UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Silvio Henrique Zanardi

Sequências de Números Reais:
Uma Abordagem no Ensino Médio

São José do Rio Preto
2014

Silvio Henrique Zanardi

Sequências de Números Reais:

Uma Abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz.

São José do Rio Preto
2014

Zanardi, Silvio Henrique.
Sequências de números reais : uma abordagem no ensino médio / Silvio Henrique Zanardi. -- São José do Rio Preto, 2014
57 f. : il., gráfs.

Orientador: German Jesus Lozada Cruz
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Cálculo - Estudo e ensino. 3. Números reais. 4. Séries geométricas. 5. Matemática - Metodologia. I. Lozada Cruz, German Jesus. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 517(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Silvio Henrique Zanardi

Sequências de Números Reais:

Uma Abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz.
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Karina Schiabel
UFSCAR – São Carlos

Prof^{a}. Dr^{a}. Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
27 de Novembro de 2014

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível."

Charles Chaplin.

RESUMO

O presente trabalho é uma proposta didática para desenvolver habilidades e competências matemáticas sobre sequências de números reais para o Ensino Médio, conciliando teoria e prática.

Palavras-chave: Sequências de números reais. Progressões aritméticas. Progressões geométricas. Limites de sequências.

ABSTRACT

This work is a didatic proposal to develop mathematical skills and expertise on sequences of real numbers for High School, combining theory and practice.

Keywords: Sequences of real numbers. Arithmetic progressions. Geometric progressions. Limits of sequences.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os assuntos abordados estão de acordo com as normas, competências e habilidades relacionadas ao estudo de Sequências de Números Reais, tendo aplicações práticas, lógicas e situações problemas que envolvam o dia a dia do aluno do Ensino Médio, procurando desenvolver seu raciocínio crítico, inovador e pesquisador. Os conteúdos abordados devem proporcionar um bom entendimento, domínio e motivação para que estes alunos passem gostar da matemática sob uma nova visão, nova interpretação, novo significado, fazendo com que a relação professor-aluno seja mais interativo, mais afetivo e motivador. O aluno deverá adquirir habilidades e competências essenciais para resolver que envolvam sequências numéricas.

Os conteúdos abordados neste trabalho serão divididos do seguinte modo: Capítulo 2- sequências de números reais: neste capitulo, o aluno observa um sequência numérica infinita e associa à uma função, atribuindo valores naturais, analisando seu crescimento ou decrescimento, observando seu gráfico e descobrir o movimento desta sequência. O aluno vai encontrar um determinado termo desta sequência, adquirindo conhecimento de que não há necessidade em escrever todos os termos anteriores e sim, com métodos algébricos, calcular termo pedido, a partir dai, aprender a demonstrar algumas definições por indução finita ou leis de recorrências, sabendo o caminho pelo qual chega à uma fórmula ou lei, para depois aplicá-las em exercícios trabalhados em sala de aula, em uma dinâmica desenvolvida pelo professor, podendo, assim, somar uma quantidade finita ou infinita de termos de uma sequência, através das leis encontradas e não somar os valores um à um.

Capítulo 3- limite de sequências, neste capítulo, o aluno vai descobrir que a sequência numérica infinita contínua, levará a um determinado valor numérico ou simplesmente continua caminhando para o infinito, através de conhecimentos sobre limites e suas propriedades básica em sequências,

analisando gráficos e observando seus movimentos, interpretando problemas que podem ser calculados, por métodos práticos e simples, com o uso do conhecimento de limites de uma sequência.

Capítulo 4- considerações finais: trata das conclusões sobre o conteúdo teórico e prático desenvolvido com alunos do Ensino Médio, sobre um estudo abrangente de sequências de números reais.

2 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

2.1 Sequências Numéricas

Em nossa vida cotidiana, temos diariamente alguns fatos que envolvem *sequências*: observando as casas de uma determinada rua, verificamos que de um lado temos números pares e do outro, números ímpares; por outro lado, podemos analisar os horários em que se administra certo medicamento indicado por um médico, e outros temas envolvendo o dia a dia. Desde a antiguidade, matemáticos e cientistas observavam e registravam fenômenos que ocorrem segundo um padrão, que lhes dava previsão e controle desses fenômenos. Para abordarmos *sequências* formalmente, vamos considerar os seguintes conjuntos numéricos.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$
$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \; e \; q \neq 0\right\}$
$\mathbb{I}$ = Números irracionais
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Definição 2.1.1 Uma *sequência* (ou *sucessão*) de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural *n* associa um número real $f(n)$ (Figura 2.1.1).

Costuma-se denotar a imagem $f(n)$ por a_n, ou seja $f(n) = a_n$. O número real a_n é chamado termo geral ou *n*-ésimo termo da sequência.

A imagem da sequência f denotamos por $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$.

Notação. Costuma-se denotar a sequência f por (a_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, ou simplesmente a_n. Não confunda a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ com a imagem da sequência $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. Por exemplo, $(3, 3, 3, \cdots)$ não é o mesmo que $\{3\}$. Se o domínio da sequência f é um subconjunto finito dizemos que a sequência f é finita.

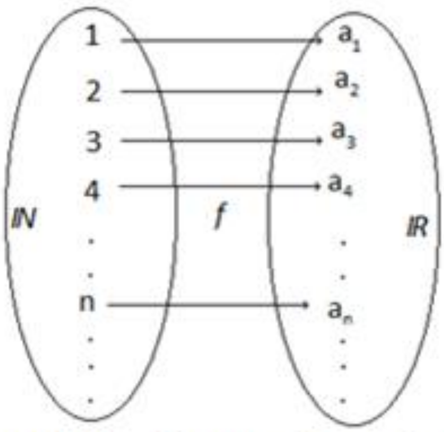


Figura 2.1.1 - Diagrama da sequência a_n.

Definição 2.1.2 Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é:
(***i***) Constante se:

$$a_{n+1} = a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(***ii***) Estacionária (ou mais precisamente estacionária a partir de certo índice) se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_{n+1} = a_n, \forall\, n \geq p.$$

(***iii***) Periódica se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_{n+p} = a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.1.3 Seja a sequência (a_n) cujo termo geral é dado por $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. A imagem desta sequência é o conjunto formado por {-1,1}.

Exemplo 2.1.4 A sequência (a_n) cujo termo geral é dado por $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência constante, pois $a_{n+1} = a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.5 A sequência (a_n) onde $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_n = 4,\ \forall\, n \geq 4$, é uma sequência estacionária, pois existe $p = 4 \in \mathbb{N}$ tal que, $a_{n+1} = a_n, \forall\, n \geq 4$.

Exemplo 2.1.6 A sequência (a_n) onde

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 1, a_5 = 2, a_6 = 3, a_7 = 1, a_8 = 2, a_9 = 3, \cdots$$

é uma sequência periódica, pois existe $p = 3 \in \mathbb{N}$ tal que, $a_{n+3} = a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.7 Seja a sequência (a_n) cujo termo geral é dado por:

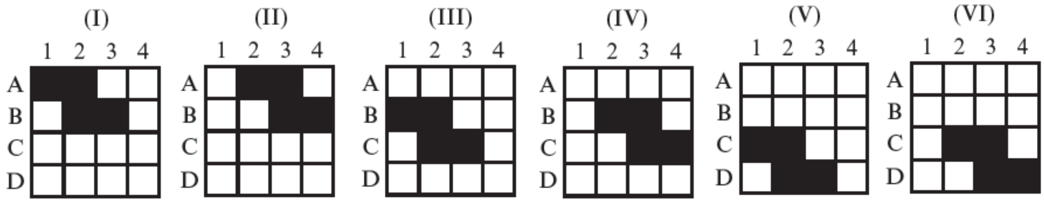
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Neste exemplo a sequência é formada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (1, 1+2, 1+2+3, \cdots) = (1, 3, 6, \cdots).$$

Exemplo 2.1.8 Comprou uma TV e o dia da semana era quarta-feira, a dívida deverá ser paga daqui a exatamente 76 dias. Em que dia da semana cairá o 76º dia?
Solução.
No período de sete dias em sequência, a divisão de 76 por 7 deixa resto 6 portanto o 76º dia será o sexto elemento da sequência dos dias da semana iniciada na quinta-feira. Logo, o 76º dia será terça-feira.

Exemplo 2.1.9 Observe os seis primeiros termos de uma sequência.



Supondo que a regularidade observada na formação desses termos seja mantida para a formação dos demais, isto é, que o termo (I) seja igual ao termo (VII), que o termo (II) seja igual ao termo (VIII), e assim por diante, responda:

a) quais quadrículas estarão pintadas no termo (XXX)?

b) quantas vezes a quadrícula B2 terá sido pintadas desde o termo (I) até o termo (XIX)?

Solução.

a) O período da sequência é de seis termos. A divisão de 30 por 6 resulta resto zero. Assim, o termo (XXX) é igual ao termo (VI), e nele estarão pintadas as quadrículas C2, C3, D3 *e* D4.

b) A quadrícula B2 é pintada três vezes a cada período, nos termos (I), (III) e (IV). Até o termo (XIX), incluindo-o, serão três períodos e mais um termo. Portanto, a quadrícula B2 será pintada $3 \cdot 3 + 1 = 10$ vezes.

Exemplo 2.1.10 Observando a sequência numérica infinita $(1, 2, 3, 5, 7, 1, 2, 3, 5, 7, \cdots)$, qual é o 123^o termo nessa sequência?

Solução.

A sequência se repete a cada 5 termos, então, dividindo 123 por 5, obtemos resto 3 e a relação do resto com os valores da sequência é: resto 1 no elemento 1, 2 no 2, 3 no 3, 4 no 5, 0 no 7, assim o 123^o termo é o 3.

Exemplo 2.1.11 Atribui-se ao matemático grego Hipsicles (240 a.C. - 170 a.C.) uma regra para criar uma nova sequência numérica a partir de outra. O método consiste em tomar uma sequência numérica (por exemplo, $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$) e criar outra em que cada termo seja igual à soma dos anteriores. Isto é:

	Sequência nova
1	1
$1 + 2$	3
$1 + 2 + 3$	6
$1 + 2 + 3 + 4$	10
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
....	...

Pela regra de Hipsicles, a sequência $(1, 2, 3, 4, \cdots)$ gerou a sequência $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots)$. Aplique a regra de Hipsicles e encontre os oito primeiros termos de duas novas sequências numéricas geradas a partir da sequência $(1, 3, 6, 10, 15, 21,\cdots)$.

Solução.

As sequências serão: $(1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, \cdots)$ e $(1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, \cdots)$.

Definição 2.1.12 Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, duas sequências numéricas. Dizemos que estas sequências são iguais, se $a_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.13 A expressão $a_n = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}$, é a fórmula do termo geral de uma sequência numérica. Escreva os quatro primeiros termos dessa sequência e encontre o 96º termo.
Solução.
A sequência é: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, ou seja, $(1, 4, 7, 10, \cdots)$ e $a_{96} = 286$.

Definição 2.1.14 Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a_n é limitada se existe $c > 0$ tal que $|a_n| \leq c, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.15 A sequência (a_n) onde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência limitada.
Solução.
De fato, observe que,

$$|a_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.1.16 Seja $f = (a_n)$ uma sequência. Uma subsequência de (a_n) é a restrição da função f a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$, $k \in \mathbb{N}$ com $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$.

Exemplo 2.1.17 Consideremos a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

De fato, consideremos os subconjuntos dos naturais $\mathbb{N}` = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{N}`` = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$. Então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}`} = ((-1)^{2k})_{n\in\mathbb{N}`} = (1)_{n\in\mathbb{N}`}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}``} = ((-1)^{2k-1})_{n\in\mathbb{N}``} = (-1)_{n\in\mathbb{N}``}$ são subsequências de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Princípio de Indução Finita:

Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n. Suponhamos que:
(***i***) $P(1)$ é válida.
(***ii***) Para cada $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$.
Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Demonstração. Ver os detalhes em [2, pag. 12]. □

Exemplo 2.1.18 Prove que:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Denotemos por $P(n)$ a propriedade dos números naturais dada por:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Provemos a validade $P(n)$ para todo natural n.

(***i***) $P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

(***ii***) Suponhamos que *P*(*n*) vale. Vamos provar que *P*(*n* + 1) também vale. De fato,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 \\ &= (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n + 1)[(n + 1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Portanto *P*(*n* + 1) é verdade. Logo, *P*(*n*) vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.2 Sequências Recorrentes

Definição 2.2.1 Seja a sequência (a_n). Dizemos que (a_n) é uma sequência *recorrente* ou é uma sequência definida por recorrência se existe uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n+1} = F(a_n)\ , n \in \mathbb{N},$$

e o termo a_1 é dado.

