Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Quadratura da Parábola:Uma Abordagem Possível para o Ensino de Somas Infinitas. †

por

**Josieldes Marques dos Santos**

sob orientação do

**Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCET-UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2014

Natal - RN

† O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

# Quadratura da Parábola:Uma Abordagem Possível para o Ensino de Somas Infinitas.

por

**Josieldes Marques Dos Santos**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCET-UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Séries.

Aprovado por:

---

**Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana** - UFRN (Orientador)

---

**Prof.Dr. Fabiana Tristão de Santana** - UFRN (Membro Externo)

---

**Prof. Dr. Walter Batista Dos Santos** - UFG (Membro Externo)

**Dezembro/2014**

# Dedicatória

*" Dedico este trabalho a pessoa mais importante da minha vida: minha filha, Letícia. O simples fato de poder olhar para ela todas as manhãs é suficiente para me fazer uma pessoa melhor a cada dia."*

# Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos por Deus, por me amparar nas dificuldades, por me dá força para seguir sempre em frente, e por colocar no meu caminho pessoas tão especiais, sem as quais certamente não teria dado conta!

Ao meu orientador prof. Dr. **Fagner Lemos de Santana**, por está sempre disponível, por todo apoio e também por ter me ajudado integralmente durante todo o processo. Sem tal ajuda esse trabalho não teria a mesma qualidade.

Aos meus pais, **José Paulo dos Santos** e **Gilvanda Marques dos Santos**, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em mim, e sempre me incentivaram a dar o meu melhor e a nunca desistir dos meus objetivos.

A minha irmã, Jâmiza, pois, ao seu modo, sempre se orgulhou de mim, e sempre acreditou no meu potencial mesmo quando nem eu mesmo acreditava.

Queria agradecer aos meus amigos, ou melhor, irmãos, **Jamerson Fernando** e **Bruno Thiago**, pela ajuda dada nas horas de sufoco, pela generosidade em compartilhar conhecimento, e por não me deixarem fraquejar ao longo desses dois anos.

Não poderia esquecer dos demais colegas de PROFMAT: Antônio Roberto, Marcio, Almir, Rosângela, Marco Lira, Marcelo, Roberto Fagner e Venício. Obrigado pela atenção e pela força dadas através do companherismo, sempre que precisei.

A todos os professores que ministraram aulas no PROFMAT na UFRN, pela dedicação destinada ao ensino e aprendizagem nas disciplinas ministradas, em especial aos professores **Ronaldo** e **Débora** que de fato deram contribuições extremamente significativas para minha formação como matemático.

A minha filha **Letícia** e a minha esposa **Kaline** pela paciência, por terem aceito se privar muitas vezes da minha companhia (pela compreensão que tiveram nos momentos em que tive que ficar só) e por me impulsionarem a buscar vida nova a cada dia.

“ Nenhum outro problema afetou tão profundamente o espírito do homem; nenhuma outra ideia tão fertilmente estimulou seu intelecto; nenhum outro conceito necessita de maior esclarecimento do que o infinito”

David Hilbert
(1862-1943)

# Resumo

Neste trabalho apresentamos o tratado da quadratura da parábola, o qual trata do cálculo da área de um segmento de parábola que foi feito por Arquimedes. Para isso, são necessárias considerações sobre sequências e séries, com os quais podemos introduzir a ideia de processos infinitos (ou do conceito de infinito) para alunos do ensino básico.

**Palavras chave:** Infinito, séries, quadratúra da parábola, Arquimedes

# Abstract

This dissertation presents the quadrature of the parabola treaty, which deals with the calculation of the area of a parabolic segment,which was made by Archimedes. For this, considerations on sequences and series are necessary, with which we can introduce the idea of infinite processes (or the concept of infinity) for elementary school students.

**Keywords:** Infinity, series, quadrature of the parabola, Archimedes

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Exemplos de somas infinitas surgem muito cedo, ainda no ensino fundamental, no estudo de dízimas periódicas. Com efeito, uma dízima como $0,555\ldots$ nada mais é do que uma série geométrica infinita. Veja:

$$\begin{aligned} 0,555\cdots &= 5\times 0,111\cdots = 5\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots\right)\\ &= 5\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right) = 5\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Sendo a segunda igualdade obtida da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Quando se ensina essas dízimas, usa-se o seguinte procedimento, no qual a soma infinita não aparece explicitamente:

$$x = 0,555\cdots \Rightarrow 10x = 5,555\cdots = 5+0,555\cdots = 5+x \Rightarrow 9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

