UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

A FUNÇÃO PERIÓDICA PARA O ENSINO MÉDIO

Wagner Gomes Barroso Abrantes

MANAUS

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Wagner Gomes Barroso Abrantes

A FUNÇÃO PERIÓDICA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

MANAUS
2015

WAGNER GOMES BARROSO ABRANTES

A FUNÇÃO PERIÓDICA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12 de janeiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro

Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao bom Deus, por me conceder a graça de ter força, saúde e disposição para me tornar um Mestre em Matemática.

Agradeço aos meus amados pais, por terem me ensinado os conceitos de um homem de bem, de caráter e aguerrido. Sem o incentivo, o esforço e o amor incondicional de vocês, nenhuma das minhas conquistas seria possível. Vocês são os alicerces da minha vida. Amo vocês!

Agradeço às minhas amadas filha e avó e ao meu amado irmão por todo o apoio e torcida. Amo vocês!

Agradeço a todo o corpo docente do PROFMAT pólo UFAM, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral, pelo profissionalismo e dedicação ao longo dessa difícil jornada.

Agradeço aos meus colegas de turma, que labutaram comigo para lograrmos êxito ao final do curso. Foram dois anos de abnegação que certamente valeram a pena.

Finalmente, agradeço a banca examinadora pelas sugestões dadas, que contribuiram sobremaneira para a melhoria desta dissertação.

RESUMO

As funções periódicas constituem um tema de enorme relevância para o Ensino Médio. Este Trabalho de Conclusão de Curso aborda os conceitos básicos para a compreensão do tema, as características dessas funções e aquelas com as quais os alunos tem contato na educação básica. O emprego dos recursos computacionais no ensino das Funções Periódicas e suas aplicações também fazem parte da pesquisa.

Palavras-chave: Funções periódicas, período, funções trigonométricas, gráfico, recursos computacionais e aplicações.

ABSTRACT

The periodic functions are a topic of enormous importance for the High School. This Labor Completion of course covers the basics for understanding the topic, the characteristics of these functions and those with whom students have contact in basic education. The use of computational resources in the teaching of Periodic Functions and their applications are also part of the research.

Keyswords: Periodic functions, period, trigonometric functions, graphs, computing resources and applications.

Sumário

Introdução

As funções periódicas constituem um tema bastante relevante, amplo e complexo dentro da matemática, pois possuem um comportamento especial, notável principalmente no estudo de seus gráficos.

Os primeiros relatos do estudo de funções periódicas ocorreram em um importante documento matemático egípcio conhecido como *Papiro de Rhind* (cerca de 1700 a.C.), onde há problemas métricos sobre pirâmides que utilizavam funções trigonométricas.

As funções periódicas ganharam destaque no século II a.C., com o estudo da astronomia. Hiparco de Niceia, importante astrônomo grego conhecido como *O pai da trigonometria*, utilizava funções trigonométricas para determinar posições e trajetórias de corpos celestes.

No século II d.C., Cláudio Ptolomeu ampliou os estudos astronômicos de Hiparco. Pouca coisa se sabe sobre Ptolomeu, apenas que fez observações em Alexandria entre os anos de 127 e 151 d.C. Em seu livro, conhecido como *Almagesto*, Ptolomeu apresenta sua teoria astronômica geocêntrica, onde a Terra está no centro do universo. A crença nessa teoria durou quatorze séculos.

Muitos matemáticos, ao longo da história, deram suas contribuições para o entendimento das funções periódicas. Atualmente, essas funções tem um papel importante no estudo de fenômenos periódicos, como o movimento de um pêndulo, o movimento de um planeta em torno do sol ou o ciclo anual de temperaturas em um determinado local.

As funções periódicas que ganham destaque no ensino médio são as funções circulares, em especial as Funções Trigonométricas. Elas são as principais ferramentas de modelagem matemática para fenômenos periódicos.

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) irá se ater ao estudo das funções que são usualmente abordadas no ensino médio, conforme prevê o regulamento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, publicado pela Sociedade Brasileira de

Matemática.

O objetivo desta pesquisa é solidificar os conceitos básicos necessários ao entendimento das características das funções periódicas, definir e caracterizar aquelas que são estudadas na educação básica, exemplificar métodos para auxiliar a aprendizagem dessas funções e enumerar as principais aplicações vistas pelo aluno do ensino médio.

Com o intuito de atingir os objetivos supracitados, o TCC foi dividido em cinco capítulos que abrangem todo o tema.

No primeiro capítulo, abordaremos os conceitos básicos necessários ao entendimento das funções periódicas, como a definição de função, suas classificações e paridades, definição de função inversa e crescimento e decrescimento de funções.

No segundo capítulo, estudaremos as funções periódicas elementares vistas no ensino médio, com ênfase nas funções trigonométricas diretas e inversas, bem como no estudo de seus gráficos.

No terceiro capítulo, exemplificaremos métodos em que os recursos computacionais podem facilitar a aprendizagem desse tema durante o ensino médio.

No quarto capítulo, citaremos como as funções periódicas são empregadas no ensino médio, enfatizando as aplicações no estudo da física e em modelagem matemática.

Finalmente, no quinto capítulo, faremos as considerações finais sobre o tema abordado.

Capítulo 1

Função

Definição 1.0.1. *Dados dois conjuntos não-vazios A e B, função é a lei que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B.*

A notação para função é $f : A \to B$ e as seguintes nomenclaturas são adotadas:

- o conjunto A recebe a denominação de *domínio*;
- o conjunto B recebe a denominação de *contradomínio*;
- Se $y \in B; f(x) = y \Rightarrow y \in Im_f$. Então Im_f recebe a denominação de *Conjunto Imagem*. Tem-se que $Im_f \subset B$; e
- Se $a \in A$, $b \in B$, e b é o elemento associado a a pela função f, utilizaremos a seguinte notação: $f(a) = b$.

Seja $f(x)$ uma função qualquer, pode-se representar graficamente f da seguinte forma:

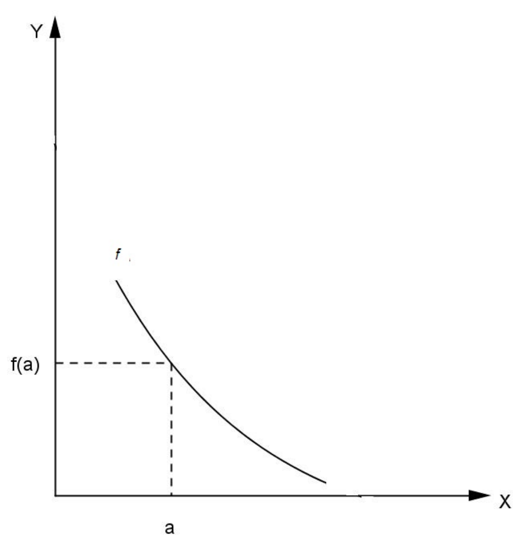

Figura 1.1

Exemplo 1.0.2. *São exemplos de função, as expressões a seguir, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:*

- $f(x) = \alpha x + \beta$;

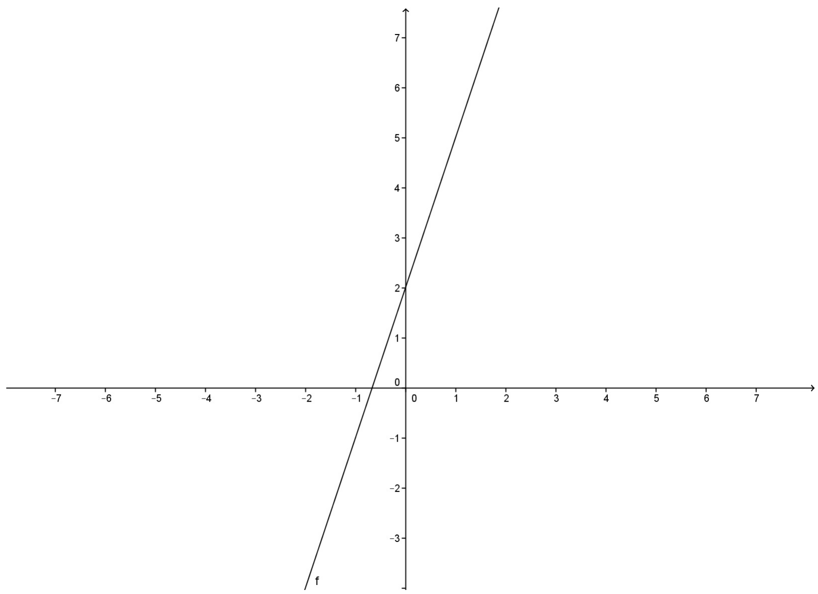

Figura 1.2: Gráfico de $f(x) = 3x + 2$

- $f(x) = \alpha^x$;

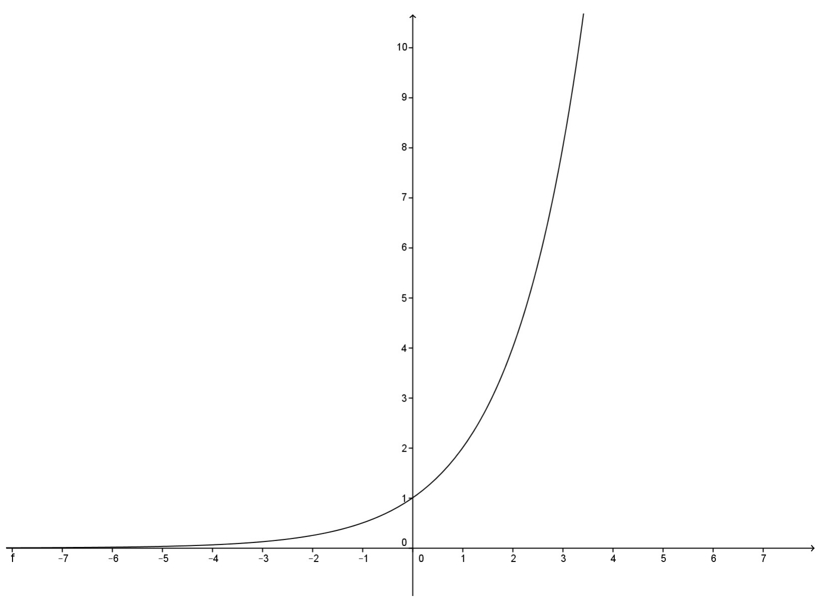

Figura 1.3: Gráfico de $f(x) = 2^x$

- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$;

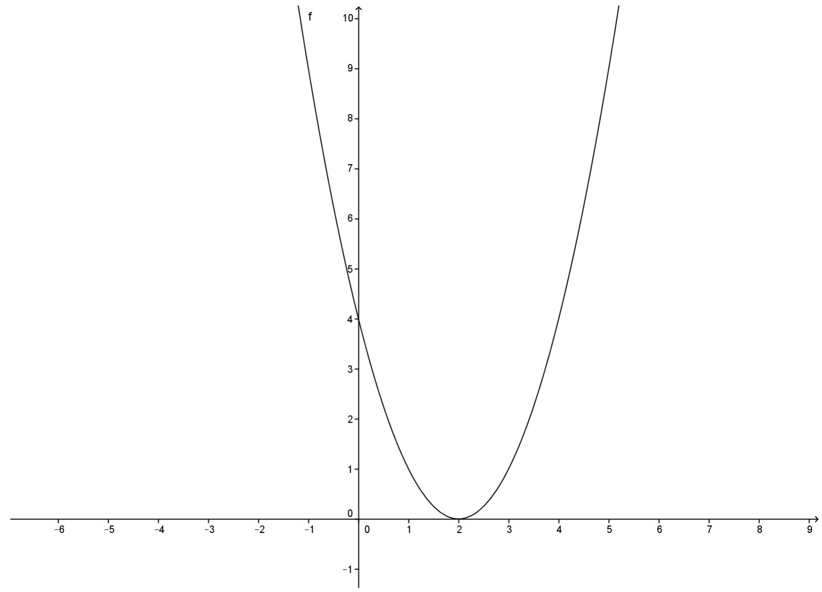

Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 4$

- $f(x) = \log_\alpha x$, $\alpha > 0$.

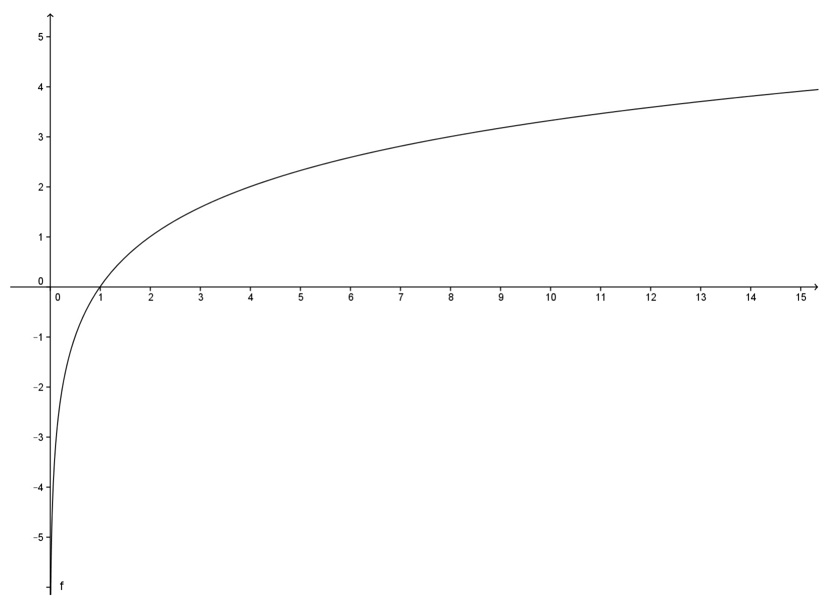

Figura 1.5: Gráfico de $f(x) = \log_2 x$

1.1 Classificação das funções

Em uma função $f : A \to B$, de acordo com o tipo de associação que ocorre entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B, a função f pode ser classificada como *injetiva* ou *não-injetiva* e *sobrejetiva* ou *não-sobrejetiva*. Caso a função f seja *injetiva* e *sobrejetiva*, ela receberá a classificação de *bijetiva*. As funções bijetivas são também ditas *inversveis*, isto é, existe uma função $f^{-1} : B \to A$ tal que, se $f(x) = y \in B$

é a imagem de $x \in A$, então $x = f^{-1}(y) \in A$ é a imagem de $y \in B$. A seguir, analisaremos cada caso.

1.1.1 Função Injetiva ou Injetora

Definição 1.1.1. *Uma função $f : A \to B$ é dita injetiva quando cada elemento pertencente ao conjunto $Im_f \subset B$ é associado à apenas um elemento do conjunto A, isto é, não há dois ou mais elementos de A associados a um mesmo elemento de B.*

Então, uma função $f : A \to B$ chama-se injetiva quando elementos diferente em A são transformados por f em elementos diferentes em B, ou seja, f é injetiva quando:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Essa condição pode também ser expressa em sua forma contra positiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Sendo assim, quando $f : A \to B$ for uma função injetiva, pode-se dizer que f é uma injeção de A em B. Quando f não for injetiva, diz-se que f é não- injetiva.

Exemplo 1.1.2. *Um exemplo de uma função injetiva é a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x + 1$.*

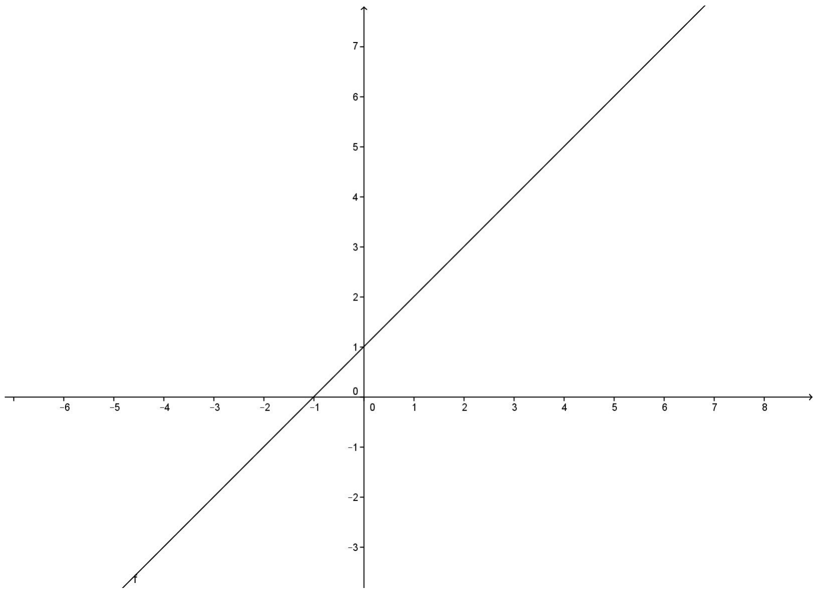

Figura 1.6

Observe que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

.

Exemplo 1.1.3. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *dada por* $f(x) = 2^x$, *então* f *é uma função injetiva, pois se* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2^{x_1} \neq 2^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

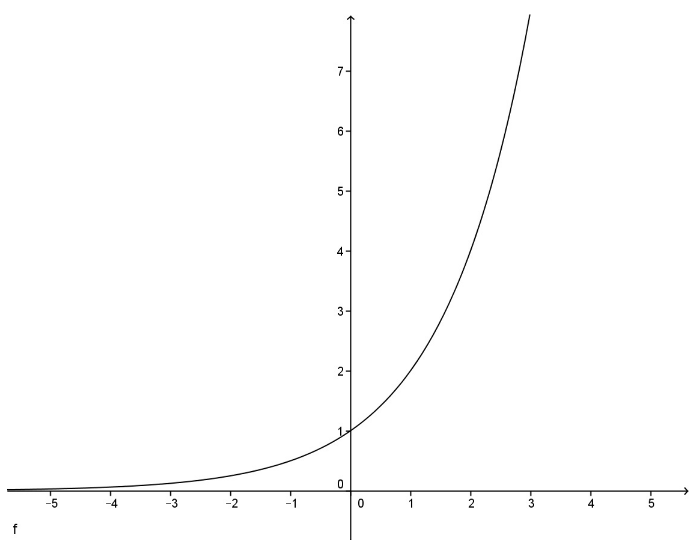

Figura 1.7

1.1.2 Função Sobrejetiva ou Sobrejetora

Definição 1.1.4. *Uma função* $f : A \to B$ *é dita sobrejetiva quando cada elemento de* B *estiver associado à pelo menos um elemento de* A*. Neste caso, a imagem coincide com o contradomínio.*

Em outras palavras, uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva $\Longleftrightarrow \forall\ y,\ y \in B,\ \exists\ x,\ x \in A; f(x) = y$.

Sendo assim, quando $f : A \to B$ for uma função sobrejetiva, dizemos que f é uma sobrejeção de A em B e que o conjunto imagem é igual ao contradomínio. Quando f não for sobrejetiva, diz-se que f é não- sobrejetiva.

Exemplo 1.1.5. *Um exemplo de função sobrejetiva é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida pela lei $f(x) = x^2$, pois para todo y pertencente a $\mathbb{R}_+$, está associado pelo menos um x pertencente a $\mathbb{R}$.*

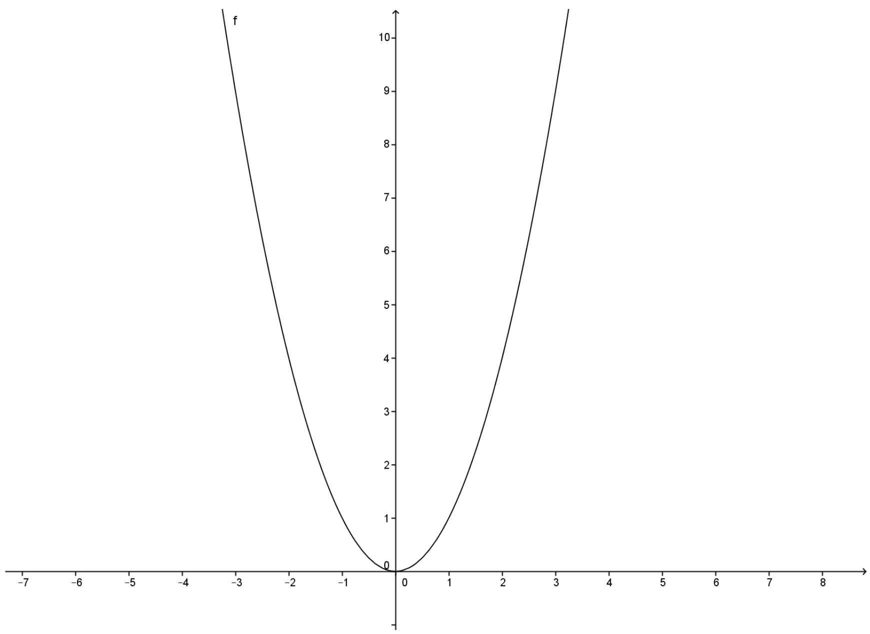

Figura 1.8

Dado $y \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $\sqrt{y}$ existe e $\sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$, daí $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. Isto é, f é sobrejetiva.

Exemplo 1.1.6. *Outro exemplo de função sobrejetiva é a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

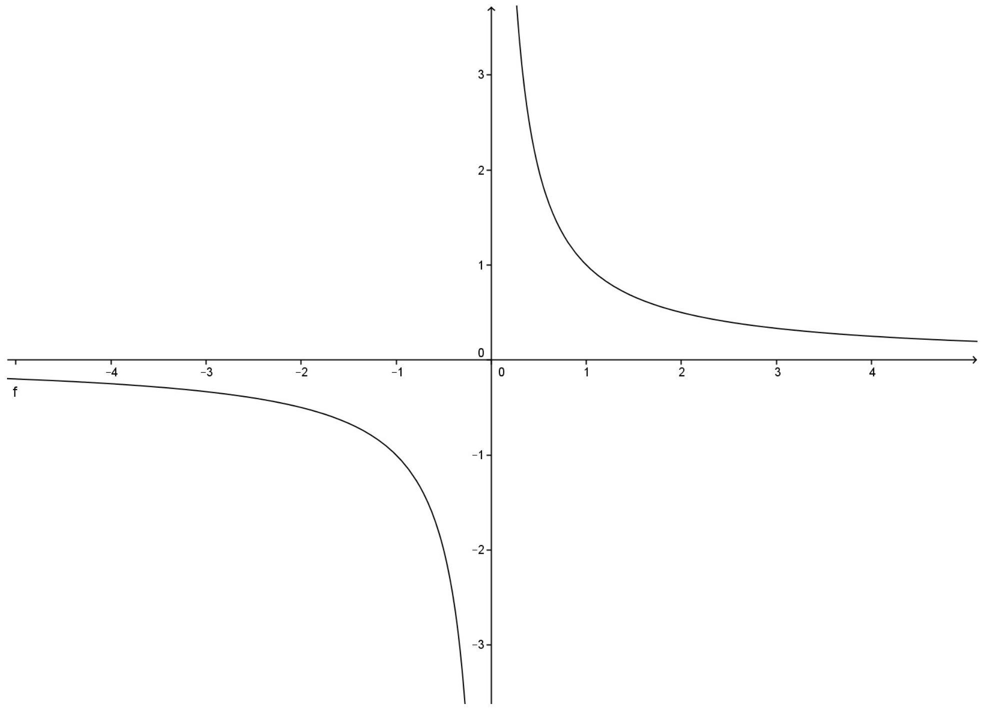

Figura 1.9

Note que, para todo elemento $y \in \mathbb{R}^*$, existe um elemento $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $y = \dfrac{1}{x}$.

1.1.3 Função Bijetiva ou Bijetora

Definição 1.1.7. *Uma função $f : A \to B$ é dita bijetiva quando ela é injetiva e sobrejetiva, simultaneamente.*

Na prática, o que ocorre é que cada elemento de B está associado à apenas um elemento de A.

Outra característica importante é que o conjunto imagem é igual ao contradomínio, pois a função bijetiva é também sobrejetiva.

Em outras palavras, uma função $f : A \to B$ é bijetora $\iff \forall\ y,\ y \in B,\ \exists\ x,\ x \in A; f(x) = y$.

Exemplo 1.1.8. *Um exemplo de função bijetora é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.*

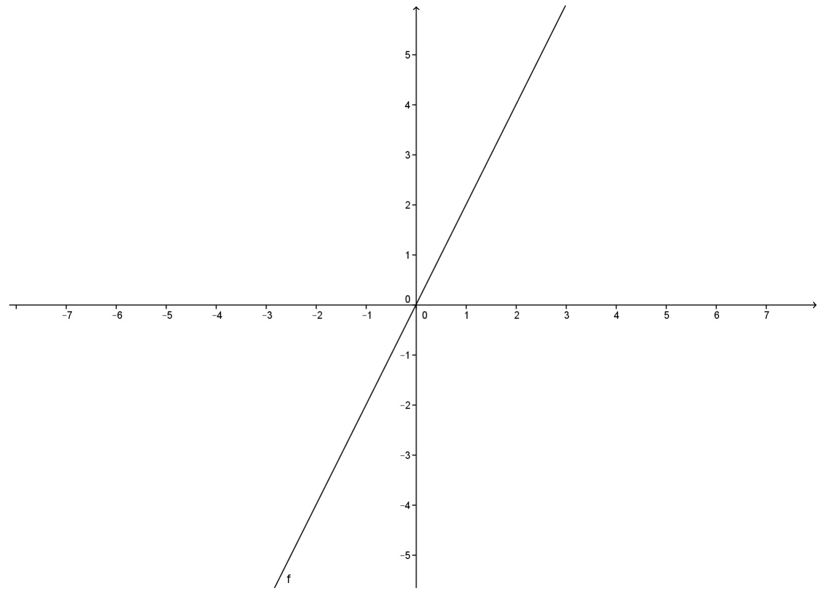

Figura 1.10

Exemplo 1.1.9. *Outro exemplo de função bijetiva é a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^3$.

