aos meus colegas de trabalho do Centro de Ensino Fundamental 103 e da Coordenação Regional de Ensino de Santa Maria que suportaram minhas ausências por alguns dias e ouviram por tantas vezes: “ Calma, essa fase está acabando! ”

Resumo

Visando despertar e incentivar os professores para um ensino promotor de maior participação dos alunos nas aulas de Matemática, o presente trabalho trata de Métodos Geométricos em Otimização e delineia alguns problemas acessíveis no contexto do ensino médio. Para tanto, são apresentados na primeira parte alguns resultados geométricos para auxiliar na resolução dos problemas de máximos e mínimos. Dentre os métodos geométricos utilizados, para minimizar distâncias, temos a desigualdade triangular, para maximização de áreas, algumas propriedades dos triângulos isósceles e para obter um ângulo máximo empregamos propriedades dos ângulos cujos lados intersectam uma dada circunferência. Os métodos apresentados são, então, aplicados na resolução de vários problemas interessantes de otimização, alguns deles clássicos. Ao final, são propostos alguns problemas adicionais de otimização que podem ser discutidos no contexto dos métodos aqui apresentados.

Palavras-chave: Otimização. Ensino Médio. Geometria Plana.

Abstract

This present study aims to awake and to encourage teachers for a teaching methodology that promotes more participation of the students in the Mathematics classes. This study presents Geometry Optimization Methods and also delineates some issues in the high school environment. In the first part, it presents some geometrical results in order to support solving maximum and minimum problems. Among the geometrical tools explored in this study to minimize distances we use the Triangle Inequality and some of its implications. In order to maximize areas we employ some characteristics of isosceles triangles and to maximize an angle we take advantage of some properties of angles whose sides intersect a given circle. The methods presented are, then, applied in solving many interesting optimization problems some of which are classical. At the end of the study some additional optimization problems are proposed in order to encourage further explorations within the context of the methods presented in the previous sections.

Key words: Optimization. High School. Geometry.

Sumário

Observações sobre a Notação:

i) No texto desse trabalho, AB (sem a barra) denota segmento de reta como um conjunto de pontos, enquanto $\overline{AB}$ denota a medida do segmento AB, portanto um número.

ii) $\overrightarrow{AB}$ denota a semirreta que tem origem no ponto A e contém o ponto B.

iii) O $A\widehat{B}C$ denota o menor ângulo entre os segmentos AB e BC, podendo ocasionalmente ser denotado, também, por letras gregas minúsculas.

iv) $\triangle ABC$ denota um triângulo com vértices em A, B e C.

v) $r \parallel AB$ denota que a reta r é paralela ao segmento AB.

vi) $\overset{\frown}{AB}$ denota o arco de uma circunferência λ, que liga os pontos A e B.

vii) A reta determinada pelos pontos A e B será denotada por $\overleftrightarrow{AB}$.

viii) O perímetro de um polígono $A_1A_2\ldots A_n$ será denotado por $2p = 2p(A_1A_2\ldots A_n) = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$.

MÉTODOS GEOMÉTRICOS PARA OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

1 Introdução

Dialogando com algumas pessoas podemos perceber, em seu discurso, uma certa aversão quanto à disciplina de Matemática. No entanto, acreditamos na possibilidade de ensiná-la de forma estimulante e divertida, para que se possa desfazer mitos e crenças que a caracterizam como uma disciplina difícil, complicada, entre outros.

Neste sentido, este trabalho tem como proposta apresentar uma forma diferenciada de aplicações com o foco nos problemas de otimização. Para tanto, demonstra por meio de problemas clássicos e atuais que, utilizando apenas métodos geométricos básicos, obtem-se soluções bem elegantes e de fácil acessibilidade aos alunos do ensino médio.

O interesse em desenvolver esse trabalho surgiu da necessidade de aprofundar os conhecimentos sobre o tema pois, há poucos trabalhos divulgados em revistas eletrônicas e livros, o que torna esta pesquisa bastante relevante.

Assim, dentre os materiais consultados constatou-se que desde a antiguidade os matemáticos já demonstravam o interesse por problemas de valores extremos (minimização e maximização). Em torno de 300 a.C., Euclides falou de um problema sobre maximização, que consiste em achar o maior produto possível de dois números cuja soma era dada. Zenodorus (200 a.C a 140 a.C), estudou a área de uma figura com perímetro fixado e o volume de um sólido com superfície fixada. Ele verificou que entre todos os polígonos com mesmo perímetro, o polígono regular é o que abrange a maior área. [3]

Um dos problemas mais antigos de maximização em geometria, conhecido hoje como Problema Isoperimétrico, foi sugerido na lenda da criação da cidade de Cartago pela princesa Dido. O problema de Dido, como ficou conhecido, consiste em: "Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento l, encontrar aquela que engloba a maior área". A lenda de Dido ficou bem conhecida através da obra épica Eneida, escrita pelo grande poeta romano Virgílio.

Segundo Virgílio (1994), a lenda diz o seguinte: Dido (Elisa ou Elisha) era uma princesa fenícia da cidade de Tiro. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido

Siqueu. Dido então fugiu num navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade no norte da África, "Qart Hadash" (Cartago), em uma região do que é hoje a Tunísia. No lugar escolhido para ser Cartago tentou comprar terras do rei local Jarbas da Numídia para que pudessem se estabelecer. O arranjo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse contornar com a pele de um único animal. Em todos os textos matemáticos que fazem referência à lenda, através da obra de Virgílio, dizem que Dido e seu grupo decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendaram as tiras e formaram uma longa e fina correia e cercaram com a mesma um terreno circular. [11]

Na idade média, um problema geométrico de maximização enunciado é o de Regiomontanus que consiste em calcular a distância de um homem ao pedestal de uma estátua de modo a enxergá-la por um ângulo de visão máximo. Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, este ficou conhecido como o primeiro problema de extremos, formalmente formulado e encontrado na História da Matemática desde a antiguidade. [8]

Quanto aos problemas de minimização temos o interessante problema de Fermat, proposto pelo matemático Pierre de Fermat a Evangelista Torricelli que sugere "encontrar um ponto no plano cuja soma das distâncias a três pontos dados A, B e C seja mínima". Este problema também foi trabalhado por outros matemáticos como Cavalieri, Simpson e Jacob Steiner.

Outro importante problema de minimização foi proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi. O problema de Fagnano, também conhecido como problema do triângulo de Schwarz, consiste em inscrever num triângulo acutângulo um outro triângulo com o menor perímetro possível. Em 1775, seu filho, que era matemático e padre, Giovanni Francesco Fagnano completou a demonstração de seu pai usando o cálculo diferencial. Dois outros matemáticos trabalharam na resolução desse problema usando apenas métodos geométricos, o matemático alemão Hermann Amandus Schwarz e o matemático húngaro Liptó Fejér. [3]

Contudo, nos dias atuais, podemos perceber que, quando são trabalhados os conceitos de maximização e minimização no ensino médio, geralmente, a ênfase é predominantemente algébrica, devendo o aluno apenas aplicar as fórmulas estudadas, para realizar as atividades de uma forma mecânica, ou seja, sem uma análise do porque dessa técnica. Porém, se forem apresentados, por exemplo, problemas como os aqui mencionados, provavelmente, os alunos encontrarão dificuldades para resolvê-los. Entre as dificuldades encontradas, podemos citar: a representação geométrica adequada, para a análise do problema e a consequente determinação do método que o solucionará. No entanto, essa abordagem é diferente e desafiadora, se estimulada pelo professor pode despertar o interesse do aluno em utilizar os métodos geométricos básicos para resolver alguns problemas de valores extremos.

Este trabalho divide-se em três partes, de forma que, na primeira parte apresentamos alguns resultados geométricos básicos que mostram-se úteis na resolução de vários problemas de otimização. Na segunda parte, aplicamos os resultados desenvolvidos na primeira para resolução de vários problemas interessantes de otimização. Por fim, a terceira parte, traz sugestões de problemas adicionais que podem ser estudados no nível do ensino médio, no contexto deste trabalho.

2 Métodos Geométricos em Otimização

Nesta seção, são apresentados resultados extremamente úteis na solução de alguns problemas de otimização. Parte destes resultados têm o foco na análise de triângulos que minimizam ou maximizam áreas ou perímetros.

Estas propriedades são o alicerce para o trabalho, daí a necessidade de apresentarmos com rigor as suas demonstrações. Temos também, dentro do estudo dos triângulos, outras ferramentas particularmente úteis envolvendo os triângulos isósceles e argumentos envolvendo ângulos e circunferências.

Como foi mencionado sobre o estudo de triângulos, iniciamos nossos resultados com a Desigualdade Triangular que é uma ferramenta necessária na resolução de alguns problemas, sendo a mesma, pouco explorada no Ensino Médio. Temos também, na primeira proposição, um instrumento que auxiliará na demonstração dessa desigualdade.

Proposição 1: *Se dois lados de um triângulo não são congruentes então os ângulos opostos a esses lados não são iguais e o maior ângulo é oposto ao maior lado. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.* [2]

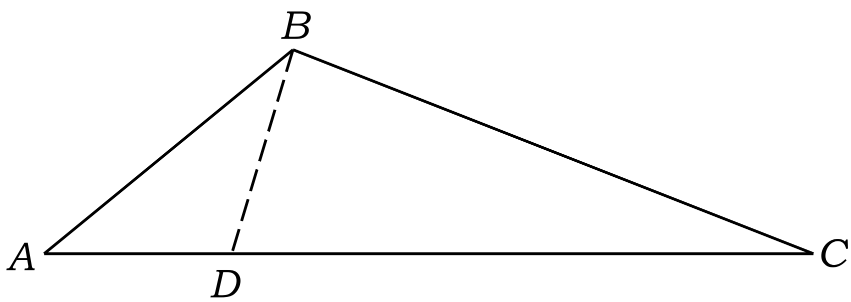

Figura 1: Proposição 1

Demonstração: Na primeira parte da proposição temos uma propriedade dos triângulos isósceles que para $\overline{AB} = \overline{BC}$ se, e somente se, $A\widehat{C}B = B\widehat{A}C$. No entanto considere, sem perda de generalidade, um $\triangle ABC$ em que $\overline{AC} > \overline{BC}$. Assim, devemos mostrar que $C\widehat{B}A > C\widehat{A}B$.

Marquemos um ponto D sobre o segmento AC tal que $\overline{CD} = \overline{CB}$, temos que $C\widehat{B}A > C\widehat{B}D$, pois BD divide o ângulo $C\widehat{B}A$, por outro lado, $C\widehat{B}D = C\widehat{D}B$, pois o $\triangle BCD$ é isósceles de base BD. Assim, temos que $C\widehat{D}B = C\widehat{A}B + A\widehat{B}D > C\widehat{A}B$, consequentemente, $C\widehat{B}A > C\widehat{A}B$.

Ainda utilizando a propriedade dos triângulos isósceles da demonstração anterior temos que, se $A\widehat{C}B = B\widehat{A}C$, então $\overline{AB} = \overline{BC}$. No entanto, considere agora que no $\triangle ABC$ o $C\widehat{A}B < C\widehat{B}A$.

Se fosse $\overline{BC} > \overline{AC}$ então, pela primeira parte da proposição, deveríamos ter $C\widehat{A}B > C\widehat{B}A$, que é contrário à hipótese. Mas se ocorresse $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo ABC seria isósceles e o $C\widehat{A}B = C\widehat{B}A$ o que também está em desacordo com a hipótese.

Portanto, para $C\widehat{A}B < C\widehat{B}A$ temos $\overline{BC} < \overline{AC}$. $\square$

Agora, fazendo uso da proposição apresentada anteriormente, temos no teorema a seguir uma forma simples, na Geometria Plana, de determinar caminhos mais curtos.