No ensino médio volta-se a falar sobre somas infinitas, sendo que agora, após formalizado o conceito de progressões geométricas, é apresentada ao aluno uma fórmula que permite calcular a soma de infinitos termos de uma progressão geométrica quando a razão $q$ é um número real entre $-1$ e $1$. A ideia ingénua e não crítica de soma infinita não costuma perturbar o estudante que logo associa a adição com quantidade finita de termos. Ao analisar os termos um a um, ele percebe que esses vão ficando menores e cada vez mais próximos de zero, o que leva a interpretar que a soma desses termos a partir de uma certa quantidade não interfere muito no resultado final, que por sua vez, se aproxima cada vez mais de um número real. O problema é que a operação de adição só faz sentido quando aplicada a um par de números reais. Porém, devido à propriedade associativa em $\mathbb{R}$, podemos efetuar uma soma de $3, 4, 5, \ldots, 100$ ou mais números, sem incorrer em erros. Por exemplo, podemos obter a soma $2 + 4 + 8$ como $2 + 4 + 8 = (2 + 4) + 8$ , ou então como $2 + 4 + 8 = 2 + (4 + 8)$, o resultado é o mesmo. Porém, encarar somas infinitas nos mesmos moldes das somas finitas, usando as propriedades das operações, pode nos levar a dificuldades e conclusões equivocadas. Como bem ilustra um exemplo simples, dado pela chamada **série de grandi**.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

Utilizando a propriedade associativa de forma conveniente podemos obter os seguintes resultados:

a) $S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$

b) $S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$

c) $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) \Rightarrow S = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = 1/2$

Como decidir então o resultado? $S = 0$, $1$ ou $1/2$? Se o leitor tem uma compreensão bem estabelecida sobre séries concluiria facilmente que nenhum dos resultados poderia estar correto uma vez que essa soma trata-se de uma série divergente.

Percebemos assim que o professor deve tomar um certo cuidado ao trabalhar com esse tema, pois, é o primeiro contato que o aluno tem com as ideias de convergência e infinito. O problema é que mesmo os licenciados em matemática, que são os professores destes alunos, revelam em sua maioria certa inabilidade em trabalhar com somas infinitas, se limitando a mera reprodução do que os livros de matemática do ensino médio trazem sobre esse assunto.

Essa dissertação assim se justifica como um agente provocador dessa temática, tendo como principal objetivo despertar o interesse do leitor às várias perspectivas pelas quais as somas infinitas podem ser avaliadas e como foram encaradas ao longo da história. Para isso, vamos nos valer de um problema clássico, a quadrátura da parábola, um dos primeiros problemas sobre somas infinitas, que curiosamente, parece ser pouco conhecido nos dias de hoje, além de estender o conceito de adição para uma infinidade de números e definir o que significa tal soma. Chamaremos estas "somas infinitas" de *séries*.

# Capítulo 2

# Sequência de Números Reais e seus Limites

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, pois é nele que se baseiam na Matemática atual as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada e integral.

Embora fundamental, esse conceito demorou mais de dois milênios para finalmente ser rigorosamente definido pelos matemáticos do século XIX. Nesse capítulo será apresentada a noção de limite sob sua forma mais simples, o limite de uma sequência. Para mais detalhes sobre este assunto recomendamos [9].

## 2.1 Sequência de Números Reais

A ideia de sequências de números reais é a de escolher números reais e colocá-los em uma determinada ordem (com possibilidade de repetição), ou seja, sabemos qual deles é o primeiro, o segundo, etc. Essa ideia é representada matematicamente na definição abaixo:

**Definição 2.1.1 (Conceito de sequência)** *Uma sequência de números reais é uma* *função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que a cada número natural* $n$ *associa um número real* $x_n = x(n)$, *chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $(x_n)$, para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n$. [9]

Não confunda a sequência $(x_n)$ com o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots\}$ dos seus termos. Por exemplo, a sequência $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. Ou então: as sequências $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$. O conjunto dos termos de uma sequência $(x_n)$ é o conjunto imagem da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

**Exemplo 2.1.1** *A sequência* $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$ *corresponde à função* $x(n) = 1$ *se* $n$ *é impar e* $x(n) = 2$ *se* $n$ *é par; o conjunto de seus termos é o conjunto* $X = \{1, 2\}$.

Em geral, chamaremos de constante uma sequência $(x_n)$ tal que $x_n = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde $k$ é uma constante fixada. Em outras palavras, uma sequência é constante quando o conjunto dos seus termos é unitário.