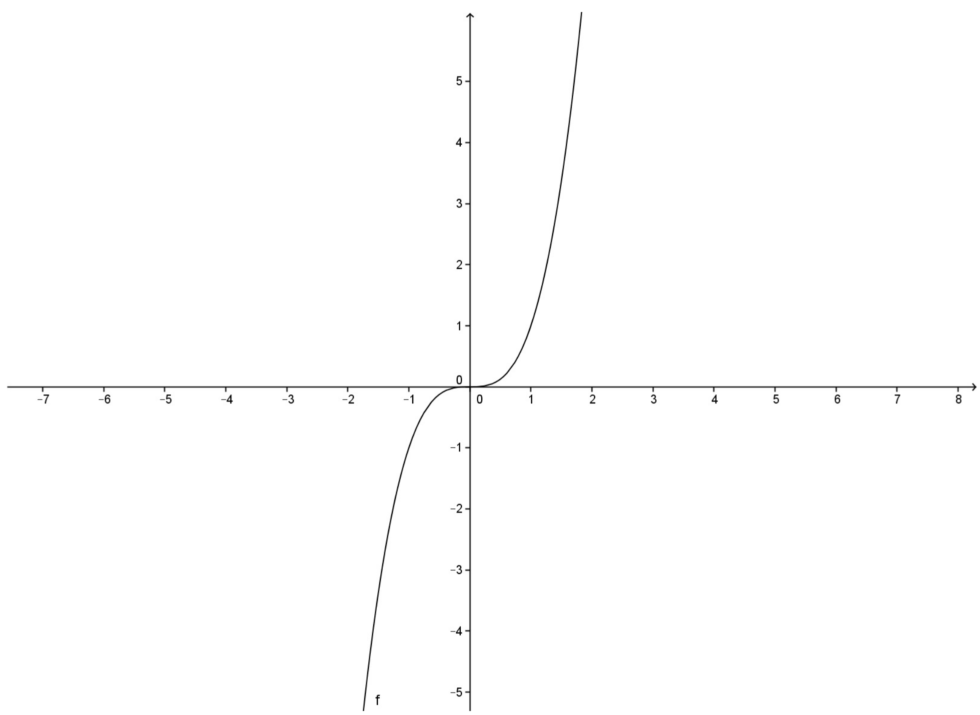

Figura 1.11

Note que, em ambos os exemplos, cada elemento do conjunto Imagem está associado a apenas um elemento do Domínio.

1.2 Função Par e Função Ímpar

Definição 1.2.1. *Uma função $f : A \to B$ é denominada Função Par se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, $\forall\ x \in A$, isto é, atribuindo valores simétricos à variável x, obtemos os mesmo valor para a função $f(x)$.*

Exemplo 1.2.2. *Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 1$.*
Note que $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$. Portanto, essa função é classificada como uma Função Par.

Exemplo 1.2.3. *Outro exemplo de função par é a função $f(x) = e^{x^2}$. Note que $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$.*

Definição 1.2.4. *Uma função $f : A \to B$ é denominada Função Ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, $\forall\ x \in A$, isto é, atribuindo valores simétricos à variável x, obtemos valores simétricos a função $f(x)$.*

Exemplo 1.2.5. *Considere a função afim $f(x) = 2x$.*
Note que $f(-x) = 2(-x) = -(2x) = -f(x)$. Portanto, essa função é classificada como uma Função Ímpar.

Exemplo 1.2.6. *Outro exemplo de função ímpar é a função $f(x) = \dfrac{x^3}{10}$. Note que $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{10} = -\dfrac{x^3}{10} = -f(x)$.*

Proposição 1.2.7. *Toda função f cujo domínio é $\mathbb{R}$ ou um intervalo simétrico em relação a origem pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar.*

Demonstração: Sejam $g(x)$ e $h(x)$ dadas por:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ e } h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Note que: $g(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -g(x)$ e que $h(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = h(x)$.

Portanto, $g(x)$ é uma função ímpar e $h(x)$ é uma função par.

Encerrando a demonstração, observe que $f(x) = g(x) + h(x)$.

Proposição 1.2.8. *A soma de duas funções de mesma paridade mantem a paridade.*

Demonstração: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções ímpares, tem-se:

$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$.

Analogamente, sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções pares, tem-se:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

Proposição 1.2.9. *O produto entre duas funções de mesma paridade será uma função par e o produto entre funções de paridades diferentes será uma função ímpar.*

Demonstração: Seja $f(x) = g(x).h(x)$.

Supondo $g(x)$ e $h(x)$ ambas pares:
$f(-x) = g(-x).h(-x) = g(x).h(x) = f(x)$. Portanto $f(x)$ é par.

Supondo $g(x)$ e $h(x)$ ambas ímpares:
$f(-x) = g(-x).h(-x) = [-g(x)].[-h(x)] = g(x).h(x) = f(x)$. Portanto $f(x)$ é par.

Supondo $g(x)$ ímpar e $h(x)$ par:
$f(-x) = g(-x).h(-x) = [-g(x)].h(x) = -[g(x).h(x)] = -f(x)$. Portanto $f(x)$ é ímpar.

1.3 Função Inversa

Para que uma função $f : A \to B$ seja *inversível*, isto é, possua função inversa, f deve ser bijetiva.

Definição 1.3.1. *Seja a função $f : A \to B$, a função inversa $g : B \to A$ é a lei que associa os elementos do conjunto B aos mesmos elementos do conjunto A aos quais foram associados em f. A notação dada para a função inversa é $g = f^{-1}$.*

Como vimos na definição de função, em uma função $f : A \to B$, todos os elementos de A serão associados a pelo menos um elemento de B. Então, para que a função $f^{-1} : B \to A$ exista, todos os elementos de B devem ser associados a um elemento de A, isto é, f deve ser sobrejetiva. Da mesma forma, na função inversa os elementos de B serão associados aos mesmos elementos de A que eles foram associados em f, isto é, f deve ser injetiva. Por estes motivos, a função f só terá função inversa se houver uma correspondência biunívoca entre A e B.

Teorema 1.3.2. *Seja $f : A \to B$. A relação $f^{-1} : B \to A$ é uma função se, e somente se, f é bijetiva.*

Demonstração: Suponha que f^{-1} é uma função de B em A, vamos mostrar que f é bijetiva.

a) Seja $y \in B$, então existe um $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. Assim f é sobrejetiva.

b) Dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$, resultará em $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é absurdo, pois y só tem uma imagem em f^{-1}. Assim, $f(x_1) \neq f(x_2)$ e f é injetiva.

Reciprocamente, suponha que f é bijetiva, então f^{-1} é uma função de B em A.

a) Como f é sobrejetiva, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto $(y, x) \in f^{-1}$.

b) Se $y \in B$ possui duas imagens x_1 e x_2 em f^{-1}, então $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Portanto $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$. Como f é injetiva, resulta que $x_1 = x_2$.

Cabe ressaltar que o domínio da função inversa é a imagem da função inicial e que a imagem da função inversa é o domínio da função original.

Em alguns casos específicos, em que a função não é bijetiva, toma-se um subconjunto do contradomínio que tenha as características que tornem a função bijetiva para, com isto, achar sua função inversa no intervalo dado.

1.4 Crescimento e Decrescimento de Funções

Uma função entre dois conjuntos ordenados é dita *monótona* se ela preserva ou inverte a relação de ordem, tornando-a crescente ou decrescente. As definições de crescimento e decrescimento podem ser utilizadas para qualquer função em todo seu domínio ou em algum intervalo do seu domínio, pois há funções que, em todo seu domínio, não se enquadram em nenhuma das definições abaixo.

Definição 1.4.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

a) f é monótona estritamente crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

b) f é monótona crescente ou não decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

c) f é monótona estritamente decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; e

d) f é monótona decrescente ou não crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Capítulo 2

Funções Periódicas Elementares

As funções periódicas são aquelas nas quais os valores da variável dependente y se repetem para determinados valores da variável independente x, ou seja, para cada período determinado pelos valores de x, iremos obter valores repetidos para y.

Definição 2.0.2. *Seja x um elemento do domínio da função f tal que $y = f(x)$. Suponha T um número real constante de forma que $x + T$, $x + 2T$, ..., $x + kT$, $k \in \mathbb{Z}$ também pertençam ao domínio da função. Denomina-se Função Periódica a função $f(x)$ tal que $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots = f(x+kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, sendo o menor valor positivo de T o período principal da função.*

Alguns exemplos de função periódica abordados no ensino médio são as funções circulares, que serão estudadas a seguir.

2.1 Função Dente de Serra

A função dente-de-serra é definida da seguinte forma: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ e $f(x + \alpha) = \alpha$ quando $0 \leq \alpha < 1$ e $x \in \mathbb{Z}$. Observe o gráfico dessa função:

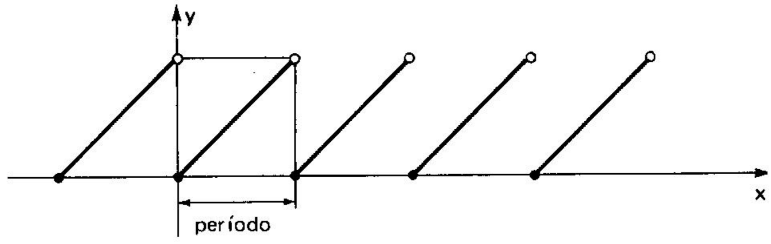

Figura 2.1

A função f é periódica, com seu período principal igual a 1, porém não é par e nem ímpar.

2.2 Função de Euler

Para definirmos a Função de Euler e, a partir dela, as Funções Trigonométricas, utilizaremos o círculo trigonométrico, que consiste de uma circunferência de raio unitário, dividido pelos eixos das abscissas (eixo X) e ordenadas (eixo Y) em quatro quadrantes. A origem dos eixos coincide com o centro da circunferência e o sentido positivo para medição de ângulos é o sentido anti-horário.

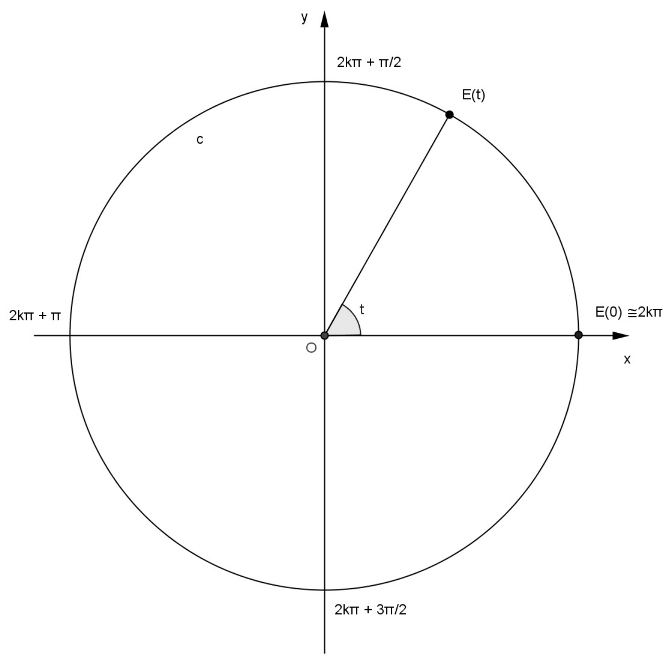

Figura 2.2

Seja a circunferência acima definida por $C = (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1$.

Definição 2.2.1. *A Função de Euler será definida como $E : \mathbb{R} \to C$, que associa a cada número real t um ponto $E(t) = (x, y) \in C$.*

Tem-se que $t \in \mathbb{R}$ é a medida do ângulo, em radianos, a partir do semi-eixo positivo OX. Se $t > 0$, o ângulo é no sentido anti-horário. Se $t < 0$, o ângulo é no sentido horário.

O ponto $E(t)$ pertencente à circunferência será obtido de tal forma que o arco formado pelos pontos $E(t)$ e $E(0) = (1, 0)$ tenha comprimento igual a $|t|$ radianos. Se $t > 0$, o arco é no sentido anti-horário. Se $t < 0$, o arco é no sentido horário.

Haja vista que a circunferência tem comprimento total igual a 2π rad, se aumentarmos o ângulo t em $2k\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$, que equivale a $|k|$ voltas completas na circunferência, $E(t)$ voltará para o mesmo ponto, isto é, a imagem de $E(t)$ é igual a imagem de $E(t + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela caracterização da função periódica vista na Definição 2.0.2, nota-se que a Função de Euler é periódica e seu período principal é 2π rad.

2.3 Função Seno

Dado um número real x, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Denomina-se $senx$ (lê-se seno de x), a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P.

Definição 2.3.1. *Denomina-se Função Seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $\overline{OP_1} = senx$, isto é $f(x) = senx$.*

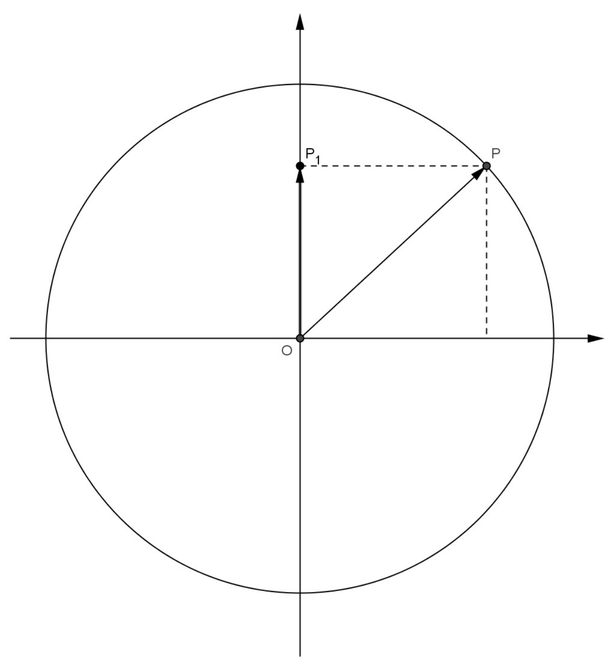

Figura 2.3

A função seno tem as seguintes características:

- Como o círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, a imagem da função seno está no intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq senx \leq 1$;

- Se x está no primeiro ou no segundo quadrante, então P estará acima do eixo das abscissas, consequentemente sua ordenada será positiva. Dessa forma, conclui-se que se x está no primeiro ou segundo quadrante, então $senx$ será positivo;

- Se x está no terceiro ou no quarto quadrante, então P estará abaixo do eixo das abscissas, consequentemente sua ordenada será negativa. Dessa forma, conclui-se que se x está no terceiro ou quarto quadrante, então $senx$ será negativo;

- Nos primeiro e quarto quadrantes, $senx$ será crescente. Note que no primeiro quadrante, a medida que deslocamos x de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a ordenada sai da origem e vai até 1, portanto, crescente. No quarto quadrante, a medida que x se desloca de $\frac{3\pi}{2}$ a $2\pi = 0$, a ordenada sai de -1 e vai até a origem, portanto, crescente;

- Nos segundo e terceiro quadrantes, $senx$ será decrescente. Note que no segundo quadrante, a medida que deslocamos x de $\frac{\pi}{2}$ a π, a ordenada se desloca de 1 até 0 (origem), portanto, decrescente. No terceiro quadrante, a medida que x se desloca de π a $\frac{3\pi}{2}$, a ordenada se desloca de 0 (origem) até -1, portanto, decrescente; e

- A função seno é uma função ímpar (será demonstrado no item 2.9).

Teorema 2.3.2. *A função seno é uma função periódica, pois se* $senx = \overline{OP_1}$*, então* $sen(x + 2k\pi) = \overline{OP_1}$*,* $\forall\ k \in \mathbb{Z}$*. Portanto, seu período principal é igual a* 2π *rad.*

Demonstração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Definição 2.0.2, provaremos que a função seno é uma função periódica. Supondo f uma função periódica, então existe um T real maior que zero tal que:

$$sen(x + T) = sen(x)$$

Assim, utilizando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que
$sen(x + T) = sen(x).cos(T) + sen(T).cos(x) = sen(x)$.

Dessa forma:
$sen(x).cos(T) + sen(T).cos(x) = sen(x).1 + 0.cos(x)$.

Concluímos então que:
$sen(T) = 0$ e $cos(T) = 1$.

A partir daí temos que:
$\rightarrow$ para $sen(T) = 0$, então $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
$\rightarrow$ para $cos(T) = 1$, então $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Então, apenas os valores de $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ atendem as duas situações, sendo então, com estes ângulos, que a função se repete. Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função seno é periódica e seu período principal é 2π rad.

Analise agora o gráfico da função seno a fim de observar as características supracitadas:

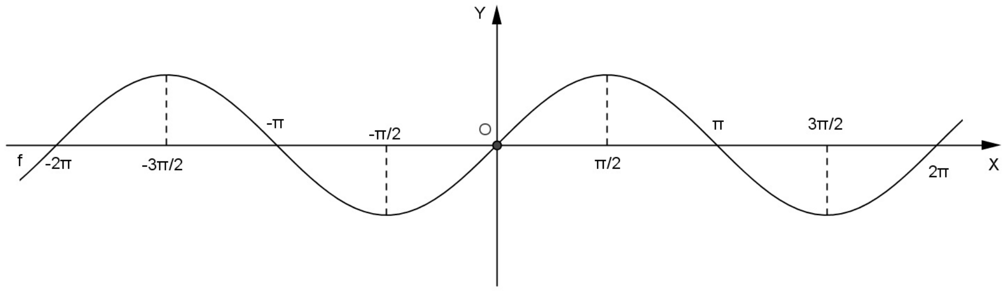

Figura 2.4

2.4 Função Cosseno

Dado um número real x, seja P sua imagem no círculo trigonométrico, denomina-se $cosx$ (lê-se cosseno de x), a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P.

Definição 2.4.1. *Denomina-se Função Cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, o número real $\overline{OP_2} = cosx$, isto é $f(x) = cosx$.*

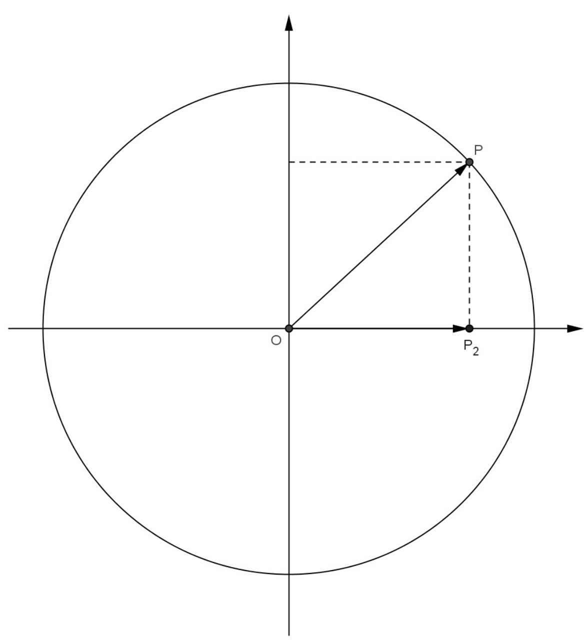

Figura 2.5

A função cosseno tem as seguintes características:

- Como o círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, a imagem da função cosseno está no intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq cosx \leq 1$;

- Se x está no primeiro ou no quarto quadrante, então P estará projetado na parte positiva do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que se x está no primeiro ou no quarto quadrante, então $cosx$ será positivo;

- Se x está no segundo ou no terceiro quadrante, então P estará projetado na parte negativa do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que se x está no segundo ou terceiro quadrante, então $cosx$ será negativo;

- Nos terceiro e quarto quadrantes, $cosx$ será crescente. Note que no terceiro quadrante, a medida que x se desloca de π a $\frac{3\pi}{2}$, a abscissa se desloca de -1 até 0 (origem), portanto, crescente. No quarto quadrante, a medida que x se desloca de $\frac{3\pi}{2}$ a 0, a abscissa se desloca de 0 (origem) e vai até 1, portanto, crescente;

- Nos primeiro e segundo quadrantes, $cosx$ será decrescente. Note que primeiro quadrante, a medida que x se desloca de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a abscissa se desloca de 1 até 0 (origem), portanto decrescente. No segundo quadrante, a medida que deslocamos x de $\frac{\pi}{2}$ a π, a abscissa se desloca de 0 (origem) até -1, portanto, decrescente; e

- A função cosseno é uma função par (será demonstrado no item 2.9).

Teorema 2.4.2. *A função cosseno é uma função periódica, pois se* $cosx = \overline{OP_2}$*, então* $cos(x + 2k\pi) = \overline{OP_2}$*,* $\forall\ k \in \mathbb{Z}$*. Portanto, seu período principal é igual a* 2π *rad.*

Demonstração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Definição 2.0.2, provaremos que a função cosseno é uma função periódica. Supondo f uma função periódica, então existe um T real maior que zero tal que:

$$cos(x + T) = cos(x)$$

Assim, utilizando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que:
$cos(x + T) = cos(x).cos(T) - sen(T).sen(x) = cos(x).$

Dessa forma:
$cos(x).cos(T) - sen(T).sen(x) = cos(x).1 + 0.sen(x).$

Concluímos então que:
$sen(T) = 0$ e $cos(T) = 1.$

A partir daí temos que:
$\rightarrow$ para $sen(T) = 0$, então $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
$\rightarrow$ para $cos(T) = 1$, então $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Então, apenas os valores de $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ atendem as duas situações, sendo então, com estes ângulos, que a função se repete. Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função cosseno é periódica e seu período principal é 2π rad.

Analise agora o gráfico da função cosseno a fim de observar as características supracitadas:

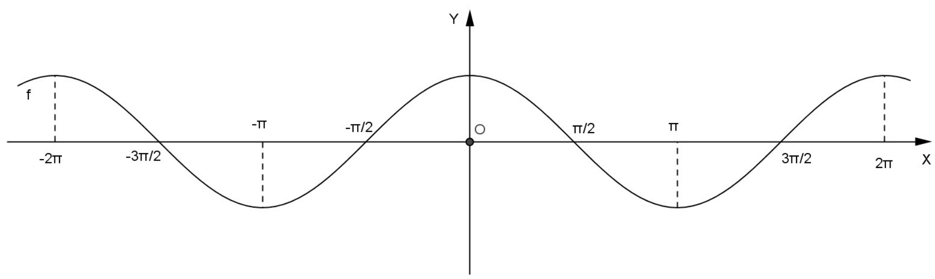

Figura 2.6

2.5 Função Tangente

Dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no círculo. Consideremos a reta $\overline{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tgx (lê-se tangente de x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Definição 2.5.1. *Denomina-se Função Tangente a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{AT} = tgx$, isto é, $f(x) = tgx$.*

Observe a figura abaixo:

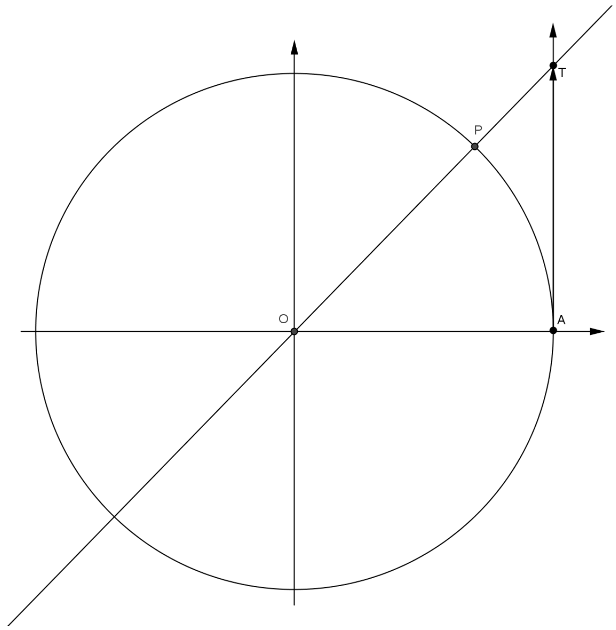

Figura 2.7

A função tangente tem as seguintes propriedades:

- O domínio da função tangente é $D = x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $y = tgx$;
- É uma função ímpar (será demonstrado no item 2.9);
- Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então tgx é positiva, pois o ponto T estará acima do ponto A, portanto na parte positiva de $\overline{AT}$;
- Se x é do segundo ou quarto quadrante, então tgx é negativa, pois o ponto T estará abaixo do ponto A, portanto na parte negativa de $\overline{AT}$; e
- Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes no sentido anti-horário, então tgx será crescente.

Teorema 2.5.2. *A função tangente é periódica e seu período principal é π rad.*

Demonstração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Demonstração 2.0.2, provaremos que a função tangente é uma função periódica.