Teorema 2 (Desigualdade Triangular): *Dados três pontos A, B e C do plano, tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se, e somente se, B pertence ao segmento AC.* [2]

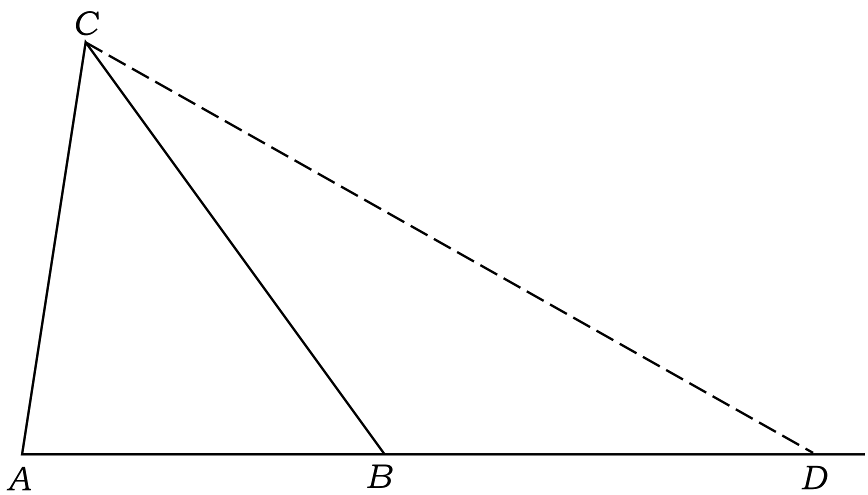

Figura 2: Teorema 2

Demonstração: Se A, B e C não forem colineares, então eles determinam um triângulo. Marquemos um ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$, ou seja, $\overline{BD} = \overline{BC}$.

Consequentemente, o $\triangle BCD$ é isósceles de base CD, o que leva ao $B\widehat{C}D = A\widehat{D}C$. Como BC divide $A\widehat{C}D$ é imediato que $B\widehat{C}D < A\widehat{C}D$, e também, $A\widehat{D}C < A\widehat{C}D$. Logo, pela Proposição 1, temos que $\overline{AC} < \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

($\Rightarrow$) Se os pontos estão sobre uma mesma reta é imediato que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$ e a igualdade só ocorre quando B está entre A e C.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se o ponto B pertence ao segmento AC é imediato que, $\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AC}$. $\square$

A próxima proposição é um caso particularmente útil de minimização distâncias onde também fazemos uso da desigualdade triangular.

Proposição 3 (Problema de Heron): *Dados dois pontos P e Q em um mesmo semiplano determinado por uma reta r, a linha poligonal mais curta ligando P a Q e intersectando r é formada pelos segmentos de reta PA e AQ se, e somente se, $A \in r$ é tal que PA e AQ formam ângulos iguais com a reta r.* [6]

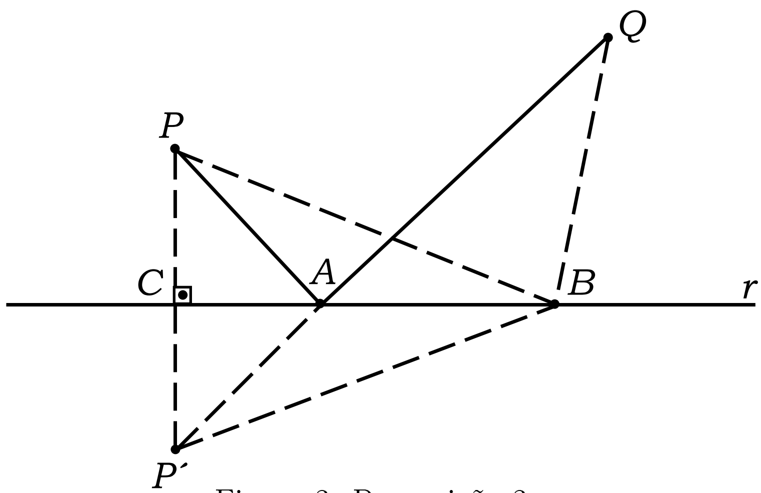

Figura 3: Proposição 3

Demonstração: Faremos uso da definição de reflexão ou simetria ortogonal como sendo uma isometria tal que se X é um ponto do plano não pertencente à reta r, a reflexão ou o simétrico de X em relação a r é o ponto X' tal que r é a mediatriz do segmento XX'. E se X pertence à reta r, a imagem de X, é o próprio ponto X.

Utilizando esta propriedade, refletiremos, por exemplo, o ponto P, pela reta r, onde obtemos o ponto P' e o segmento PP' intersecta r em um ponto C. Em seguida, traçamos a reta $P'Q$, esta intersecta r em um ponto que denotaremos por A. Escolhendo arbitrariamente um ponto B sobre a reta r, se $B \neq A$ então, pela Desigualdade Triangular,

$$\overline{PB} + \overline{BQ} = \overline{P'B} + \overline{BQ} \geq \overline{P'A} + \overline{AQ} = \overline{PA} + \overline{AQ} .$$

Logo $\overline{PA} + \overline{AQ}$ é o caminho mais curto de P a Q intersectando r. (A solução é análoga se for refletido o ponto Q ao invés do ponto P)

($\Rightarrow$) Os segmentos PA e AQ formam ângulos iguais com a reta r. De fato, pois $C\widehat{A}P'$ e $Q\widehat{A}B$ são opostos pelo vértice A e o segmento AC é a bissetriz do ângulo $P\widehat{A}P'$. Ou seja, A é o ponto tal que $P\widehat{A}C = Q\widehat{A}B$.

($\Leftarrow$) Se A for o ponto de r tal que os ângulos $P\widehat{A}C$ e $Q\widehat{A}B$ são iguais, então o comprimento da poligonal é mínimo. Suponha por contradição que a soma $\overline{PA} + \overline{AQ}$ não seja mínima. Então, exite um ponto X pertencente a r e diferente de A tal que, a soma $\overline{PX} + \overline{XQ} < \overline{PA} + \overline{AQ}$. Nesta condição, se refletirmos de forma análoga o ponto Q, pela reta r, obtemos o ponto Q'. Em seguida, traçamos a reta $Q'P$, esta, passando por r em X. Temos, também, o segmento QQ' intersectando r em um ponto Y. Desse modo, os ângulos $Q\widehat{X}Y$ e $Y\widehat{X}Q'$ são congruentes, pois, a reta r é bissetriz de $Q\widehat{X}Q'$ e, também, $Y\widehat{X}Q'$ é oposto pelo vértice com $P\widehat{X}C$. Resultando na igualdade entre $Q\widehat{X}Y$ e $P\widehat{X}C$, o que é um absurdo pois, essa igualdade só é válida se $X = A$.

Portanto, a soma $\overline{PA} + \overline{AQ}$ será mínima se, e somente se, o ângulo $P\widehat{A}C = Q\widehat{A}B$. □

Ainda com o foco em minimização e fazendo uso da proposição anterior, temos no próximo resultado outra ferramenta muito útil para determinar caminhos mais curtos.

Proposição 4: *De todos os triângulos com base BC e altura h fixos, o de menor perímetro é isósceles.*

Demonstração: A área de um $\triangle ABC$ não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base, uma vez que tanto a base quanto a altura não se alteram. Nesta condição, pelo vértice A traçamos uma reta r paralela ao lado BC, desse modo, o perímetro do triângulo ABC será mínimo quando o vértice A pertencer à mediatriz de BC, pois, neste caso, para qualquer ponto A' de r e diferente de A temos que $\overline{BA} + \overline{AC} < \overline{BA'} + \overline{A'C}$, conforme proposição 3. Tomando, arbitrariamente, os pontos A'' e A' sobre r, de modo que A seja pertencente ao segmento $A''A'$, teremos a igualdade entre os ângulos $A''\widehat{A}B$ e

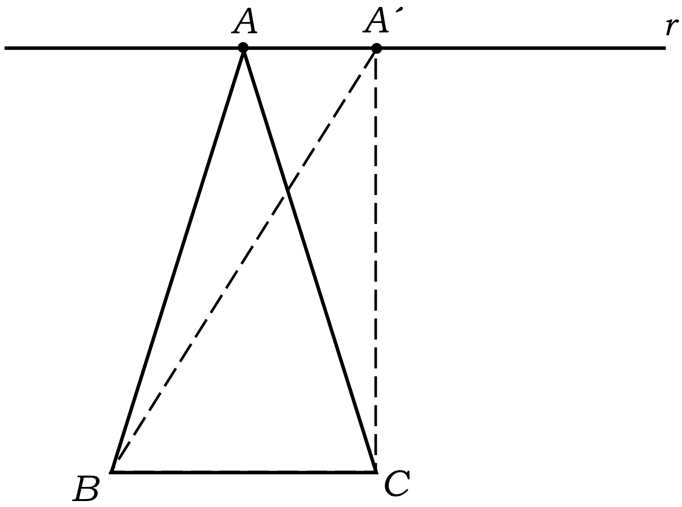

Figura 4: Proposição 4

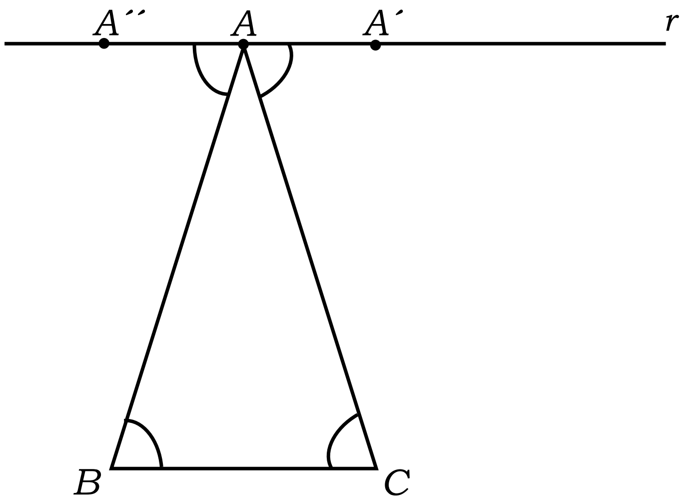

Figura 5: Proposição 4

$A'\widehat{A}C$, conforme proposição 3. Também, temos, que $A''\widehat{A}B = A\widehat{B}C$ e $A'\widehat{A}C = A\widehat{C}B$, por serem alternos internos. Consequentemente $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Portanto, dentre todos os triângulos com base e altura fixos, o de menor perímetro é isósceles. □

Veremos nos dois próximos resultados alguns métodos geométricos básicos e específicos, quando se deseja maximizar uma área, mesmo que essa seja a de uma figura tão simples quanto a de um triângulo.

Proposição 5: *De todos os triângulos com base BC e ângulo oposto a BC, α, o de maior área é isósceles.*

Demonstração: Seja um $\triangle ABC$ de base $\overline{BC}$ e o ângulo oposto $B\widehat{A}C = \alpha$. Assim, construimos um arco capaz de α sobre o segmento BC, sendo este o lugar geométrico dos pontos em um dos semiplanos definidos pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, que são vértices de ângulos cujos lados passam por B e C e têm medida igual a α, conforme a figura 6.