As sequências podem ser classificadas como limitadas ou ilimitadas. As sequências limitadas podem ser subdivididas em **sequências limitadas superiormente** e **limitadas inferiormente**. Uma sequência $(x_n)$ diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência $(x_n)$ é *limitada* quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência não é limitada (inferiormente ou superiormente) diremos que é ilimitada (inferiormente ou superiormente).

**Exemplo 2.1.2** *Se* $a > 1$ *então a sequência* $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ *é limitada inferiormente porém não superiormente. Para verificar que esta sequência é ilimitada superiormente, vamos usar a desigualdade de Bernoulli, a qual diz que* $(1 + x)^n > 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\forall x > -1$. *A demonstração dessa desigualdade é feita por indução e pode* *ser encontrada em [9] . Como* $a > 1$*, podemos escrever* $a = 1 + x$*, com* $x > 0$ *Assim, pela desigualdade de Bernoulli, temos* $a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$*. Dado* $k \in \mathbb{R}$ *com* $k > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \dfrac{k}{x}$ [1]*, logo* $n_0 x > k \Rightarrow 1 + n_o x > k \Rightarrow a^{n_0} = (1+x)^{n_0}$*. Resumindo, provamos que para qualquer número real* $k > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*;* $a^{n_0} > k$*. Isso significa que a sequência* $a^n$ *é ilimitada superiormente. Por outro lado, multiplicando ambos os membros da desigualdade* $1 < a$ *por* $a^n$ *obtemos* $a^n < a^{n+1}$*. Segue-se que* $a < a^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Logo* $(a^n)$ *é limitada inferiormente por* $a$*.*

**Exemplo 2.1.3** *A sequência* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right)$ *é limitada pois* $a_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ *é limitada inferiormente por* $0$ *e superiormente por* $1$*.*

**Definição 2.1.2 (Sequência crescente)** *Uma sequência* $(x_n)$ *será dita crescente se* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é não decrescente se* $x_{n+1} \geq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

**Definição 2.1.3 (Sequência decrescente)** *Uma sequência* $(x_n)$ *será dita decrescente se* $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é não crescente, se* $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

**Exemplo 2.1.4** *A sequência* $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ *é uma sequência crescente pois* $n = x_n < x_{n+1} = n + 1$ *já a sequência* $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{4^{n-1}}, \ldots\right)$ *é uma sequência decrescente pois* $x_n = \dfrac{1}{4^{n-1}} > \dfrac{1}{4^{n+1}.4^{-1}} = \dfrac{1}{4^{n+1}-1} = x_{n+1}$*.*

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes ou não-crescentes são chamadas de sequências monótonas.

[1] usamos aqui um fato fundamental sobre o conjunto dos números naturais, a saber, que $\mathbb{N}$ é um conjunto ilimitado superiormente, ou seja, dado $A \in \mathbb{R}$ com $A > 0$ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > A$.

**Exemplo 2.1.5** *Seja $a \in \mathbb{R}$. Consideremos a sequência $(a, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^n, \ldots,)$ das potências de $a$, com expoente $n$ inteiro positivo. Se $a = 0$ ou $a = 1$, tem-se evidentemente uma sequência constante. Se $0 < a < 1$, a sequência é decrescente e limitada. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo $a^n$ obtemos $a^{n+1} < a^n$, o que nos leva a conlusão que cada termo da sequência é menor do que o termo anterior, logo a sequência é decrescente. Como todos os seus termos são positivos temos $0 < a^n < 1$ para todo $n$. Consideremos agora o caso $-1 < a < 0$. Então a sequência $(a^n)$ não é mais monótona (seus termos são alternadamente positivos e negativos) mas ainda é limitada pois $|a^n| = |a|^n$, com $0 < |a| < 1$. O caso $a = -1$ é trivial; a sequência $(a^n)$ é $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$. Quando $a > 1$ Obtem-se uma sequência crescente. Finalmente, quando $a < -1$, a sequência $(a^n)$ não é monótona (pois seus termos são alternadamente positivos e negativos) e é ilimitada superiormente e inferiormente.*

## 2.2 A ideia de Limite de uma Sequência

Vamos analisar a sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ . É fácil perceber que a sequência é decrescente com todos os seus termos positivos , ou seja,dado $n > m$ , tem-se que $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}$.

Consideremos, agora, um intervalo de centro zero e raio pequeno, digamos $\left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$, que, convenhamos, é muito pequeno. Agora, como $\frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{1073741824} < \frac{1}{10^9} < \frac{1}{2^{29}} = \frac{1}{536870912}$, vemos que $\frac{1}{2^{30}} \in \left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$. Na verdade, como para todo $n \geq 30$ temos que $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^{30}}$, então $\dfrac{1}{2^n} \in \left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$.