Exemplo 2.2.2 Um exemplo é dado pela sequência de Fibonacci, conforme segue. O matemático Leonardo Fibonacci (1.170 – 1.250) nasceu em Pizza e era filho de um comerciante italiano chamado Bonacci. Por viajar muito com seu pai, Fibonacci obteve diferentes métodos de fazer cálculos, e com isso descobriu a famosa Sequência de Fibonacci, que é uma sequência de números inteiros, começando normalmente por 0 e 1, na qual cada termo subsequente corresponde à soma dos dois anteriores. A sequência recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci que descreveu, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos. Tal sequência já era, no entanto, conhecida na antiguidade. Os números de Fibonacci são, portanto, os números que compõem a seguinte sequência: (podendo ser omitido o zero inicial).

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

Em termos matemáticos, a sequência é definida pela fórmula de recorrência abaixo:

$$\begin{cases} a_1 = 1\ e\ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

A sequência de Fibonacci está intrinsecamente ligada à natureza. Estes números são facilmente encontrados no arranjo de folhas do ramo de uma planta, em copas de árvores ou até mesmo no número de pétalas de flores. As sementes das flores, frutos e, de forma particularmente interessante, as pinhas, trazem no seu escopo natural esta sequência. Como esta proporção trata-se de uma sucessão numérica, é possível perceber, em vários traços notáveis, a manifestação desta em muitos aspectos da natureza de maneira estética e funcional. Tal linha de análise é, muitas vezes, utilizada como base explicativa para a teoria criacionista denominada Design Inteligente. Na espiral do nautilus (Figura 2.2.1), por exemplo, pode ser facilmente percebida a sequência de Fibonacci. A composição de quadrados com lados de medidas proporcionais aos números da sequência mostra a existência desta sucessão numérica nesta peça natural. Os quadrados de Ouro, assim chamados, o primeiro quadrado terá os lados com medida 1, o segundo também, o terceiro terá os seus lados com medida 2, o quarto com medida 3, o quinto com medida 5, o sexto com medida 8 e, assim, sucessivamente (Figura 2.2.2).

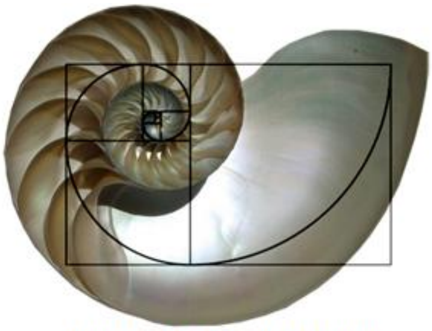


Figura 2.2.1 - Espiral de Nautilus

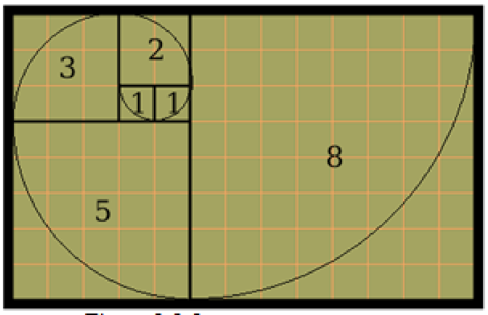


Figura 2.2.2 - Quadrados de Ouro

A Sequência de Fibonacci também se encontra na Anatomia Humana. **V**istos frontalmente, os dentes anteriores estão na proporção entre si. Por exemplo, a largura do incisivo central está proporcional à largura do incisivo lateral, assim como o incisivo lateral está proporcional ao canino, e o canino ao primeiro pré-molar. Os ossos, do dedo médio até o cotovelo de um braço, que são os primeiros termos da Sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...).

Exemplo 2.2.3 Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n - 4, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Solução.
Usando a fórmula do termo geral de a_n, temos:
para $n = 1$, $a_{1+1} = a_2 = 3\,a_1 - 4 = 3 \cdot 5 \quad - 4 = 15 - 4 \quad = 11$,
para $n = 2$, $a_{2+1} = a_3 = 3\,a_2 - 4 = 3 \cdot 11 \quad - 4 = 33 - 4 \quad = 29$,
para $n = 3$, $a_{3+1} = a_4 = 3\,a_3 - 4 = 3 \cdot 29 \quad - 4 = 87 - 4 \quad = 83$,
para $n = 4$, $a_{4+1} = a_5 = 3\,a_4 - 4 = 3 \cdot 83 \quad - 4 = 249 - 4 = 245$.

Logo, os cinco primeiros termos da sequência são (3, 11, 29, 83, 245, $\cdots$).

Definição 2.2.4 Seja uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$, dizemos que a sequência (a_n) é:

(***i***) crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(***ii***) decrescente se $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_{n+1} < a_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$ dizemos que a sequência (a_n) é chamada estritamente crescente (resp. estritamente decrescente).

(***iii***) sequências crescente, decrescente, estritamente crescente e estritamente decrescente são ditas *monótonas*.

Exemplo 2.2.5 Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$ onde $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mostre que a sequência (a_n) é estritamente decrescente.

Solução.

Como $n < n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}\ , \forall\, n\ \in \mathbb{N}.$$

Logo, (a_n) é estritamente decrescente.

Exemplo 2.2.6 Analisar a expressão

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\dots}}}}\ . \tag{I}$$

Solução.

Vamos analisar a expressão dada em (I) como uma sequência recorrente, para isto consideremos $a_1 = \sqrt{3}$ e definamos $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{a_1}}$, $a_3 = \sqrt{3+\sqrt{a_2}}$, e assim sucessivamente. Com isto temos a seguinte sequência recorrente

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}, n \geq 1. \end{cases}$$

As seguintes afirmações são válidas:

a) $a_n > 0$, para todo n.

b) a_n é estritamente crescente.

c) A sequência é limitada, com $a_n < \sqrt{3} + 1$ para todo $n \geq 1$.

De fato, ***a***) $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(***i***) Como $a_1 = \sqrt{3} > 0$.

(***ii***) Suponhamos $a_n > 0, \forall\, n$. Vamos mostrar que $a_{n+1} > 0$.

Como $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$, temos:

$$a_{n+1}^2 = 3 + a_n > 3\ \Rightarrow\ a_{n+1} > \sqrt{3} > 0.$$

Logo, a expressão $a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(***i***) É claro que $a_1 < a_2$, pois $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_2^2 = 3 + a_1 > 3$. Logo, $a_2 > \sqrt{3} = a_1$.

(***ii***) Supondo que é válida para $a_{k-1} < a_k$ para um número arbitrário $k > 1$. Vamos mostrar que $a_k < a_{k+1}$.

Segundo a hipótese de indução $a_{k-1} < a_k$ e, por conseguinte, $3 + a_{k-1} < 3 + a_k$ e assim $\sqrt{3+a_{k-1}} < \sqrt{3+a_k}$. Logo, $a_k = \sqrt{3+a_{k-1}} < \sqrt{3+a_k} = a_{k+1}$. Isto mostra que a sequência (a_n) é estritamente crescente.

c) $a_n < \sqrt{3} + 1$ para todo $n \geq 1$.
Vamos mostrar esta afirmação usando indução.
(***i***) É claro que $a_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3} + 1$.
(***ii***) Supondo que $a_k < \sqrt{3} + 1$ para um número arbitrário $k > 1$.Vamos mostrar que $a_{k+1} < \sqrt{3} + 1$. De fato, como

$$a_{k+1} = \sqrt{3 + a_k} < \sqrt{3 + \sqrt{3} + 1} < \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2} = \sqrt{3} + 1,$$

provamos que a sequência (a_n) é limitada crescente.

Os exercícios a seguir foram trabalhados com os alunos da 1ª Série do Ensino Médio:

1. Observando a sequência: 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 1, 2,⋯, qual é o 134º termo nesta sequência?
Solução.
A sequência se repete a cada 4 termos, então, dividindo 134 por 4, obtemos resto 2 e, a relação do resto com os valores da sequência é: resto 1 no elemento 2, 2 no 4, 3 no 8, 0 no 1. Assim, o 134º termo é o 4.

2. Escreva os cinco primeiros termos da sequência dada pela fórmula do termo geral:

$$a_n = 2n^2 - 5n + 3, \qquad n \geq 1.$$

Solução.
Usando a fórmula do termo geral de a_n, temos:
para $n = 1$, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 2 \cdot 1 - 5 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$,
para $n = 2$, $a_2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 2 \cdot 4 - 10 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$,
para $n = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 9 - 15 + 3 = 18 - 15 + 3 = 6$,
para $n = 4$, $a_4 = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 2 \cdot 16 - 20 + 3 = 32 - 20 + 3 = 15$,
para $n = 5$, $a_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 3 = 2 \cdot 25 - 25 + 3 = 50 - 25 + 3 = 28$.

Logo, a sequência encontrada é (0, 1, 6, 15, 28, ⋯).

3. Calcule a soma dos quatro primeiros termos da sequência definida por:

$$a_n = 3n + (-1)^{n-1}, n \geq 1.$$

Solução.
Usando a fórmula do termo geral de a_n, temos:
para $n = 1$, $a_1 = 3 \cdot 1 + (-1)^0 = 3 + 1 = 4$,
para $n = 2$, $a_2 = 3 \cdot 2 + (-1)^1 = 6 - 1 = 5$,
para $n = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10$,
para $n = 4$, $a_4 = 3 \cdot 4 + (-1)^3 = 12 - 1 = 11$.

Logo, a sequência é (4, 5, 10, 11, ⋯).

4. Encontre o valor para os quatro primeiros termos da sequência cujo termo geral é:

$$a_n = 4 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Nota. Essa sequência é bastante famosa, pois Leibniz provou que a soma de todos os seus termos é o número π. (*Observação*. Isto se mostra no estudo de séries de números reais).

Solução.

Usando a fórmula do termo geral de a_n, temos:

para $n = 1$, $a_1 = 4 \cdot \frac{(-1)^{1+1}}{2\cdot 1-1} = 4 \cdot \frac{1}{1} = 4$,

para $n = 2$, $a_2 = 4 \cdot \frac{(-1)^{2+1}}{2\cdot 2-1} = 4 \cdot \frac{(-1)}{3} = -\frac{4}{3}$,

para $n = 3$, $a_3 = 4 \cdot \frac{(-1)^{3+1}}{2\cdot 3-1} = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$,

para $n = 4$, $a_4 = 4 \cdot \frac{(-1)^{4+1}}{2\cdot 4-1} = 4 \cdot \frac{(-1)}{7} = -\frac{4}{7}$.

Logo, a sequência é $\left(4,\ -\frac{4}{3},\ \frac{4}{5}, -\frac{4}{7},\ \cdots\right)$.

5. Sabendo que o símbolo $\boldsymbol{\Sigma}$ significa somatório, calcule então a soma:

$$\sum_{n=1}^{6} (3n^2 - 4).$$

Solução.

Seja S a soma indicada, assim,

$S = (3\cdot 1^2 - 4) + (3\cdot 2^2 - 4) + (3\cdot 3^2 - 4) + (3\cdot 4^2 - 4) + (3\cdot 5^2 - 4) + (3\cdot 6^2 - 4)$
$= (3\cdot 1 - 4) + (3\cdot 4 - 4) + (3\cdot 9 - 4) + (3\cdot 16 - 4) + (3\cdot 25 - 4) + (3\cdot 36 - 4)$
$= -1 + 8 + 23 + 44 + 71 + 104$.

Logo, a soma é $S = 249$.

6. Considere (a_n) e (b_n) duas sequências definidas por $a_n = \frac{3n}{2n-1}$ e b_n é a lei de recorrência em que $b_1 = 3$ e $b_{n+1} = 2b_n - 5, n \geq 1$. Calcule os quatro primeiros termos da sequência (c_n) onde $c_n = a_n + b_n, n \geq 1$.

Solução.

Usando a fórmula do termo geral de a_n, temos:

para $n = 1$, $a_1 = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1-1} = \frac{3}{1} = 3$ e $b_2 = 2\cdot 3 - 5 = 1$ então, $c_1 = 3 + 1 = 4$,

para $n = 2$, $a_2 = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2-1} = \frac{6}{3} = 2$ e $b_3 = 2\cdot 1 - 5 = -3$ então, $c_2 = 2 - 3 = -1$,

para $n = 3$, $a_3 = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3-1} = \frac{9}{5}$ e $b_4 = 2\cdot (-3) - 5 = -11$ então, $c_3 = \frac{9}{5} - 11 = -\frac{46}{5}$, para n = 4, $a_4 = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 4-1} = \frac{12}{7}$ e b_5 = 2· (-11) –5 = -27 então, $c_4 = \frac{12}{7} - 27 = -\frac{187}{7}$.

Logo, a sequência é $\left(4, -1,\ -\frac{46}{5}, -\frac{187}{7}, \cdots\right)$.

7. Em uma sequência numérica, o primeiro termo é uma fração de numerador 1 e denominador 4. Os termos seguintes ao primeiro podem ser obtidos adicionando sempre uma unidade ao numerador e ao denominador da fração do termo imediatamente anterior.

a) Quais são os quatro primeiros termos dessa sequência?

b) Chamando o primeiro termo de a_1, o segundo termo de a_2, o terceiro de a_3, e assim por diante, qual é o termo a_{15}?

c) Como se pode determinar um termo a_n qualquer?