Supondo f uma função periódica, então existe um T (expresso em radianos) real maior que zero tal que:

$$tg(x + T) = tg(x)$$

Assim, utilizando a fórmula da tangente da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que:

$$tg(x+T) = \frac{tg(x)+tg(T)}{1-tg(x).tg(T)} = \frac{tg(x)+0}{1-tg(x).0} = tg(x).$$

Dessa forma, temos que $tg(T) = 0$:

A partir daí, temos que para $tg(T) = 0$ temos $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$ e, com esses valores, a função se repete. Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função tangente é periódica e seu período principal é π rad.

Analise agora o gráfico da função tangente a fim de observar as características supracitadas:

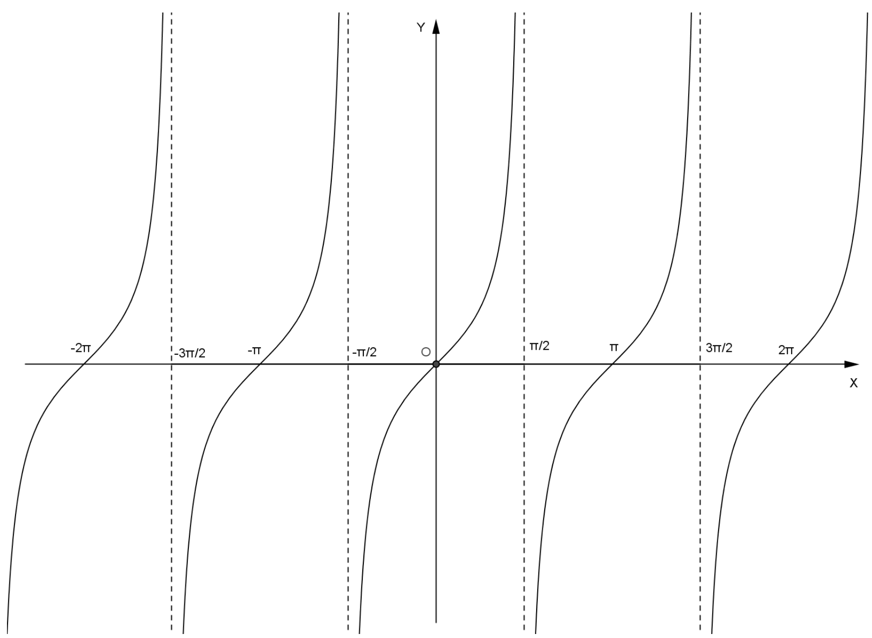

Figura 2.8

Note que a função tangente possui assíntotas verticais em $k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.5.3. *Para* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, *tem-se* $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$.

Demonstração: Observe a figura abaixo:

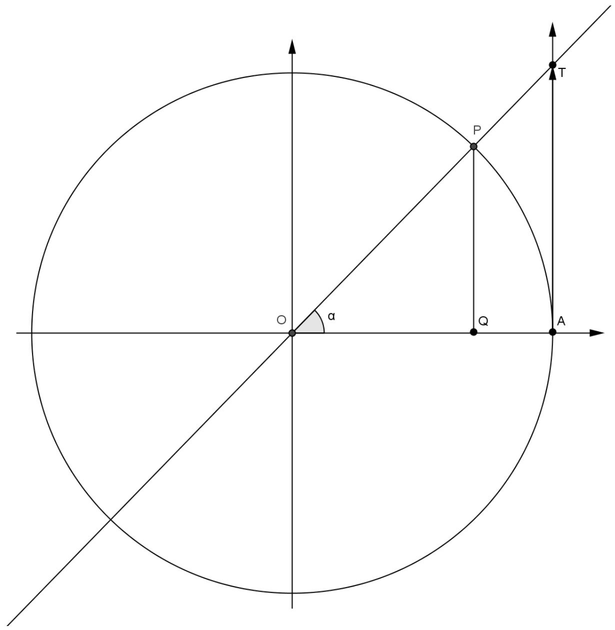

Figura 2.9

Seja Q a projeção de P no eixo x, então $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{OQ}$.

Seja a reta que passa pelos pontos A e T tangente a circunferência no ponto A, então $\overline{TA}$ é perpendicular a $\overline{OA}$.

A partir do exposto, note que os triângulos ΔOPQ e ΔOTA são semelhantes, pois $\overline{PQ}$ e $\overline{TA}$ são paralelas (Teorema de Tales). Note também, que as medidas de $\overline{PQ}$ e $\overline{OQ}$ equivalem ao seno e cosseno, respectivamente, do ângulo α. Por semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}$$

Sabendo que $\overline{OA} = 1$, então:

$$\frac{tg\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

2.6 Função Cotangente

Dado um número real x, $x \neq k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta $\overline{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das co-tangentes.

Denominamos $cotgx$ (lê-se cotangente de x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Definição 2.6.1. *Denomina-se Função Cotangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{AT} = cotgx$, isto é, $f(x) = cotgx$.*

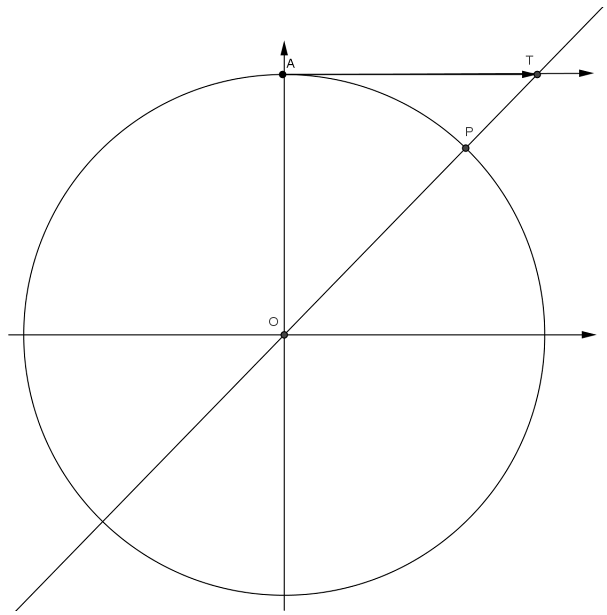

Figura 2.10

A função cotangente tem as seguintes propriedades:

- O domínio da função cotangente é $D = x \in \mathbb{R} | x \neq k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $y = cotgx$;
- É uma função ímpar (será demonstrado no item 2.9);
- Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $cotgx$ é positiva, pois o ponto T estará a direita do ponto A, portanto na parte positiva de $\overline{AT}$;
- Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $cotgx$ é negativa, pois o ponto T estará a esquerda do ponto A, portanto na parte negativa de $\overline{AT}$; e
- Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes no sentido anti-horário, então $cotgx$ será decrescente.

Proposição 2.6.2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tem-se $cotg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{1}{tg\alpha}$.*

Demonstração: Observe a figura abaixo:

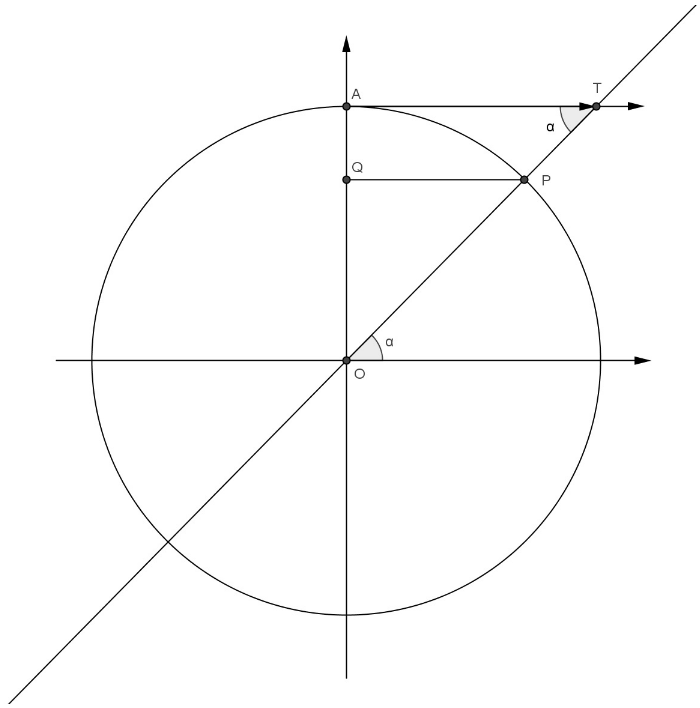

Figura 2.12

Seja Q a projeção de P no eixo y, então $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{OQ}$.

Seja a reta que passa pelos pontos A e T tangente a circunferência no ponto A, então $\overline{TA}$ é perpendicular a $\overline{OA}$.

Pelo exposto, note que os triângulos ΔOPQ e ΔOTA são semelhantes, pois $\overline{PQ}$ e $\overline{TA}$ são paralelas. Note também, que as medidas de $\overline{PQ}$ e $\overline{OQ}$ equivalem ao cosseno e seno, respectivamente, do ângulo α. Por semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}$$

.

Sabendo que $\overline{OA} = 1$, então:

$$\frac{cotg\alpha}{cos\alpha} = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}; \alpha \neq k.\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.6.3. *A função cotangente é periódica e seu período principal é π rad.*

Demonstração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Definição 2.0.2, provaremos que a função cotangente é uma função periódica.

Supondo f uma função periódica, então existe um T real maior que zero tal que:

$$cotg(x+T) = cotg(x)$$

Assim, utilizando a fórmula da tangente da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que:
$cotg(x+T) = \dfrac{1}{tg(x+T)} = \dfrac{1 - tg(x).tg(T)}{tg(x) + tg(T)} = \dfrac{1 - tg(x).0}{tg(x) + 0} = \dfrac{1}{tg(x)} = cotg(x).$

Dessa forma, temos que $tg(T) = 0$:
A partir daí, temos que para $tg(T) = 0$, então $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função cotangente é periódica e seu período principal é π rad.

Analise agora o gráfico da função cotangente a fim de observar as características supracitadas:

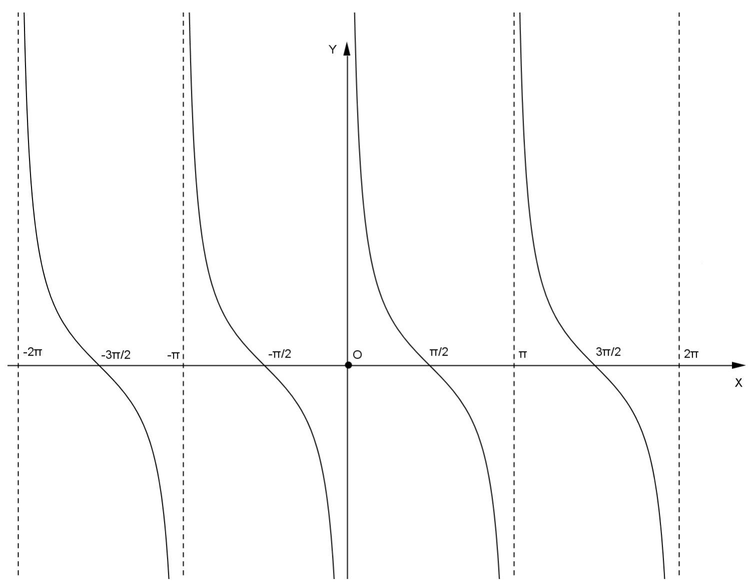

Figura 2.11

Note que a função cotangente possui assíntotas verticais em $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.7 Função Secante

Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta s tangente ao círculo trigonométrico em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos *secx* (lê-se secante de x) a medida algébrica do segmento $\overline{OS}$.

Definição 2.7.1. *Denomina-se Função Secante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{OS} = secx$, isto é, $f(x) = secx$.*

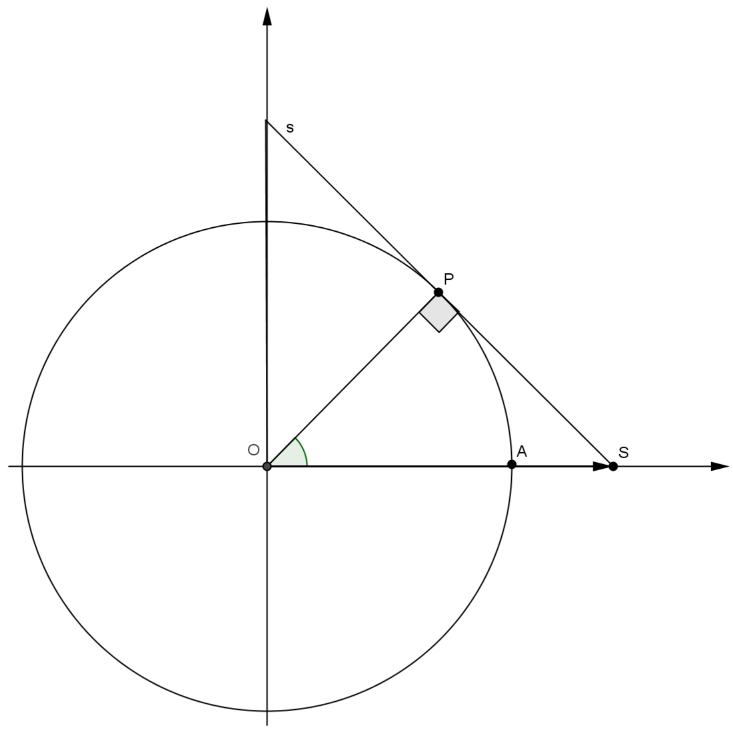

Figura 2.13

A função secante tem as seguintes propriedades:

- O domínio da função secante é $D = x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- A imagem da função secante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo y real, com $y \geq 1$ ou $y \leq -1$, existe um x real tal que $y = secx$;
- É uma função par (será demonstrado no item 2.9);
- Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então $secx$ é positiva;
- Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então $secx$ é negativa;
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante no sentido anti-horário, então $secx$ será crescente; e
- Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante no sentido anti-horário, então $secx$ será decrescente.

Proposição 2.7.2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tem-se $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$.*

Demonstração: Observe a figura abaixo:

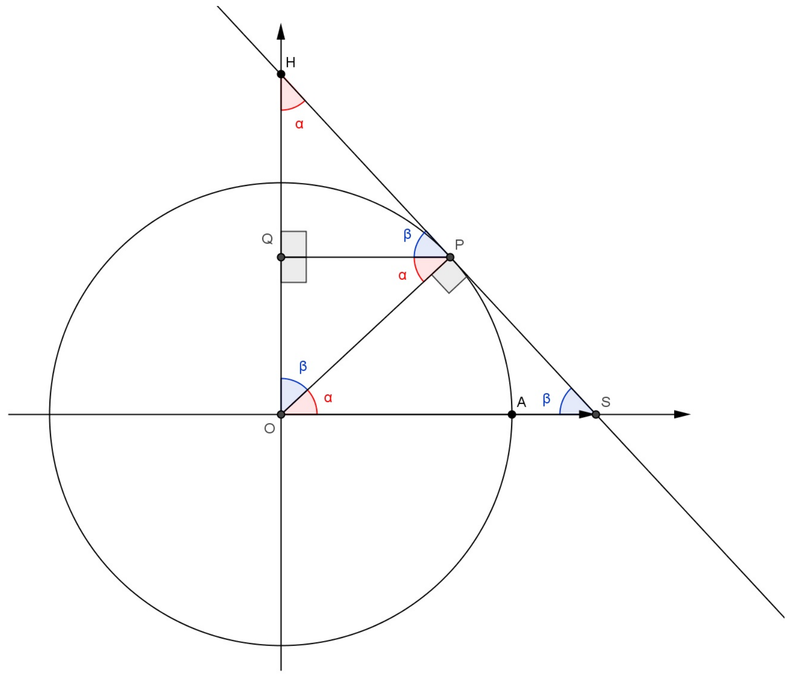

Figura 2.15

Note que os triângulos retângulos ΔOQP e ΔOPS são semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{QP}}$$

Como $\overline{OP}$ é o raio unitário do círculo trigonométrico e $\overline{QP}$ é a medida correspondente ao cosseno, temos:

$$\frac{sec\alpha}{1} = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 2.7.3. *A função secante é periódica e seu período principal é 2π rad.*

Demontração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Definição 2.0.2, provaremos que a função secante é uma função periódica.

Supondo f uma função periódica, então existe um T real maior que zero tal que:

$$sec(x + T) = sec(x)$$

.

Assim, utilizando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que:

$$sec(x+T) = \frac{1}{cos(x+T)} = \frac{1}{cos(x).cos(T) - sen(T).sen(x)} = \frac{1}{cosx} = sec(x)$$

Dessa forma: $\dfrac{1}{cos(x).cos(T) - sen(T).sen(x)} = \dfrac{1}{cos(x).1 - 0.sen(x)}$.

Concluímos então que: $sen(T) = 0$ e $cos(T) = 1$.

A partir daí temos que:
$\rightarrow$ para $sen(T) = 0$, então $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$;
$\rightarrow$ para $cos(T) = 1$, então $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Então, apenas os valores de $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ atendem as duas situações e que, com esses valores, a função se repete. Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função secante é periódica e seu período principal é 2π rad.

Analise agora o gráfico da função secante a fim de observar as características supracitadas:

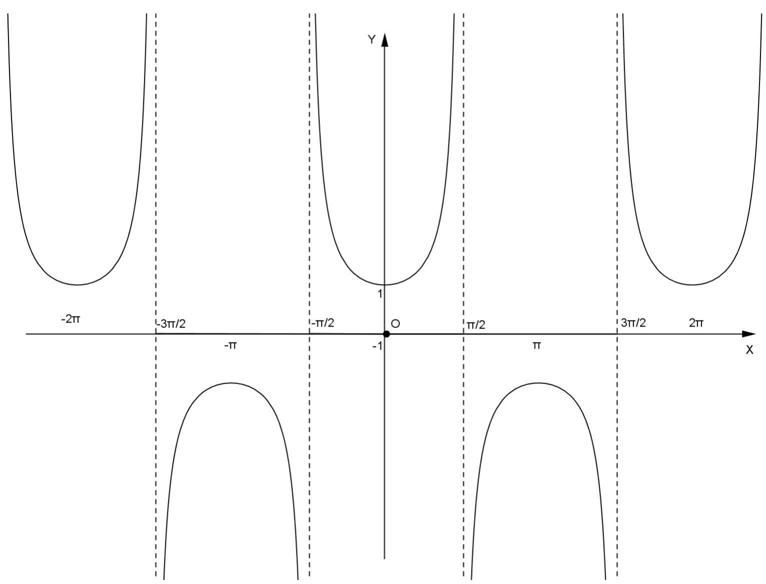

Figura 2.14

Note que a função secante possui assíntotas verticais em $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.8 Função Cossecante

Dado um número real x, $x \neq k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta s tangente ao círculo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos $cscx$ (lê-se cossecante de x) a medida algébrica do segmento $\overline{OC}$.

Definição 2.8.1. *Denomina-se Função Cossecante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{OC} = cscx$, isto é, $f(x) = cscx$.*

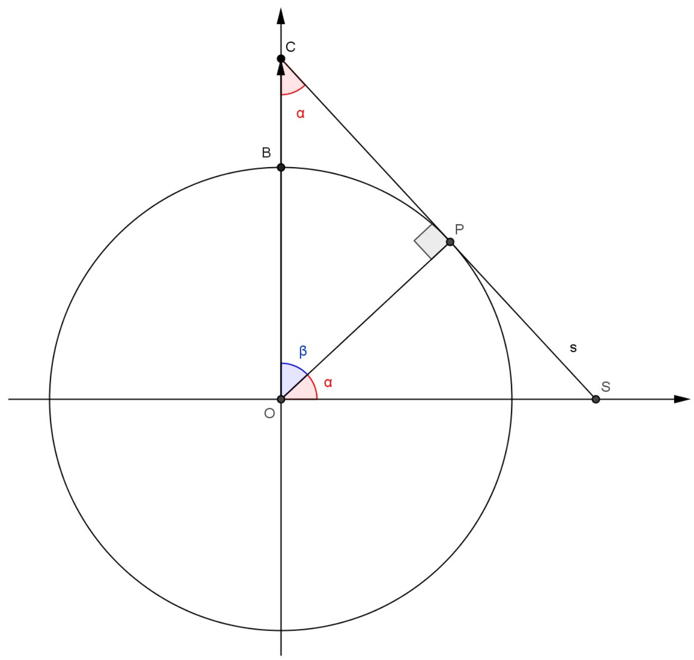

Figura 2.16

A função cossecante tem as seguintes propriedades:

- O domínio da função cossecante é $D = x \in \mathbb{R} | x \neq k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo y real, com $y \geq 1$ ou $y \leq -1$, existe um x real tal que $y = cscx$;
- É uma função ímpar (será demonstrado no item 2.9);
- Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então $cscx$ é positiva;
- Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então $cscx$ é negativa;
- Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante no sentido anti-horário, então $cscx$ será crescente; e
- Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante no sentido anti-horário, então $cscx$ será decrescente.

Proposição 2.8.2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tem-se $csc\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$.*

Demonstração: Observe a figura abaixo:

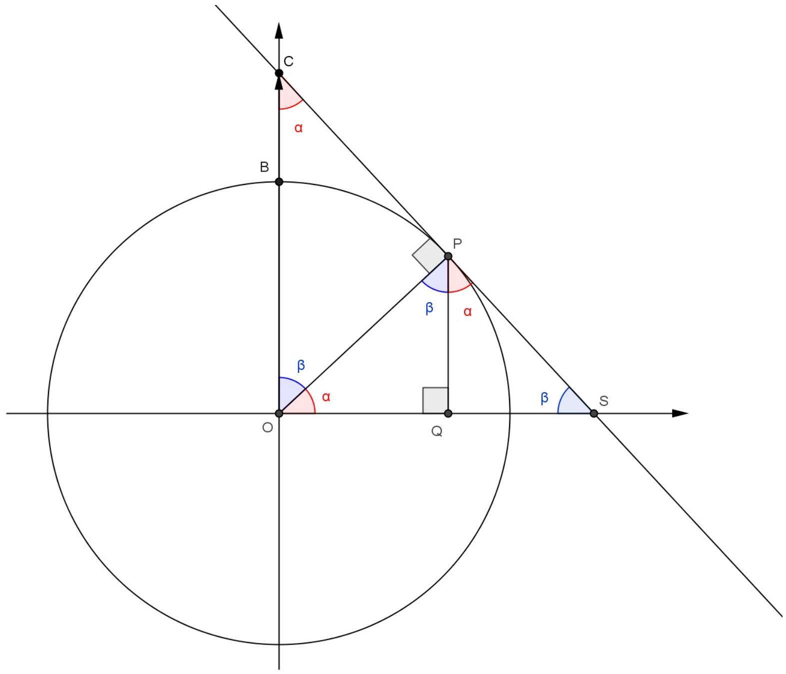

Figura 2.18

Note que os triângulos retângulos ΔOQP e ΔOPC são semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{QP}}$$

Como $\overline{OP}$ é o raio do círculo unitário e $\overline{QP}$ é a medida correspondente ao seno, temos:

$$\frac{csc\alpha}{1} = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}, \alpha \neq k.\pi; k \in \mathbb{Z}$$

.

Teorema 2.8.3. *A função cossecante é periódica e seu período principal é 2π rad.*

Demonstração: Observe que, a partir da caracterização de função vista na Definição 2.0.2, provaremos que a função cossecante é uma função periódica.

Supondo f uma função periódica, então existe um T real maior que zero tal que:

$$csc(x + T) = csc(x)$$

Assim, utilizando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, demonstrada em [10], temos que:
$csc(x+T) = \dfrac{1}{sen(x+T)} = \dfrac{1}{sen(x).cos(T) + sen(T).cos(x)} = \dfrac{1}{sen(x)} = csc(x).$

Dessa forma:
$\dfrac{1}{sen(x).cos(T) + sen(T).cos(x)} = \dfrac{1}{sen(x).1 + 0.cos(x)}$

Concluímos então que:
$sen(T) = 0$ e $cos(T) = 1$.

A partir daí temos que:
$\rightarrow$ para $sen(T) = 0$, então $T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
$\rightarrow$ para $cos(T) = 1$, então $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Então, apenas os valores de $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ atendem as duas situações e, com esses valores, a função se repete. Dessa forma, como o valor do período principal é o menor valor positivo, a função cossecante é periódica e seu período principal é 2π rad.

Analise agora o gráfico da função cossecante a fim de observar as características supracitadas:

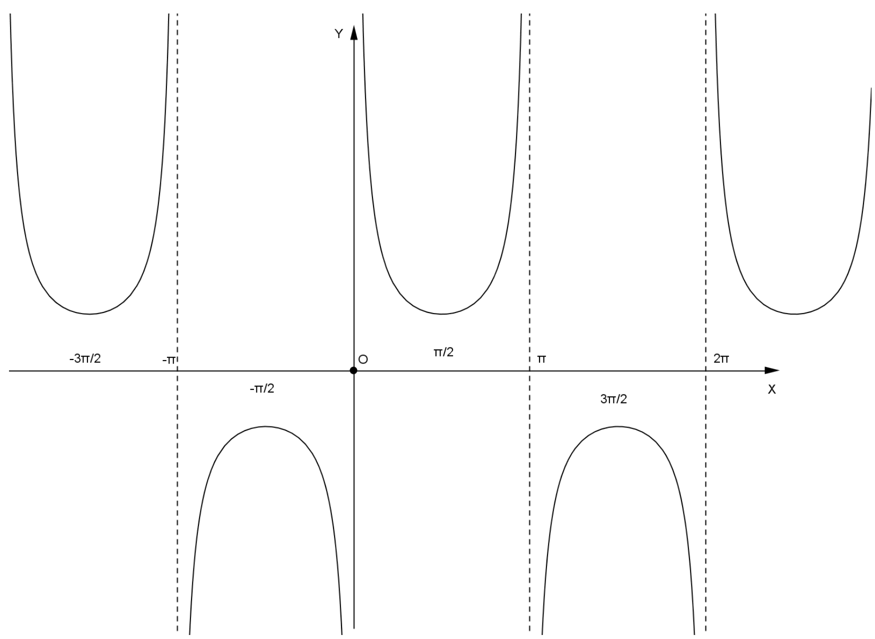

Figura 2.17

Note que a função cossecante possui assíntotas verticais em $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.9 Demonstração da Paridade das Funções Trigonométricas

Iremos agora estudar a paridade das funções trigonométricas, isto é, vamos demonstrar a paridade das funções seno e cosseno e, a partir dessas demonstrações, conheceremos a paridade das demais funções trigonométricas.