Isso nos mostra que a partir de um certo valor de $n$, a saber, $n = 30$, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $\left(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9}\right)$.

Mostremos agora que o que afirmamos acima não é restrito ao intervalo escolhido $\left(-\dfrac{1}{10^9}, \dfrac{1}{10^9}\right)$. De fato, escolha arbitrariamente um número real $r > 0$ e considere o intervalo $(-r, r)$. Existe um número natural $n_0 \geq 1$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{r}$, logo $\dfrac{1}{n_0} < r$.

Como $2^{n_0} > n_0$, segue-se que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < r$.

Na verdade, como para todo $n > n_0$ tem-se que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}}$, obtemos que para todo $n > n_0$, $\frac{1}{2^n} < r$.

Vemos, portanto, que a partir de um certo valor $n_0$ de $n$, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $(-r, r)$. Como o número $r > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente, vemos que não importa o quão pequeno ele seja, sempre existirá, para essa escolha de $r$, um inteiro positivo $n_0$ a partir do qual todos os termos da sequência pertencerão ao intervalo $(-r, r)$. É nesse sentido que entendemos que os termos da sequência se aproximam de zero quando $n$ cresce.


Figura 2.1: Dois números da sequência $\frac{1}{2^n}$

**Definição 2.2.1 (Limite de uma sequência)** *Sejam $(x_n)$ uma sequência de números reais e $l$ um número real. Dizemos que $(x_n)$ converge para $l$, ou é convergente, e escreve-se $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, quando para qualquer intervalo aberto $I$ contendo $l$ (por menor que ele seja) é possível encontrar um número natural $n_0$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$.*

**Observação 2.2.1** *Quando não existir um número $l$ para o qual $(x_n)$ convirja, dizemos que a sequência $(x_n)$ diverge, ou que é divergente.*

Com o objetivo de tornar mais operacional a nossa definição de convergência, note que, o intervalo $I$, contendo o número real $l$, pode ser tomado da forma $(l - r, l + r)$, onde $r$ é um número real positivo. Portanto, dizer que $x_n$ converge para $l$, isto é, que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, é o mesmo que dizer que para todo número real $r > 0$, existe um número natural $n_0$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (l - r, l + r)$.

Observemos ainda que a condição $x_n \in (l - r, l + r)$, para todo $n > n_0$, equivale à $|x_n - l| < r$ para todo $n > n_0$. Em outras palavras:

A distância de $x_n$ a $l$ se torna arbitrariamente pequena desde que $n$ seja tomado suficientemente grande.

É intuitivo o fato de uma sequência $(x_n)$ não poder convergir para dois números reais $l_1$ e $l_2$ distintos, pois, se este fosse o caso, poderíamos achar dois intervalos abertos $I_1$ e $I_2$ disjuntos, contendo $l_1$ e $l_2$, respectivamente, de tal modo que para valores de $n$ suficientemente grandes, os termos da sequência estariam dentro de cada um desses intervalos, o que não é possível. A proposição abaixo apenas formaliza esta argumentação. A demonstração dessa proposição pode ser vista em [9].

**Proposição 2.2.1 (Unicidade do limite)** *Se existir um número real $l$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, então ele é único.*

**Exemplo 2.2.1** *Mostre que* $\lim x_n = 0$, *onde* $x_n = \dfrac{1}{n}$.

**Solução**

Dado $r > 0$ arbitrário, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{r}$. Então $n > n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < r$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < r$. Concluímos assim que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

**Exemplo 2.2.2** *Mostre que* $\lim x_n = 0$, *onde* $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$.

**Solução**

Primeiro vamos reescrever a sequência.

$$x_n = \frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

.

Logo o limite é 2, pois cada vez que aumentamos o valor de $n$ o resultado de $2 - \dfrac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 2. De maneira mais formal observamos que dado $r > 0$ arbitário, podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{r}$. Isso nos leva a concluir que:

$$n_0 > \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{n_0} < r \Rightarrow -\frac{1}{n_0} > -r \Rightarrow 2 - \frac{1}{n_0} > 2 - r$$

Como $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \Rightarrow -\frac{1}{n} > -\frac{1}{n_0}$ e consequentemente:

$$2 - \frac{1}{n} > 2 - \frac{1}{n_0} > 2 - r$$

.