Solução.

a) Os quatros primeiros termos são: $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \cdots\right)$ ou $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \cdots\right)$

b) Observando a sequência do item a, concluímos que o 15º termo é $a_{15} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.

c) Analisando a sequência do item a, concluímos que $a_n = \frac{n}{n+3}$.

2.3 Progressão Aritmética

Definição 2.3.1 Chama-se progressão aritmética (P.A.) toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante $r \in \mathbb{R}$, denominada razão da P.A. Assim, uma progressão aritmética é uma sequência dada por uma lei de recorrência, com valores reais *a* e *r* dados, da forma:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r,\ n \in \mathbb{N}, r \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Seja (a_n) uma progressão aritmética de razão *r*, se:

(***i***) $r > 0$, a P.A. é denominada *crescente*.

(***ii***) $r < 0$, a P.A. é denominada *decrescente*.

(***iii***) $r = 0$, a P.A. é denominada *constante*.

Exemplo 2.3.2 A progressão aritmética dada pelos valores reais $a = 1$ e $r = 2$ é:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mais explicitamente, a P.A. (1, 3, 5, 7, 9, ⋯).

Exemplo 2.3.3 Escreva os 10 primeiros termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo a_1 é igual a 3 e a razão *r* é igual a 4.

Solução.

Como a razão r é positiva, a progressão aritmética é crescente e seus dez primeiros termos são **(**3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ⋯).

Exemplo 2.3.4 Encontre os seis primeiros termos de uma progressão aritmética, sendo $a_1 = 4$ e razão $r = -2$.

Solução.

Como a razão r é negativa, a progressão aritmética é decrescente e seus seis primeiros termos são (4, 2, 0, -2, -4, -6, ⋯).

Exemplo 2.3.5 Em uma P.A. de razão $r = 0$ e primeiro termo $a_1 = 5$, escreva os seis primeiros termos.

Solução.

Como a razão r é igual a zero, a progressão aritmética é constante e seus seis primeiros termos são (5, 5, 5, 5, 5, 5, ⋯).

Em alguns problemas que envolvem uma progressão aritmética, é útil escrever os seus:

(***i***) 3 primeiros termos $x - r$, x e $x + r$,

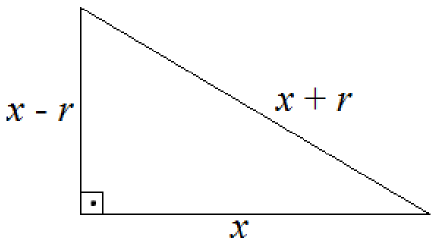
(***ii***) 4 primeiros termos $x - 3r/2$, $x - r/2$, $x + r/2$ e $x + 3r/2$,

(***iii***) 5 primeiros termos $x - 2r$, $x - r$, x, $x + r$ e $x + 2r$.

Exemplo 2.3.6 Mostre que, se os lados de um triângulo retângulo estiverem em P.A., então eles serão proporcionais a 3, 4 e 5.

Solução.

Se os lados do triângulo estão em PA, então teremos:



Vale observar que, admitindo-se $r > 0$, escolhemos $x + r$ como sendo a hipotenusa, pois esse é o maior lado de um triângulo retângulo. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2$$
$$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + x^2 - 2xr + r^2$$
$$x^2 - 4xr = 0$$
$$x(x - 4r) = 0.$$

Disto segue que x = 0 ou x – 4r = 0, como o comprimento do lado do triângulo é positivo, segue que x = 4r, assim os lados do triângulo são 3r, 4r e 5r e, portanto, eles são proporcionais a 3, 4 e 5.

Teorema 2.3.7 (*Termo geral de uma Progressão Aritmética*) Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então,

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{*}$$

Demonstração. Para demonstrar a fórmula (*) vamos usar o princípio de indução finita:
(***i***) Para n = 1, a fórmula (*) é satisfeita trivialmente, pois $a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1$.
(***ii***) Suponhamos que seja válida a fórmula (*) para $n = k$: $a_k = a_1 + (k-1)r$. Vamos mostrar que a fórmula (*) vale para n = k + 1.
De fato:

$$a_{k+1} = a_k + r = (a_1 + (k-1)r) + r = a_1 + kr - r + r = a_1 + [(k+1) - 1]r.$$

Logo, a fórmula do termo geral é: $a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.3.8 Sabendo que o primeiro termo de uma progressão aritmética é igual a 3 e sua razão é igual a 5, encontre o 34º termo dessa P.A..
Solução.
Sendo a_1 = 3 e r = 5, temos:

$$a_{34} = a_1 + 33r = 3 + 33 \cdot 5 = 3 + 165 = 168.$$

Exemplo 2.3.9 Encontre a fórmula do termo geral da progressão aritmética cujo primeiro termo é a_1 = 6 e a razão r = 4. Em seguida calcule o 26º termo desta P.A. pela fórmula encontrada.
Solução.
Sendo $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos a fórmula $a_n = 6 + (n-1)4$, então $a_n = 6 + 4n - 4$, ou seja, $a_n = 4n + 2$ e o 26º termo é:

$$a_{26} = 4 \cdot 26 + 2 = 104 + 2 = 106.$$

Exemplo 2.3.10 (PROFMAT – 2013) Seja (a_n) uma progressão aritmética e seja (b_n) a sequência definida por:

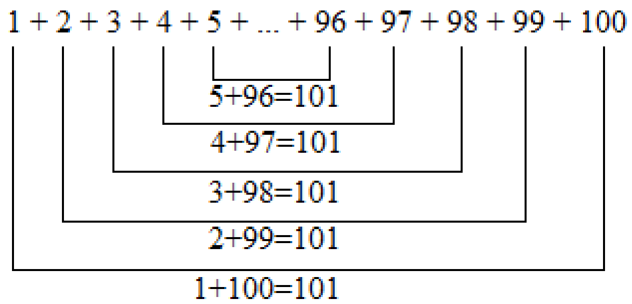
$$b_n = a_n + a_{n+1}, \forall\, n \geq 1.$$

Mostre que (b_n) também é uma progressão aritmética.
Solução.
Sendo, $b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_n = 2r$, sendo que r é a razão de (a_n). Logo, (b_n) é uma P.A. de razão 2r.

Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Carl Gauss (1777 – 1855) foi um grande matemático que começou a demonstrar sua genialidade desde criança. Conta a história que a turma de Gauss na escola era bastante inquieta e, certa vez, seu professor decidiu dar-lhes uma atividade que deveria envolvê-los por algum tempo. O professor pediu aos seus alunos que fizessem a soma de todos os números naturais entre 1 e 100. Surpreendentemente, o menino Gauss conseguiu concluir a atividade em poucos minutos. O professor conferiu os cálculos e verificou que Gauss havia acertado. Pediu-lhe então que explicasse como havia feito as contas de forma tão rápida. Gauss prontamente mostrou sua ideia. Ele observou que, ao somarmos o primeiro número da sequência com o último, obtemos o resultado de 101**,** e que, ao somarmos o segundo número com o penúltimo, também obtemos 101 como resultado e assim por diante.

Vejamos o esquema abaixo para melhor compreensão:



Esquema que representa a ideia da Soma de Gauss

Pela imagem anterior, podemos ver que cada número irá se associar a outro que está em posição oposta a si, e a soma de ambos será sempre 101. Repetindo esse processo, chegará o momento em que somaremos os números centrais da sequência e encontraremos que 50 + 51 = 101. Assim sendo, em vez de somarmos os cem números da sequência, somaremos os resultados obtidos, ou seja:

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{50\ vezes}$$

Mas podemos realizar esse cálculo mais rapidamente se fizermos $50 \cdot 101 = 5050$. Portanto, através dessa ideia, Gauss conseguiu calcular rapidamente a soma de todos os números entre 1 e 100, obtendo o resultado de 5050.

Teorema 2.3.11 Se (a_n) é uma P.A. então, a soma dos *n* primeiros termos desta P.A. é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Sabemos que a soma do primeiro termo S_1 da P.A. é igual a a_1, a soma dos dois primeiros termos dessa P.A. é igual a $a_1 + a_2$, assim, a soma S_n dos *n* primeiros termos dessa P.A. pode ser representada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \text{ou} \qquad \text{(I)}$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad \text{(II)}$$

Assim, somando membro a membro (I) e (II), ocorre que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Sabendo que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a $a_1 + a_n$, então, ocorre que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

e considerando *n* termos $a_1 + a_n$, podemos concluir que: $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Logo,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$ □

Exemplo 2.3.12 Calcule a soma dos 28 primeiros termos da P.A. (4, 7, 10, ···).

Solução.

Sendo a_1 = 4 e *r* = 3, vamos encontrar o 28º termo, tal que,

$$a_{28} = a_1 + 27r = 4 + 27 \cdot 3 = 4 + 71 = 75.$$

Logo, a soma dos 28 primeiros termos da P.A. é igual a:

$$S_{28=} \frac{(a_1 + a_{28})28}{2} = \frac{(4 + 75)28}{2} = \frac{79 \cdot 28}{2} = 1106.$$

Exemplo 2.3.13 (PROFMAT-2011) Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ definida como indicado abaixo:

$a_1 = 1$
$a_2 = 2 + 3$
$a_3 = 4 + 5 + 6$
$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$
....

a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

b) Calcule a_{10}.

c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Solução.

a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos $a_1, \cdots, a_{n-1}$, isto é, 1 + 2 + ··· + n – 1 mais um, isto é, é igual a $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$. O último inteiro é esse número mais *n* – 1. Portanto, para *n* = 10, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

b) a_{10} é a soma dos 10 termos de uma progressão aritmética, sendo o primeiro igual a 46 e o último igual a 55. Então,

$$a_{10} = \frac{(46 + 55)10}{2} = 101 \cdot 5 = 505.$$

c) No caso de a_n, trata-se da soma de uma progressão aritmética de *n* termos, sendo o primeiro igual $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ e o último igual $\frac{1}{2}n(n-1)+1+(n-1)$, ou seja, $\frac{1}{2}n(n-1)+n$, como visto em (*a*). Então,

$$a_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right] + \left[\frac{1}{2}n(n-1)+n\right]}{2} \cdot n = \frac{(n-1)n^2 + (n+1)n}{2} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Exemplo 2.3.14 (PROFMAT - 2011) A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21,... é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.

a) Qual é o centésimo termo dessa sequência?

b) Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?

c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Solução.

a) Chamemos de $a_1, a_2, a_3, \cdots$ os termos dessa sequência. A sequência dos termos com índices ímpares $a_1, a_3, a_5, \cdots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 0 e razão 7. A sequência dos termos com índices pares $a_2, a_4, a_6, ...$ é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e passo 7. O centésimo termo é o 500º da sequência dos pares. Então a_{100} = 3 + (50 – 1) ·7 = 3 + 343 = 346.

b) Há maneiras diferentes de se fazer isso. Podemos agrupar a soma assim:

$$(a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + \cdots + (a_{50} + a_{51})$$

Veja que de a_1 para a_2 há um acréscimo de 3 e de a_{99} para a_{100} também. Então as parcelas $(a_1 + a_{100})$ e $(a_2 + a_{99})$ são iguais. Do segundo para o terceiro há um aumento e um decréscimo de 4. E assim por diante. Então todos os termos entre parênteses são iguais ao primeiro, que vale 0 + 346 = 346. Como são 50 termos, a soma dá 50.346 = 17.300.

Outro jeito de fazer é somar separadamente as sequências com índices ímpares e pares. No segundo caso (pares), são 50 termos da progressão aritmética de razão 7 começando em 3 e terminando em 346. A soma dessa progressão dá:

$$50 \cdot \left(\frac{3 + 346}{2}\right) = 25 \cdot 349 = 8725.$$

No primeiro caso (ímpares), são 50 termos, mas todos 3 unidades menores do que os termos da série par. Então a soma desses é 8725 subtraído de 50.3 = 150, isto é, dá 8575. Juntando as duas, ficamos com 17300. Obs. Essa segunda soma também sairia da mesma forma como a outra, pois a PA tem primeiro termo igual a 0, último termo igual a 343, totalizando 50 termos, logo soma

$$50 \cdot \left(\frac{0+343}{2}\right) = 25 \cdot 343 = 8575.$$

c) Observe primeiro que se *n* é ímpar então a_n é múltiplo de 7, e se *n* é par então a_n - 3 é múltiplo de 7 (de fato, valem as recíprocas, mas não precisaremos disso). Como nem 2000 = 7·285 + 5 nem 1997 = 7·285 + 2 são múltiplos de 7, então 2000 não pode ser um a_n nem para *n* par nem para *n* ímpar.

Exemplo 2.3.15 (PROFMAT – 2012) A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 2n^2 - 15n$.
a) Determine o décimo termo da progressão.
b) Encontre o primeiro termo positivo da progressão.
Solução.
a) O décimo termo é $S_{10} - S_9$, isto é,

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (2 \cdot 10^2 - 15 \cdot 10) - (2 \cdot 9^2 - 15 \cdot 9) = 23.$$

b) Queremos saber para quais valores de *n*, o *n*-ésimo termo, isto é, a expressão $S_n - S_{n-1}$, é maior do que zero, temos:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - 15n) - \left(2(n-1)^2 - 15(n-1)\right) = 4n - 17.$$

Logo, o primeiro termo positivo ocorre para o primeiro *n* tal que $4n - 17 > 0$, isto é, para *n* = 5 o termo é a_5.