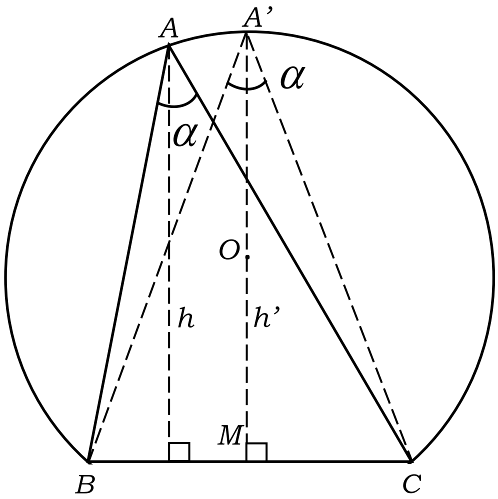

Figura 6: Proposição 5

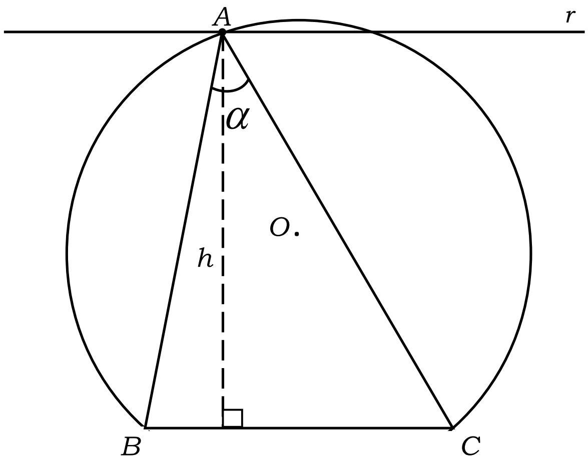

Figura 7: Proposição 5

Seja h a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$ e pelo vértice A traçamos uma reta $r \| BC$ e secante ao arco capaz de α. Então, existem pontos do arco no semiplano que não contém BC que estão a uma distância maior que h, conforme figura 7.

Se r é uma reta tangente ao arco de tal forma que o vértice A esteja sobre a mediatriz de BC, então h será máxima. Nessa condição, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e o $\triangle ABC$ terá a maior área possível.

Portanto, dentre todos os triângulos com base BC e ângulo oposto a BC, α, o de maior área é isósceles. $\square$

Ainda com o objetivo de maximizar áreas temos, a seguir, mais uma importante propriedade dos triângulos isósceles.

Proposição 6: *De todos os triângulos com base* AB *e perímetro fixo, o de maior área é isósceles.*

Demonstração: Seja um $\triangle ABC$ de perímetro $2p$, e pelo vértice C traçamos uma reta r paralela ao segmento AB, fixando assim uma altura h relativa à AB, como mostra a figura 8.

Se ABC é um triângulo isósceles de base AB e perímetro $2p$, qualquer outro triângulo com a mesma base AB e a mesma área, terá perímetro maior que ABC conforme Proposição 4. Além disso, para qualquer ponto X no semiplano que não contém AB, o triângulo ABX tem perímetro maior que um triângulo com base AB e o terceiro vértice sobre r, por exemplo, o triângulo ABQ que, por sua vez, tem perímetro maior que ABC. Assim, os triângulos com base AB e perímetro igual ao de ABC têm o terceiro vértice no semiplano que contém AB, portanto, têm altura menor que a do triângulo ABC.

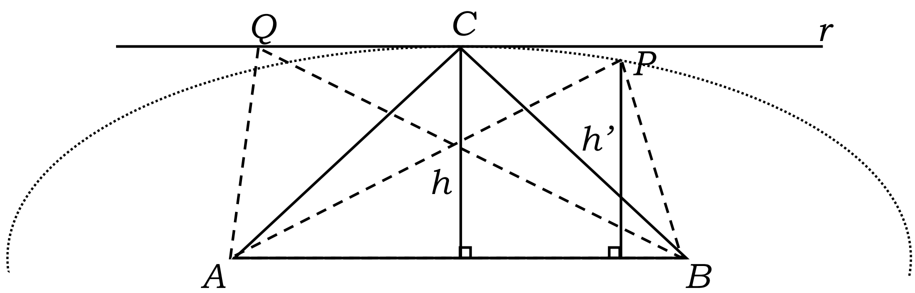

Figura 8: Proposição 6

Assim, dentre todos os triângulos de base e perímetro fixos, o de maior área é isósceles. $\square$

Observação: Nos triângulos ABC de base AB e perímetro fixos, o vértice C situa-se sobre uma **Elipse** cujos focos são os pontos A e B. Logo, é natural que o de maior altura e, consequentemente maior área, seja o isósceles.

Proposição 7: *De todos os triângulos com dois dos lados medindo a e b, o de maior área é tal que esses dois lados formam um ângulo reto.*

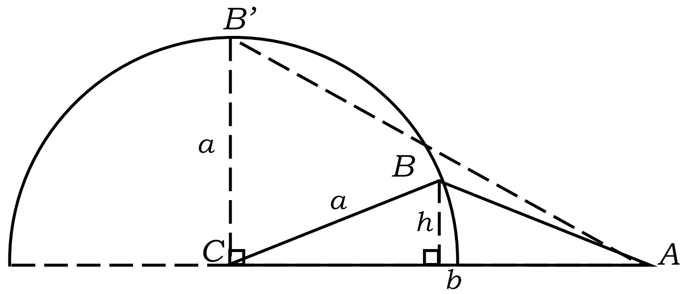

Figura 9: Proposição 7

Demonstração: Considerando um $\triangle ABC$ de lados $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, respectivamente. Seja h a altura do triângulo relativa ao lado CA. Girando o lado BC em torno de C é fácil ver que a altura do $\triangle ABC$ será máxima quando o segmento BC for perpendicular ao segmento CA, como ilustra a figura 9. $\square$

Veremos, também, alguns problemas que envolvem a maximização de um ângulo e, para isto, apresentaremos a seguir algumas propriedades de ângulos cujos lados intersectam uma circunferência.

Definição 8: *Um ângulo **excêntrico exterior** a uma circunferência é um ângulo que possui o vértice fora da circunferência e cujos lados são secantes à mesma.* (Como mostra a figura 10). [4] $\square$

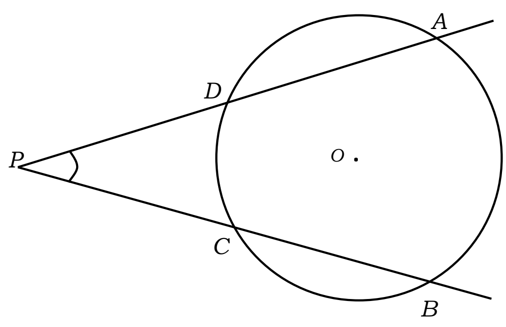

Figura 10: Definição 8

Definição 9: *Se O é o centro da circunferência então, o ângulo* $A\widehat{O}B$ *é denominado ângulo central. A medida,* **em graus**, *do arco menor determinado pelos pontos A e B é a medida do ângulo central* $A\widehat{O}B$. *A medida,* **em graus**, *do arco maior é* $360° - \alpha$, *onde* α *é a medida em graus do arco menor.* [2] $\square$

Proposição 10: *Todo ângulo inscrito em uma circunferência tem a metade da medida, em graus, do arco correspondente.* [2]

Demonstração: Considere um ângulo $B\widehat{A}C$ inscrito sob o arco $\overset{\frown}{BC}$. Inicialmente, suponha que o centro O da circunferência pertença a um dos lados, digamos AC. Neste caso, a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito é a medida do ângulo $B\widehat{O}C$. Como $BO = OA$ então, o $\triangle OAB$ é isósceles e portanto $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A$. Então, $B\widehat{O}C = O\widehat{A}B + O\widehat{B}A = 2B\widehat{A}C = 2\cdot \overset{\frown}{BC}$.

Agora, consideremos o caso mais geral, em que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Dessa forma, pelo vértice A tracemos um diâmetro da circunferência de extremidades AD. Nessas condições, se o diâmetro AD divide o ângulo $B\widehat{A}C$, temos pelo primeiro caso que, $B\widehat{O}D = 2B\widehat{A}D$ e que $D\widehat{O}C = 2D\widehat{A}C$.

Assim, temos que $B\widehat{O}D + D\widehat{O}C = 2(B\widehat{A}D + D\widehat{A}C)$ logo, $B\widehat{O}C = 2B\widehat{A}C = 2\cdot \overset{\frown}{BC}$. Se, o diâmetro AD não divide o ângulo $B\widehat{A}C$ temos, também pelo primeiro caso que $D\widehat{O}C = 2D\widehat{A}C$ e que $D\widehat{O}B = 2D\widehat{A}B$. Então, utilizando as expressões, temos $D\widehat{O}C - D\widehat{O}B = 2(D\widehat{A}C - D\widehat{A}B)$ logo, $B\widehat{O}C = 2B\widehat{A}C = 2\cdot \overset{\frown}{BC}$. $\square$

Teorema 11: *A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual à metade da diferença entre as medidas, em graus, dos arcos por ele determinados na circunferência.* [4]

Demonstração: Sejam $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ os arcos, maior e menor, determinados pelas retas concorrentes definidas por $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CB}$, conforme mostra a figura 11.

Traçando-se o segmento AC, forma-se o $\triangle ACP$ e deseja-se mostrar que

$$A\widehat{P}B = \frac{A\widehat{O}B - C\widehat{O}D}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

Como $A\widehat{C}B$ é ângulo externo do $\triangle ACP$, tem-se que

$$A\widehat{C}B = P\widehat{A}C + A\widehat{P}B \tag{1}$$

$$\text{ou} \quad A\widehat{P}B = A\widehat{C}B - P\widehat{A}C \tag{2}$$

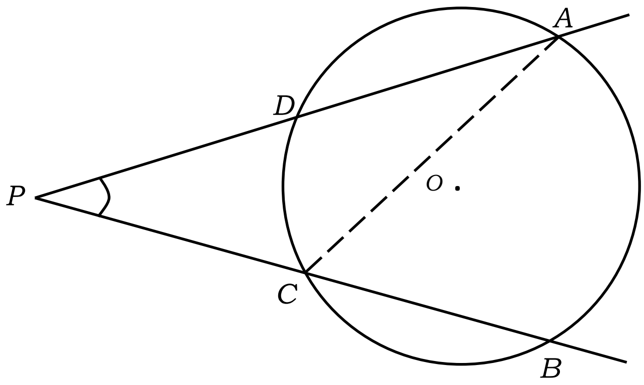

Figura 11: Teorema 11

Como $P\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}B$ são ângulos inscritos, tem-se que

$$P\widehat{A}C = \frac{D\widehat{O}C}{2} \tag{3}$$

$$\text{e} \quad A\widehat{C}B = \frac{A\widehat{O}B}{2} \tag{4}$$

Substituindo as equações dadas por (3) e (4) na equação (2) temos

$$A\widehat{P}B = \frac{A\widehat{O}B}{2} - \frac{D\widehat{O}C}{2} = \frac{A\widehat{O}B - D\widehat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}. \qquad \square$$

Observação: Uma importante consequência do teorema acima é que um ângulo excêntrico exterior é sempre menor que um ângulo inscrito subtendendo o arco maior $\overset{\frown}{AB}$.

A Desigualdade Triangular permite ainda demonstrar uma outra desigualdade interessante a respeito de triângulos equiláteros, que será útil na solução de alguns problemas geométricos de minimização.

Teorema 12: *Dado um triângulo equilátero $\triangle ABC$ para qualquer ponto, P, do plano, vale $\overline{PA} \leq \overline{PB} + \overline{PC}$ e a igualdade vale se, e somente se, P for um ponto do menor arco $\overset{\frown}{BC}$ do círculo circunscrito ao $\triangle ABC$.* [9]

Demonstração: Seja ABC um triângulo equilátero. Consideremos, primeiramente, P fora do menor arco $\overset{\frown}{BC}$. Assim, girando o $\triangle BCP$ de $60°$ com centro em B, no sentido que leve C em A, obtemos o $\triangle BP'A$ congruente ao $\triangle BPC$,

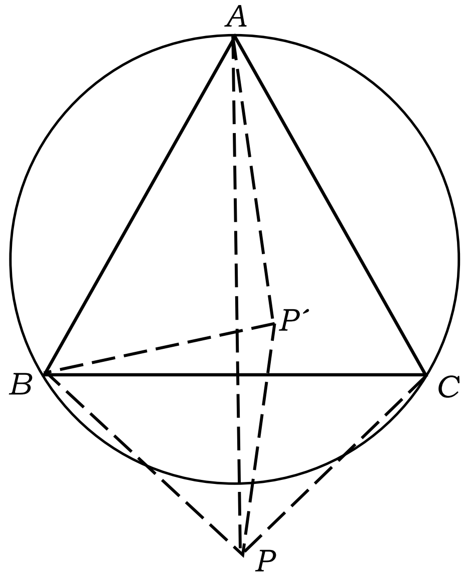

Figura 12: Teorema 12

pois, se dois triângulos possuem os três lados respectivamente congruentes, então, eles são congruentes (caso LLL). Nestas condições, temos $\overline{BP} = \overline{BP'}$ e $\overline{PC} = \overline{P'A}$. Temos, também, que $P\widehat{B}P' = 60°$. Assim, pela propriedade dos triângulos isósceles o $B\widehat{P}P' = B\widehat{P'}P$, logo $\triangle BPP'$ é equilátero.