Proposição 2.9.1. *A função seno é ímpar e a função cosseno é par.*

Demonstração:
Observe no círculo trigonométrico, convencionado que o raio é unitário e o sentido anti-horário é o sentido positivo para medição de ângulos, que quando o ângulo α está no primeiro quadrante, então $-\alpha$ está no quarto quadrante:

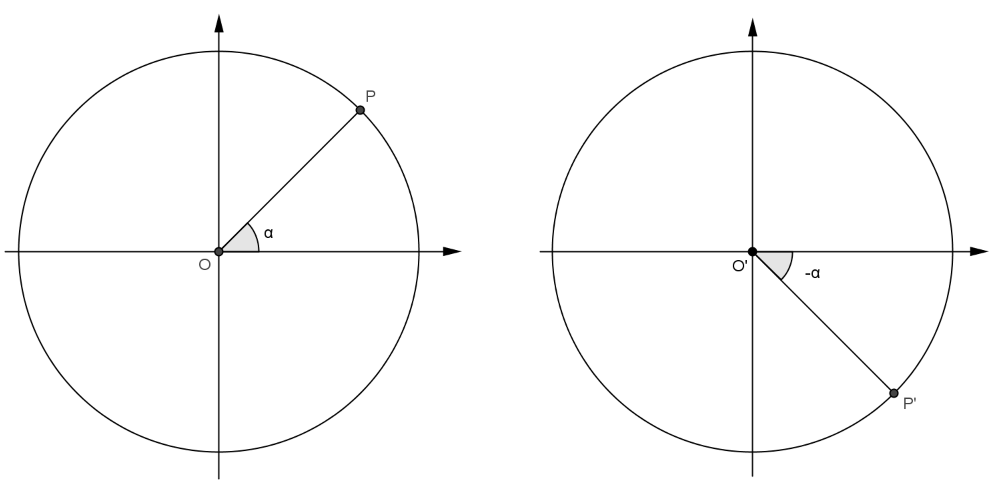

Figura 2.19

Nesse caso, como o seno do ângulo α corresponde à ordenada do ponto P, então $-sen(\alpha) = sen(-\alpha)$. Analogamente, como o cosseno do ângulo α corresponde à abscissa do ponto P, então $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$.

Já quando o ângulo α está no segundo quadrante, então o ângulo $-\alpha$ está no terceiro quadrante, conforme figura abaixo:

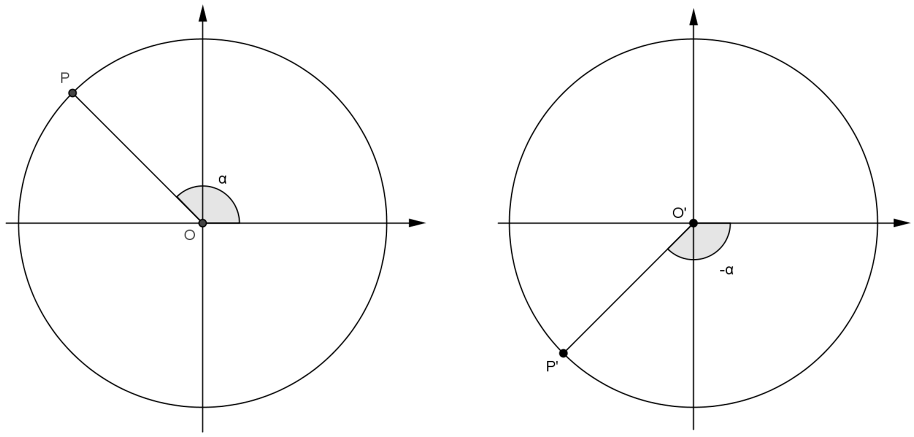

Figura 2.20

Conforme ocorreu anteriormente, $-sen(\alpha) = sen(-\alpha)$ e $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$.

Quando o ângulo α está no terceiro quadrante, então o ângulo $-\alpha$ estará no segundo quadrante, conforme figura abaixo:

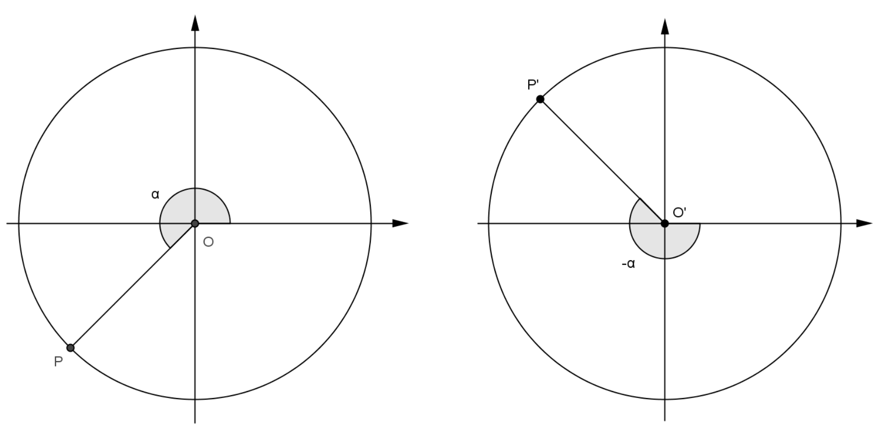

Figura 2.21

Da mesma forma, $-sen(\alpha) = sen(-\alpha)$ e $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$.

E por último, quando o ângulo α está no quarto quadrante, então o ângulo $-\alpha$ estará no segundo quadrante, conforme figura abaixo:

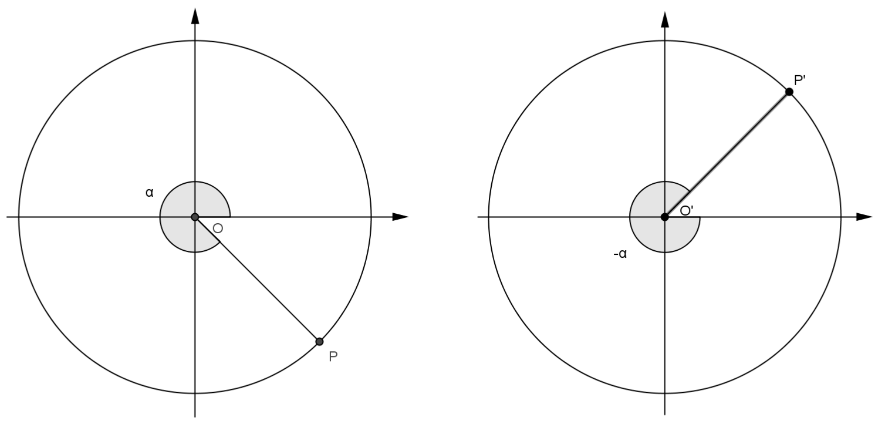

Figura 2.22

Da mesma forma, $-sen(\alpha) = sen(-\alpha)$ e $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$.

Portanto, pudemos verificar que sempre teremos as igualdades $sen(\alpha) = -sen(-\alpha)$ e $cos(\alpha) = cos(-\alpha)$, independente do quadrante que o ângulo estiver. Logo, a função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Proposição 2.9.2. *A função secante é par.*

Demonstração: Seja $sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)} \Rightarrow sec(-\alpha) = \dfrac{1}{cos(-\alpha)} = \dfrac{1}{cos(\alpha)} = sec(\alpha)$.
Logo, a função secante é par.

Proposição 2.9.3. *A função cossecante é ímpar.*

Demonstração: Seja $csc(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)} \Rightarrow csc(-\alpha) = \dfrac{1}{sen(-\alpha)} = \dfrac{1}{-sen(\alpha)} = -csc(\alpha)$.
Logo, a função cossecante é ímpar.

Proposição 2.9.4. *A função tangente é ímpar.*

Demonstração: Seja $tg(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \Rightarrow tg(-\alpha) = \dfrac{sen(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = \dfrac{-sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = -tg(\alpha)$.
Logo, a função tangente é ímpar.

Proposição 2.9.5. *A função cotangente é ímpar.*

Demonstração: Seja $ctg(\alpha) = \dfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \Rightarrow ctg(-\alpha) = \dfrac{cos(-\alpha)}{sen(-\alpha)} = \dfrac{cos(\alpha)}{-sen(\alpha)} = -ctg(\alpha)$.
Logo, a função cotangente é ímpar.

2.10 Funções Circulares Inversas

Como foi visto no item 1.4, para que uma função seja inversível, ela deve ser bijetiva. Porém, as funções seno, cosseno e tangente não são bijetivas, logo não são inversíveis. Dessa forma, toma-se um intervalo da função que ela tenha características bijetivas e, consequentemente, calcula-se a função inversa respectiva àquele intervalo tomado. Essas funções são denominadas Funções Circulares Inversas. A seguir, veremos cada caso separadamente.

2.10.1 Função Arco Seno

A função seno, isto é, $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é sobrejetiva ($\nexists x \in \mathbb{R} | senx > 1$) e tampouco é injetiva ($0 \neq 2\pi$ e $sen0 = sen2\pi$).

Por isso, toma-se o intervalo $[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, de tal forma que tenhamos $f : [\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, conforme figura abaixo:

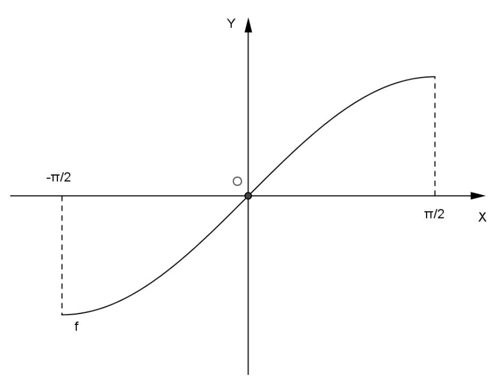

Figura 2.23

Dentro desse intervalo, a função f possui as seguintes características que a levam a ser classificada como bijetiva e, consequentemente, a admitir a inversa f^{-1}, denominada

Função Arco Seno:

- f é sobrejetiva, pois $\forall\ y \in [-1, 1]$, $\exists\ x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $sen(x) = y$; e
- f é injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \Rightarrow senx_1 \neq senx_2$, $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Abaixo, pode-se visualizar o gráfico da função arco seno:

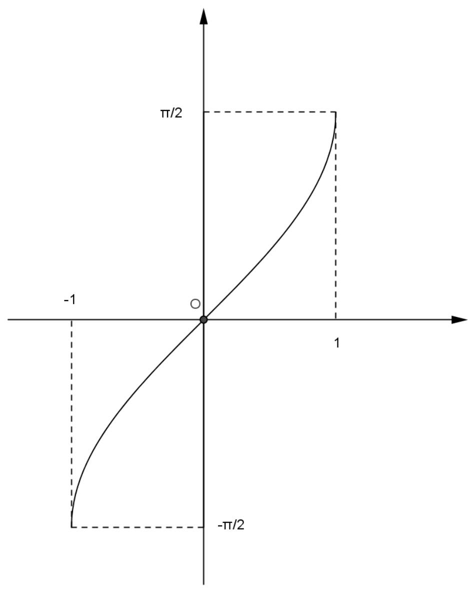

Figura 2.24

As características da função arco-seno são:

- Seu domínio é $[-1, 1]$;
- Sua imagem é $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- É bijetiva;
- É crescente em todo o seu domínio;
- Não é periódica; e
- É uma função ímpar.

Demonstração: Seja $sen(\alpha) = x$; $\frac{-\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = arcsen(x) \Rightarrow -\alpha = -arcsen(x)$.

Recordando a identidade $sen(-\alpha) = -sen(\alpha) \Rightarrow sen(-\alpha) = -x \Rightarrow -\alpha = arcsen(-x)$.

Logo: $-arcsen(x) = arcsen(-x)$.

2.10.2 Função Arco Cosseno

A função cosseno, isto é, $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é sobrejetiva ($\nexists x \in \mathbb{R} | cosx > 1$) e tampouco é injetiva ($0 \neq 2\pi$ e $cos0 = cos2\pi$).

Dessa forma, toma-se o intervalo $[0, \pi]$, de tal forma que $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, conforme figura abaixo:

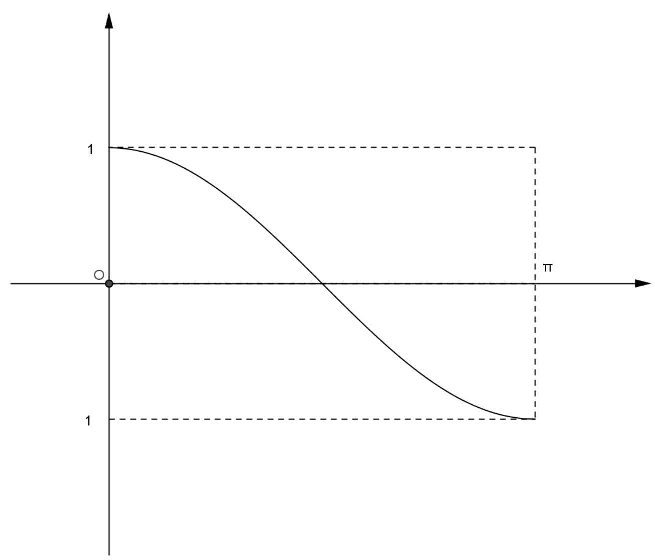

Figura 2.25

Dentro desse intervalo, a função f possui as seguintes características que a levam a ser classificada como bijetiva e, consequentemente, a admitir a inversa f^{-1}, denominada Função Arco Cosseno:

- f é sobrejetiva, pois $\forall\ y \in [-1, 1]$, $\exists\ x \in [0, \pi]$ tal que $cos(x) = y$; e
- f é injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \Rightarrow cosx_1 \neq cosx_2$, $x \in [0, \pi]$.

Abaixo, pode-se visualizar o gráfico da função arco cosseno:

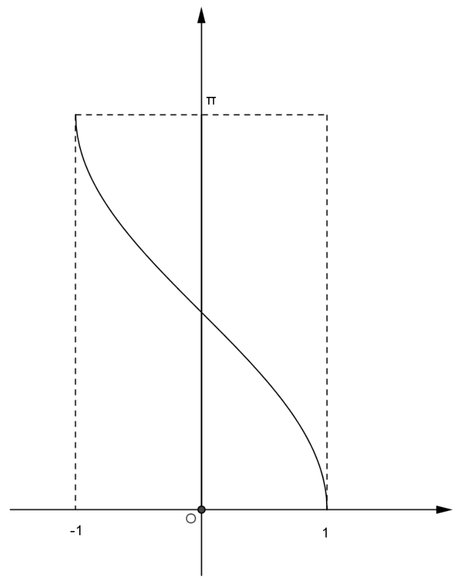

Figura 2.26

As características da função arco cosseno são:

- Seu domínio é $[-1, 1]$;
- Sua imagem é $[0, \pi]$;
- É bijetiva;
- É decrescente em todo o seu domínio;
- Não é periódica; e
- Não é uma função par e nem ímpar.

Demonstração: Seja $cos(\alpha) = x$; $0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow \alpha = arccos(x)$.

Por meio da identidade $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha) \Rightarrow cos(\pi - \alpha) = -x$.

Logo: $\pi - \alpha = arccos(-x) \Rightarrow \pi - arccos(x) = arccos(-x)$.

2.10.3 Função Arco Tangente

A função tangente $f(x) = tg(x)$, isto é, $f : x|x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \to \mathbb{R}$, é sobrejetiva ($\forall\ y \in \mathbb{R}$,$\exists$ $x \in \mathbb{R}$. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k|tg(x) = y$), porém não é injetiva ($0 \neq \pi$ e $tg0 = tg\pi$).

Dessa forma, toma-se o intervalo $]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, de tal forma que $f :]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, conforme figura abaixo:

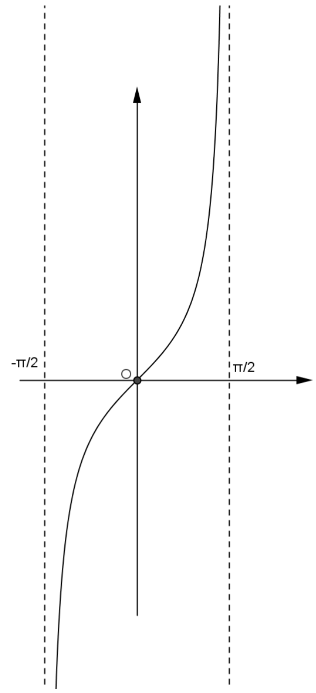

Figura 2.27

Dentro desse intervalo, a função f possui as seguintes características que a levam a ser classificada como bijetiva e, consequentemente, a admitir a inversa f^{-1}, denominada Função Arco Tangente:

- f é sobrejetiva, pois $\forall\ y \in \mathbb{R}$, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k$ tal que $tg(x) = y$; e
- f é injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \Rightarrow tgx_1 \neq tgx_2$.

Abaixo, pode-se visualizar o gráfico da função arco tangente:

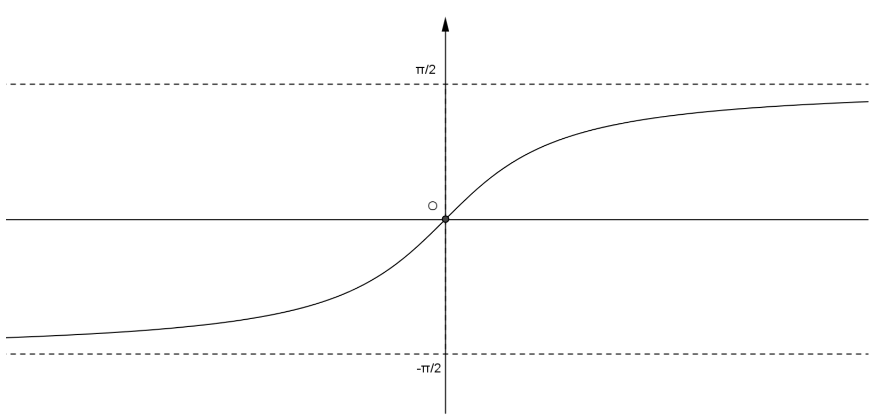

Figura 2.28

As características da função arco tangente são:

- Seu domínio é $\mathbb{R}$;
- Sua imagem é $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
- É crescente em todo o seu domínio; e
- É uma função ímpar.

Demonstração: Seja $tg(\alpha) = x; \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = arctg(x) \Rightarrow -\alpha = -arctg(x)$.

Por meio da identidade $tg(-\alpha) = -tg(\alpha) \Rightarrow tg(-\alpha) = -x \Rightarrow -\alpha = arctg(-x)$.

Logo: $-arctg(x) = arctg(-x)$.

2.11 Estudo de Gráficos

Seja $f(x)$ uma função trigonométrica na sua forma básica. Podemos inserir os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nessa função de tal modo que ela fique na forma $a.f(b.x + c) + d$.

Cada parâmetro colocado na função trigonométrica $f(x)$ vai alterar o seu gráfico de maneiras distintas. Vejamos cada uma delas, separadamente:

2.11.1 Parâmetro a

Este coeficiente é responsável pela amplitude da função trigonométrica, ocasionando dilatações e reflexões verticais no gráfico. Vejamos a seguir im exemplo:

Seja $f(x) = sen(x)$. Sabemos que $-1 \leq f(x) \leq 1$. Se multiplicarmos o parâmetro a à função, teremos: $g(x) = a.f(x) = a.sen(x)$.Dessa forma, teremos que $-a \leq g(x) \leq a$.

Observe as situações a seguir:

Exemplo 2.11.1. *Se $a > 1$, esticamento vertical:*

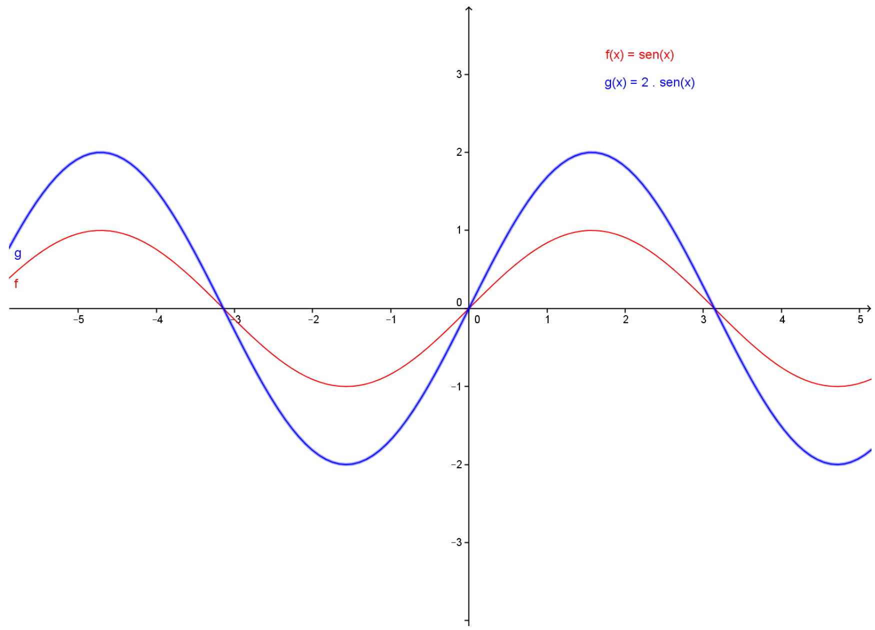

Figura 2.29

Exemplo 2.11.2. *Se 0 < a < 1, encolhimento vertical:*

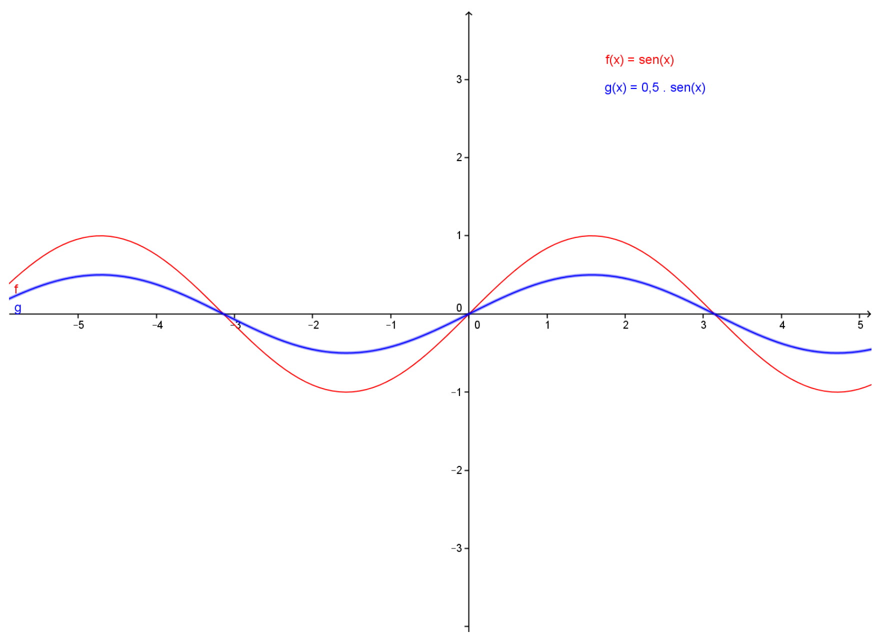

Figura 2.30

Exemplo 2.11.3. *Se a < -1, esticamento vertical composto com reflexão em relação ao eixo horizontal:*

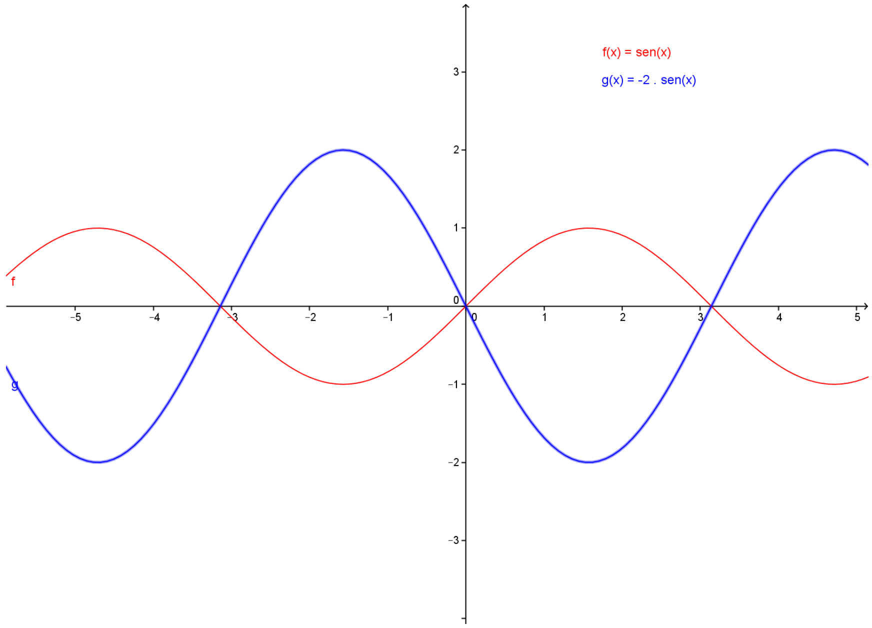

Figura 2.31

Exemplo 2.11.4. *Se -1 $< a <$ 0, encolhimento vertical composto com reflexão em relação ao eixo horizontal:*

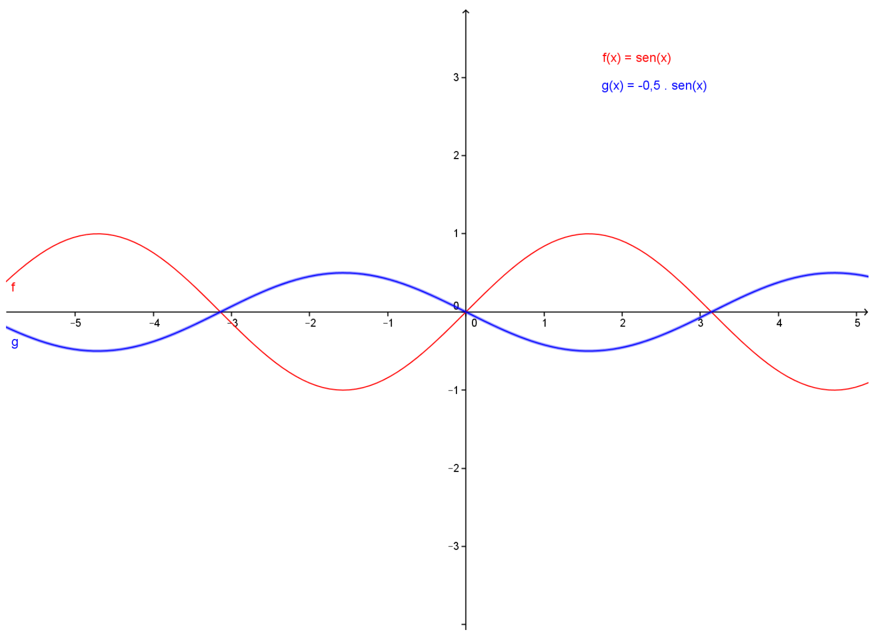

Figura 2.32

2.11.2 Parâmetro b

Este coeficiente é responsável pelo período T da função trigonométrica, ocasionando dilatações e reflexões horizontais no gráfico. Vejamos a seguir um exemplo:

Seja $f(x) = sen(b.x)$ e $f(x+T) = sen[b(x+T)]$. Sabemos que $f(x+T) = f(x)$ $\Rightarrow sen(bx+bT) = sen(bx)$. Como o período da função seno é igual $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $bT = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $T = \dfrac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como o período principal é o menor valor positivo de T, temos que $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$.