***Os exercícios a seguir foram trabalhados com os alunos da 1ª Série do Ensino Médio*:**

1. Prove que se *a, b* e *c* com *a.b.c ≠ 0* são elementos de uma P.A., então $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}$ e $\frac{1}{ab}$ também são elementos de uma P.A.
Solução.
Se *a, b* e *c* são elementos de uma P.A., então sua razão é *b – a* = *c – b*. Como *a.b.c ≠ 0* segue que:

$$\frac{b-a}{abc} = \frac{c-b}{abc} \Rightarrow \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac},$$

o que implica que os elementos $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}$ e $\frac{1}{ab}$ estão em P.A.

2. Encontre os quatro primeiros termos de uma P.A. na qual a soma dos dois primeiros termos é igual a 1 e, a soma do terceiro e quarto termos é igual a 13.
Solução.
Consideremos os quatro primeiros termos, $x - \frac{3r}{2}, x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}$ e $x + \frac{3r}{2}$, da P.A. que estamos procurando. Por hipótese,

$$\begin{cases} x - \dfrac{3r}{2} + x - \dfrac{r}{2} = 1 \\ x + \dfrac{r}{2} + x + \dfrac{3r}{2} = 13. \end{cases}$$

Das igualdades acima, segue que:

$$\begin{cases} 2x - 2r = 1 \\ 2x + 2r = 13. \end{cases}$$

Disto segue que, $x = 7/2$ e $r = 3$. Portanto a progressão aritmética procurada é $(-1, 2, 5, 8, \cdots)$.

3. Calcule três termos consecutivos de uma P.A. cuja soma é 21 e cujo produto é 315.

Solução.

Consideremos os três primeiros termos, $x - r$, x e $x + r$, da P.A. que estamos procurando. Por hipótese:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 21 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 315. \end{cases}$$

Das igualdades acima, segue que:

$$\begin{cases} 3x = 21 \\ (7 - r) \cdot 7 \cdot (7 + r) = 315. \end{cases}$$

Disto segue que $x = 7$ e $r = \pm 2$. Portanto a progressão aritmética procurada é $(9, 7, 5, \cdots)$ ou $(5, 7, 9, \cdots)$.

4. Em uma progressão aritmética, a soma S_n dos primeiros termos é $S_n = n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule o primeiro termo e a razão desta P.A.

Solução. Como $a_2 = S_2 - S_1$ segue que:

$$a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 + 2 - (1^2 + 1) = 6 - 2 = 4.$$

Logo, $a_1 = 2$ e $r = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$.

5. Calcule a soma:

$$\sum_{n=1}^{5} (2n - 3).$$

Solução.

Denotemos por $S = \sum_{n=1}^{5} (2n - 3)$, então,

S = (2·1 – 3)+(2·2 – 3)+(2·3 – 3)+(2·4 – 3)+(2·5 – 3)

S = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 15.

6. Um atleta percorre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo que ao final de 15 dias ele correu um total de 67.500 metros, calcule o número de metros percorridos no terceiro dia.

Solução.

Denotemos o 1º dia por a_1 e a razão r = 500m. No 15º dia temos:

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot 50 = a_1 + 7000 \qquad e \qquad \text{(I)}$$

$$S_5 = 67.500. \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) e (II) em $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})\cdot 15}{2}$, temos:

$$\frac{(a_1 + a_1 + 7.000)15}{2} = 67.500,$$

ou seja,

$$(2a_1 + 7.000) \cdot 15 = 135.000.$$

Logo, como a_1 = 1.000m e segue que no 3º dia o atleta percorre a_3 = 2.000m.

7. (Vunesp – 2001) Numa cerimônia de formatura de uma faculdade, os formandos foram dispostos em 20 filas de modo a formar um triângulo, com 1 formando na primeira fila, 3 formandos na segunda, 5 na terceira e assim por diante, constituindo uma progressão aritmética. O número de formandos na cerimônia é:

a) 400 *b*) 410 *c*) 420 *d*) 800 *e*) 840

Solução.

Sejam 1, 3, 5, 7, ⋯, a_{20} elementos de uma P.A. (a_n). Como a_1 = 1 e r = 2 segue que:

$$a_{20} = a_1 + 19r = 1 + 19 \cdot 2 = 39.$$

Então, o número de formandos na cerimônia é:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = (1 + 39)10 = 400.$$

10. (Mackenzie-SP) A caixa d'água reserva de um edifício, que tem capacidade para 25.000 litros, contém, em um determinado dia, 9.600 litros. Contrata-se uma empresa para fornecer 400 litros de água nesse dia, 600 litros no dia seguinte, 800 litros no próximo e assim por diante, aumentando em 200 litros o fornecimento de cada dia. O número de dias necessários para que a caixa atinja a sua capacidade total é:

a) 11 *b*) 13 *c*) 14 *d*) 12 *e*) 10

Solução.

Como a capacidade da caixa d`água é 25.000 e num determinado dia a caixa contém 9.600 litros, então para que ela fique completamente cheia, precisamos de 25.000 – 9.600 = 15.400 litros. Se a empresa vai fornecer 400 litros em um dia, 600 no segundo e assim por diante, então temos a P.A. (400, 600, ⋯, a_n, ⋯) com o primeiro termo a_1 = 400 e a razão r = 200. Como,

$$400 + 600 + \cdots + a_n = \frac{(400 + a_n) \cdot n}{2} \qquad \text{(I)}$$

e,

$$a_n = 400 + (n - 1)200 = 200n + 200. \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$\frac{(400 + 200n + 200)n}{2} = 15.400.$$

A equação acima é equivalente a $100n^2 + 300n – 15400 = 0$. Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos n = 11 ou n = -14. Como estamos considerando o número de dias, nossa resposta é, 11dias para que a caixa atinja a sua capacidade total.

2.4 Progressão Geométrica

Definição 2.4.1 Dizemos que uma sequência (a_n) é uma progressão geométrica (P.G.), se cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com uma constante $q \in \mathbb{R}$, denominada razão da P.G. Em outras palavras uma progressão geométrica é dada por:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n q, n \in \mathbb{N}, q \in \mathrm{R}, \end{cases}$$

onde a é um número real dado.

Exemplo 2.4.2 Se a = 2 e q = 3, então a P.G. cujo primeiro termo é 2 e a razão é 3 é dada por:

$$(a_n) = (a_1, a_2, \cdots) = (2, 6, 18, \cdots).$$

Definição 2.4.3 Seja (a_n) uma Progressão Geométrica de razão q, se:

(***i***) $q > 1$, dizemos que (a_n) é uma P.G. *crescente*.

(***ii***) 0$<q<1$, dizemos que (a_n) é uma P.G. *decrescente.*
(***iii***) q = 1, dizemos que (a_n) é uma P.G. *constante.*
(***iv***) $q<0$, dizemos que (a_n) é uma P.G. *alternante.*
(***v***) a_1 = 0 ou q = 0, dizemos que (a_n) é uma P.G. *singular*.

Exemplo 2.4.4 Encontre uma P.G. cujo primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.
Solução.
Como a razão q = 2 > 1, a progressão geométrica é crescente. Seus primeiros termos são dados por:

$$(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, \cdots).$$

Exemplo 2.4.5 Se o primeiro termo a_1 e a razão q de uma P.G., são, respectivamente, 4 e $\frac{1}{2}$, escreva seus seis primeiros termos.
Solução.
Como a razão $q = \frac{1}{2} > 0$, a progressão geométrica é decrescente e seus primeiros termos são:

$$\left(4, 2, 1, \ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right).$$

Exemplo 2.4.6 Sabendo que $a_1 = 5$ e q = 1 são, respectivamente, primeiro termo e razão de uma P.G., escreva essa progressão.
Solução.
Como a razão $q = 1$, a progressão geométrica é constante e seus termos são:

$$(5, 5, 5, \cdots).$$

Exemplo 2.4.7 Escreva os cinco primeiros termos uma progressão geométrica onde o primeiro termo é $a_1 = 2$ e razão é q = - 3.
Solução.
Como a razão $q = -3 < 0$, a progressão geométrica é alternante e seus cinco primeiros termos são:

$$(2, -6, 18, -54, 162, \cdots).$$

Exemplo 2.4.8 Determinar uma P.G. cujo primeiro termo é $a_1 = 6$ e a razão é q = 0.
Solução.
Como a razão $q = 0$ a progressão geométrica é singular e seus termos são:

$$(6, 0, 0, 0, \cdots).$$

Observação: Em alguns problemas que envolvem uma progressão geométrica, sendo a razão $q \neq 0$, é útil escrever os seus:

(***i***) 3 primeiros termos $\frac{x}{q}$, x e xq,

(***ii***) 4 primeiros termos $\frac{x}{q^3}$, $\frac{x}{q}$, xq e xq^3,

(***iii***) 5 primeiros termos $\frac{x}{q^2}$, $\frac{x}{q}$, x, xq e xq^2.

Exemplo 2.4.9 Considere uma progressão geométrica crescente, onde os três primeiros termos tem soma igual a 13 e produto 27. Encontre esses termos dessa P.G..

Solução.

Consideremos os três primeiros termos $\frac{x}{q}$, x e xq e $q \neq 0$, *da* P.G., que estamos procurando. Por hipótese,

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 13 \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 27. \end{cases}$$

Das igualdades acima, segue que,

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 13 \\ x^3 = 27. \end{cases}$$

Portanto, $x = 3$ e $q = 1/3$ ou $q = 3$. Sendo que a P.G. é crescente, $q > 1$, então $q = 3$. Logo, a progressão geométrica procurada é $(1, 3, 9, \cdots)$.

Teorema 2.4.10 (*Termo geral de uma progressão geométrica***)** Se (a_n) é uma progressão geométrica então o termo geral a_n é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Usando a lei de recorrência de uma P.G., com o primeiro termo a_1 e razão q, temos:

2º termo: $a_2 = a_1 q$

3º termo: $a_3 = a_2 q$

4º termo: $a_4 = a_3 q$

....

n-ésimo termo: $a_n = a_{n-1} q$.

Multiplicando todas as igualdades, membro a membro, temos:

$$a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} q^{n-1}.$$

Cancelando-se termos iguais, sendo $a_i \neq 0, \forall\, i = 2, \cdots, n - 1$, segue que:

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \qquad \square$$

Exemplo 2.4.11 Encontre o 6º termo de uma P.G. cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e a razão é $q = 10$.

Solução.

Sendo $a_n = a_1 q^{n-1}$ o termo geral de uma P.G., então temos:

$$a_6 = a_1 q^{6-1} = 2 \cdot 10^5 = 200.000.$$

Propriedades dos termos de um P. G.:

Propriedade 2.4.12 Em uma P.G. (a_n) três termos consecutivos, a_{n-1} , a_n e a_{n+1}, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Demonstração. Considere três termos consecutivos de uma P.G., a_{n-1} , a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

$$a_n = a_{n-1} q \qquad \text{ou} \qquad \text{(I)}$$

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}. \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando (I) e (II), membro a membro, temos:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} a_{n+1}. \qquad \square$$

Exemplo 2.4.13 Se $4x$, $2x + 1$ e $x - 1$ são termos consecutivos de uma P.G., então o valor de x é:

a) -1/8 *b*) -8 *c*) -1 *d*) 8 *e*) 1/8

Solução.

Usando a propriedade 2.4.12, aos termos consecutivos $4x$, $2x + 1$ e $x - 1$ da P.G. segue que,

$$(2x + 1)^2 = 4x\,(x - 1).$$

Resolvendo a equação acima temos:

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x$$
$$8x = 1.$$

Disto segue que x é -1/8.

Teorema 2.4.14 (*Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica*) Se (a_n) é uma P.G., então a soma dos *n* primeiros termos, S_n, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Demonstração. Considere a progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, e seja S_n a soma dos *n* primeiros termos desta P.G., ou seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando ambos os membros pela razão *q*, temos:

$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$, e sendo:

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$
$$a_4 = a_3 q$$
....
$$a_n = a_{n-1} q$$

e o termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1}$, ocorre que:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_1 q^n. \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo-se (I) de (II), temos:

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow (q - 1)S_n = a_1(q^n - 1).$$

Logo, concluímos que:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1. \qquad \square$$

Exemplo 2.4.15 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (2, 6, 18, ⋯).

Solução.

Sendo que o primeiro termo é a_1 = 2, a razão é *q* = 3. Como queremos calcular a soma dos oito primeiro termos, segue que *n* = 8. Usando o Teorema 2.4.14, segue que:

$$S_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6.561 - 1)}{2} = 6.560.$$

Logo, a soma dos oito primeiros termos da P.G. é 6.560.