Ainda, com P fora do menor arco $\overset{\frown}{BC}$ temos que P' não é colinear com $\overleftrightarrow{AP}$ isto será verificado analisando as possíveis localizações de P.

Se P for exterior ao círculo, $B\widehat{P}C$ será excêntrico exterior, então será menor que um ângulo inscrito de $120°$ que subtenda o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$, conforme observação feita no Teorema 11. Ainda, com $B\widehat{P}C$ excêntrico exterior e na condição da soma $B\widehat{P'}A + B\widehat{P'}P$ ser igual a $A\widehat{P'}P$, logo $A\widehat{P'}P$ será menor que $180°$. Reunindo $B\widehat{P}C$, excêntrico exterior, que é igual ao $B\widehat{P'}A$, e são menores que um ângulo inscrito sob o menor arco $\overset{\frown}{BC}$, com $B\widehat{P'}P = 60°$, temos que a soma $B\widehat{P'}A + B\widehat{P'}P$ será igual ao $A\widehat{P'}P$, que é menor que $180°$, logo, os pontos A, P' e P não são colineares.

Agora, se P estiver no maior arco $\overset{\frown}{BC}$, $B\widehat{P}C$ será ângulo inscrito, este correspondendo a $60°$. Assim, de forma análoga, temos que $B\widehat{P'}A + B\widehat{P'}P$, também, será menor que $180°$.

Por fim, se P estiver no interior do círculo, $B\widehat{P}C$ será um ângulo excêntrico interior, cuja medida, em graus, é igual à metade da soma das medidas dos arcos determinados pelos seus lados. Este, será maior que o ângulo de $120°$ inscrito sob o menor arco $\overset{\frown}{BC}$, consequentemente, a soma $B\widehat{P'}A + B\widehat{P'}P$ será maior que $180°$.

Assim, concluímos que, para P fora do menor arco $\overset{\frown}{BC}$ os pontos P, P' e A não são colineares.

Agora, fazendo uso da Desigualdade Triangular no $\triangle PP'A$, temos que $\overline{AP} < \overline{PP'} + \overline{P'A} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

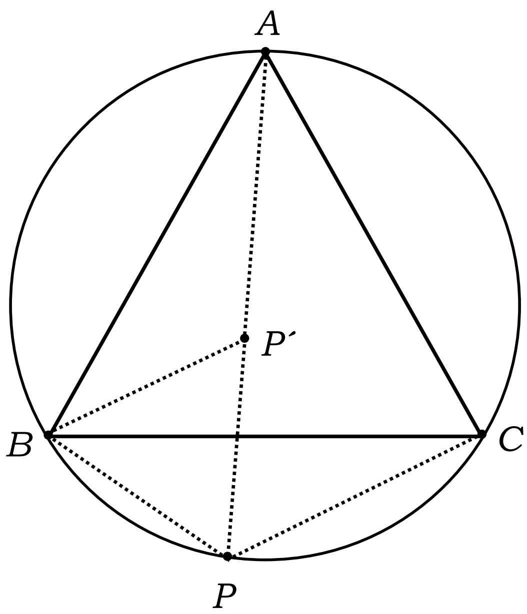

Figura 13: Teorema 12

Mostraremos, agora, que se P pertence ao menor arco $\overset{\frown}{BC}$, então $\overline{AP} = \overline{BP} + \overline{PC}$. Assim, dado P em $\overset{\frown}{BC}$ e girando, de forma análoga, o $\triangle BPC$ de $60°$, em torno de B, obtemos o $\triangle BP'A$ onde P' é um ponto tal que $\overline{BP} = \overline{BP'}$. E, como já foi mostrado, $\triangle BPP'$ é equilátero. Ainda, para P pertencente ao menor arco $\overset{\frown}{BC}$ e com a rotação do triângulo BPC em torno de B, temos que o ponto P' pertence a $\overleftrightarrow{AP}$. Pois, temos $B\widehat{P}C = 120°$, que é ângulo inscrito sob o maior arco $\overset{\frown}{BC}$, de $240°$, consequentemente, no $\triangle BP'A$ o $B\widehat{P'}A = 120°$. Logo, a soma $B\widehat{P'}A + B\widehat{P'}P$ é igual a $180°$, ou seja, P, P' e A são colineares. Portanto, para P pertencente ao menor arco $\overset{\frown}{BC}$, temos $\overline{AP} = \overline{PP'} + \overline{AP'} = \overline{BP} + \overline{PC}$. $\square$

3 Aplicações

Nesta seção, utilizamos os resultados geométricos anteriormente expostos para resolver alguns problemas de otimização.

Problema 1. Um professor sobrevive lecionando em três colégios. Qual é o melhor lugar para ele morar? Procura-se assim um ponto P que minimize a soma das distâncias a três pontos dados A, B e C. [5]

Este problema é conhecido como problema de Fermat ou de Steiner e pode ser estendido para n pontos. Soluções exatas ou aproximadas para este problema são de enorme interesse quando se procura minimizar, por exemplo, o custo de redes telefônicas, rodovias ou redes de distribuição de água e esgoto.

Solução: Para resolvermos o problema, faremos uso do Teorema 12 onde foi mostrado que, para um ponto Q pertencente ao menor arco $\overset{\frown}{YZ}$ do círculo circunscrito ao triângulo equilátero XYZ, a soma $\overline{YQ} + \overline{QZ} = \overline{XQ}$ e $Y\widehat{Q}Z = 120°$. Desse modo, serão analisados dois casos com ângulos que sejam diferentes de 120°.

1° *caso*: Seja $\triangle ABC$ em que todos os seus ângulos internos são menores que 120°, de acordo com a figura 14.

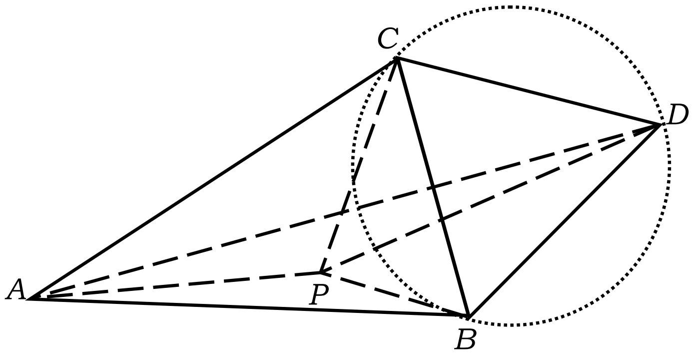

Figura 14: Problema 1

Considerando um ponto D externo ao $\triangle ABC$ de modo que o $\triangle BCD$ seja equilátero, e seja λ a circunferência circunscrita ao $\triangle BCD$.

Se P é um ponto interno ao $\triangle ABC$ temos, pelo Teorema 12, que

$$\overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{PD}.$$

Por outro lado, pela Desigualdade Triangular temos,

$$\overline{PD} + \overline{PA} \geq \overline{DA}.$$

Logo,

$$\overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PA} \geq \overline{PD} + \overline{PA} \geq \overline{DA},$$

para todo P no interior do $\triangle ABC$. Em particular, se P estiver na interseção de AD com o menor arco $\overset{\frown}{BC}$, pelo Teorema 12, valem as igualdades nos dois casos, logo

$$\overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PA} = \overline{DA}$$

é o valor **mínimo** dessa soma.

2° *caso*: Consideraremos, agora, que o $\triangle ABC$ tenha um ângulo maior que $120°$, como por exemplo o $B\widehat{A}C$, mostrado na figura 15.

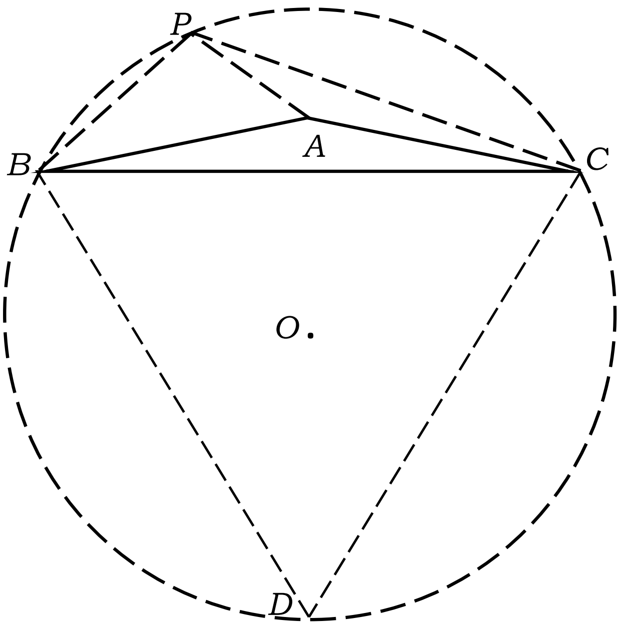

Figura 15: Problema 1

Neste caso, a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ será mínima quando $P = A$, e tem-se $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

No próximo caso temos um dos interessantes problemas propostos por Regiomontanus, em 1471 e que, segundo [8], “apesar de o problema poder ser resolvido com as ferramentas do Cálculo Diferencial, existe uma solução geométrica simples e engenhosa”, como veremos.

Problema 2. Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p. Um observador de altura m $(m < p)$ enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α, que varia de acordo com a distância d entre o observador e a base do pedestal, conforme figura 16. Determinar a distância d para que o ângulo de visão seja o maior possível.

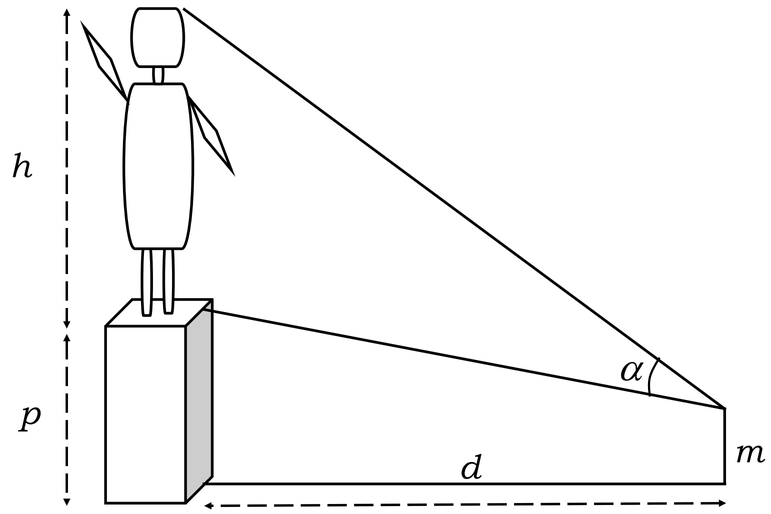

Figura 16: Problema 2

Solução: Marquemos os pontos A, B e C, representando respectivamente o topo da estátua, o pé da estátua e os olhos do observador.

Em seguida tracemos uma reta r que passa por C e é paralela à linha do solo. Tracemos então uma circunferência λ, com centro na mediatriz do segmento AB que tangencia a reta r. Temos também que C_t é o ponto de tangência com a circunferência λ.