Cabe ressaltar que nas funções cosseno, secante e cossecante, o período é $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$. Nas funções tangente e cotangente, o período é $T = \dfrac{\pi}{|b|}$. As demonstrações são análogas à demonstração da função seno.

Observe as situações a seguir:

Exemplo 2.11.5. *Se $b > 1$, encolhimento horizontal (diminuição do período da função):*

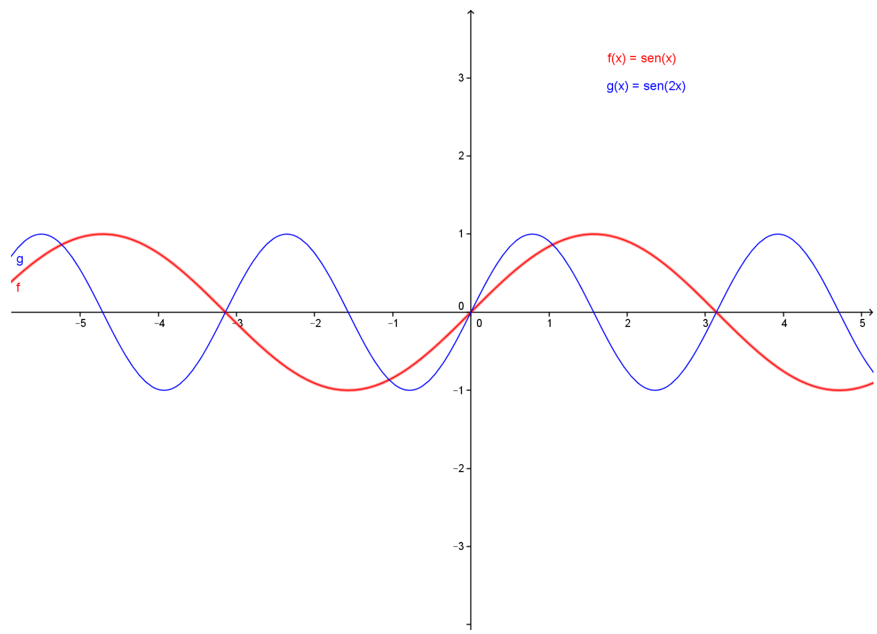

Figura 2.33

Exemplo 2.11.6. *Se $0 < b < 1$, esticamento horizontal (aumento do período da função):*

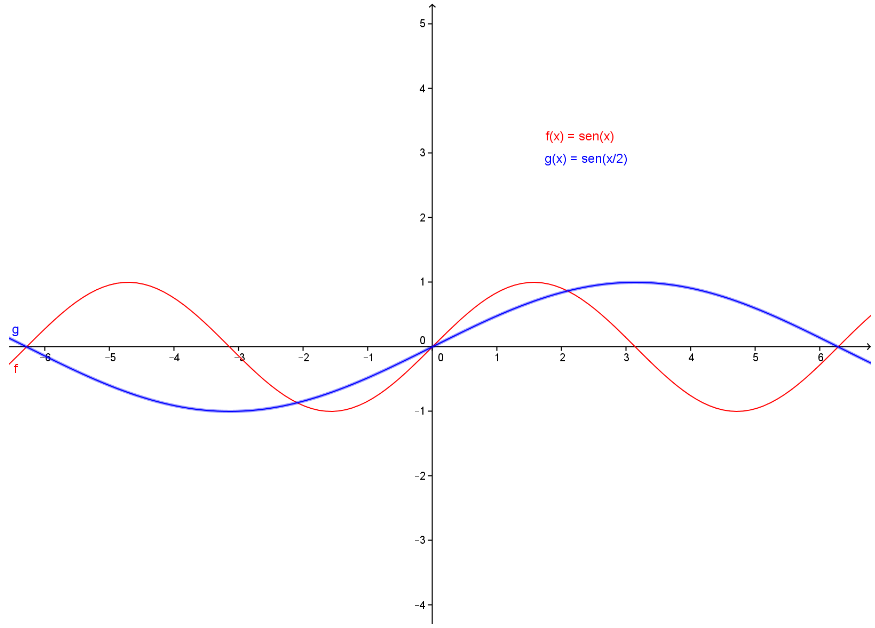

Figura 2.34

Exemplo 2.11.7. *Se -1 < b < 0, esticamento horizontal composto com reflexão em relação ao eixo vertical:*

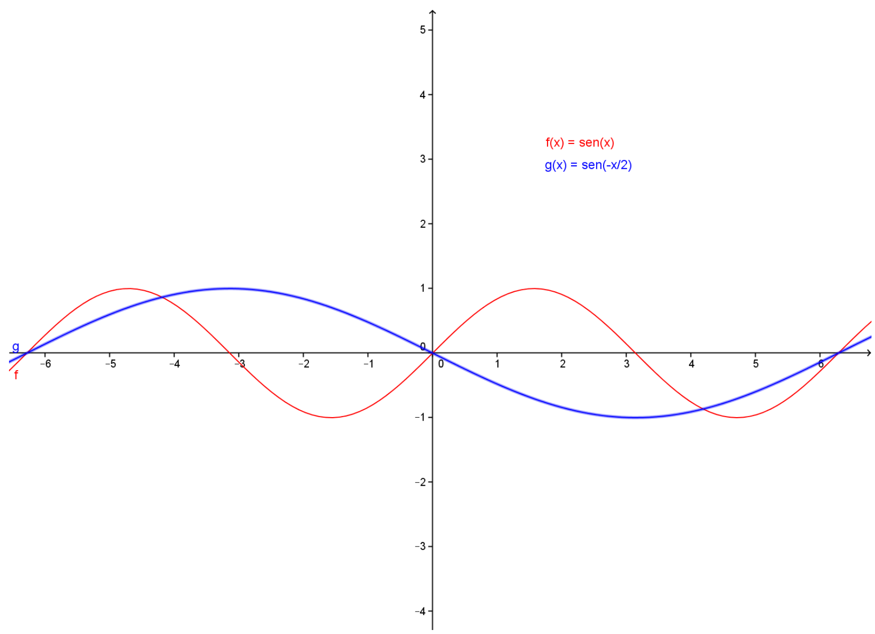

Figura 2.35

Exemplo 2.11.8. *Se b < -1, encolhimento horizontal composto com reflexão em relação ao eixo vertical:*

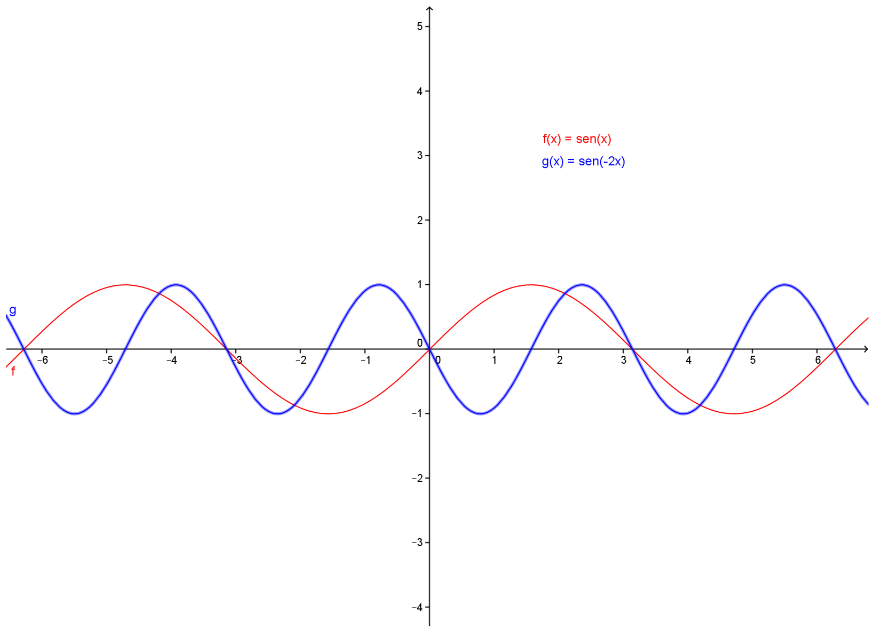

Figura 2.36

2.11.3 Parâmetro c

Este coeficiente é responsável pela fase da função trigonométrica, isto é, o quanto ela vai se deslocar em relação ao eixo das abscissas, ocasionando translações horizontais no gráfico. Vejamos a seguir o exemplo da função $g(x) = sen(x + c)$:

Exemplo 2.11.9. *Se $c > 0$, o gráfico se deslocará no sentido negativo do eixo x (para a esquerda):*

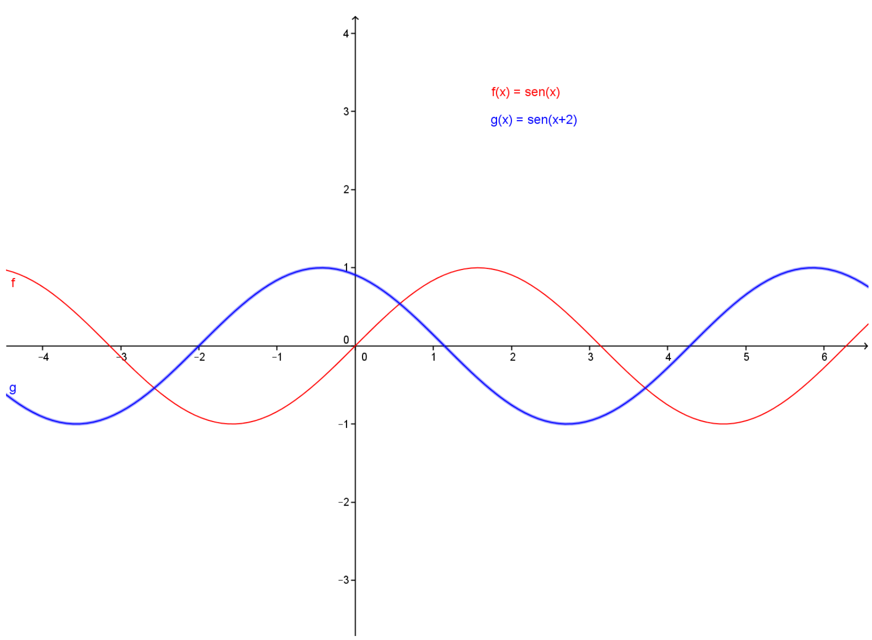

Figura 2.37

Neste caso, o leitor poderá ser induzido ao erro caso aja intuitivamente. Observe que, mesmo somando um número positivo a x, o gráfico transladará no sentido negativo do eixo x. Isso porque:

Se $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(x + c) \Rightarrow g(x - c) = sen(x) = f(x)$.

Exemplo 2.11.10. *Se $c < 0$, o gráfico se deslocará no sentido positivo do eixo x (para a direita):*

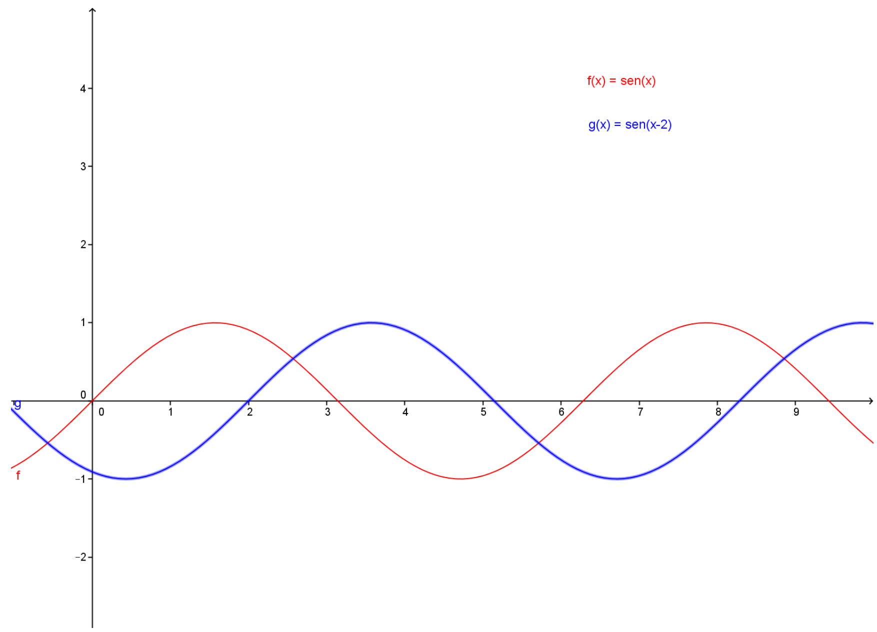

Figura 2.38

A justificativa para que a função translade no sentido positivo do eixo das abscissas quando se subtrai um valor de x é análogo à justificativa anterior.

2.11.4 Parâmetro d

O parâmetro d é uma constante que indica o deslocamento vertical do gráfico, isto é, ocasiona translações verticais no gráfico. Dessa forma, se o gráfico de $f(x)$ passa pela coordenada (x, y), então o gráfico de $g(x) = f(x) + d$ passará pela coordenada $(x, d + y)$, em todo o seu domínio.

Tomaremos como exemplo a função $f(x) = sen(x)$ e a função $g(x) = sen(x) + d = f(x) + d$.

Exemplo 2.11.11. *Se $d > 0$, o gráfico se deslocará no sentido positivo do eixo y (para cima):*

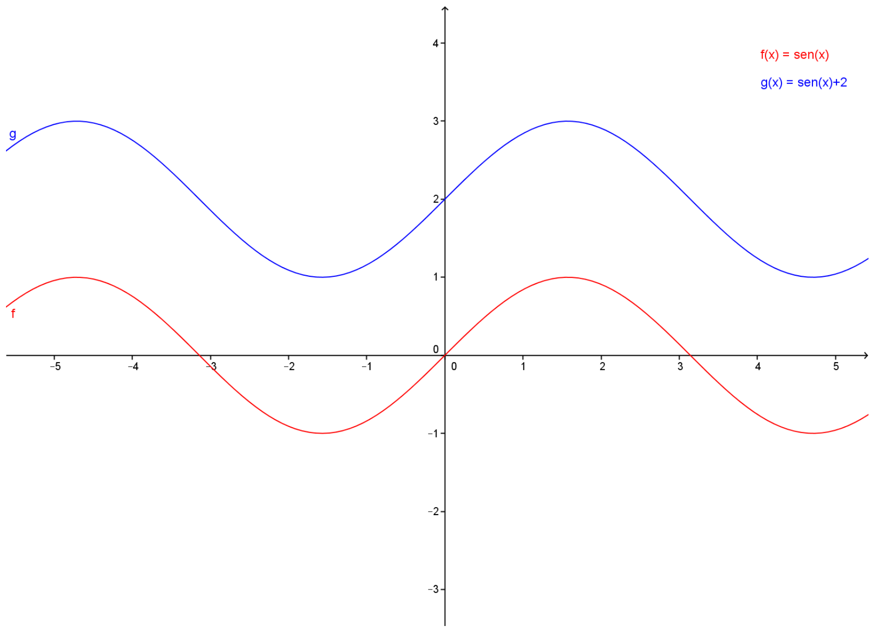

Figura 2.39

Exemplo 2.11.12. *Se $d < 0$, o gráfico se deslocará no sentido negativo do eixo y (para baixo):*

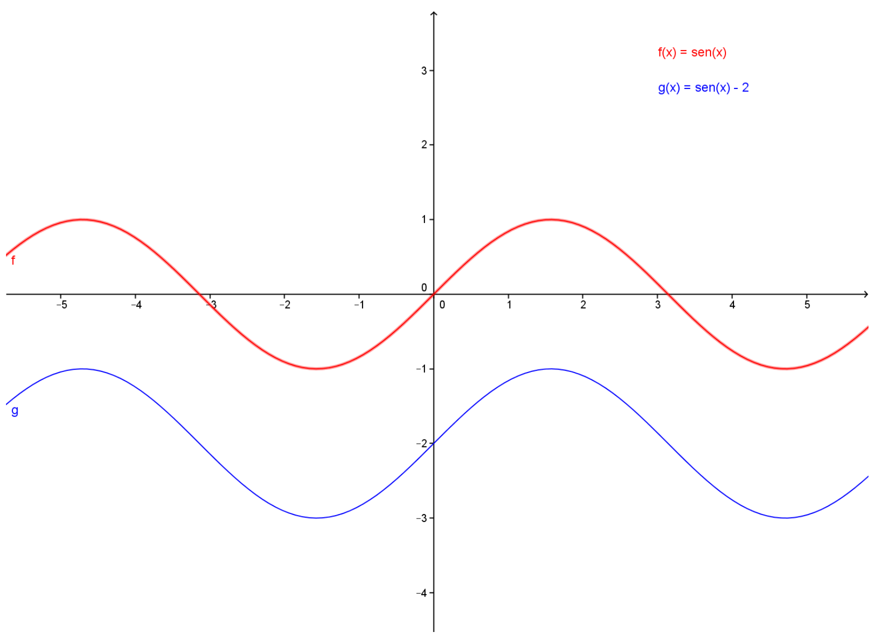

Figura 2.40

Capítulo 3

Os Recursos Computacionais no Ensino das Funções Trigonométricas

Atualmente, as tecnologias digitais estão presentes em todos os setores da sociedade, portanto não faria sentido deixá-la de fora do ambiente da sala de aula. Porém, ainda se discute o modo mais apropriado de utilizar essas tecnologias de forma que seus efeitos sejam benéficos para o aprendizado. Os efeitos dessa ferramenta na aprendizagem estão mais relacionados com o modo como ela é usada em sala de aula do que com suas características.

Existem diversos recursos computacionais que possibilitam a exploração, em sala de aula, das funções trigonométricas. O seu uso é importante para que o aluno possa visualizar o conhecimento teórico ministrado em sala de aula e não deve, em hipótese alguma, substituir os conceitos algébricos e geométricos dessas funções, pois são esses conceitos que possibilitarão o aluno a ter senso crítico para a interpretação do resulto obtido, haja vista que todos os recursos computacionais possuem algum tipo de limitação.

Os recursos computacionais mais simples são as calculadoras. Para o estudo das funções trigonométricas, a calculadora básica não tem muita relevância, porém a calculadora científica é de suma importância. Em sala de aula, os alunos aprendem a trigonometria utilizando os ângulos básicos, como $30°$, $45°$ e $60°$. Com os conceitos solidificados, os alunos passam a utilizar ângulos que não nos permitem calcularmos seus senos, por exemplo, de forma simples. Trabalhar com as funções inversas das funções trigonométricas também exige, em muitos momentos, o uso de um recurso tecnológico. Nesses momentos, a calculadora científica é importante. Porém, há de lembrar que as calculadoras têm suas limitações. Observe a figura abaixo e note que não é possível afirmar se os números representados são racionais ou irracionais.

Figura 3.1: Representação de números reais. Fonte: [8].

As planilhas eletrônicas são ferramentas que foram originalmente concebidas para representação de dados estatísticos em gráficos de linha. Porém, pode-se adaptá-las para se construir o gráfico de funções reais, como por exemplo, as funções trigonométricas. Os gráficos feitos em planilhas eletrônicas, como o Excel, apresentam a limitação de serem obtidos por interpolação de pontos por meio de segmentos de reta, dando um aspecto poligonal às curvas. Vejamos um exemplo de gráfico confeccionado no Excel, onde a coluna A possui elementos de x e a coluna B possui elementos de y, tal que $y = sen(x)$:

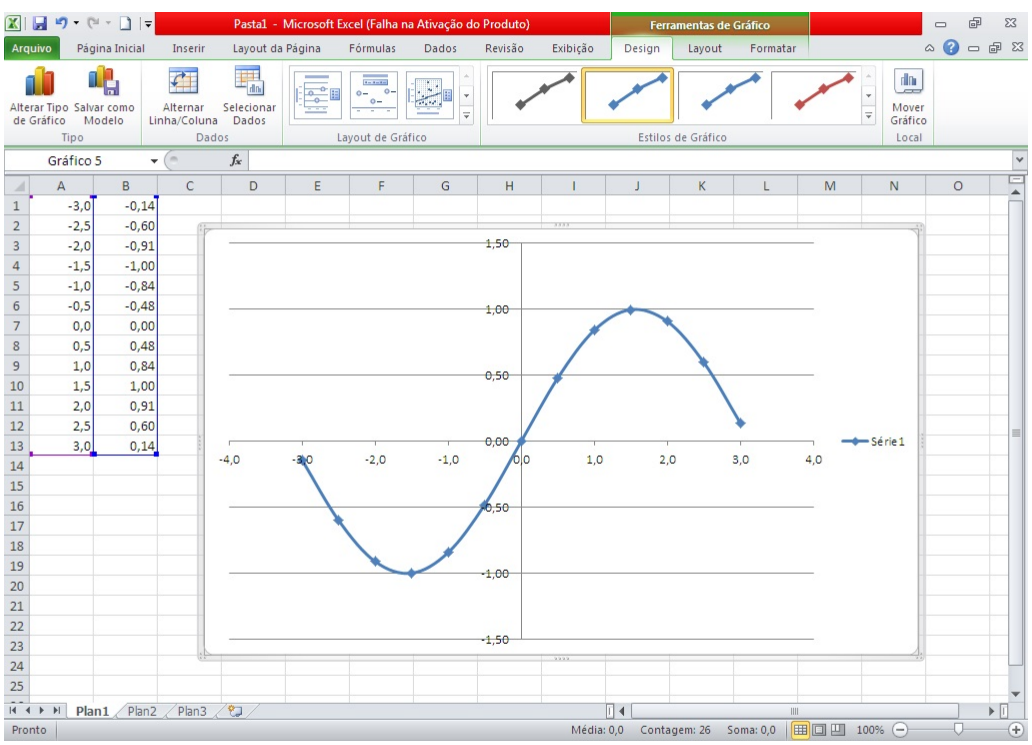

Figura 3.2: Função Seno em planilha eletrônica.