Exemplo 2.4.16 (PROFMAT – 2013)

a) Para que valores de b existe uma progressão geométrica para a qual a soma dos *n* primeiros termos seja igual a $3^{n+1} + b$, para todo *n* natural?

b) Quais são o primeiro termo e a razão dessa progressão?

Solução.

a) A soma dos *n* primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1}.$$

Comparando a expressão acima com a expressão $3^{n+1} + b$, segue que,

$$q = 3 \text{ e } \frac{a_1}{q - 1} = 3.$$

Daí, a_1 = 6 e o valor de *b* = $-\frac{a_1}{q-1}$ = – 3.

b) O primeiro termo dessa P.G. é a_1 = 6 e a razão é q = 3.

3 LIMITE DE SEQUÊNCIAS

3.1 Noção de Limite

Uma bola de boliche foi jogada em uma pista de 8m, sendo que, em cada segundo, percorre metade da distância que a separa do primeiro pino (Figura 3.1.1). Considere a função $d(t)$ que faz corresponder a cada valor t de tempo ($t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), em segundo, um único valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola.

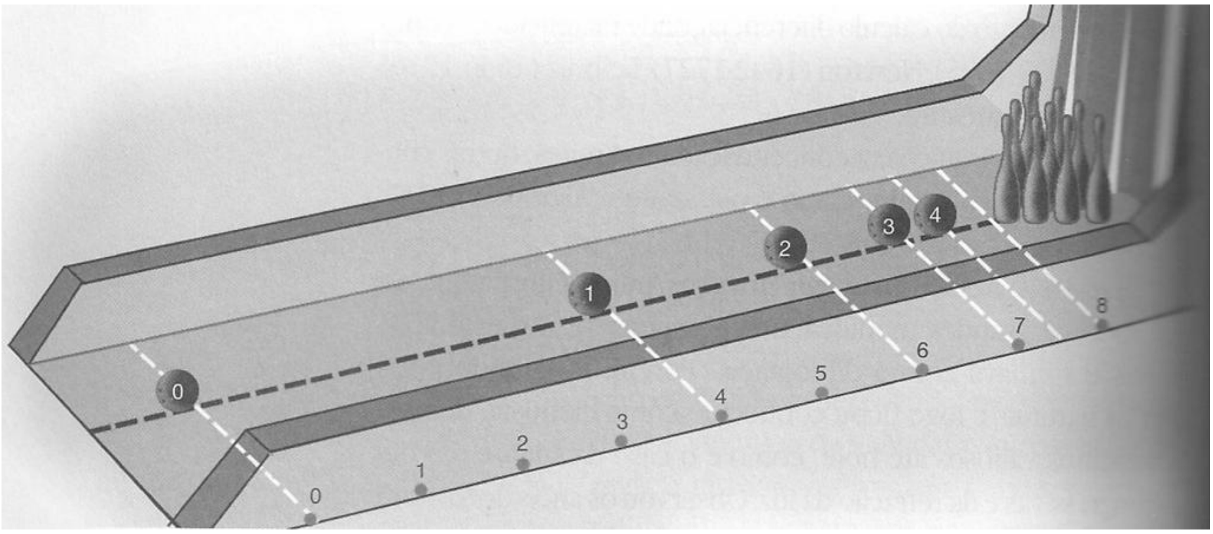


Figura 3.1.1 – Pista de Boliche

Vamos analisar a tabela com os valores $d(t)$ e seu gráfico na Figura 3.1.2:

t(s)	*d(m)*
0	0
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875

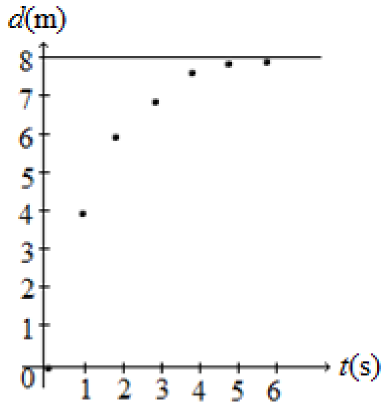


Figura 3.1.2 - Gráfico de $d(t)$

Note que, a cada instante, a bola se aproxima mais e mais do 1º pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8 quanto maior o valor do tempo. Com isto, vemos que quando t assume valores cada vez maiores; d se aproxima de 8. Isto nos leva à noção intuitiva de limite de uma sequência.

Exemplo 3.1.1 Este exemplo foi aplicado em sala de aula. Seja uma sequência cujos termos são frações, com numerador igual a $n \geq 1$ e denominador, três unidades a mais que o numerador. Vamos localizar cada termo no gráfico e, em seguida localizar outros termos neste mesmo plano com valores de grandezas 10^3, 10^4 ou outro maior. O que você observou neste gráfico na Figura 3.1.3?

Solução.

A lei de recorrência, ou termo geral é $a_n = \frac{n}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, assim temos que:

para $n = 1$, $a_1 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0{,}25$,

para $n = 2$, $a_2 = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} = 0{,}40$,

para $n = 3$, $a_3 = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50$,

....

para $n = 10$, $a_{10} = \frac{10}{10+3} = \frac{10}{13} = 0{,}77$,

....

para $n = 1.000$, $a_{1.000} = \frac{1.000}{1.000+3} = \frac{1.000}{1.003} = 0{,}997$,

....

para $n = 10.000$, $a_{10.000} = \frac{10.000}{10.000+3} = \frac{10.000}{10.003} = 0{,}9997$.

....

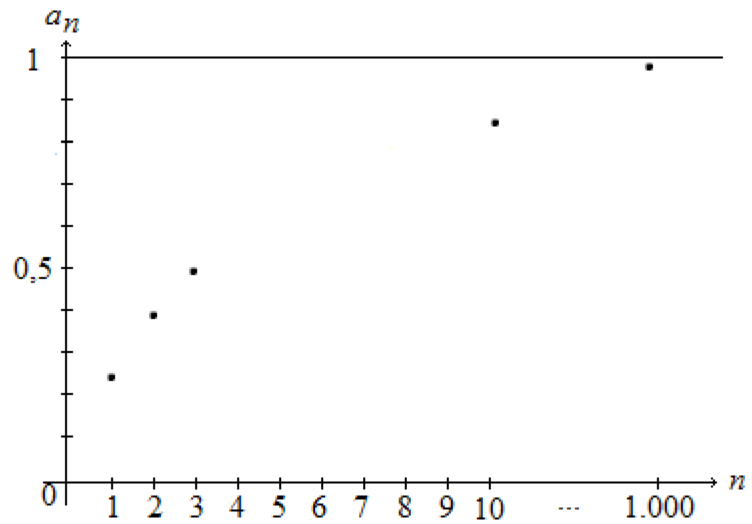


Figura 3.1.3 - Gráfico da sequência a_n.

Observação. Foi aplicado para os alunos e estes observaram que os termos da sequência aproximam-se do número 1, ou seja, 1 é uma ``*barreira*'' para a sequência.

Exemplo 3.1.2 Estude o comportamento da sequência (a_n), onde $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Observe que:

para $n = 1$, $a_1 = 1$,

para $n = 2$, $a_2 = 1/2 = 0{,}50$,

ara $n = 3$, $a_3 = 1/3 = 0{,}33$,

para $n = 4$, $a_4 = 1/4 = 0{,}25$,

para n = 5, a_5 = 1/5 = 0,20,

....

para n = k, $a_k = \frac{1}{k}$,

para n = k + 1, $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Na Figura 3.1.4 abaixo,

.

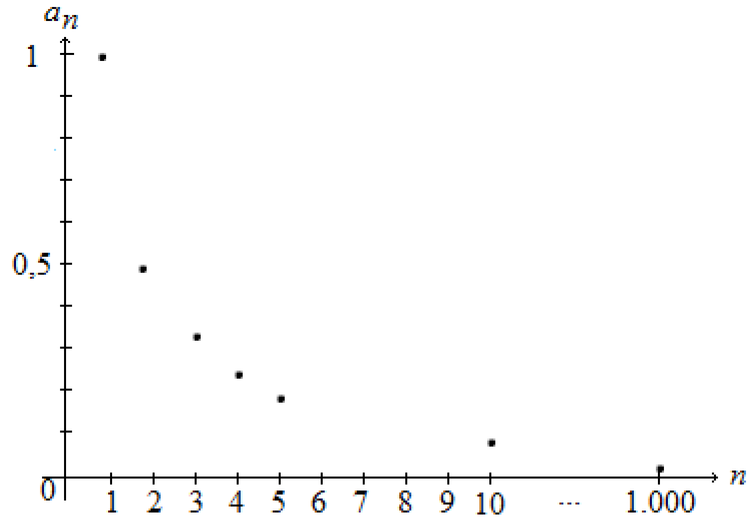


Figura 3.1.4 - Gráfico da sequência a_n .

podemos observar que a sequência se aproxima cada vez mais a zero.

3.2 Limite de uma Sequência

Noção. Consideremos a sequência (a_n), onde $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$. Veja a imagem da sequência na Figura 3.2.1. Observe que os termos da sequência se aproximam de zero, quando n cresce, ou seja, para n suficientemente ''*grande*'', o n-ésimo termo da sequência $\frac{1}{2^n}$ fica muito próximo de zero.

Consideremos a distância entre $\frac{1}{2^n}$ e 0 (zero) seja menor que $\frac{1}{512}$, ou seja, $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \frac{1}{512}$. Com isto temos que a partir do 10° termo, os termos da sequência estarão próximos de 0, com aproximação menor que $\frac{1}{512}$. Em geral, sendo dada uma aproximação $\epsilon > 0$, é possível encontrar um número natural n_0 tal que $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \epsilon$ quando $n > n_0$.

De fato, veja para qualquer valor de n, a distância de $\frac{1}{2^n}$ até 0 (zero) é menor do que 1, ou seja, $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < 1$. Facilmente, vemos que todos os elementos da sequência estão no intervalo (-1,1). Tomemos:

para $\epsilon = 1$, $\frac{1}{2^n} < 1 \Rightarrow 2^n > 1 \Rightarrow n \geq 1$, assim $a_n \in (-1,1), \forall\, n \geq 1$,

para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^n > 2 \Rightarrow n \geq 2$, assim $a_n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\forall\, n \geq 2$, para $\epsilon = \frac{1}{4}, \frac{1}{2^n} < \frac{1}{4} \Rightarrow 2^n > 4 \Rightarrow n \geq 3$, assim $a_n \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\forall\, n \geq 3$,

para $\epsilon = \frac{1}{8}, \frac{1}{2^n} < \frac{1}{8} \Rightarrow 2^n > 8 \Rightarrow n \geq 4$, assim $a_n \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, $\forall\, n \geq 4$,

....

para $\epsilon = \frac{1}{64}, \frac{1}{2^n} < \frac{1}{64} \Rightarrow 2^n > 64 \Rightarrow n \geq 7$, assim $a_n \in \left(-\frac{1}{64}, \frac{1}{64}\right)$, $\forall\, n \geq 7$,

....

para $\epsilon = \frac{1}{512}, \frac{1}{2^n} < \frac{1}{512} \Rightarrow 2^n > 512 \Rightarrow n \geq 10$, assim $a_n \in \left(-\frac{1}{512}, \frac{1}{512}\right)$, $\forall\, n \geq 10$.

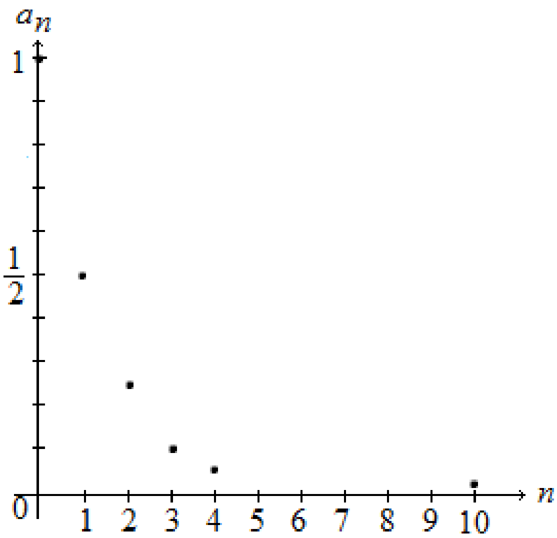


Figura 3.2.1 - Gráfico da sequência a_n .

Dizemos, então, que o limite de $\frac{1}{2^n}$, quando n tende ao infinito, é zero.

Podemos concluir que dado um número real positivo ϵ, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ o qual geralmente depende de ϵ, tal que todos os elementos a_n estão no intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, a partir do índice n_0.