Se C percorrer livremente a reta r, qualquer possibilidade para o ângulo de visão α será dada por uma certa localização de C em r. Provaremos que α assume o maior valor possível quando $C = C_t$.

Para isso é suficiente mostrar que a medida do ângulo $A\widehat{C_t}B$ é maior, que a medida para qualquer outra posição de C e diferente C_t.

Seja D o ponto de encontro da reta AC com a circunferência λ e também o ponto E que é o encontro da reta BC. Seja também, $\beta = A\widehat{C_t}B$ (inscrito no maior $\overset{\frown}{AB}$).

Dessa forma temos, pelo teorema 11 e sua observação, que α é um ângulo excêntrico

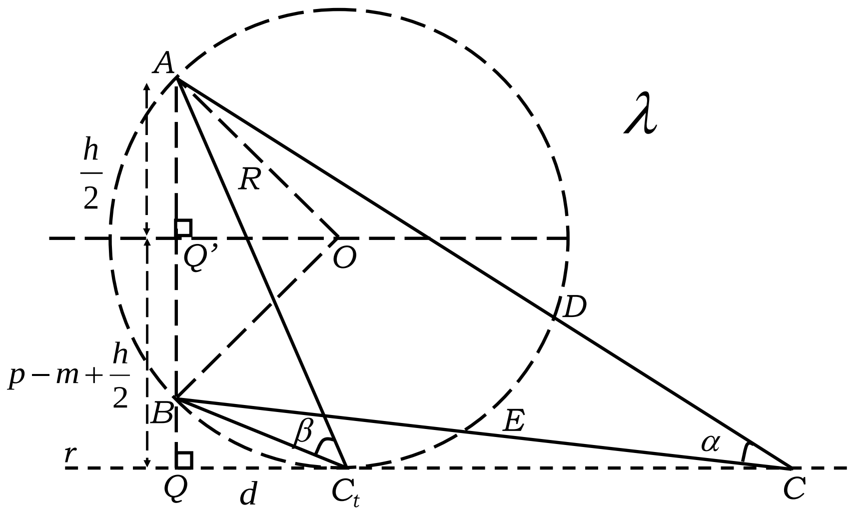

Figura 17: Problema 2

externo, logo $\alpha < \beta$. Mostrando assim que α atinge valor máximo no ponto C_t que tangencia λ.

Determinaremos, agora, a distância d entre o observador e a base do pedestal, para que o ângulo β seja atingido. Se Q é o ponto de interseção da reta que passa por AB com r, sendo as retas r e AB, respectivamente, tangente e secante a λ, de raio R. Nessa condição, temos pelo Teorema de Pitágoras, para o $\triangle AOQ'$ onde Q' é ponto médio do segmento AB temos

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 = \left(p - m + \frac{h}{2}\right)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(p - m + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \left(p - m + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(p - m + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \\ &= (p - m + h) \cdot (p - m). \end{aligned}$$

O problema a seguir apresenta uma variação do exercício anterior, para o caso em que a linha onde o observador deve ser posicionado e o objeto a ser visto não necessariamente estão em ângulo reto.

Problema 3. A figura, a seguir, apresenta parte da planta baixa da sala de espera de um consultório.

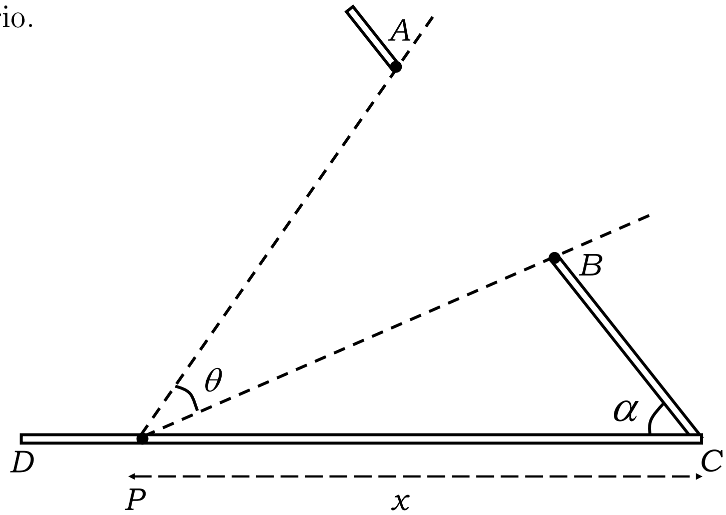

Figura 18: Problema 3

As paredes representadas por DC e CB formam um ângulo agudo α e entre os pontos B e A, há uma porta aberta que dá acesso a um jardim. Deseja-se colocar uma poltrona encostada à parede DC em um ponto P de modo que o ângulo $\theta = A\widehat{P}B$, de visão para o jardim, seja o maior possível. Nestas condições, determine a medida de $x = \overline{PC}$ que maximiza θ.

Solução: A resolução é semelhante à do Problema 2. Então, para isso consideremos uma circunferência λ, que passa pelos pontos A e B e tangencia o segmento CD em P', conforme mostra figura 19.

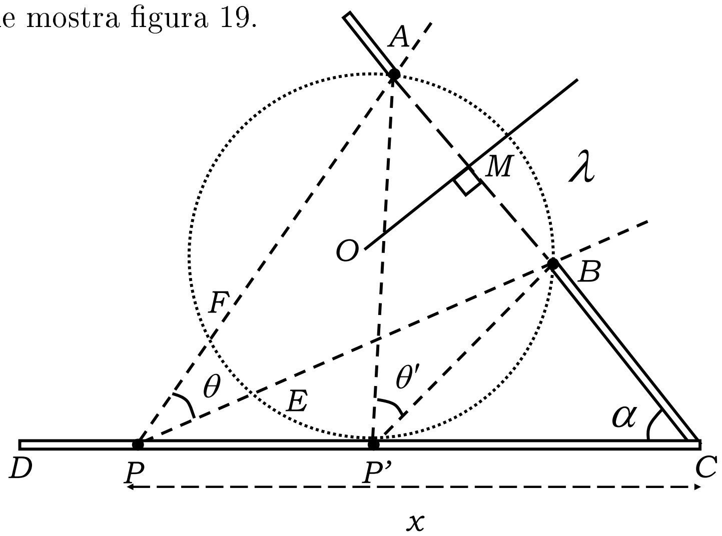

Figura 19: Problema 3

Por construção temos que θ é um ângulo excêntrico exterior à circunferência λ. Dessa forma, o ângulo θ será máximo, em (θ'), no ponto de tangência P' com λ.

Resta-nos, agora, determinar a medida de x, para isso, analisamos os triângulos APC e BPC, considerando $P = P'$. Temos que, os ângulos $P\widehat{A}C$ e $B\widehat{P}C$ estão inscritos sob o maior arco $\overset{\frown}{BP}$, logo são congruentes. Desse modo, como o outro ângulo, α, é comum aos dois triângulos, logo o $\triangle APC$ é semelhante ao $\triangle BPC$. Assim,

$$\frac{x}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB} + \overline{AB}}{x} \Rightarrow x^2 = \overline{CB} \cdot (\overline{CB} + \overline{BA}) .$$

Problema 4. João quer aproveitar um canto, em ângulo reto, do muro em seu terreno para fechar um galinheiro usando 10 metros de tela e uma estaca como indicado na figura 20. Determine a posição da estaca (sua distância até cada um dos muros, por exemplo) e dos pontos de fixação da tela no muro para que a área cercada seja a maior possível. (Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás - OMEG, 2010)

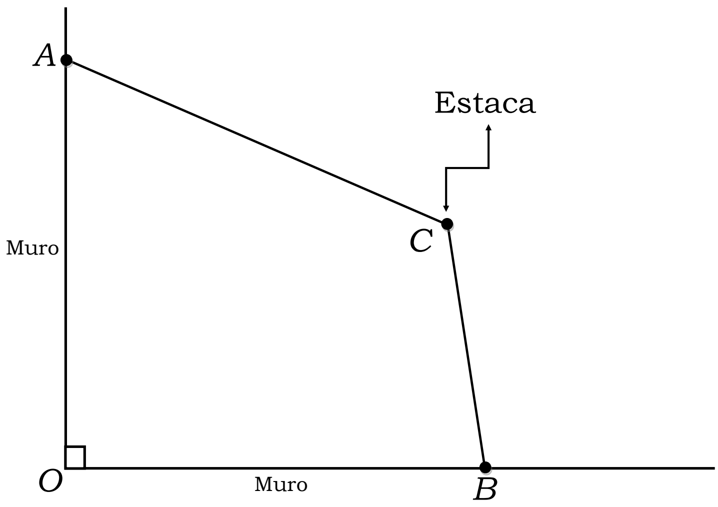

Figura 20: Problema 4

Solução: Para isso, consideremos A e B os pontos de fixação da tela no muro, O o canto, e C a estaca, conforme é apresentada na figura 20. Com isso, queremos a maior área possível do quadrilátero $ACBO$. Então, fixando a medida do segmento $\overline{AB}$ e analisando os triângulos ABC e AOB temos que:

ii) A área do $\triangle ABC$ não depende do vértice O. Dessa forma, essa área será máxima quando o vértice C estiver sobre a mediatriz de AB. Nestas condições, o $\triangle ABC$ é isósceles onde $\overline{AB} = \overline{BC} = 5m$, como mostra a Proposição 6.

ii) A área do $\triangle AOB$ também não depende do vértice C. Assim, temos pela Proposição 5, que essa área será máxima quando $\overline{AO} = \overline{OB}$, pois a medida de AB é fixa e, oposto a este lado, temos o ângulo reto $A\widehat{O}B$.

Assim, para uma configuração que maximiza a área do galinheiro, temos $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{AC} = \overline{CB}$. Dessa forma, teremos os vértices O e C sobre a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. A congruência entre os triângulos AOC e COB, leva à conclusão que, OC é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$ e, portanto, $A\widehat{O}C = C\widehat{O}B = 45°$.

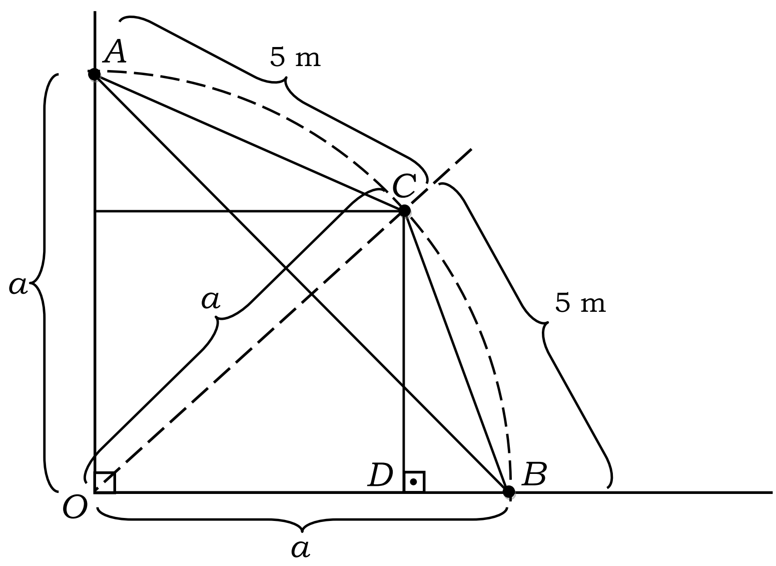

Figura 21: Problema 4

Resta-nos, agora, determinar a distância do vértice O aos pontos A e B. Para isso, temos que o lado $\overline{BC} = 5\text{m}$ é oposto ao ângulo $C\widehat{O}B = 45°$ e, pela proposição 5, a área do $\triangle COB$ será máxima se $\overline{OC} = \overline{OB}$. De maneira análoga, conclui-se que a área do triângulo AOB é máxima quando $\overline{OA} = \overline{OB}$, ou seja, o quadrilátero $OACB$ é um quarto de um octógono regular com lados medindo 5m.