Existem também softwares mais sofisticados que podem ser empregados nas aulas de Funções Trigonométricas. Quando o docente for abordar os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

que podem ser incluídos na funções trigonométrica $f(x)$ e as alterações gráficas que cada parâmetro inserido ocasiona quando essa função fica na forma $a.f(b.x+c)+d$, o uso do software certamente vai proporcionar ao aluno uma melhor forma de visualização, haja vista que as constantes construções de gráficos para verificar o comportamento da função pode ser maçante e desmotivar o aluno para a aprendizagem. Cabe ressaltar que o recurso computacional empregado não deve substituir o conhecimento necessário de construção de gráfico e comportamento das funções. No item 2.11 desse trabalho de conclusão de curso, quando os parâmetros foram abordados, o Geogebra foi utilizado para mostrar o comportamento da função $f(x) = a.sen(b.x+c)+d$. Segue uma ilustração para a função seno:

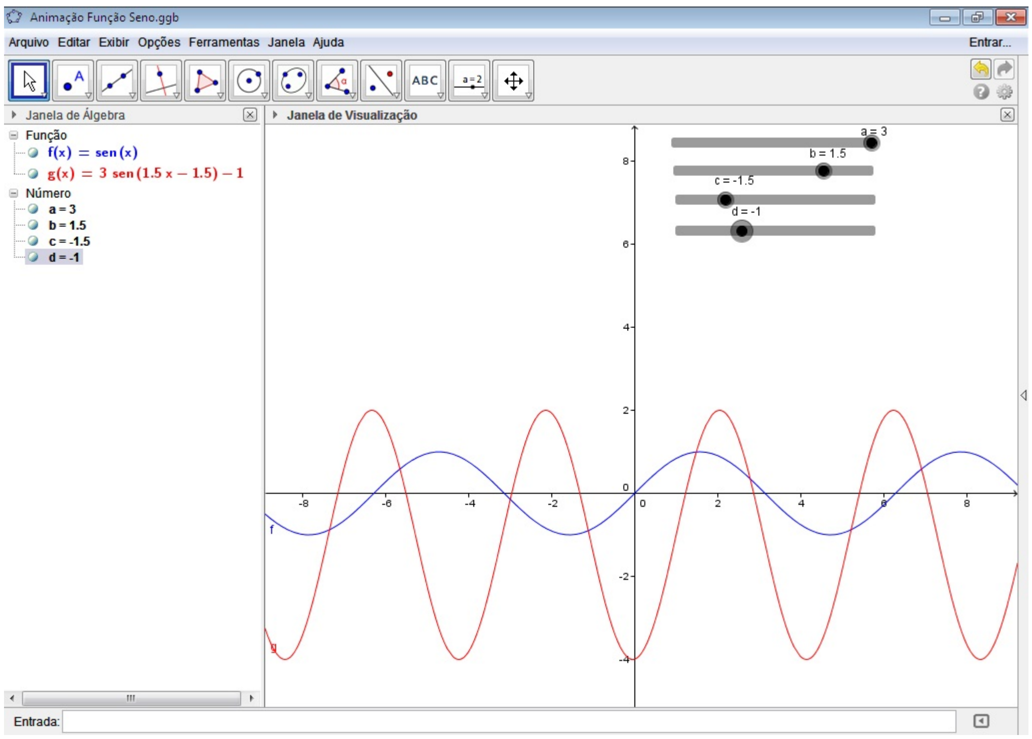

Figura 3.3: Função Seno no Geogebra.

Certamente que esse software pode ser empregado para melhor visualizar qualquer função trigonométrica, como podemos ver no exemplo abaixo, com a função cosseno:

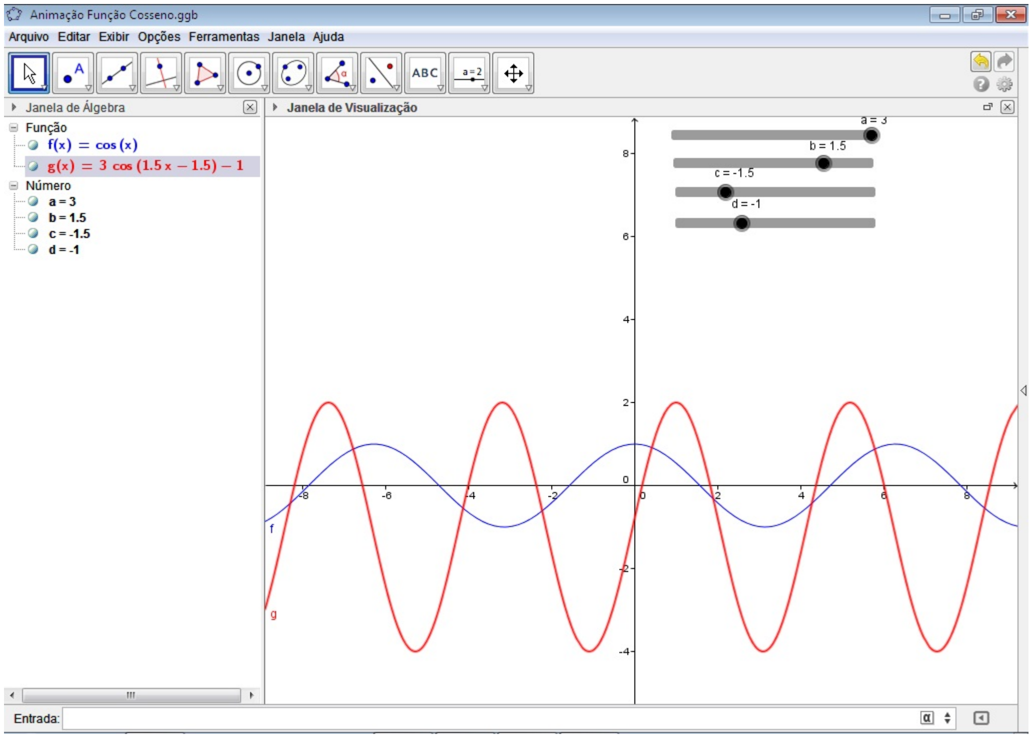

Figura 3.4: Função Cosseno no Geogebra.

Além disso, o Geogebra nos permite construir um aplicativo para que possamos melhor visualizar as propriedades das Funções Trigonométricas. Com esse aplicativo, pode-se explorar a relação entre grau e radiano, comprimento da circunferência, intervalo do conjunto Imagem das funções, quadrantes de crescimento e decrescimento das funções, período das funções, etc. A seguir, mostraremos o passo-a-passo para a construção do aplicativo está a seguir:

1. O = (0,0)
   Propriedades desse ponto: na aba "básico", habilitar a opção Fixar Objetos;

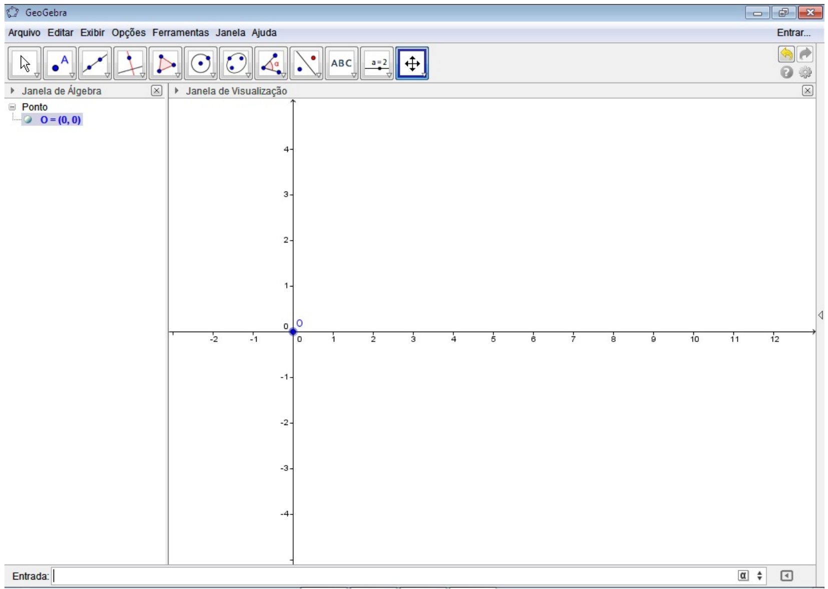

Figura 3.5: Ilustração do passo 1.

2. C = (-1,0)
   Propriedades desse ponto: na aba "básico", habilitar a opção Fixar Objetos;

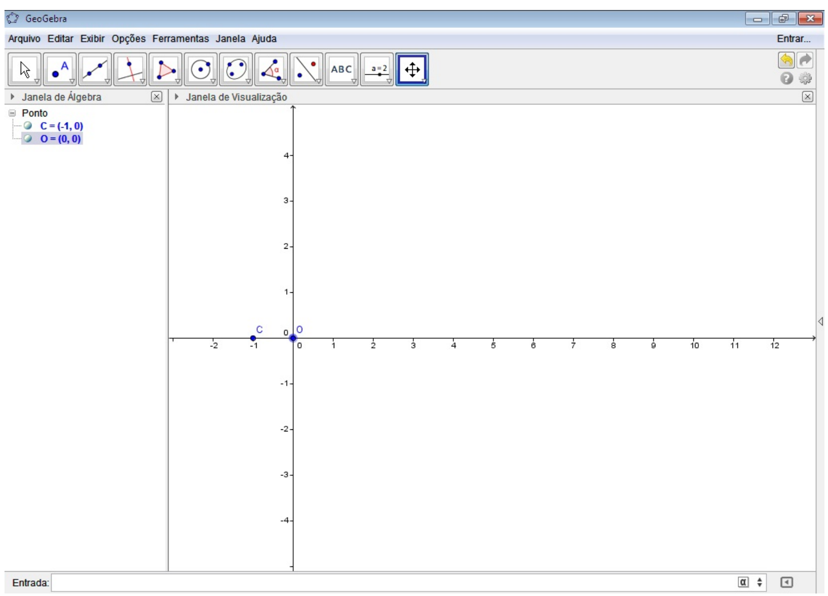

Figura 3.6: Ilustração do passo 2.

3. c = Círculo[C,1]
   Propriedades desse círculo: na aba "básico", desabilitar a opção Exibição de Rótulos; na aba "estilo", mudar o estilo de linha para tracejado;

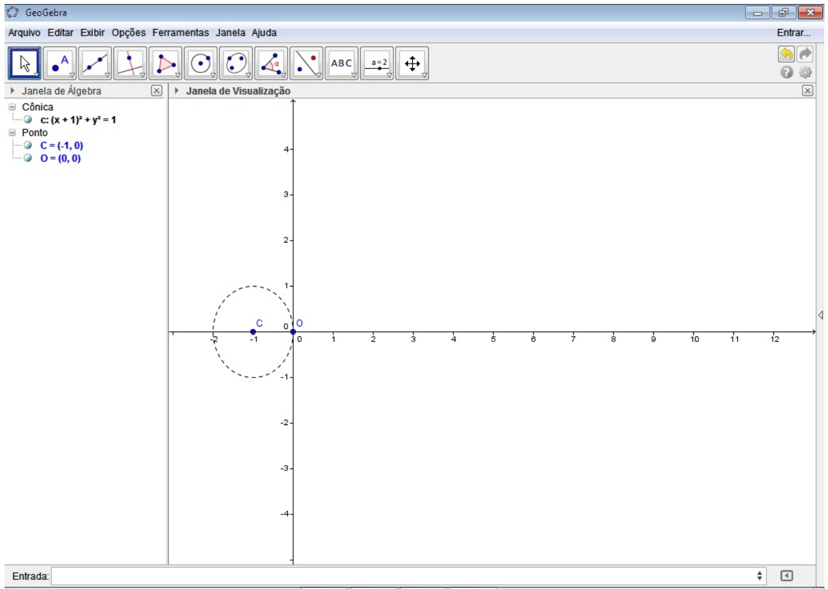

Figura 3.7: Ilustração do passo 3.

4. A $= (2\pi, 0)$

   Propriedades desse ponto: na aba "básico", habilitar a opção Fixar Objetos;

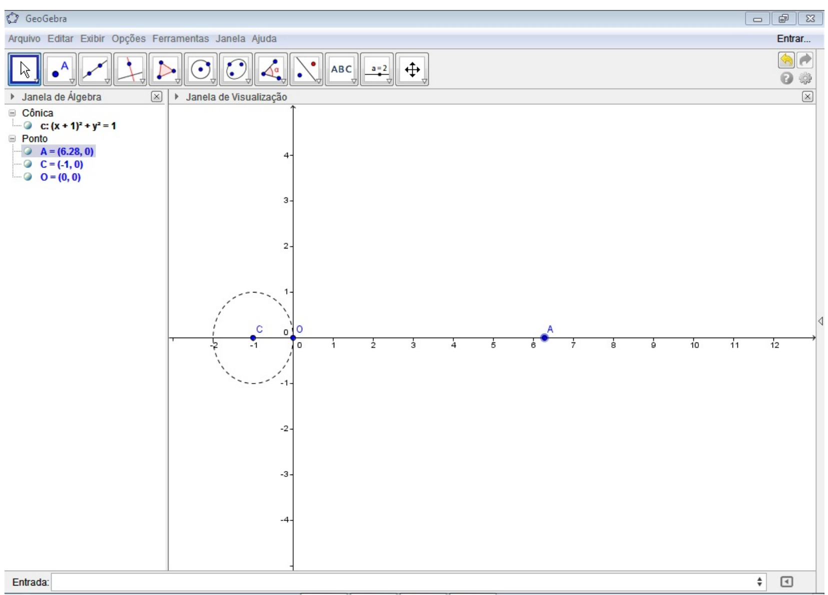

Figura 3.8: Ilustração do passo 4.

5. P = Ponto[Segmento[O,A]]

   Propriedades desse ponto: na aba "cor", escolher vermelho; na aba "estilo", escolher espessura de linha 5; movimente esse ponto no eixo horizontal até a abscissa 1;

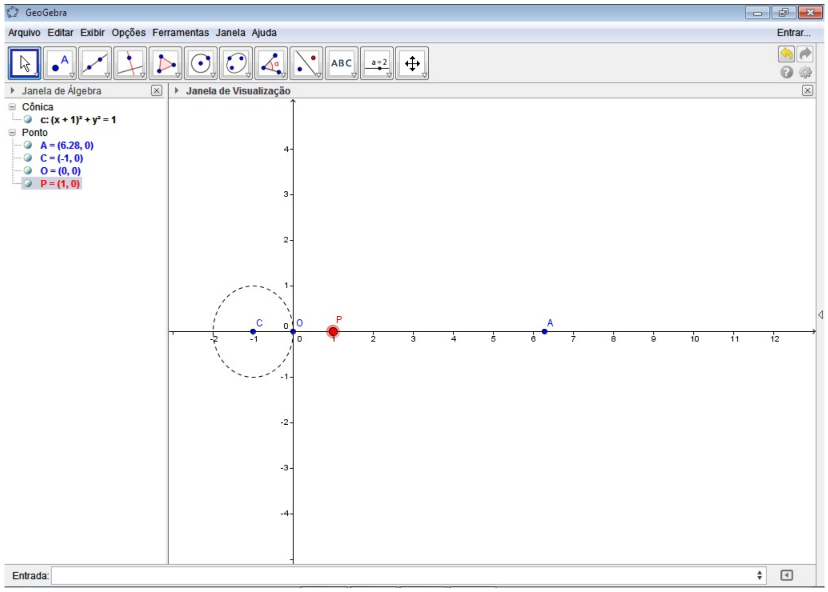

Figura 3.9: Ilustração do passo 5.

6. radiano = Segmento[O,P]
   Propriedades desse segmento: na aba "básico", em Exibir Rótulo escolher Valor; na aba "cor", escolher verde escuro; na aba "estilo", escolher espessura de linha 9;

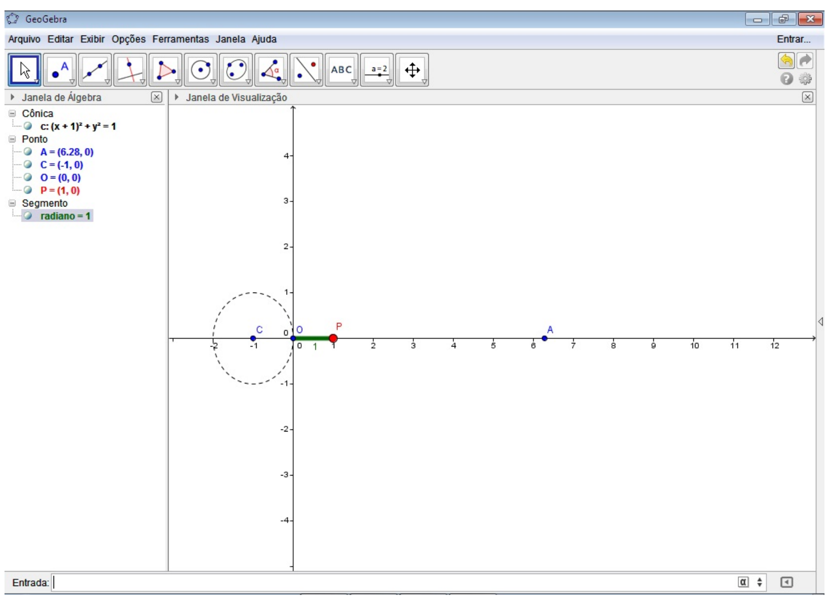

Figura 3.10: Ilustração do passo 6.

7. Q = Girar[O,radiano,C]
   Propriedades desse ponto: na aba "cor", escolher vermelho;

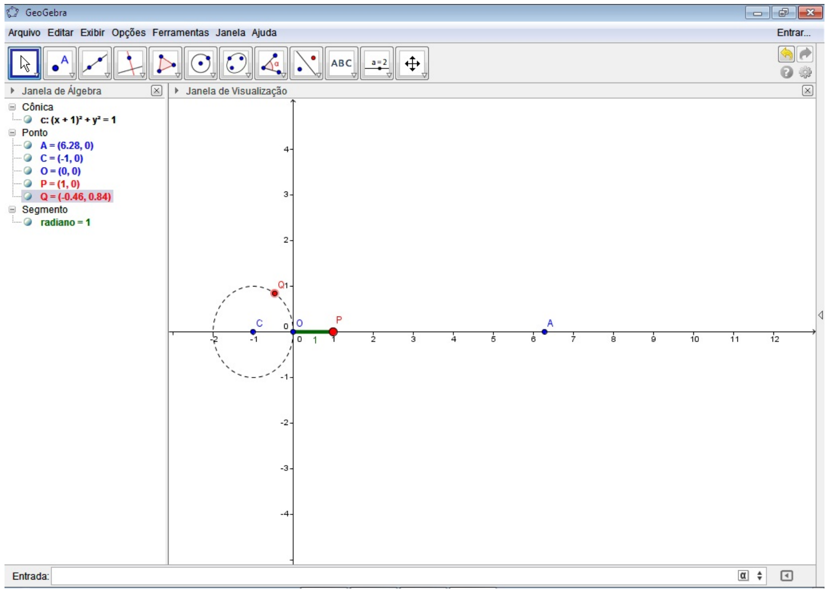

Figura 3.11: Ilustração do passo 7.

8. grau = Ângulo[O,C,Q]
   Propriedades desse ângulo: na aba "básico", em Exibir Rótulo, escolher a opção Valor; na aba "estilo"escolher tamanho 50;

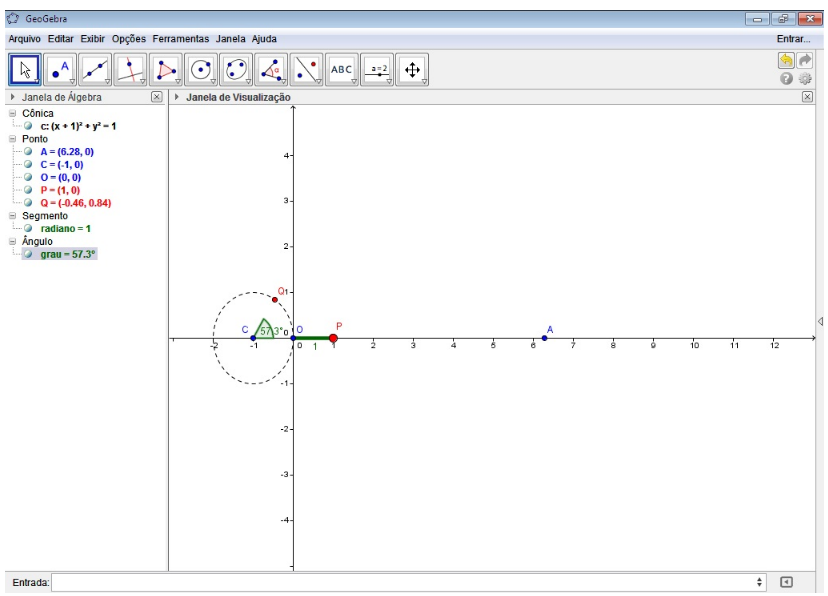

Figura 3.12: Ilustração do passo 8.

9. cc = Arco[c,Q,O]
   Propriedades desse arco: na aba "básico", desabilitar Exibir Rótulo; na aba "cor", escolher verde escuro; na aba "estilo", escolher espessura de linha 9;

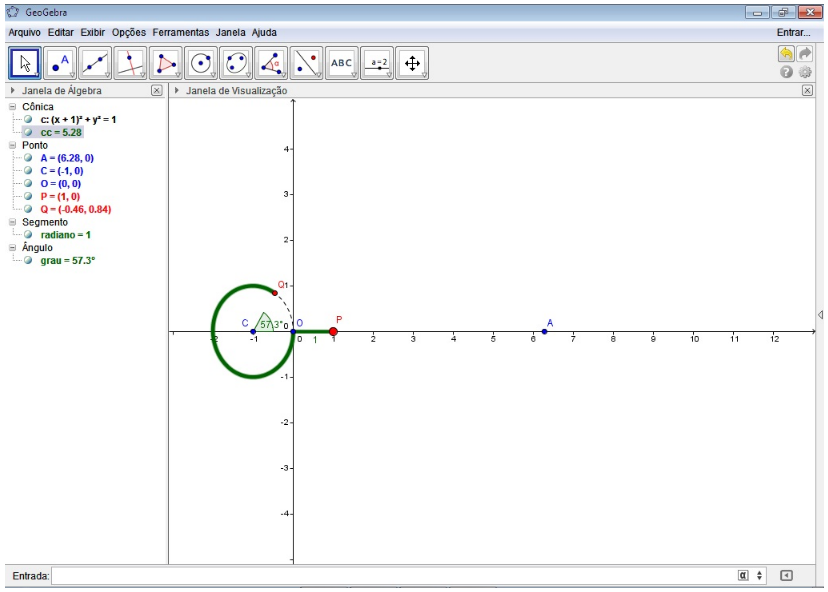

Figura 3.13: Ilustração do passo 9.

10. h = Reta[Q,EixoX]
    Propriedades dessa reta: na aba "básico", desabilitar a opção Exibir Rótulo; na aba "estilo", escolher espessura de linha pontilhado;

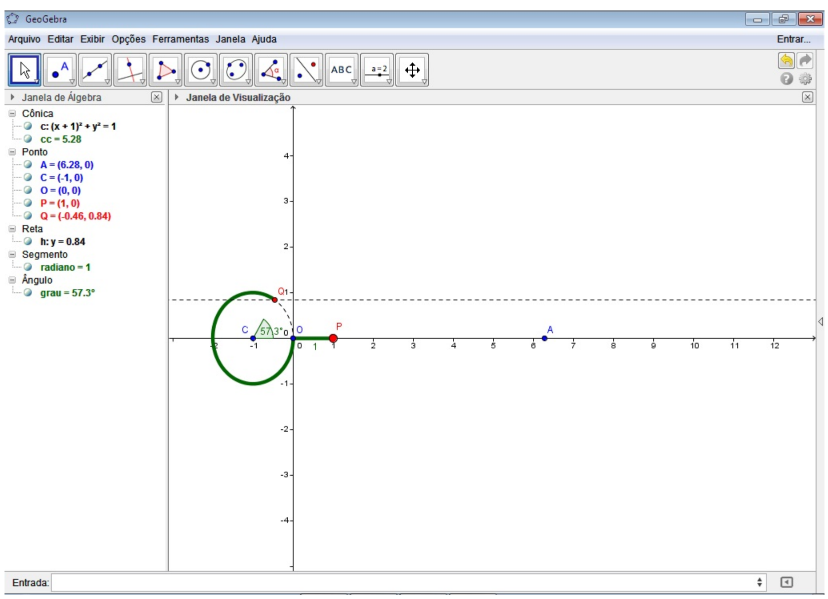

Figura 3.14: Ilustração do passo 10.