Definição 3.2.1 Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem limite $L \in \mathbb{R}$, se a partir de certo índice n_ϵ, todos os termos da sequência se aproximam cada vez mais de L. Ou, ainda dizemos que, uma sequência (a_n) tem o limite L, se para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ qualquer inteiro $n > n_\epsilon$ (Figura 3.2.2) e escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Simbolicamente temos:

$$a_n \to L \Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N} :\ \forall\, n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon).$$

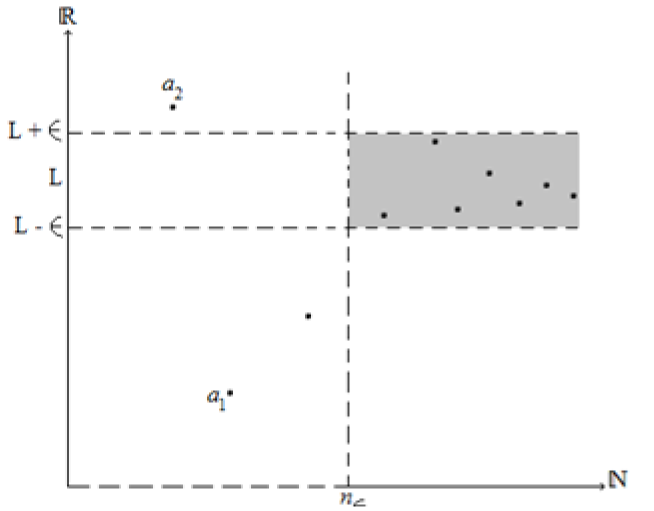


Figura 3.2.2: Gráfico da sequência convergente a_n.

Definição 3.2.2 Se uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tem limite $L \in \mathbb{R}$, dizemos que ela é *convergente*. Caso contrário, dizemos que ela é *divergente*.

Observação 3.2.3 Dizemos que uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$ não converge (Figura 3.2.3) para um número $L \in \mathbb{R}$ corresponde a dizer que para algum $\epsilon_0 > 0$, qualquer que seja o natural *k*, existe um natural $n_k > k$ e $|a_{n_k} - L| \geq \epsilon_0$. Em símbolos:

$$a_n \nrightarrow L \ \Leftrightarrow \left(\exists\, \epsilon_0 > 0 : \forall\, k \in \mathbb{N}, \exists\, n_k \in \mathbb{N};\ n_k > k \wedge |a_{n_k} - L| \geq \epsilon_0\right).$$

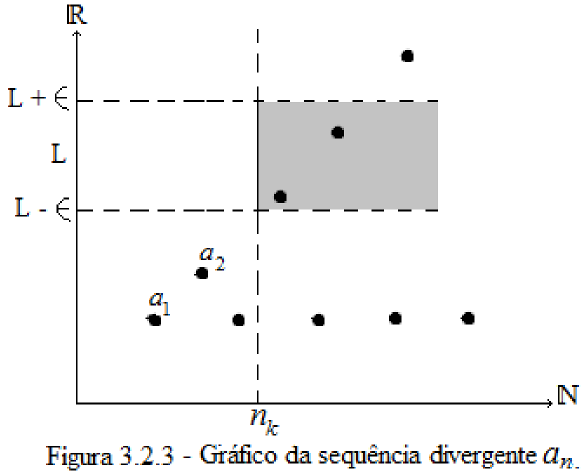


Figura 3.2.3 - Gráfico da sequência divergente a_n.

Teorema 3.2.4 (*Unicidade do limite*) Se $(a_n) \subset \mathbb{R}$ é convergente, então o limite é único. Isto é, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ então $L = M$.

Demonstração. Suponhamos que $L \neq M$ então $|M - L| > 0$. Por hipótese $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, isto é, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: se $n > n_0$ então $|a_n - L| < \epsilon$.

Por outro lado $\lim_{n\to\infty} a_n = M$, i. é, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: se $n > n_1$ então $|a_n - M| < \epsilon$.

Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{2}|M - L|$ as desigualdades acima valem. Daí, para este ϵ tomamos $N = max\{n_0, n_1\}$. Assim se $n > N$ então $n > N \geq n_0$ e $n > N \geq n_1$ e, portanto $|a_n - L|$ e $|a_n - M|$ são menores que ϵ. Logo,

$$|M - L| = |M - a_n + a_n - L| \leq |a_n - L| + |a_n - M| < 2\epsilon = |M - L|,$$

O que implica que $|M - L| < |M - L|$. Isto é uma contradição. Portanto $M = L$. □

Exemplo 3.2.5 Demonstrar que o $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, onde $a_n = \frac{1}{n}$.

Solução.

Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, temos que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$. Para isto, temos que resolver a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Resolvendo essa desigualdade obtemos $n > \frac{1}{\epsilon}$. Como estamos procurando n_0 natural, vamos pegar $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$. Com isto temos para todo $n \geq n_0$, a desigualdade $\frac{1}{n} < \epsilon$ está satisfeita. Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Figura3.2.4). A notação $[x]$ significa a parte inteira do número real x.

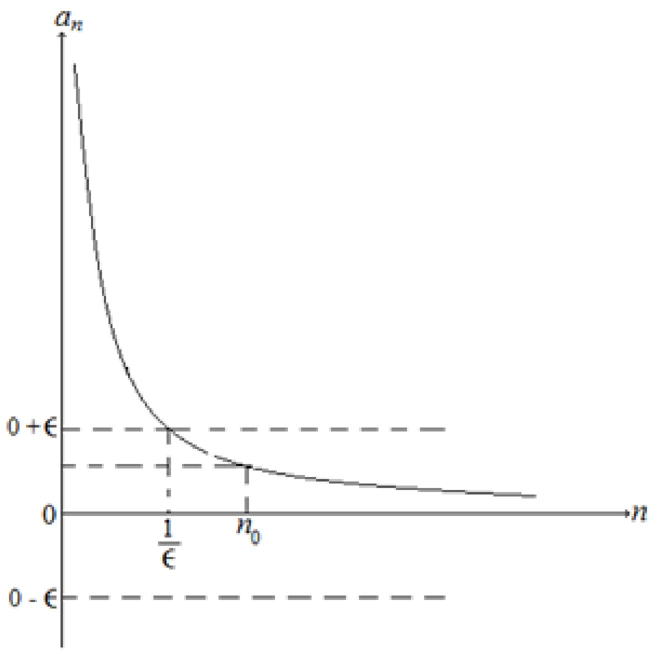


Figura 3.2.4 - Gráfico da sequência a_n

Outra maneira de justificar a existência de n_0 natural, tal que, $\frac{1}{n} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ e fazendo o uso da propriedade Arquimediana dos números reais (veja [6, p. 19]).

Exemplo 3.2.6 Calcule o limite da sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$, quando $n \to \infty$.

Solução.

Observe que:

$$a_n = \frac{2n+1}{n-1} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Observe o gráfico da Figura 3.2.5:

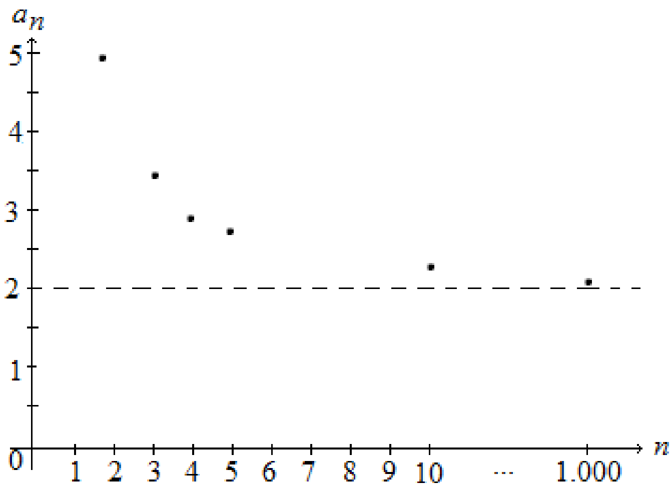


Figura 3.2.5 - Gráfico da sequência a_n.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, segue que a sequência (a_n) é convergente.

Teorema 3.2.7 Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então toda subsequência de (a_n) também converge para L.

Demonstração. Seja $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de (a_n) Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, para todo $\epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $a_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ para todo $k > n_0$. Isto significa que $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para L. □

Teorema 3.2.8 Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ então:

$(\boldsymbol{i})$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

$(\boldsymbol{ii})$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

$(\boldsymbol{iii})\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}, y_n \neq 0$ e $b \neq 0$.

Demonstração. ($\boldsymbol{i}$) Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, dado $\epsilon > 0$,

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\ e$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $N = max\{n_1, n_2\}$ e usando a desigualdade triangular temos,

$$|x_n + y_n - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall\, n > N.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. Usando mesmo argumento provemos que,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b.$$ □

($\boldsymbol{ii}$) Primeiramente observe que:

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existe $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ tal que $|x_n| \leq L$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por outro lado,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b|+1)}.$$

De $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ segue que,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_2 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2(L+1)}.$$

Tomando, $N = max\{n_1, n_2\}$ temos:

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \\ &\leq L \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \\ &< L \cdot \frac{\epsilon}{2(L+1)} + \frac{\epsilon}{2(|b|+1)} \cdot |b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$. □

($\boldsymbol{iii}$) Observe que:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| \leq \frac{|b||x_n - a|}{|y_n||b|} + \frac{|a||b - y_n|}{|y_n||b|} \leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a|}{|b|}\frac{|b - y_n|}{|y_n|}.$$

Vamos mostrar que a sequência $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ é limitada. Como $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, para

$$\epsilon = \frac{|b|}{2}, \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n > n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Disto segue que $|b| - |y_n| \leq |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ e daí $|y_n| > \frac{|b|}{2}, \forall n > n_1$. Logo,

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall\, n > n_1.$$

Fazendo $M_1 := max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \ldots, \frac{1}{|y_{n1}|}, \frac{2}{|b|}\right\}$ temos:

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq M_1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, segue que:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_2 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_2 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2M_1}.$$

Também, de $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, segue que,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_3 \in \mathbb{N}: \forall\, n > n_3 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2M_2},$$

onde $M_2 := \frac{|a|}{|b|} M_1$.
Fazendo $N := max\{n_2, n_3\}$, temos:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \leq M_1|x_n - a| + M_2|b - y_n|, \forall n > N$$

$$< M_1 \frac{\epsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\epsilon}{2M_2} = \epsilon, \forall\, n > N.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, se $y_n \neq 0$ para todo n e $b \neq 0$. □

Observação 3.2.9 As afirmações do Teorema sobre o limite da soma e o produto de duas sequências convergentes facilmente podem ser estendidas para um número finito qualquer de sequências convergentes usando a Indução Matemática. Assim, se a_n, b_n, ..., z_n são sequências convergentes então a_n + b_n + ... + z_n é uma sequência convergente e,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + \ldots + z_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \ldots + \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Do mesmo modo, seu produto $a_n b_n \ldots z_n$ é uma sequência convergente e,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n \ldots z_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n \ldots \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Em particular se p é uma número racional positivo e x_n é uma sequência convergente, então,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^p.$$

Exemplo 3.2.10 Calcule o limite da sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{n}{n+3}$, $n \geq 1$, quando $n \to \infty$.
Solução.
Observe que:

$$a_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right) = 1$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, segue que a sequência (a_n) é convergente.

Exemplo 3.2.11 Calcule o limite da sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{4n^2 - n + 3}{2n^2 + 3n - 5}$, $n \geq 1$, quando $n \to \infty$.
Solução.
Observe que:

$$a_n = \frac{4n^2 - n + 3}{2n^2 + 3n - 5} = \frac{n^2\left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{\left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 4$ e $\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 2$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, segue que a sequência (a_n) é convergente.

O seguinte resultado é uma ferramenta útil para determinar se uma sequência (a_n) é convergente sem termos que calcular o limite.

Teorema 3.2.12 (*convergência Monótona*) Toda sequência monótona e limitada é convergente.
Demonstração. Seja (a_n) uma sequência monótona digamos crescente e limitada. Logo o conjunto $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ imagem da sequência (a_n) é limitado superiormente. Pelo axioma da completude de $\mathbb{R}$, o supremo $L = supB$ existe em $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Se $L = supB$ então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists a_k \in B : L - \epsilon < a_k \leq L.$$

Como (a_n) é crescente, $a_k \leq a_n, \forall n > k$. Logo,

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, k \in \mathbb{N} : L - \epsilon < a_k \leq L.$$

Daí:

$$L - \epsilon < a_k \leq a_n \leq L < L + \epsilon,$$

De onde segue:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, da última desigualdade tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = L = supB = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Raciocínio análogo se aplica ao caso de uma sequência decrescente. □

Exemplo 3.2.13 Calcule a expressão

$$\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\ldots}}}}\,.$$

Solução.
A expressão dada acima pode ser escrita como uma sequência recorrente (a_n) dada por:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}, n \geq 1. \end{cases}$$

Esta sequência já foi vista no Exemplo 2.2.6, onde mostramos que a sequência (a_n) é monótona e limitada. Usando o Teorema 3.2.12, segue que a sequência (a_n) é convergente. Denotemos por $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Como, $a_{n+1}^2 = 3 + a_n$, segue:

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty}(3 + a_n) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} a_n = 3 + a.$$

Assim, temos uma equação quadrática $a^2 = 3 + a$ ou $a^2 - a - 3 = 0$, cujas raízes dessa equação são: $a_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ou $a_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Logo, como $a > 0$, segue que $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Definição 3.2.14 Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a_n tende a infinito (resp. menos infinito) quando *n* tende a infinito se para todo número real $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ (resp. $a_n < -M$) para todo $n > n_0$.