Dessa forma, considerando $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OA} = a$, e observando que $\overline{OC}$ é diagonal de um quadrado com lado igual a $a\sqrt{2}/2$ temos, pelo Teorema de Pitágoras, no $\triangle CBD$ que

$$5^2 = \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

E portanto,

$$a = \frac{5}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \ .$$

Problema 5. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura 22 esquematiza a posição das indústrias, bem como a localização de uma tubulação de água retilínea l, já existente. Desse modo, determine em que ponto da tubulação deve ser instalado um reservatório, P, de modo que a ligação partindo da indústria A passando por P e chegando à indústria B seja a menor possível. [7]

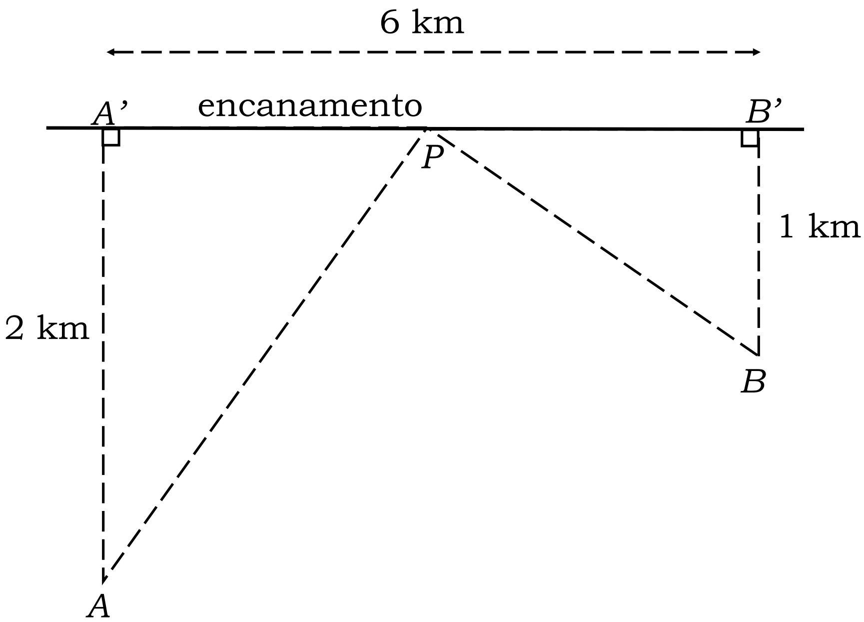

Figura 22: Problema 5

Solução: Considere os pontos A' e B' pertencentes à tubulação de modo que AA' e BB' sejam perpendiculares à l. Dessa forma temos, pela Proposição 3, que o ponto $P \in l$ que minimiza a soma $\overline{AP} + \overline{PB}$ é tal que $A\widehat{P}A' = B\widehat{P}B'$. Assim, temos que o $\triangle APA'$ é semelhante ao triângulo $\triangle BPB'$, pois ambos são triângulos retângulos e o ângulo $A\widehat{P}A' = B\widehat{P}B'$.

Assim, denotando o segmento $\overline{PA'} = x$ e o segmento $\overline{PB'} = 6 - x$, teremos

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}}.$$

Logo,

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{6 - x} \Rightarrow x = 4.$$

Assim, o ponto P situa-se a uma distância de 4km de A' e 2km de B'.

Problema 6. Considere uma reta r no **espaço** e dois pontos A e B que não estão no mesmo plano com r. Determine um ponto $X \in r$, tal que $\overline{AX} + \overline{XB}$ tenha comprimento mínimo. [1]

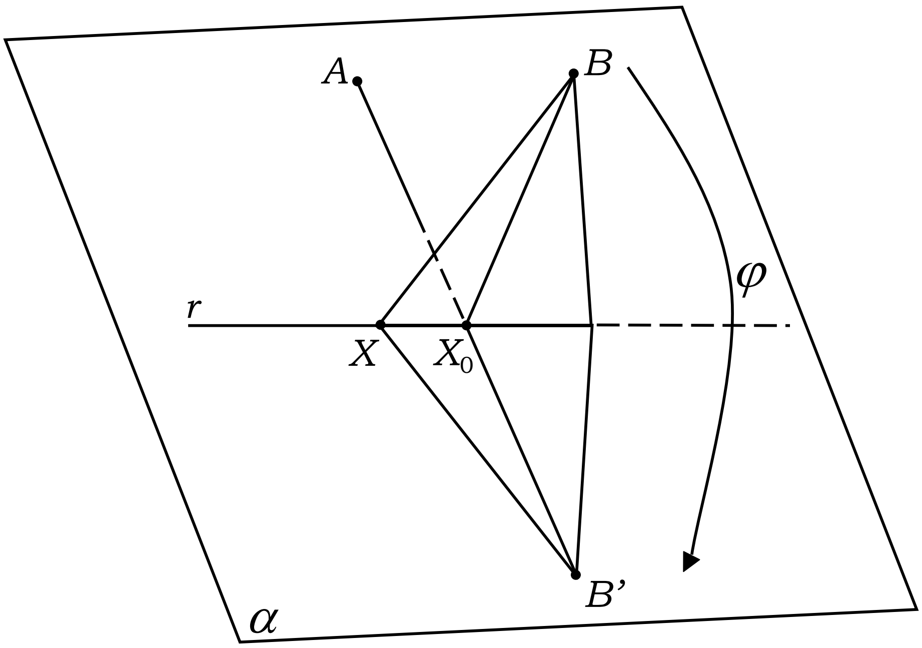

Figura 23: Problema 6

Solução: Em conformidade com o problema anterior, onde utilizou-se a simetria na solução, faremos uso de uma ideia semelhante.

Seja α o plano que contém a reta r e o ponto A. Considere uma rotação φ, em torno da reta r, que envie o ponto B para um ponto B' no plano α de tal modo que A e B' estejam em diferentes semiplanos com relação a r.

Seja X_0 um ponto de interseção da reta r com o segmento AB'. Desse modo, para qualquer ponto $X \neq X_0$ em r, teremos pela desigualdade triangular que

$$\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AX} + \overline{XB'} \geq \overline{AB'} = \overline{AX_0} + \overline{X_0B'} = \overline{AX_0} + \overline{X_0B}.$$

Onde a igualdade será precisamente quando $X = X_0$. Assim, o ponto X_0 é a única solução do problema.

Problema 7. Dados dois pontos A e B, em um mesmo semiplano determinado por uma reta r, não paralela a AB, encontrar o ponto $P \in r$ tal que $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ seja **máximo**. [10]

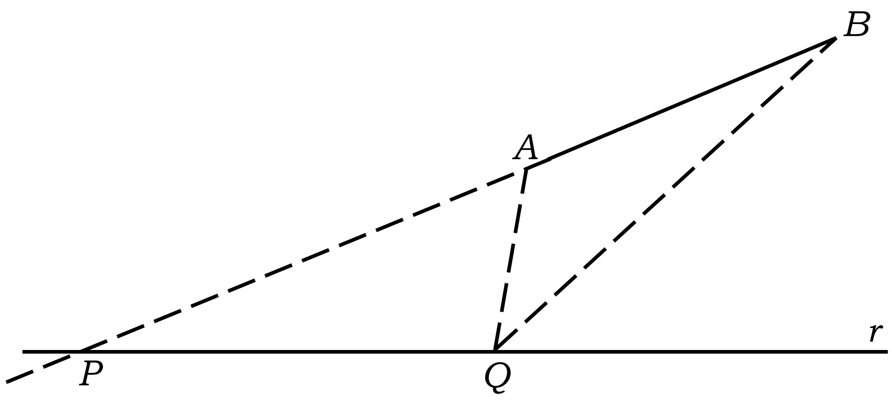

Figura 24: Problema 7

Solução: Considere Q pertencente a r. Pela desigualdade triangular temos que

$$\overline{QB} \leq \overline{QA} + \overline{AB},$$

então,

$$\overline{QB} - \overline{QA} \leq \overline{AB}.$$

Analogamente,

$$\overline{QA} \leq \overline{QB} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \geq \overline{QA} - \overline{QB}.$$

Nas condições apresentadas acima, temos

$$|\overline{QA} - \overline{QB}| \leq \overline{AB}.$$

Por outro lado, temos que existe um $\{P\} = r \cap \overleftrightarrow{AB}$ que, sendo colinear com AB, satisfaz

$$\overline{PB} - \overline{PA} = \overline{AB}.$$

ou $\overline{AB} = \overline{PA} - \overline{PB}$ (se o ponto B for o ponto mais próximo da reta r).

Portanto, P é o ponto tal que $|\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB}$.

Os dois problemas a seguir são clássicos, envolvendo técnicas geométricas para otimização e parte das soluções estão em [6].

Problema 8. Dentre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

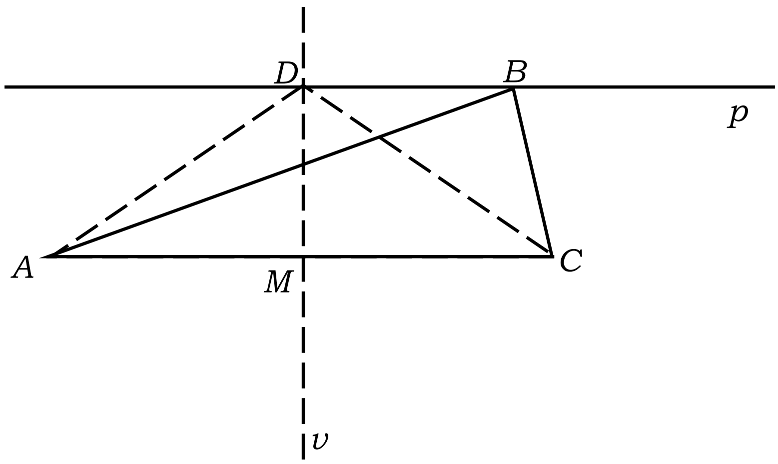

Figura 25: Problema 8

Solução: Considere um $\triangle ABC$ em que dois dos lados, digamos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, tenham comprimentos diferentes. Desse modo, temos pela proposição 4 que é possível reduzir seu perímetro, mantendo a área fixa, como indica a figura 25. Logo, o perímetro do triângulo ABC não é mínimo. Desse modo, o triângulo de perímetro mínimo deve ter todos os lados iguais, ou seja, deve ser equilátero.

Problema 9. Dentre todos os polígonos de $\boldsymbol{n}$ lados e de mesma área, qual deles tem o menor perímetro?

Solução: A resposta para o problema é o polígono regular, ou seja, é aquele que tem todos os lados de mesmo comprimento e todos os ângulos internos, em graus, iguais. Assim;

i) Suponha, por contradição, que o n-polígono $\wp$ que tem o menor perímetro, possui dois lados, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de comprimentos diferentes. Seja p a reta paralela a

AC passando por B, de acordo com a figura 26.

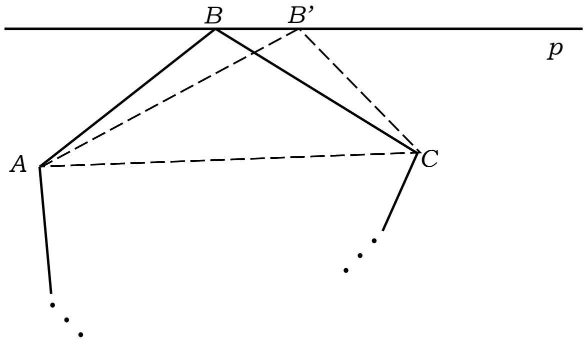

Figura 26: Problema 9

De acordo com a Proposição 3, existe um ponto B' sobre p tal que $\overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Logo, o polígono obtido substituindo-se os lados AB e BC por AB' e $B'C$ tem a mesma área do polígono original $\wp$, mas um perímetro menor. Logo, o polígono $\wp$ deve ser equilátero.

ii) Agora, mostrando que $\wp$ é equiângulo, consideremos três lados consecutivos AB, BC e CD, que, já sabemos, têm todos o mesmo comprimento. E suponha, que os ângulos $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}D$ sejam diferentes. Para fixar as ideias suponha que o primeiro ângulo (de medida α) é maior que o segundo (de medida $\overline{\alpha}$), de acordo com a figura 27.