11. v = Perpendicular[P,EixoX]
    Propriedades dessa reta: na aba "básico", desabilitar a opção Exibir Rótulo; na aba "estilo"escolher estilo de linha pontilhado;

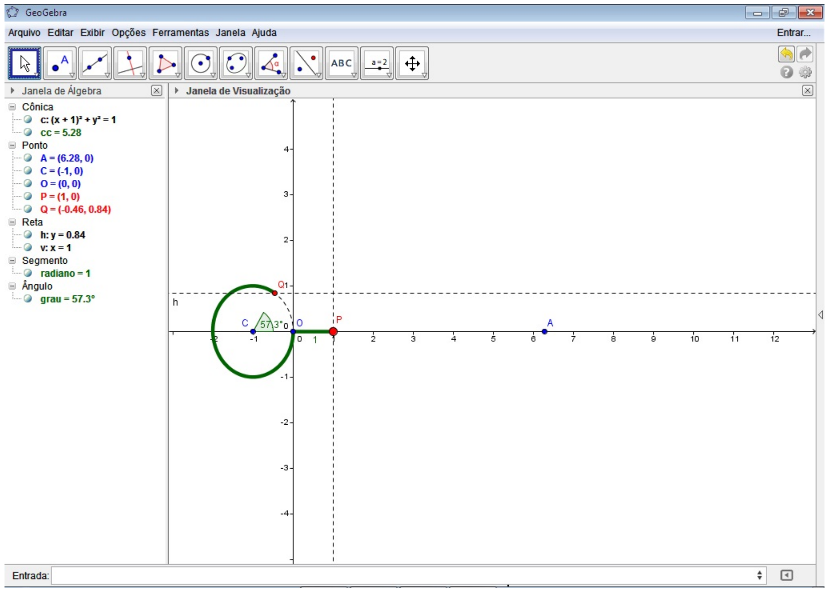

Figura 3.15: Ilustração do passo 11.

12. seno = Função[sin(x), x(O), x(P)]
    Propriedades desse gráfico: na aba "cor", escolher vermelho; na aba "estilo", escolher espessura de linha 9.

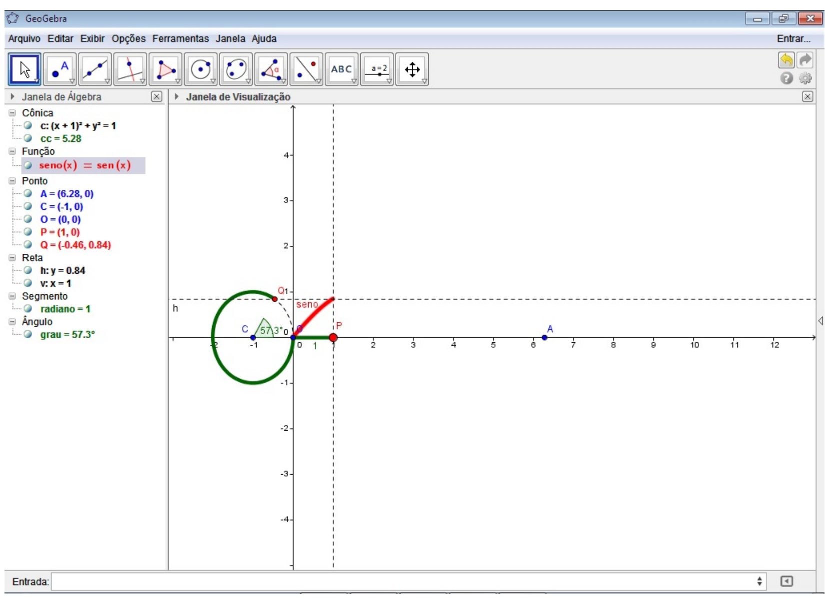

Figura 3.16: Ilustração do passo 12.

Seguindo esses passos, conseguimos construir o aplicativo *Desenrolando o Seno*. Caso seja de interesse utilizar esse aplicativo para outras funções trigonométricas, todos os passos deverão ser seguidos, exceto o passo 12, onde deve-se colocar a função e o intervalo desejados, mantendo a mesma propriedade.

Mostraremos a ilustração do aplicativo *Desenrolando o Seno*.

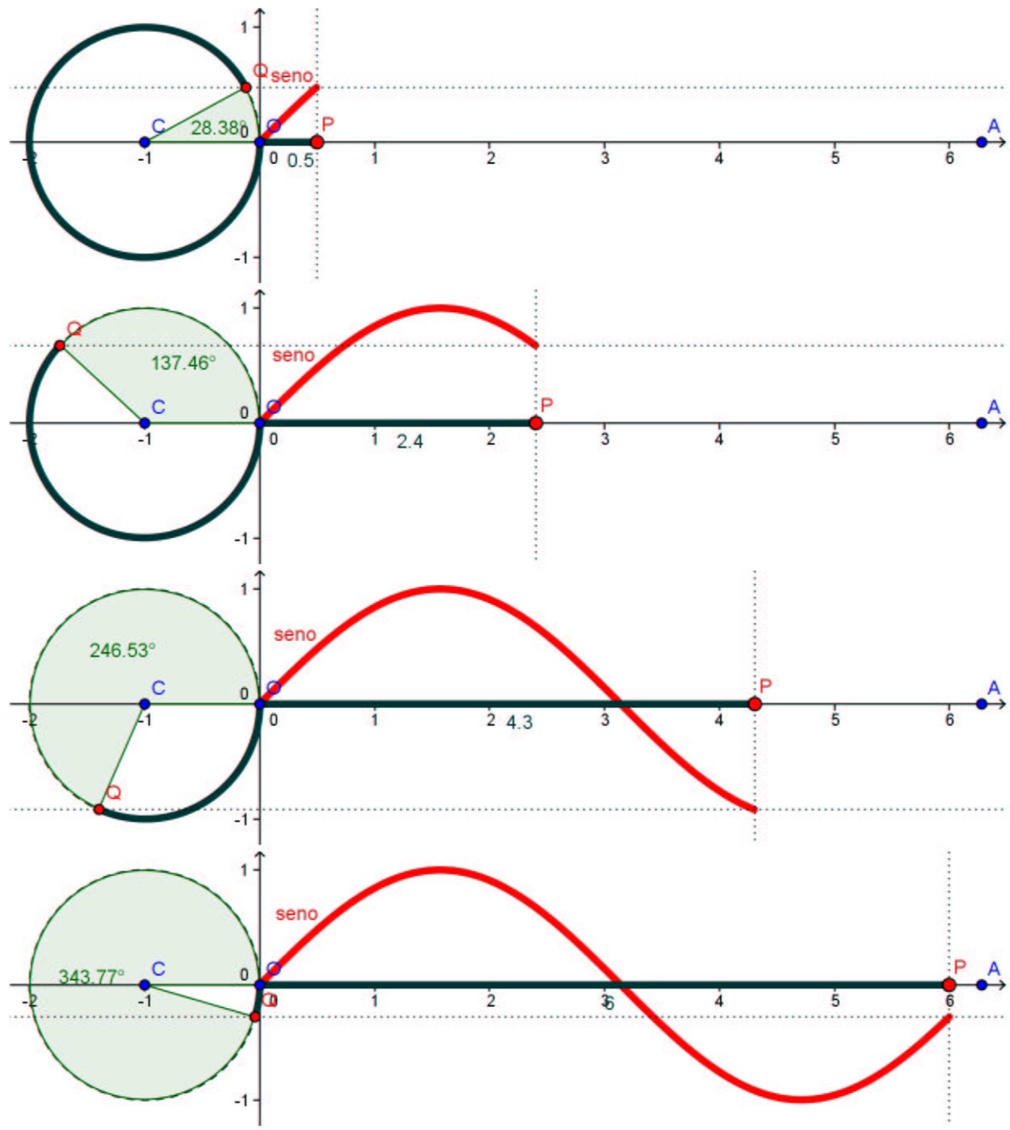

Figura 3.17: Aplicativo Desenrolando o Seno. Fonte: [8].

Inúmeros recursos computacionais podem ser encontrados no mercado, não apenas para as funções trigonométricas, mas para o ensino da matemática de uma forma geral. Vamos agora exemplificar uma atividade que pode ser utilizada em sala de aula e que faz uso de alguns recursos computacionais mencionados.

Exemplo 3.0.13. *Supondo os dados climáticos da cidade de Nova Friburgo, na região serrana do estado do Rio de Janeiro, citados na tabela abaixo:*

Município: Nova Friburgo - RJ

Latitude: 22,28 S **Longitude:** 42,53 W **Altitude:** 857 m **Período:** 1961-1990

Mês	T (°C)	P (mm)	ETP	ARM (mm)	ETR (mm)	DEF (mm)	EXC (mm)
Jan	21,2	209	99	100	99	0	110
Fev	21,4	167	92	100	92	0	75
Mar	20,9	151	93	100	93	0	58
Abr	18,7	72	69	100	69	0	3
Mai	16,2	46	52	94	52	0	0
Jun	14,7	27	40	83	39	2	0
Jul	14,0	20	38	69	33	4	0
Ago	15,2	23	45	56	37	8	0
Set	16,6	41	54	49	48	6	0
Out	18,3	83	71	60	71	0	0
Nov	19,5	169	82	100	82	0	48
Dez	20,3	239	94	100	94	0	145
TOTAIS	**217,0**	**1.247**	**829**	**1.011**	**809**	**21**	**438**
MÉDIAS	**18,1**	**104**	**69**	**84**	**67**	**2**	**37**

Fonte: INMET

Figura 3.18: Banco de dados climáticos do Brasil.

A primeira coluna representa a média de temperaturas mensais entre os anos de 1961 e 1990. Utilizaremos então o recurso da planilha eletrônica para traçar esse gráfico, conforme figura abaixo:

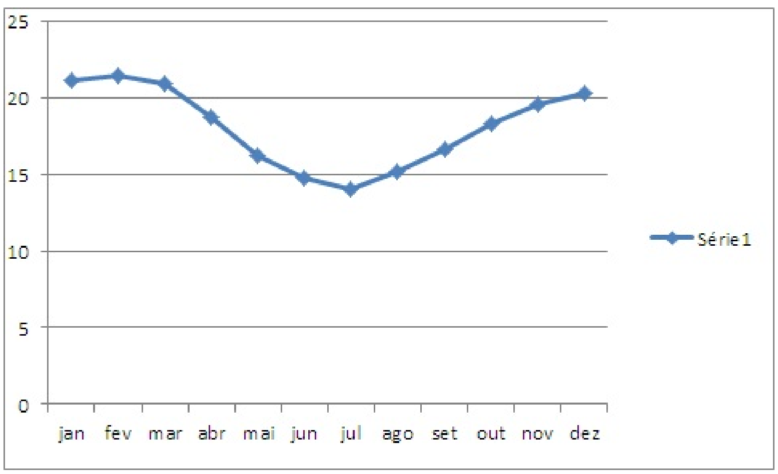

Figura 3.19: Gráfico das temperaturas médias mensais em Nova Friburgo-RJ.

Percebe-se que a curva do gráfico é semelhante a uma função seno. Podemos então, a partir de agora, utilizar o software Geogebra para tentarmos modelar essa função, da seguinte forma:

- Marcar os pontos no gráfico;
- Inserir os parâmetros a, b, c e d, com a variando de 0 a 10, b variando de 0 a 2, c variando de -9 a 1 e d variando de 10 a 25; e
- Construir o gráfico da função da temperatura $T(x) = a.sen(bx + c) + d$.

Os alunos podem tentar modelar a função da temperatura média mensal pelos meses do ano.

Observe na figura abaixo que, após alguns ajustes, chegamos a seguinte função:

$$T(x) = 3,8.sen(0,6x - 5,8) + 17,6$$

.

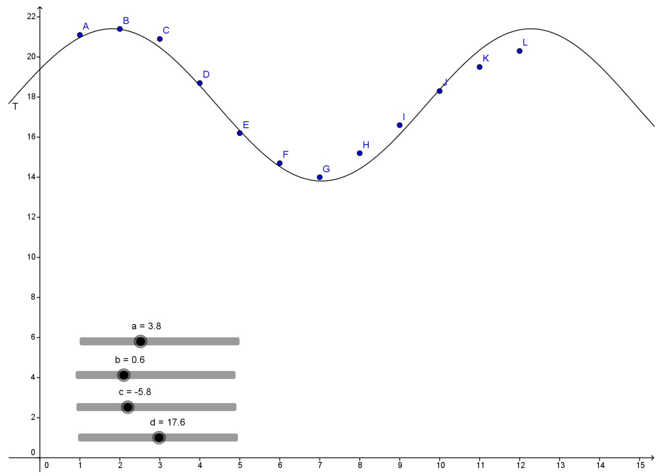

Figura 3.20: Gráfico das temperaturas médias mensais ajustado no Geogebra.

Agora, caberá ao docente ter a criatividade para empregar esses recursos de forma que a aprendizagem seja otimizada.

Capítulo 4

Aplicações das Funções Periódicas no Ensino Médio

As funções periódicas têm diversas aplicações. Tão logo o aluno tenha contato com esse tema e consiga amadurecer os conceitos obtidos, iniciam-se as aplicações. O primeiro contato é com os movimentos periódicos, tais como oscilações de um corpo sobre uma mola, o movimento pendular e as vibrações de um instrumento musical de corda.

Exemplo 4.0.14. *Há inúmeros outros sistemas que exibem comportamento periódico, como por exemplo, uma boia em um oceano que oscila de baixo para cima a medida que as ondas passam. Supondo que ela esteja em seu ponto mais alto no instante $t = 0$. Além disso, a boia oscila 80 centímetros a partir do ponto mais alto em 12 segundos, conforme representado na figura abaixo:*

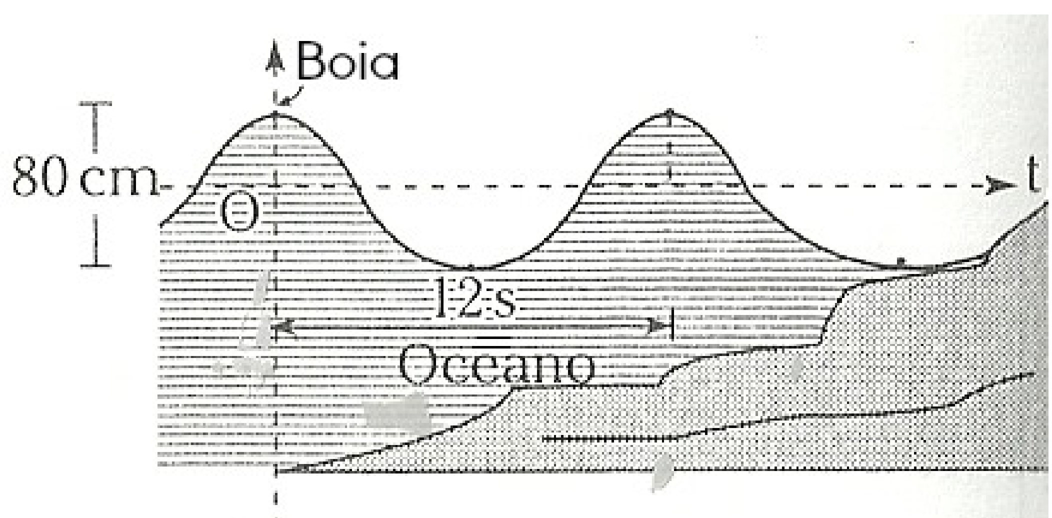

Figura 4.1: Boia oscilando com as ondas. Fonte: [13].

A figura nos mostra que a boia oscila conforme o gráfico de uma função seno ou cosseno, em que a altura da boia varia de acordo com o tempo. A origem está disposta de tal forma que o conjunto imagem varia no intervalo $[-40, 40]$. *Dessa forma, tem-se que o gráfico é simétrico ao eixo* x, *o que nos leva a crer que não houve deslocamento vertical. Ao decidir utilizar a função cosseno, note que tampouco há deslocamento horizontal, pois em* $t = 0$ *a boia está na parte mais alta da cossenóide.*

Sendo assim, conforme vimos anteriormente, a função cosseno é do tipo $f(x) = a.cos(bx + c) + d$. *Pelos fatos expostos no parágrafo acima, temos que os parâmetros* c *e* d *são nulos. O parâmetro* a, *que é responsável pela amplitude, é igual a 40. O parâmetro* b *pode ser achado, pois o período* T *equivale a* $T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$.

Assim, temos que a equação do movimento da boia é $y = 40.cos(\frac{\pi.t}{6})$.

4.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

Definição 4.1.1. *Um tipo especial de movimento periódico ocorre quando uma força que age sobre uma partícula é proporcional ao seu deslocamento a partir da posição de equilíbrio e é dirigida sempre para essa posição. Quando uma força atua sobre um corpo dessa forma, então o corpo realizará o Movimento Harmônico Simples.*

Um conceito importante para entender o MHS é o do Movimento Circular Uniforme (MCU). Um corpo está em MCU quando sua trajetória for descrita por uma circunferência de raio R, velocidade angular constante ω e sentido positivo do deslocamento angular φ convencionado como o sentido anti-horário da circunferência, conforme figura abaixo:

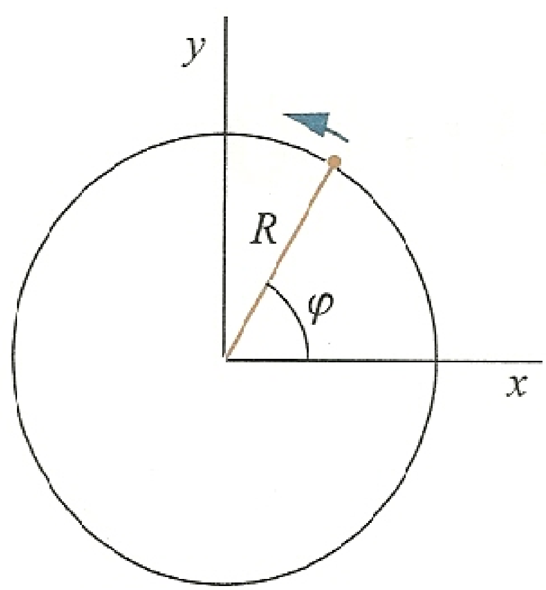

Figura 4.2: Movimento Circular Uniforme. Fonte: [5].

O ângulo φ é dado, em função do tempo, pela equação $\varphi = \omega.t + \varphi_0$, onde φ_0 é o ângulo inicial e ω é a velocidade angular.

O MHS é a projeção em um dado eixo do MCU. Sendo assim, a posição da partícula é descrita pelo ângulo φ.

A projeção em um dado eixo, como por exemplo o eixo x, do movimento da partícula é dado por $x = R.cos(\varphi) = R.cos(\omega.t + \varphi_0)$.

Como visto no item 2.11.1, o raio R é a amplitude da equação, o período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ e φ_0 é responsável pelo deslocamento horizontal do gráfico da função.

Utilizando o recurso da derivada, que não é, normalmente, abordado no ensino médio, chegamos a conclusão que a velocidade e aceleração do movimento são, respectivamente $v = -\omega.R.sen(\omega.t + \varphi_0)$ e $a = -\omega^2.R.cos(\omega.t + \varphi_0)$.

Um excelente exemplo de MHS é oscilador massa-mola, que consiste em um bloco de massa m, em repouso em um plano horizontal suposto perfeitamente liso e preso a uma mola. Quando esse bloco sai do repouso, ele realiza um movimento oscilatório e periódico, tendendo a voltar para o seu ponto de equilíbrio (centro da trajetória e elongação $x = 0$). Na figura a seguir, mostraremos um oscilador massa-mola com uma mola não deformada.

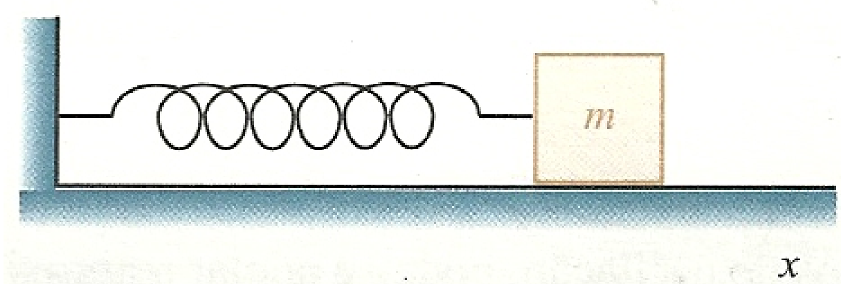

Figura 4.3: Sistema massa-mola. Fonte: [5].

Como a mola não está deformada, a força resultante no bloco é nula, o que o faz estar na posição de repouso.

Note que utilizaremos a mesma equação de movimento da partícula em movimento circular para o oscilador massa-mola, ressaltando que a amplitude da equação se dará pela elongação da mola. No exemplo a seguir, onde podemos visualizar melhor o sistema, a elongação é dada por $|x_m|$.

Neste caso, a equação do movimento em função do tempo será dada por $x = |x_m|.cos(\omega.t + \varphi_0)$ e, analogamente, as equações da velocidade e aceleração do movimento em função do tempo são, respectivamente $v = -\omega.|x_m|.sen(\omega.t + \varphi_0)$ e $a = -\omega^2.|x_m|.cos(\omega.t + \varphi_0)$.

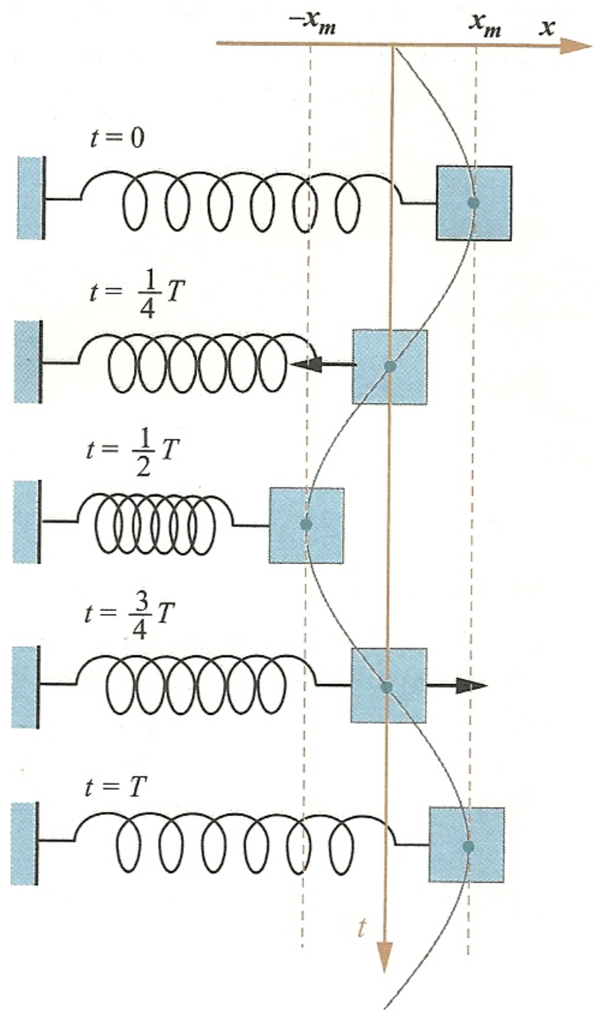

Figura 4.4: Elongação do sistema massa-mola. Fonte: [5].

4.2 Pêndulo Simples

Outro sistema abordado no ensino médio e que também realiza movimentos oscilatórios e periódicos, com características de MHS, é o pêndulo simples.

Definição 4.2.1. *O Pêndulo Simples é um sistema ideal constituído por uma partícula suspensa a um fio flexível, inextensível e de massa desprezível.*

As forças que atuam sobre a massa pendular, desprezando as influências do ar, são a tração T exercida pelo fio de comprimento l e o peso $P = mg$, que pode ser decomposto segundo as direções da tangente e também da normal. Cabe ressaltar que a decomposição sobre a reta tangente é a força restauradora, que tenta fazer com que o sistema volte para o equilíbrio.

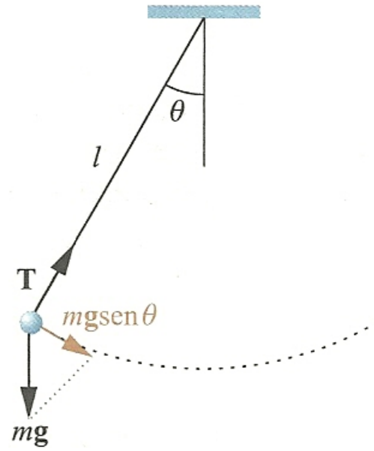

Figura 4.5: Pêndulo Simples. Fonte: [5].

Observe que o pêndulo simples não realiza um MHS, pois a força restauradora atuante sobre o bloco não é proporcional à elongação, e sim proporcional a $sen(\frac{x}{l})$. Vejamos:

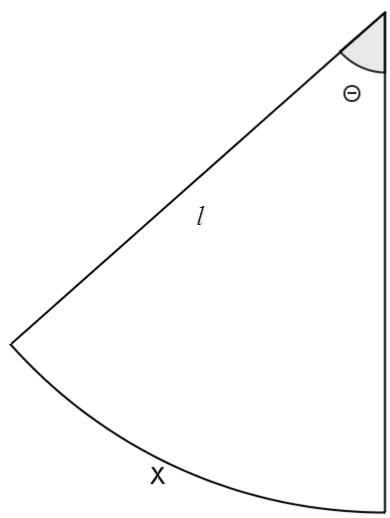

Figura 4.6: Decomposição de forças no pêndulo simples.

Dessa forma, temos que $\Theta = \dfrac{x}{l}$ (expresso em radianos). Logo, a força restauradora será $m.g.sen(\frac{x}{l})$. Por outro lado, para pequenos ângulos ($\Theta_{max} \leq 10°$), o seno e o valor do ângulo expresso em radiano são similares. Logo, a força restauradora será $\frac{m.g.x}{l}$. Por este motivo, para ângulos pequenos ($\Theta_{max} \leq 10°$), o movimento oscilatório do pêndulo é praticamente harmônico simples. A figura a seguir mostra a analogia entre os sistemas massa-mola e pêndulo simples.