Neste caso escrevemos $a_n \to +\infty$ (resp. $a_n \to -\infty$) quando $n \to \infty$. Em vez de ``a_n tende a infinito'' (resp. menos infinito) algumas vezes dizemos que (a_n) diverge para infinito (resp. menos infinito). Simbolicamente:

$$a_n \to +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, n_M = n(M) \in \mathrm{N} :\ \forall\, n > n_M \Rightarrow a_n > M)$$

$$a_n \to -\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, n_M = n(M) \in \mathrm{N} :\ \forall\, n > n_M \Rightarrow a_n < -M).$$

Veja Figura 3.2.6 para o caso de uma sequência divergindo para mais infinito.

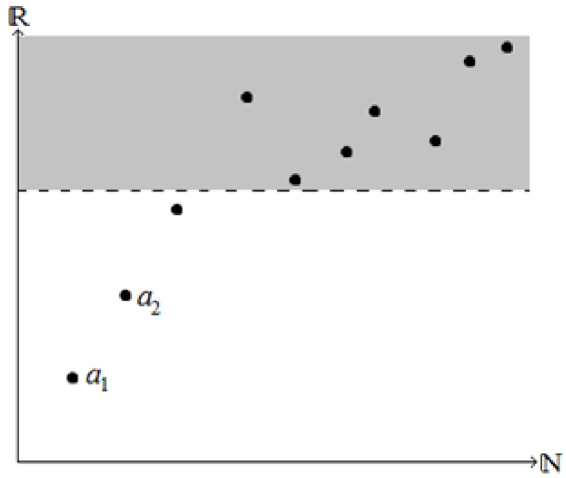


Figura 3.2.6 - A sequência (a_n) diverge para mais infinito

Propriedades: Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

(***i***) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(***ii***) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty, se\ b > 0, \\ -\infty, se\ b < 0. \end{cases}$$

(***iii***) Se $a_n > c > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in$ N e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ então, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.
(***iv***) Se (a_n) é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ então, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Exemplo 3.2.15 Calcule o limite da sequência (a_n) cujo termo geral é $a_n = \frac{5n^3 - 2n + 4}{3n^2 - n + 1}$, $n \geq 1$, quando $n \to \infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$,
Solução.
Observe que:

$$a_n = \frac{5n^3 - 2n + 4}{3n^2 - n + 1} = \frac{n^3\left(5 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\left(5 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right) = 5$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 0$, segue da propriedade (***iv***) que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Portanto, a sequência (a_n) diverge para mais infinito.

Exemplo 3.2.16 Calcule o limite da sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 2n - 3$, quando $n \to +\infty$.
Solução.
Observe que:

$$a_n = 2n - 3 = n\left(2 - \frac{3}{n}\right).$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2$, segue da propriedade (***ii***) que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, segue que a sequência (a_n) diverge para mais infinito.
Observe o gráfico da Figura 3.2.7:

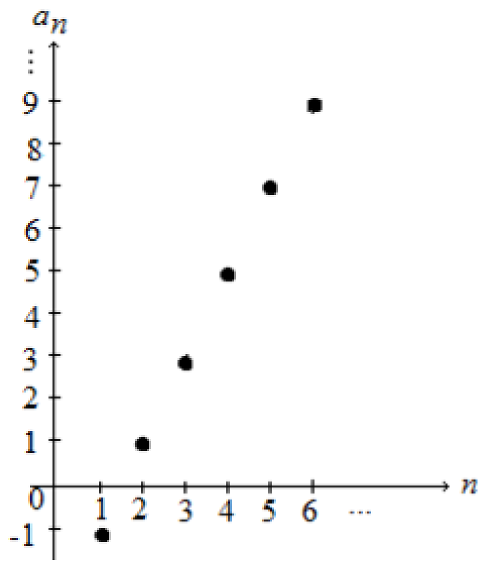


Figura 3.2.7 - Gráfico da sequência a_n.

Exemplo 3.2.17 A sequência $a_n = \left\{\ln\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge para menos infinito.

Solução.

Para provar isto, devemos mostrar que dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\ln\left(\frac{1}{n}\right) < -M$. De fato, como $e^{-M} > 0$ pela propriedade Arquimediana existe $n_0 \in$ N tal que $n_0 e^{-M} > 1$. Se $n > n_0$ temos que $n > e^M$ e daí $\frac{1}{n} < \frac{1}{e^M}$. Logo, $\ln\left(\frac{1}{n}\right) < \ln\left(\frac{1}{e^M}\right) = -M$.

Portanto, $a_n \to -\infty$. □

Exemplo 3.2.18 A sequência $a_n = \{\sqrt{\mathrm{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ diverge para mais infinito.

Solução.

Para provar isto, devemos mostrar que dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\sqrt{n} > M$. De fato, dado $M > 0$ qualquer. Pela propriedade Arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot 1 > M^2$. Tomemos $n_0 = m + 1$. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n > n_0 = m + 1 > m > M^2$.

Logo, $\sqrt{n} > M$, para todo $n > n_0$.

Portanto, $a_n \to +\infty$. □

3.3 Soma dos Termos de uma P.G. Infinita

Definição 3.3.1 Dada uma sequência (a_n). Definimos a n – ésima soma parcial da sequência (a_n) por $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. A sequência (S_n) formada pelas somas parciais de (a_n) é chamada de série. Se a sequência (S_n) *converge* para S, dizemos que a série converge e que S é a soma da série.

Teorema 3.3.2 Se (a_n) é uma P.G. com razão q tal que $q \in (-1,1)$, então:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração. Vamos provar que o limite da sequência (S_n) das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1-q}$.

Observe que:

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $-\frac{a_1}{1-q}$ é constante e, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, $q \in (-1,1)$. Assim, concluímos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{a_1}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n\right) = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0.$$

Logo, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$. □

Exemplo 3.3.3 Calcule a soma dos termos da P.G. infinita $\left(3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\cdots\right)$.

Solução.

Observe que a razão $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ e primeiro termo a_1 = 3, então a soma S dos termos da P.G. infinita e:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \ = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

***Os exercícios a seguir foram trabalhados com os alunos da 1ª Série do Ensino Médio*:**

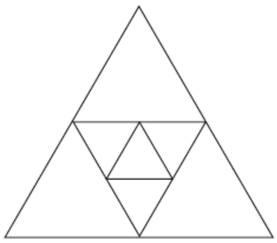
1. (Vunesp - 2011) Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4 cm. Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes. A soma dos perímetros da infinidade de triângulos formados na sequência, incluindo, o triângulo original, é igual a:

a) 16cm *b*) 18cm *c*) 20cm *d*) 24cm *e*) 32cm

Solução.

Sabendo que os pontos médios de um triângulo forma outro triângulo de perímetro cuja medida é metade da anterior, ou seja, o perímetro do:

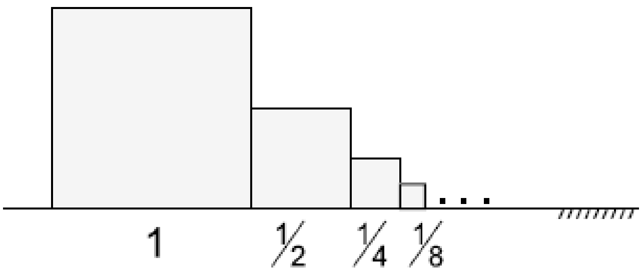
1º triângulo = 12cm
2º triângulo = 6cm
3º triângulo = 3cm
4º triângulo = 1,5cm
....



Obtemos assim, uma P.G. cujos primeiros termos são (12, 6, 3, ⋯), sendo o primeiro termo a_1 = 12 e razão q = 1/2 ∈ (-1,1). Logo, a soma S dos perímetros da infinidade de triângulos formados na P.G. é:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 12\cdot 2 = \ 24\text{cm}.$$

2. (UEL-PR) Na figura abaixo, o lado do quadrado maior mede 1 e os outros quadrados foram construídos de modo que a medida do respectivo lado seja a metade do lado do quadrado anterior. Imaginando que a constituição continue indefinidamente, qual a soma das áreas de todos os quadrados?



Solução.

Analisando cada figura, as áreas A_1, A_2, A_3, $\cdots$ dos quadrados são:

$A_1 = 1^2 = 1$

$A_2 = (1/2)^2 = 1/4$

$A_3 = (1/4)^2 = 1/16$

....

Portanto, A_1, A_2, A_3, $\cdots$ formam uma P.G. de primeiro termo a_1 = 1 e razão q = 1/4 ∈ (-1,1). Logo, a soma S das áreas de todos os quadrados é:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

3. (UPE) Júnior marcou com Daniela às 15 horas para juntos assistirem a um filme, cuja sessão se inicia às 16 horas. Como às 15 horas Daniela não chegou, Júnior resolveu esperar um tempo t_1 igual a 15 minutos e, após isso, um tempo t_2 igual a 1/4 de t_1, e logo após, um tempo t_3 igual a 1/4 de t_2, e assim por diante. Daniela não chegou para encontro. Por quanto tempo Júnior esperou até ir embora?

a) 1 hora *b*) 1 dia *c*) 20 minutos *d*) 30 minutos *e*) 45 minutos

Solução.

Do enunciado, temos que os tempos de espera, em minutos, formam uma P.G. decrescente infinita de primeiro termo a_1 = 15 e razão q = 1/4 ∈ (-1,1), ou seja, $\left(15, \frac{15}{4}, \frac{15}{16}, \ldots\right)$. Portanto, a soma S dos tempos que Júnior esperou até ir embora é:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{15}{1-\frac{1}{4}} = \frac{15}{\frac{3}{4}} = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20 \text{ minutos}.$$

4. Calcule o resultado limite das seguintes somas:

a) S = –10 + 1 – 0,1 + 0,01 – 0,001 + 0,0001 – $\cdots$

b) $S = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots$

Solução.

a) Os termos (–10; 1; – 0,1; 0,01; – 0,001; 0,0001; $\cdots$) formam uma P.G., sendo o primeiro termo a_1 = - 10 e a razão $q = -\frac{1}{10}$ ∈ (-1,1). Logo, a soma S desta P.G. é dada por:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-10}{1+\frac{1}{10}} = \frac{-10}{\frac{11}{10}} = -\frac{100}{11}.$$

b) Os termos $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \cdots\right)$ formam uma P.G., sendo o primeiro termo $a_1 = \frac{2}{5}$ e a razão $q = \frac{1}{2}$ ∈ (-1,1). Logo, a soma S dos infinitos termos desta P.G. é dada por:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}.$$

5. Resolva a equação em que o primeiro termo da igualdade é o limite da soma *S* dos termos de uma PG infinita: $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{32} + \cdots = 18$.

Solução.

Como os termos $\frac{x}{2}, \frac{x}{8}, \frac{x}{32}, \cdots$ formam uma P.G. infinita de primeiro termo $a_1 = \frac{x}{2}$ e razão $q = \frac{1}{4} \in (-1,1)$. Logo,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = 18.$$

Assim, temos:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{32} + \cdots = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{4}} = 18.$$

Logo, a solução da equação é $x = 27$.

6. A dízima periódica 0,666⋯ equivale à soma 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + ⋯ . Calcule a soma desta série em forma de fração. (Esta fração é chamada *geratriz* da dízima periódica).

Solução:

Considere:

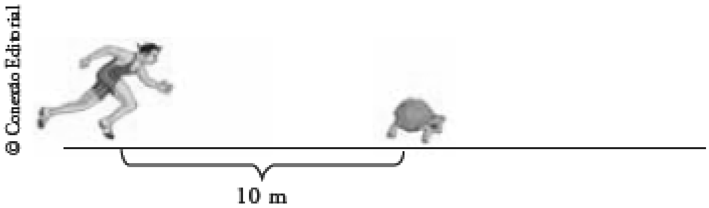
$$0{,}666... = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + \cdots$$
$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots.$$

Assim, as parcelas $\frac{6}{10}, \frac{6}{100}, \frac{6}{1000}, \cdots$ formam uma P.G. infinita cujo primeiro termo $a_1 = \frac{6}{10}$ e a razão $q = \frac{1}{10} \in (-1,1)$. Portanto, a soma *S* dos termos desta P.G. é:

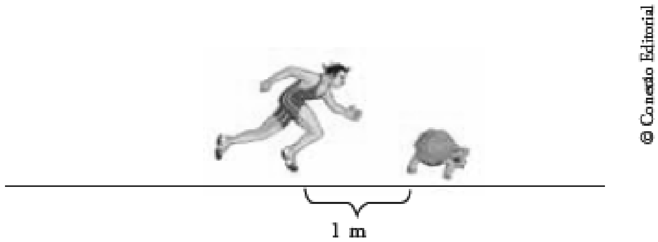
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Logo, a fração geratriz da dízima periódica 0,666⋯ é 2/3.