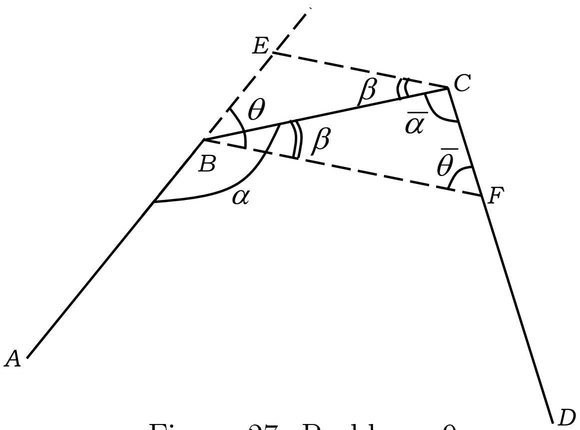

Figura 27: Problema 9

Escolhemos, agora, o ponto F sobre CD de modo que o ângulo $C\widehat{B}F$ (de medida β) seja tal que $2\beta < \alpha - \overline{\alpha}$. Considere E um ponto sobre o prolongamento de AB de modo que EC seja paralelo a BF.

Sejam $\theta = E\widehat{B}F$, $\overline{\theta} = B\widehat{F}C$. Temos, então, $\alpha + \theta - \beta = 180°$ e $\overline{\alpha} + \overline{\theta} + \beta = 180°$. Assim $\overline{\theta} - \theta = \alpha - \overline{\alpha} - 2\beta > 0$, conforme figura 27, o que implica em $\overline{\theta} > \theta$. Por meio desta desigualdade mostraremos no quadrilátero $BECF$ que $\overline{BC} + \overline{CF} > \overline{BE} + \overline{EF}$, ou seja, é possível reduzir o perímetro do polígono mantendo sua área.

Para isto, se considerarmos $\overline{\theta} = \theta$, AB e DC concorrerão a um ponto que notaremos por W localizado sobre a mediatriz de BF. Isso acontece porque no cruzamento de AB e DC será formado um triângulo de vértices WBF cujos ângulos da base são iguais, logo este será isósceles. Por outro lado, sendo $\overline{\theta} > \theta$, a interseção de AB e DC será um ponto, que denotaremos por K, localizado no semiplano oposto ao de AB relativo à mediatriz de BF, pois, no triângulo KBF tem-se $\overline{\theta} > \theta$, logo $BK > KF$, conforme Proposição 1.

Agora considere BF, sua mediatriz e uma reta paralela a BF, como a que contêm os pontos E e C, cruzando a mediatriz de BF no ponto X. Este é o ponto que minimiza a soma $\overline{BP} + \overline{PF}$ dentre os pontos P na reta EC, conforme Proposição 3. Desse modo, com $\overline{\theta} > \theta$ as possíveis posições para E e C, em relação a X são: de E e C no semiplano oposto ao de AB, relativo à mediatriz de BF, com C mais afastado de X do que E, ou de E igual a X com C no semiplano oposto ao de AB, ou de E e C em semiplanos opostos relativo à mediatriz de BF, ainda, com C mais afastado do X do que E.

Para justificar a condição do ponto C estar mais afastado de X, com E e C em semiplanos opostos, considere sobre a reta EC o simétrico de C relativo à mediatriz de BF, denotado por C'. Assim, tem-se $C'\widehat{B}F = \overline{\theta} > \theta = E\widehat{B}F$, logo o ponto E está entre C' e X. Por outro lado, considere que E e C estejam posicionados no semiplano oposto ao de AB. Neste caso, tem-se E e C pertencentes aos segmentos XE e XC, respectivamente, logo o segmento XE está contido no segmento XC, pois, $\overline{XC} = \overline{XE} + \overline{EC}$ e $\overline{\theta} > \theta$, relativo à mediatriz de BF. Daí, conlui-se que o ponto C está mais afastado de X do que E.

Ainda resta mostrar que, à medida que P se afasta de X temos que a soma $\overline{BX} + \overline{XF}$ será menor que $\overline{BP} + \overline{PF}$. Pois, se considerarmos um ponto Q sobre a reta EC, de modo que P esteja entre X e Q, temos que a soma $\overline{BP} + \overline{PF}$ será menor que a soma $\overline{BQ} + \overline{QF}$, porque P está mais próximo de X do que Q. Assim, a desigualdade $\overline{BP} + \overline{PF} < \overline{BQ} + \overline{QF}$, também será válida se X e P forem iguais ou se o ponto X estiver entre P e Q, com P mais próximo de X do que Q.

Assim, considere inicialmente, que P e Q estejam no mesmo semiplano oposto ao de AB relativo à mediatriz de BF, com Q mais afastado de X do que P, considere também o simétrico de B, denotado por B', relativo à reta de EC, dessa forma, P será um ponto do interior do triângulo $B'QF$, assim, o problema se reduz a $\overline{B'P}+\overline{PF} < \overline{B'Q}+\overline{QF}$, ou seja, $\overline{BP} + \overline{PF} < \overline{BQ} + \overline{QF}$, pois, $\overline{B'Q}=\overline{BQ}$ e $\overline{B'P}=\overline{BP}$.

Por outro lado, considere que P e X sejam iguais e o ponto Q no mesmo semiplano oposto ao de AB, assim, do triângulo $B'QF$ temos $\overline{B'F} = \overline{B'X} + \overline{XF} = \overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{B'Q} + \overline{QF}$, ou seja, $\overline{BP} + \overline{PF} < \overline{BQ} + \overline{QF}$. Agora, considere que P e Q estejam em semiplanos opostos relativos à mediatriz de BF, considere também o semétrico de Q, denotado por Q' relativo à mesma mediatriz. Nesta condição, P estará entre Q' e X e será um ponto do interior do triângulo $B'Q'F$, isto, porque $Q\widehat{F}B = Q'\widehat{B}F > P\widehat{B}F$, logo $\overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{B'Q'} + \overline{Q'F}$ implicando em $\overline{BP} + \overline{PF} < \overline{BQ} + \overline{QF}$, pois, $\overline{Q'F} = \overline{BQ}$ e $\overline{B'Q'}=\overline{Q'B}=\overline{QF}$.

Resta mostrar que, se P é um ponto do interior do triângulo $B'QF$, logo $\overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{B'Q} + \overline{QF}$. Para isto, prolongaremos $B'P$ até intersectar o lado QF no ponto D', e do triângulo FPD' temos $\overline{FP} < \overline{PD'} + \overline{D'F}$ que implica em $\overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{PD'} + \overline{D'F} + \overline{B'P} = \overline{B'D'} + \overline{D'F}$, ou seja, $\overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{B'D'} + \overline{D'F}$. Agora, do trângulo $B'QD'$ temos $\overline{B'D'} < \overline{D'Q} + \overline{QB'}$ isso implica em $\overline{B'D'} + \overline{D'F} < \overline{D'Q} + \overline{QB'} + \overline{D'F} = \overline{B'Q} + \overline{QF}$, ou seja, $\overline{B'D'} + \overline{D'F} < \overline{B'Q} + \overline{QF}$. Consequentemente, $\overline{B'P} + \overline{PF} < \overline{B'Q} + \overline{QF}$. Assim mostrando que a medida que o ponto do Q afasta-se do ponto X e do ponto P, a soma $\overline{BP} + \overline{PF}$ será menor que $\overline{BQ} + \overline{QF}$. Assim, conclui-se que à medida que o ponto C afasta-se do ponto X e do E, a soma $\overline{BC} + \overline{CF}$ será maior que $\overline{BE} + \overline{EF}$ porque $\overline{\theta} > \theta$.

Logo, substituindo a parte $ABCD$ do polígono $\wp$ por $AEFD$, obtemos um outro polígono de mesma área e perímetro menor que o de $\wp$, o que é uma contradição. Pois, dentre todos os polígonos de n lados e mesma área, o polígono regular é o que possui menor perímetro.

Problema 10. Seja P um ponto no interior de um triângulo $\triangle ABC$. Mostre que

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}. \text{ [10]}$$

Solução: Dividiremos a resolução em duas partes e faremos uso da desigualdade triangular.

i) Primeiro, mostraremos que a soma das distâncias do ponto P aos vértices do triângulo ABC é maior que o seu semiperímetro.

Temos para os $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ e $\triangle ACP$ que

$$\overline{AB} \leq \overline{AP} + \overline{PB}, \quad \overline{BC} \leq \overline{PB} + \overline{PC} \quad \text{e} \quad \overline{AC} \leq \overline{PC} + \overline{AP}.$$

Somando as três expressões acima, temos

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \leq 2(\overline{AP} + \overline{PC} + \overline{PB})$$

Logo,

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} \leq \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{PB}\ .$$

ii) Nos resta mostrar que, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

Para isso, prolongamos o segmento $\overline{BP}$ até intersectar o lado AC em um ponto D. Desse modo, temos do $\triangle APD$ que

$$\overline{AP} \leq \overline{PD} + \overline{DA}$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} \leq \overline{PD} + \overline{DA} + \overline{BP} = \overline{BD} + \overline{DA}.$$

E do $\triangle BCD$ temos que

$$\overline{BD} \leq \overline{DC} + \overline{CB}$$

$$\overline{BD} + \overline{DA} \leq \overline{DC} + \overline{DA} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Assim, $\overline{AP} + \overline{BP} \leq \overline{BD} + \overline{DA} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$ logo

$$\overline{AP} + \overline{BP} \leq \overline{AC} + \overline{CB}. \tag{5}$$

Então, na condição apresentada temos de forma análoga que

$$\overline{AP} + \overline{CP} \leq \overline{AB} + \overline{CB} \quad \text{e} \tag{6}$$

$$\overline{BP} + \overline{CP} \leq \overline{AB} + \overline{AC}. \tag{7}$$

Somando as expressões dadas por (5), (6) e (7), temos

$$2(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}) \leq 2(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}).$$

Então,

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \leq \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}.$$

Portanto, como P é um ponto interior do $\triangle ABC$

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} < \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\ .$$

Apresentaremos mais um problema clássico, conhecido como problema do triângulo de Schwarz ou de Fejér. E parte da solução está em Fejér. [1]

Problema 11. Inscreva um triângulo $\triangle PQR$ de perímetro mínimo, em um dado triângulo ABC acutângulo. [1]

Solução: Para solução do exercício, consideremos que um triângulo é inscrito em outro se, cada lado do triângulo maior contiver um dos vértices do triângulo inscrito.

Seja um $\triangle ABC$ de ângulos agudos e escolhendo de modo arbitrário um ponto $P \in AB$. Desse modo, refletindo P em relação ao lado $\overline{BC}$ obtemos o ponto P', analogamente para o lado $\overline{AC}$ obtemos o ponto P''.

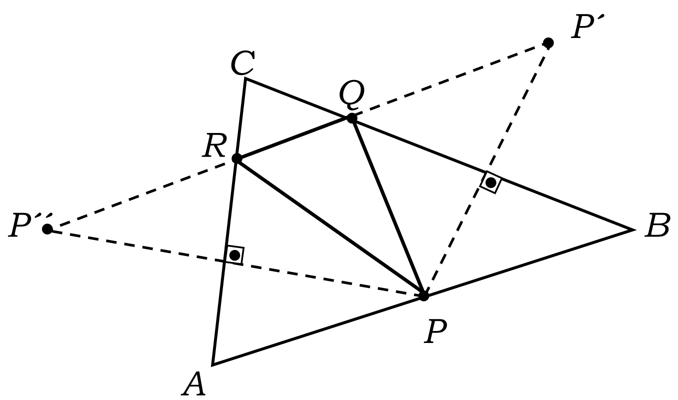

Figura 28: Problema 11

Como consequência da construção, temos $\overline{CP'} = \overline{CP} = \overline{CP''}$ que são os lados dos triângulos isóceles $P'CP$ e PCP''. Temos, também, que $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são as mediatrizes dos lados PP' e PP''. Assim, considerando os ângulos $B\widehat{C}A = \alpha$, $P\widehat{C}B = P'\widehat{C}B = \beta$ e $P\widehat{C}A = P''\widehat{C}A = \theta$, temos que $P'\widehat{C}P'' = 2(\beta + \theta) = 2\alpha$. Então, $2\alpha < 180°$, uma vez que $\alpha < 90°$.