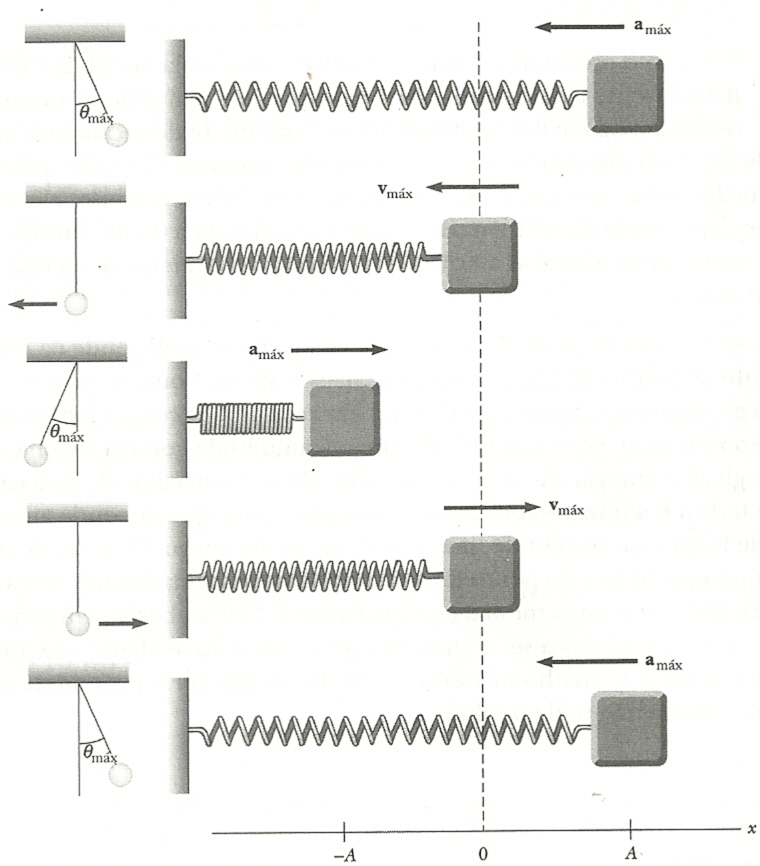

Figura 4.7: Analogia entre os sistemas massa-mola e pêndulo simples. Fonte: [18].

Essa comparação nos mostra que a equação do movimento em função do tempo de um sistema de pêndulo simples é análoga ao do sistema massa-mola.

Exemplo 4.2.2. *Com o intuito de solidificar aquilo que foi abordado, suponha que tenhamos quatro representações gráficas da elongação em função do tempo para MHS, expressaremos analiticamente para cada caso a função da elongação $x = f(t)$.*

Vejamos o primeiro gráfico:

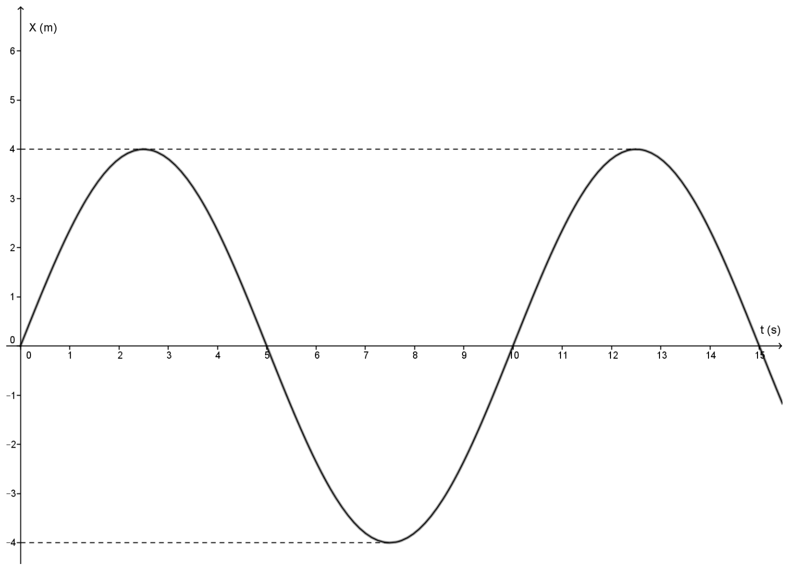

Figura 4.8

Podemos extrair do gráfico algumas informações:

- $A = 4m$;
- $T = 10s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ *rad/s; e*
- *Em* $t = 0$, *a elongação* x *é nula. Então há duas opções para* φ_0, *que seriam* $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ *ou* $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$. *Mas como* x *é crescente, então* $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Logo, a elongação em função do tempo é:

$$x = 4.cos(\frac{\pi}{5}.t + \frac{3\pi}{2})$$

.

Vejamos o segundo gráfico:

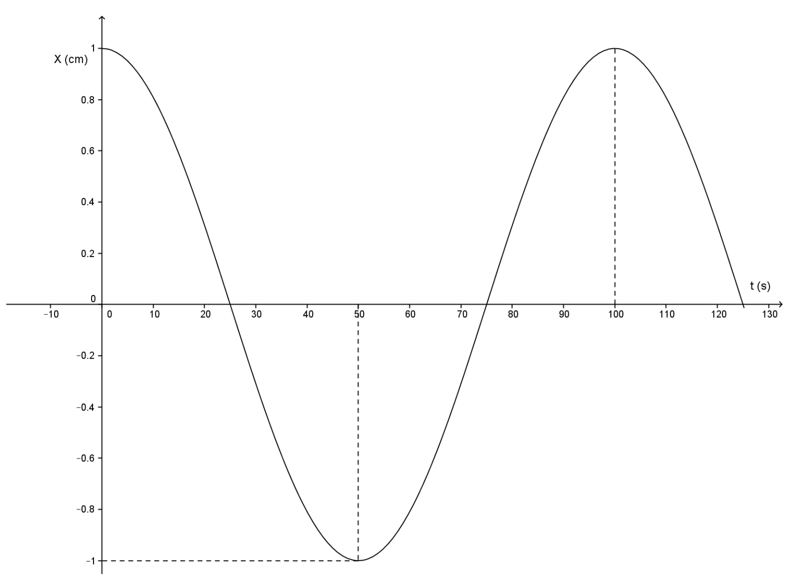

Figura 4.9

Podemos extrair do gráfico algumas informações:

- $A = 1cm$;
- $T = 100s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100} = \frac{\pi}{50}$ *rad/s; e*
- *Em* $t = 0$, *a elongação* x *é igual a amplitude* A. *Então só há uma opção:* $\varphi_0 = 0$.

Logo, a elongação em função do tempo é:

$$x = 1.cos(\frac{\pi}{50}.t)$$

.

Vejamos o terceiro gráfico:

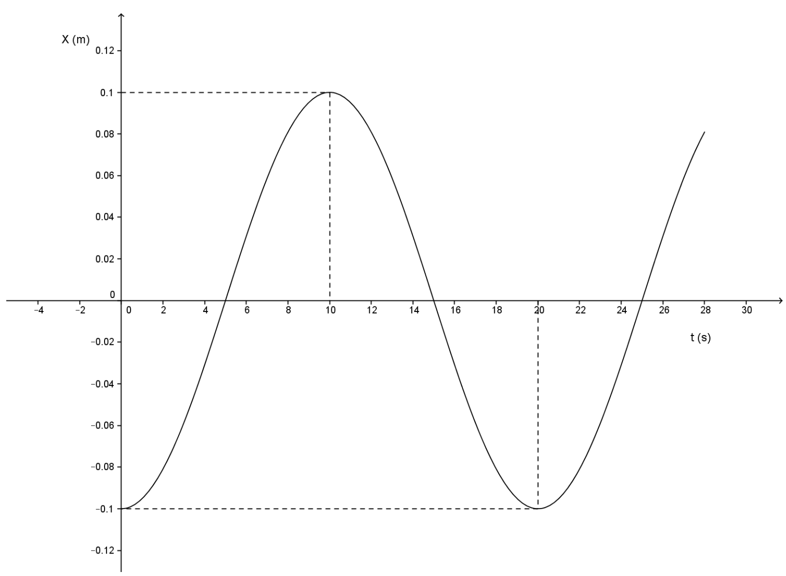

Figura 4.10

Podemos extrair do gráfico algumas informações:

- $A = 0,1m$;
- $T = 20s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ *rad/s; e*
- *Em* $t = 0$, *a elongação* x *é igual a amplitude -*A. *Então só há uma opção:* $\varphi_0 = \pi$.

Logo, a elongação em função do tempo é:

$$x = 0,1.cos(\frac{\pi}{10}.t + \pi)$$

.

Vejamos o quarto gráfico:

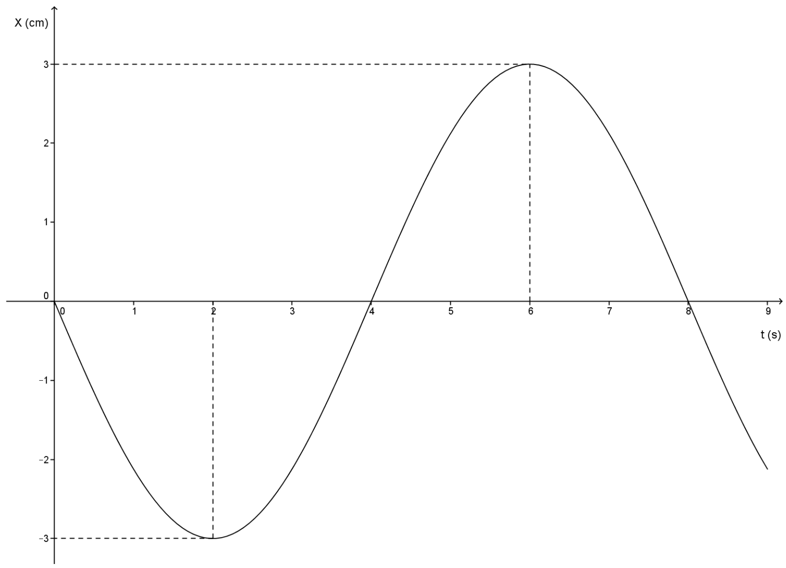

Figura 4.11

Podemos extrair do gráfico algumas informações:

- $A = 3cm$;
- $T = 8s \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ *rad/s; e*
- *Em* $t = 0$, *a elongação* x *é nula. Então há duas opções para* φ_0, *que seriam* $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *ou* $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}$. *Mas como* x *é decrescente, então* $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Logo, a elongação em função do tempo é:

$$x = 3.cos(\frac{\pi}{4}.t + \frac{\pi}{2})$$

.

4.3 Modelagem Matemática e a Função Periódica

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica para abordar, por meio da matemática, um problema não necessariamente matemático. Este tema tem sido alvo de pesquisas de Educadores Matemáticos e é defendido por professores, pois permite considerar diferentes interesses e procedimentos para a resolução de problemas.

Definição 4.3.1. *Os modelos matemáticos são representações simplificadas da realidade e sua formulação visa solucionar algum problema.*

Veremos, a seguir, alguns exemplos de construção de modelos matemáticos, utilizando as funções periódicas, que podem ser utilizados no Ensino Médio.

Exemplo 4.3.2. *O dia mais quente do ano em uma determinada cidade, em média, é o dia 1 de janeiro, quando a temperatura média é de* $30^0 C$. *O dia mais frio do ano tem uma temperatura média de* $15^0 C$. *Utilize uma função trigonométrica para modelar a temperatura em Buenos Aires (sendo 365 dias a duração de um ano) e informe quantos dias após 1 de janeiro será o primeiro dia que atingirá a temperatura de* $20^0 C$.

Solução:

Considerando que as temperaturas ao longo das estações do ano são cíclicas, por isso utiliza-se a função trigonométrica para modelá-las. Primeiramente, iremos definir que a função que se quer achar é a função $T(d)$ que expressa a temperatura em função da quantidade de dias do ano.

Agora, vamos definir qual a função trigonométrica será usada para modelar essa situação. Veja que a temperatura média possui valores máximo e mínimo ao longo dos dias do ano, o que nos leva a restringir a função a ser usada para as funções seno ou cosseno.

Utilizando a origem do eixo das abscissas como o dia primeiro de janeiro, temos que a temperatura máxima ocorre na origem, o que nos leva a utilizar a função cosseno para elaborar o modelo. Então, a função desejada será da forma $T(d) = \alpha.cos(\beta.d) + \gamma$

Para obtermos deslocamento vertical γ e a amplitude α, faremos a média aritmética entre as temperaturas máxima e mínima: $\frac{30+15}{2} = 22,5$. Então, temos que $\gamma = 22,5$ e $\alpha = 7,5$.

O período da função é de 365 dias, que é dado por $\dfrac{2\pi}{\beta} = 365$. Logo, $\beta = \dfrac{2\pi}{365}$.

Dessa forma, a função que se quer é

$$T(d) = 7,5.cos(\frac{2\pi.d}{365}) + 22,5$$

Para achar a quantidade de dias após primeiro de janeiro cuja temperatura é de 20^0C, faremos:

$$20 = 7,5.cos(\frac{2\pi.d}{365}) + 22,5$$

Logo, $d = \dfrac{365.arccos(\frac{-1}{3})}{2\pi}$. Então $d \approx 111$ e o problema foi concluído.

Veja o gráfico da função obtida:

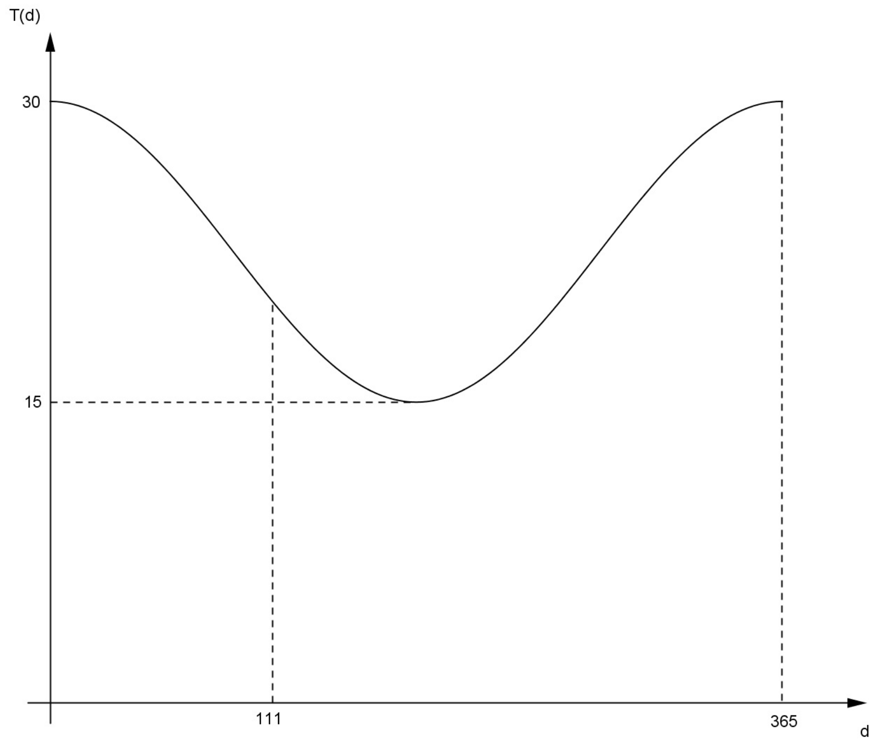

Figura 4.12

Exemplo 4.3.3. *Em um determinado povoado, o dia mais longo do ano ocorre em 19 de junho e dura 1098 minutos. Após meio ano, ocorre o dia mais curto, que dura 382 minutos. Se o ano tem 365 dias e 19 de junho é o 170º dia do ano, escreva uma função trigonométrica que modele a duração T do d-ésimo dia do ano.*

Solução:

Assim como no exemplo anterior, a função que se quer é a função $T(d)$, com origem em primeiro de janeiro e, pelos mesmos motivos, expressaremos por meio da função cosseno, que possui o seu ponto máximo em $d = 170$.

Inicialmente, iremos achar a função $T(d')$ com origem em 19 de junho, de tal modo que $d' = d - 170$. Então, $T(d') = \alpha.cos(\beta\pi) + \gamma$

Para obtermos deslocamento vertical γ e a amplitude α, faremos a média aritmética entre as durações máxima e mínima: $\frac{1098+382}{2} = 740$. Então, temos que $\gamma = 740$ e $\alpha = 358$.

O período da função é de 365 dias, que é dado por $\dfrac{2\pi}{\beta} = 365$. Logo, $\beta = \dfrac{2\pi}{365}$.

Dessa forma, temos que $T(d') = 358.cos(\dfrac{2\pi.d'}{365}) + 740$.

Substituindo $d - 170$ em d', temos que $T(d) = 358.cos(\frac{2\pi.(d - 170)}{365}) + 740$. Assim, o problema foi modelado.

Veja o gráfico da função obtida:

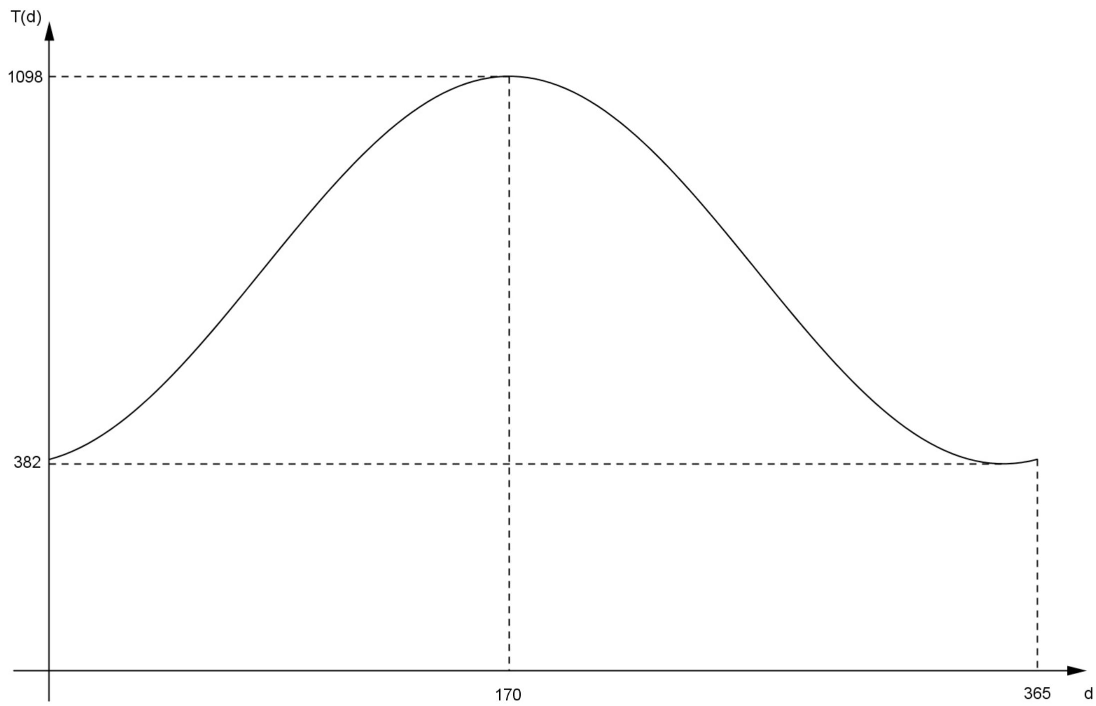

Figura 4.13

Capítulo 5

Considerações Finais

Como vimos ao longo deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), as funções periódicas constituem um tema bastante amplo e complexo pois vem sendo utilizadas desde a antiguidade, tendo ganhado relevância quando Hiparco de Niceia iniciou seus estudos de astronomia. Esta relevância se estende até os dias atuais, pois as funções periódicas são utilizadas principalmente para ajudar a solucionar problemas que envolvem fenômenos periódicos.

A confecção deste TCC levou em consideração que o trabalho poderá ser lido tanto pela comunidade científica matemática, como por alunos que estejam iniciando seus estudos sobre o tema. Por isso, houve a preocupação em iniciar a dissertação abordando os conceitos básicos sobre função, porém de suma importância para a compreensão do tema.

Após a abordagem dos conceitos básicos de função, iniciou-se o estudo sobre as funções periódicas, com ênfase nas funções circulares. As propriedades dessas funções foram citadas, demonstradas e exemplificadas, inclusive com construção de gráficos, de forma didática para compreensão de discentes e docentes.

O emprego de recursos computacionais no ensino dessas funções ganhou destaque neste estudo. Alguns recursos foram abordados, com suas vantagens e desvantagens citadas. Algumas atividades que podem ser usadas pelos docentes em sala de aula, a fim de facilitar o processo de ensino-aprendizagem, foram sugeridas.

Por acreditar que as aplicações podem despertar o interesse do aluno pelo estudo do tema, explanamos algumas aplicações que podem ser trabalhadas em sala de aula, como o Movimento Harmônico Simples e a Modelagem Matemática.

Finalmente, ao atingir os objetivos do TCC, esperamos contribuir para uma melhora do processo de ensino-aprendizagem do tema para alunos do ensino médio, apresentando de uma maneira distinta as propriedades e características das funções periódicas, sugerindo formas de utilização, em sala de aula, de recursos computacionais para facilitar o aprendizado e apresentando aplicações a fim de despertar o interesse do aluno.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Lourdes W.; SILVA, Karina P.; VERTUAN, Rodolfo E.. *Modelagem Matemática na Educação Básica*, 1 ed., São Paulo: Editora Contexto, 2013.

[2] BÔAS, Newton V.; DOCA, Ricardo H.; BISCUOLA, Gualter J., *Tópicos da Física*, Vol. 2., 11 ed., São Paulo: Editora Saraiva, 1995.

[3] BOYER, Carl B., *História da Matemática*, 2 ed., São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

[4] CALÇADA, Caio S.; SAMPAIO, José L., *Física Clássica: Dinâmica, Estatística.*, 1.ed., São Paulo: Atual Editora, 1998.

[5] CHAVES, Alaor. *Física.*, vol. 1, Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso Editores, 2001.

[6] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.*, 1.ed., Campinas, SP: Editora Unicamp,2004.

[7] GARCIA, Nelson R, *Funciones Trigonométricas Directas*, 1 ed., Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2012.

[8] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*, 1 ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[9] GUIDORIZZI, Hamilton L., *Um Curso de Cálculo*. Vol. 4, 5 ed., Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

[10] IEZZI, Gelson, *Fudamentos da Matemática Elementar*. Vol. 3, 2 ed., São Paulo: Atual Editora, 1977.

[11] IEZZI, Gelson et al. *Matemática*, Vol. único, 4.ed., São Paulo: Atual Editora, 2007.

[12] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos, *Fudamentos da Matemática Elementar*. Vol. 1, 3 ed., São Paulo: Atual Editora, 1977.

[13] INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. *Trigonometria Plana y Esférica e Introduccion al Cálculo*, 2.ed., Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2008.

[14] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. 1.ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[15] LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*, vol. 1, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[16] MARON, I. A. *Problems in Calculus of one Variable*, 1.ed., Moscou, Russia: Mir Publishers, 1975.

[17] REYES, Marcos S. *Funciones Trigonométricas Inversas*, 1.ed., Lima, Peru: Lumbreras Editores, 2013.

[18] SERWAY, Raymond; JEWETT, John W. *Princípios da Física: Movimento Ondulatório e Termodinâmica*, Vol. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Apêndice A

JOSEPH FOURIER

Joseph Fourier (1768-1830)

Joseph Fourier nasceu na França em 1768 e teve sua educação dirigida em uma escola militar, onde iniciou seus estudos e ocupou uma cadeira de matemática. Abdicou do cargo para acompanhar Napoleão Bonaparte em sua expedição ao Egito, onde permaneceu de 1798 a 1801, quando retorou à França e iniciou suas experiências com calor.

A condução de calor é o processo de propagação no qual a energia térmica passa de partícula para partícula de um determinado corpo. Supondo uma barra de ferro aquecida em uma de suas extremidades, as partículas dessa barra que estão em contato com a fonte térmica aumentam seu estado de agitação, que é transmitido às partículas vizinhas, de forma sucessiva, fluindo assim ao longo da barra. Esse estado de agitação de cada partícula consiste em um fenômeno vibratório em torno de seu ponto de equilíbrio.

Ao estudar esse fenômeno vibratório, Fourier concluiu, em 1811, que uma função qualquer, em um intervalo finito, pode ser decomposta nesse intervalo em uma soma de funções seno e cosseno.

Seja f uma função qualquer em um intervalo finito. Pode-se decompor essa função de forma que:

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.cos(nx) + b_n.sen(nx)]$$

onde os coeficientes a_n e b_n são números reais convenientes, conhecidos como *Coeficientes de Fourier*, tais que:

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$;
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).cos(nx)\ dx$, $n \geq 1$; e
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).sen(nx)\ dx$, $n \geq 1$.

A série acima ficou conhecida como *Série Trigonométrica* ou *Série de Fourier*.

Esta série foi rejeitada inicialmente pela Academia de Ciências da França, tendo sido publicada apenas em 1824, quando o próprio Fourier se tornou secretário da Academia. Em 1830, Joseph Fourier faleceu em Paris.

Atualmente, a *Série de Fourier* tem grande importância em campos de estudos de fenômenos vibratórios, como a termodinâmica, ótica, acústica e a eletricidade, além de papel fundamental em análise harmônica e equações diferenciais.

O estudo matemático da *Série de Fourier* pode ser encontrado na bibliografia [9].