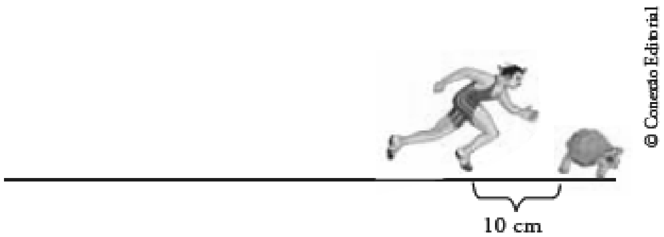
7. (Adaptado do *Paradoxo de Zenão*) Uma corrida será disputada entre Aquiles, grande atleta grego, e uma tartaruga. Como Aquiles é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, esta partirá 10 m à frente de Aquiles, conforme representado no esquema a seguir.



Quando Aquiles chegou ao ponto em que a tartaruga estava inicialmente, depois de percorrer 10 m, a tartaruga, dez vezes mais lenta, estava 1 m à frente.



Aquiles, então, correu 1 m, até o ponto em que a tartaruga estava, mas ela já não estava mais lá: estava 10 cm à frente, pois correu, no mesmo intervalo de tempo, dez vezes menos que Aquiles, e a décima parte de 1 m corresponde a 10 cm.



Repetindo esse raciocínio para os intervalos de tempo seguintes, parece que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois ela sempre terá percorrido 1/10 do que Aquiles percorrer. Será mesmo verdade que ele nunca alcançará a tartaruga?

a) Escreva a sequência das distâncias que Aquiles percorre até chegar ao ponto em que a tartaruga estava a cada vez.

b) A sequência das distâncias é uma PG. Qual é a razão desta PG?

c) Calcule a soma das infinitas distâncias percorridas por Aquiles até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga a cada vez.

d) Quantos metros percorrerá Aquiles até alcançar a tartaruga? Ou você acha que ele não a alcançará?

Solução.

a) $10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots$

b) $q = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

c) $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{10}{1-\ 0{,}1} = \dfrac{10}{0{,}9} = \dfrac{100}{9}$ m.

d) Sim, Arquimedes alcançará a tartaruga após percorrer $\frac{100}{9}$ m.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos Alunos:

Com base nos experimentos dos trabalhos realizados em campo, os alunos concluíram que jogando a bolinha de uma altura de 2m deixando esta cair, a soma das alturas da bolinha de borracha chegou a 3m. Ou de uma altura qualquer ou aplicando uma força qualquer, os experimentos se aproximam de um número e este é o limite convergente da sequência para uma razão entre 0 e 1. Com os exercícios trabalhados em sala de aula, com gráficos, ilustrações, experimentos e acompanhamento do professor, ficaram mais claros os estudos de limite de sequências.

Do Professor:

Como professor, concluímos que o experimento realizado com os alunos serviu para chegar à ideia do limite de uma sequência, funcionando como um pré-requisito para estudos posteriores que abordam limite e, o aluno já está conhecendo intuitivamente este assunto, verificamos que estes absorveram todos os conteúdos, exercícios propostos em sala de aula, e com os experimentos ajudaram a entender melhor o conceito de sequências de números reais. Pela experiência, concluímos que este assunto deve ser abordado no 4º bimestre da 1ª Série do Ensino Médio ou no 1º bimestre da 2ª Série do Ensino Médio, pois assim, o aluno já adquiriu conhecimento de gráficos de funções do 1º e 2º graus, funções exponenciais, logarítmicas e modulares, para que este assunto seja bem desenvolvido.

REFERÊNCIAS

[1] ALBUQUERQUE, Philipe Thadeo Lima Ferreira. **Ponto fixo:** uma introdução no ensino médio. 2014. 69f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional)- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2014.

[2] BARTLE, Robert Gardner; SHERBERT, Donald R. **Introduction to real analysis**. 4th. ed. Hoboken : Wiley, c2011.

[3] SISTEMA COC DE ENSINO. **Teoria:** matrizes, determinantes, sistemas e progressões. Ribeirão Preto: Ed. COC, 2014. Apostila.

[4] LOZADA CRUZ, German Jesus. **Sequências de números reais**. São José do Rio Preto: UNESP, Instituto de Biociências e Ciências Exatas; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. Coleção Brochuras.

[5] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar:** sequência, matrizes, determinantes, sistema. São Paulo: Atual, 1995.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo.** São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

[7] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** São Paulo: Harbra, 1994.

[8] MACHADO, Antonio dos Santos. Funções e derivadas. In: ______. **Matemática:** temas e metas. São Paulo: Atual, 1992a. v.6.

[9] MACHADO, Antonio dos Santos. Trigonometria e progressões. In: ______. **Matemática:** temas e metas. São Paulo: Atual, 1992b. v.2.

10] OLIVEIRA, Fábio Barbosa de. **Modelagem e sequências numéricas.** 2013. 45f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)-Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

[11] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Matemática**: ensino médio: 1. série: caderno do professor. São Paulo, 2014. v.1.

[12] SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2005.

[13] RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Soma de Gauss. Mundo educação, c2014. Progressão. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/soma-gauss.htm>. Acesso em: 10 out. 2014.

[14] SEQUÊNCIA de Fibonacci e número de ouro. [S. l.]: YouTube, 12 set. 2008. Vídeo (5:53 min), son., color. Disponível em:

<http://www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8>. Acesso em: 10 out. 2014. Acesso em: 10/10/2014. Arte e Matemática.

[15] VILA, Cristóbal. **Assinatura de Deus (sequência de Fibonacci).** [S. l.]: The Jah Channel;YouTube, 1 maio. 2012. Vídeo (3:42 min), son., color. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=QpdlHOGjSaQ>. Acesso em: 10 out. 2014.

APÊNDICE A: EXPERIÊNCIAS REALIZADAS EM CAMPO

Nesta seção, vamos relatar algumas experiências feitas com nossos alunos da 1ª Série do Ensino Médio.

Foi feita em campo, na quadra de esportes, uma experiência com os alunos para mostrar o limite atingido por uma bola solta, de certa altura e quicando várias vezes no chão até parar, com isso foi calculado a soma das alturas atingidas e a soma das distâncias entre cada batida no chão, conforme figura abaixo, verificando se a bola parava horizontalmente no cálculo de limite. Problema elaborado pela equipe da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio – 1ª Série, Volumes 1 – São Paulo – 2014.

Experiência Feita.

Uma bola de borracha cai da altura de __ m, bate no solo e sobe até _____ de altura. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe até atingir a ____ da altura anterior e, a cada batida, a distância percorrida é de ____ da anterior. Continuando seu movimento segundo essas condições, isto é, atingindo, após cada batida, a ____da altura que atingiu após a batida imediatamente anterior, qual será as distâncias vertical e total percorrida pela bola até parar?

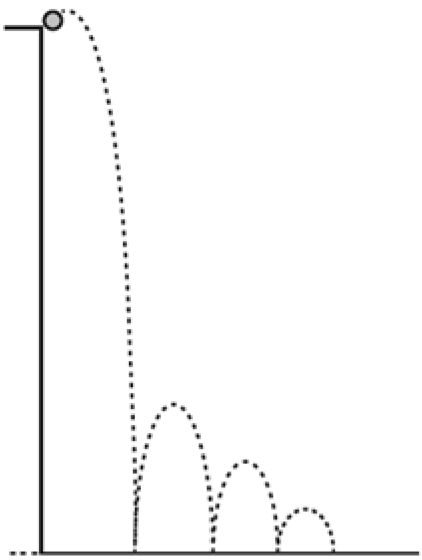


Figura A.1 - Queda da bola.

Solução:

A solução foi feita pelos alunos no cálculo de soma dos termos de uma P.G. infinita, obtendo varias respostas aproximadas.

APÊNDICE B: FOTOS DOS EXPERIMENTOS REALIZADOS EM CAMPO

As Figura B.1 e B.2 mostram os alunos lançando a bolinha de uma altura de 2 metros, observando os pontos de subida e descida, marcando os valores aproximados registrados nas réguas.

Figura B.1

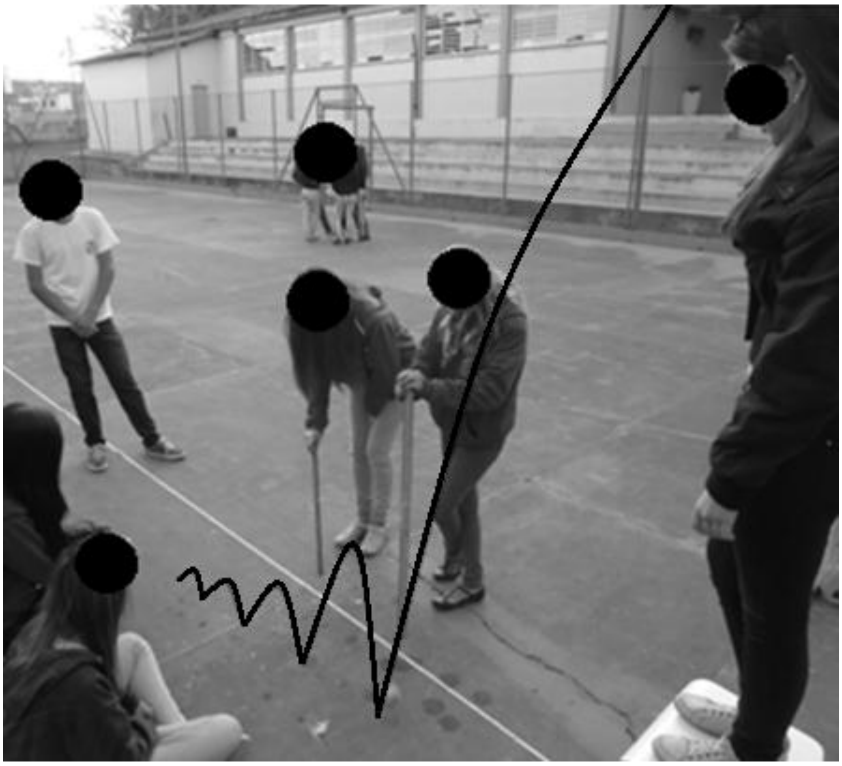


Figura B.2

APÊNDICE C: TRABALHOS REALIZADOS EM SALA DE AULA DAS ANOTAÇÕES EM CAMPO.

Trabalho 1.

Foi feita a experiência na quadra de esportes com a bolinha de borracha, réguas de madeira e uma trena (fita métrica) estirada no chão, temos
"A bola de borracha cai de uma altura de 200 cm, bate no solo e sobe 70 cm. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe 24,5 cm de altura". Continuando seu movimento segundo essas condições, qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?

Solução:

A sequência infinita é uma P.G. formada pelos termos: (200; 70; 24,5; ...)

- 1º: $A_1 = 200$
- razão: $q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{7\cancel{0}}{20\cancel{0}} = \frac{7}{20}$
- A distância vertical total é igual a soma das alturas. $S = 200 + 70 + 24,5 \ldots$ ou seja:

$S = \frac{A_1}{1-q} = \frac{200}{1-\frac{7}{20}} = \frac{200}{\frac{13}{20}} = \frac{200}{1} \cdot \frac{20}{13} = \frac{4.000}{13} = 307,70$ cm $= 3,07$ m.

Logo, a soma das alturas é igual a 3,07 m.

Trabalho 2.

Foi feita a experiência na quadra de esportes com uma bolinha de borracha, réguas de madeira e uma trena (fita métrica) esticada no chão, temos: "A bola de borracha cai de uma altura de 2 m, bate no solo e sobe 60 cm. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe 18 cm de altura. Continuando seu movimento segundo essas condições, qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?

Solução:

A sequência infinita é uma P.G. formada pelos termos (200, 60, 18, ...)

Sendo:

- 1º termo: $a_1 = 200$

- Razão: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{60^{:2}}{200_{:2}} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

- A distância vertical total é igual a soma das alturas

$S = 200 + 60 + 18 \ldots$

ou seja

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{200}{1-\frac{3}{10}} = \frac{200}{\frac{7}{10}} = \frac{200}{1} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2000}{7} = 285{,}71 \text{ cm} = 2{,}85 \text{ cm}$$

Logo, a soma das alturas é igual a 2,85 m

Trabalho 3.

→ Foi feita a experiência na quadra de esportes com uma bolinha de borracha, réguas de madeira e uma trena, esticada no chão, temos: "a bola de borracha cai de uma altura de 2 m, bate no solo e sobe 80 cm. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe 32 cm de altura. Continuando seu movimento segundo essas condições, qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?

Solução:

A sequência infinita é uma P.G. formada pelos termos: (200, 80, 32, ...).

Sendo:

- 1º termo = $a_1 = 200$
- Razão = $q = \frac{a_2}{a_1} = q = \frac{8\cancel{0}^{:4}}{20\cancel{0}^{:4}} = \frac{2}{5}$

• A distância vertical total é igual a soma das alturas

$S = 200 + 80 + 32 + \ldots$

$1 - q$

$$S = \frac{200}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{200}{\frac{3}{5}} = \frac{200}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1.000}{3} = 333{,}33\,cm$$

ou seja

3,33 m.