Então, por meio do argumento apresentado, temos que a reta determinada pelos pontos P' e P'' intersecta os lados BC e AC em pontos que denotaremos por Q e R. Assim, formamos o $\triangle PQR$, cujo perímetro é igual a $\overline{P'P''} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$.

Agora, precisamos mostrar que o $\triangle PQR$ tem perímetro mínimo dentre todos os triângulos inscritos em ABC com vértice em P. Dessa forma, tomando um ponto $X \neq R$ no lado AC e um ponto $Y \neq Q$ no lado BC, temos;

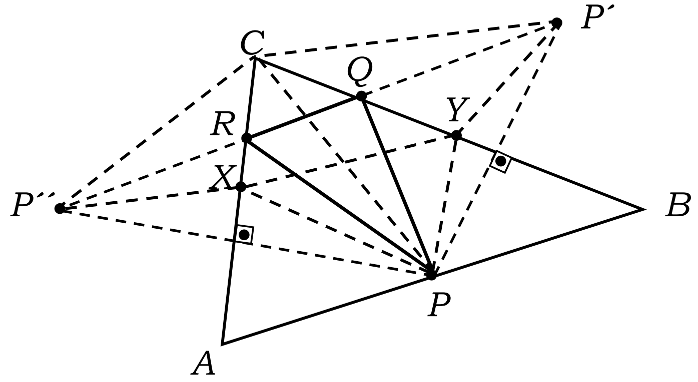

Figura 29: Problema 11

No triângulo PQR,

$$2p(\triangle PQR) = \overline{P''R} + \overline{RQ} + \overline{QP'} = \overline{P''P'}.$$

E no triângulo PYX,

$$2p(\triangle PYX) = \overline{P''X} + \overline{XY} + \overline{YP'} > \overline{P''P'}.$$

Nessas condições, temos que $2p(\triangle PQR) < 2p(\triangle PXY)$. Onde concluímos que $\triangle PQR$ é o triângulo de menor perímetro, dentre todos os inscritos em $\triangle ABC$ com vértice em P.

Resta determinar onde posicionar P, no segmento AB, de maneira que $\overline{P'P''}$ seja mínimo. Para isso, construimos uma circunferência λ de centro em C e raio medindo $\overline{CP}$.

Desse modo, temos que o segmento $P'P''$ é uma corda de λ e também a base do triângulo isósceles $\triangle P'CP''$ com ângulo $P'\widehat{C}P'' = 2A\widehat{C}B$. Como este ângulo está fixo, a corda $\overline{P'P''}$ terá comprimento mínimo quando o raio da circunferência λ for mínimo, o que ocorre quando λ for tangente a AB. Portanto, P localiza-se no pé da altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado AB.

Por meio de um argumento análogo, é fácil mostrar que os pontos Q e R são os pés das alturas relativas aos lados BC e AC, respectivamente.

Para mostrar isto, podemos refletir, por exemplo, o ponto R em relação aos lados BC e BA obtendo os pontos R' e R'', respectivamente. Desse modo, podemos

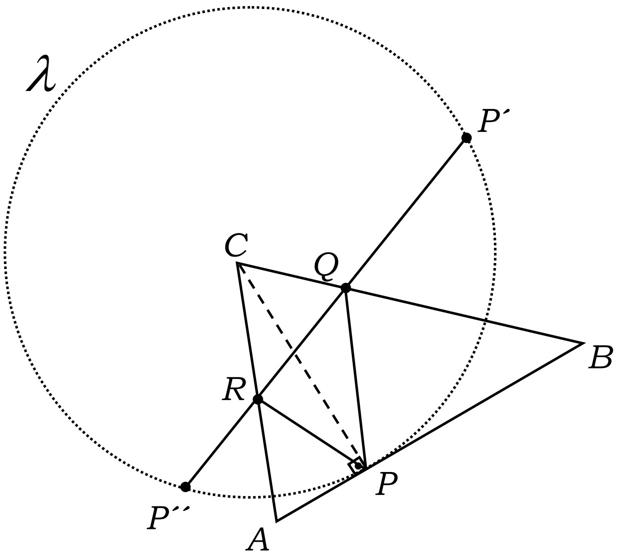

Figura 30: Problema 11

considerar o $R'R''$ como uma corda de uma circunferência π com centro em B e raio medindo $\overline{BR}$.

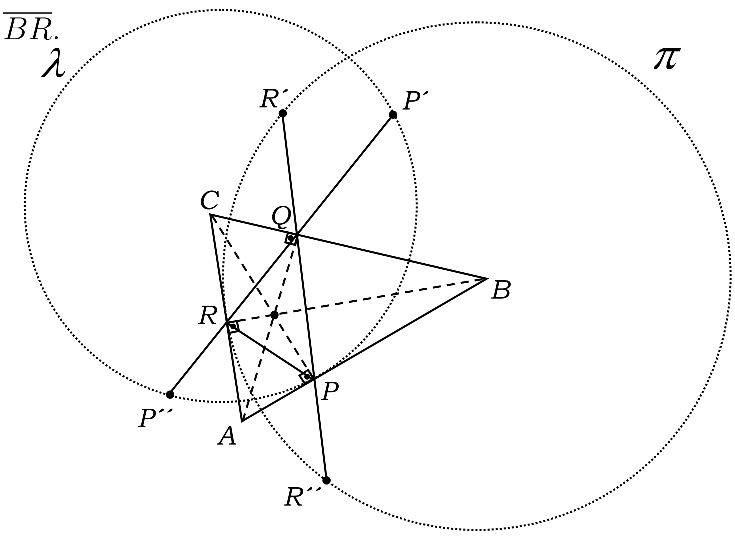

Figura 31: Problema 11

Assim, a corda $\overline{R'R''}$ terá comprimento mínimo quando o raio da circunferência π for mínimo, o que ocorre quando π, também, for tangente a AC. Logo, o ponto R é o pé da altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado AC. Temos de forma análoga, que o ponto Q também é o pé da altura relativa ao lado BC.

Portanto, o triângulo que satisfaz as condições exigidas pelo problema é conhecido como triângulo *órtico* (triângulo cujos vértices são os pés das alturas) do triângulo ABC dado.

4 Exercícios Propostos

Esta seção tem como objetivo sugerir alguns problemas adicionais que podem ser estudados no contexto do ensino médio.

1 - Dado um triângulo ABC, escolha $MN \| AB$ de modo que a área do triângulo MNP (P sobre AB) seja máxima.

2 - Dado o triângulo ABC e P sobre AB fixado. Escolher pontos M e N sobre BC e AC, respectivamente, de modo que a área do triângulo PMN seja máxima.

3 - Considere as retas r e l como as margens paralelas de um rio. Sejam os pontos A, B e C cidades em lados opostos desse rio (A e B do lado da margem r, e C do lado da margem l). Deseja-se construir uma cidade T e uma ponte MN, perpendicular às margens do rio, de forma que a soma $\overline{AT} + \overline{BT} + \overline{TM} + \overline{MN} + \overline{NC}$ seja a menor possível.

4 - Seja A um ponto sobre o círculo de centro O e raio a e seja P um ponto sobre a extensão de OA através de A. Uma linha secante a P intercepta o círculo nos pontos Q e Q'. Dada uma posição fixa de P determinar a área máxima do triângulo AQQ'.

5 - Dada uma circunferência de raio R, achar o triângulo de área máxima inscrito na circunferência com uma das alturas igual a h, fixa.

6 - Dada uma semi-circunferência encontrar o trapézio de área máxima com vértices nesta circunferência.

5 Considerações Finais

Entendendo por otimização o melhoramento ou aprimoramento de determinada circunstância, podemos perceber ao nosso redor várias situações que buscam estes aspectos. Por exemplo: homens de negócios que procuram maximizar lucros e minimizar custos; um dado engenheiro que ao projetar um novo automóvel deseja maximizar a eficiência; ou, um piloto de linha aérea que tenta minimizar o tempo de voo e o consumo de combustível, entre outros. Dessa forma, temos que a otimização para estes profissionais pode ser importante para alcançarem situações mais proveitosas no desenvolvimento de seu trabalho.

Neste sentido, sendo a escola um dos ambientes de aprendizagem, nada melhor do que apresentar aos alunos uma forma diferente e desafiadora para solucionar problemas de maximização e minimização.

Conforme o estudo, observou-se que trabalhar métodos geométricos em problemas de máximos e mínimos é mais uma ferramenta interessante para o processo de ensino-aprendizagem, pois os alunos serão expostos a propriedades e conceitos que solucionarão alguns problemas propostos pelo professor. Isso também possibilitará uma maneira mais estimulante de ensinar Matemática.

Dentre os métodos geométricos para minimizar distâncias e maximizar áreas foram utilizadas ferramentas como a desigualdade triangular, o problema de Heron (aqui apresentado como proposição), as propriedades dos trângulos isósceles e a relação entre ângulos inscritos e excêntricos exteriores nas circunferências que auxiliaram nas soluções dos problemas.

Desse modo, este trabalho buscou apresentar, de uma maneira acessível no contexto do ensino médio, a possibilidade de resolver problemas de máximos e mínimos sem o uso das ferramentas do cálculo diferencial e utilizando apenas resultados geométricos elementares.

Dessa forma, esperamos que as pessoas que tiverem acesso a este trabalho possam se encantar com a beleza da geometria e perceber que apenas com argumentos básicos, é possível resolver problemas relativamente sofisticados. Utilizando somente o cálculo algébrico tais problemas tornam-se extremamente complicados mas, com o uso da geometria a solução se torna simples e elegante.

A abordagem sobre máximos e mínimos não se finda, porém, nas propostas aqui relatadas, há a possibilidade de continuar este trabalho e em especial fazer uma abordagem dos problemas de máximos e mínimos em geometria espacial.

Referências

[1] ANDEESCU, Titu; MUSHKAROV, Oleg; STOYANOV, Luchezar. *Geometric Problems on Maxima and Minima.* Boston: Birkahauser, 2006.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* 4 ed. Rio de Janeiro, 2003. (Coleção Professor de Matemática SBM)

[3] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

[4] COSTA, Deise Maria Bertholdi et al. *Elementos de Geometria*: Geometria Plana e Espacial. 3 ed. Curitiba: UFPR, 2012.

[5] COSTA, Sueli; SEBASTIANI, Eduardo. *Onde morar? O problema de minimizar redes de comunicação. Revista do professor de Matemática.* n.16, s/d, p.41-46.

[6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana. Matemática Universitária*, Instituto de Matemática, UNICAMP. N.9/10, p.69-108, 10.dez.1989.

[7] FLEMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mírian Buss. *Cálculo A*: *funções, limites, derivação, integração.* São Paulo: Editora Makron Books, 1992.

[8] MELLO, José Luiz Pastore. *Trigonometria e um antigo problema de otimização. Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, N.52, p.29-32, 2003.

[9] MUSHKAROV, Oleg. *Expect to be surprised by what you can do with mathematics.* s/d, p.43-44.

[10] PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. *Geometria I.* 2 ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

[11] VIRGÍLIO. *Eneida.* São Paulo: Círculo do Livro Ltda, 1994.