Sabendo que $n > 0$, temos que $2 - \frac{1}{n} < 2$ e $2 - r < 2 - \frac{1}{n_0} < 2$, por fim, $r > 0$, então $2 < 2 + r$ e $2 - r < 2 - \frac{1}{n_0} < 2 + r$, logo $x_n \in (2 - r, 2) \subset (2 - r, 2 + r)$, e podemos concluir que $|x_n| < 2 + r$, ou seja $|x_n - 2| < r$.

**Exemplo 2.2.3** *Mostre que* $\lim x_n = 0$, *onde* $x_n = a^n$ , *com* $0 < a < 1$.

**Solução** Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ (quando $0 < a < 1$). Com efeito, Dado $r > 0$, como $\frac{1}{a} > 1$, as potências de $1/a$ formam uma sequência crescente ilimitada superiormente. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{r}$, ou seja , $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{r}$ , isto é, $a^n < r$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow |a^n - 0| < r$, o que mostra ser $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Limites possuem propriedades operatórias que tornam o seu cálculo mais fácil. Na realidade, teremos poucas vezes que recorrer à definição para calcular um determinado limite, bastando para isto utilizar as propriedades operatórias que estabeleceremos e alguns poucos limites fundamentais, esses, sim, na maioria das vezes, serão determinados a partir da definição. O fato é que usando a definição de limite para deduzir algumas de suas propriedades gerais, aumentaremos em muito o nosso poder de cálculo.

**Proposição 2.2.2 (Limite da soma)** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = k$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l + k$ .

A proposição 2.2.2 estabelece a aditividade dos limites: para somar dois limites que existem, podemos somar as duas sequências e calcular apenas o limite desta soma. Este resultado é bastante natural, bastando-nos pensar o seguinte: se $x_n$ pode ser tornado tão próximo de $l$ quanto queiramos, desde que $n$ seja suficientemente grande e o mesmo ocorre com $y_n$, então a soma $x_n + y_n$ pode ser tornada tão próxima de $l + k$ quanto queiramos também. Uma propriedade análoga vale para a diferença entre limites.As próximas proposições (2.2.3, 2.2.4 e 2.2.5) exploram o mesmo tipo de propriedade para as operações de multiplicação, potenciação e divisão. Caso o leitor deseje analisar as dememonstrações dessas proposições poderá encontrá-las em [9].

**Proposição 2.2.3 (Limite do produto)** *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = k$*, então* $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = lk$ .

**Proposição 2.2.4 (Limite da potência)** *Se* $p \geq 1$ *é um inteiro, e* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$*, então* $\lim_{n\to\infty} (x_n)^p = l^p$.

**Proposição 2.2.5 (Limite do quociente)** *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = k$ *, com* $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, e* $k \neq 0$*, então Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{l}{k}$.

# Capítulo 3

# Séries

No estudo das somas de séries, em particular, a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica no ensino médio, na maioria das escolas brasileiras, limita-se tão somente a analisar os resultados dessas somas em progressões geométricas com razão entre $-1$ e $1$.

Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos de somas com parcelas finitas e infinitas. Contudo, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras.

O professor precisa alertar seu aluno para o cuidado ao operar com somas de parcelas infinitas, mostrando que elas tanto podem convergir para um resultado como podem divergir. No caso de convergir podemos associar a operações elementares como soma e multiplicação o que não é possivel fazer se a série diverge.

## 3.1 Definições

**Definição 3.1.1** *Dada uma sucessão de números reais* $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$*, chama-se série de números reais ou série numérica a soma infinita*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

.

**Observação 3.1.1** *Os números* $a_1, a_2, \ldots$ *chamam-se termos da série numérica e o n-ésimo termo* $a_n$ *é designado por termo geral da série.*

Em resumo, uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ com um número infinito de parcelas. Para que isso faça sentido, poremos $s = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes. Aprender a distinguir umas das outras é a principal finalidade dessa seção. Naturalmente, não podemos somar um a um, os infinitos termos de uma série, o que podemos fazer é somar cada vez mais parcelas, avaliando se ao acrescentar mais termos, a soma vai se aproximando de um valor real.

## 3.2 Somas Parciais

Consideremos a série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e vamos formar uma sequência $\{S_n\}$ de somas da seguinte maneira:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A sequência $(S_n)$ é chamada de sequência das somas parciais da série e $S_n$ é chamado de $n$-ésima soma parcial.

Se a diferença $|S - S_n|$, onde $S \in \mathbb{R}$, puder ser feita menor do que qualquer número positivo, desde que se faça $n$ suficientemente grande dizemos que $S$ é a soma da série. Em linguagem mais formal temos que dado $r > 0$, existe um índice $N$ tal que, para $n > N$, é verdade que $|S - S_n| < r$. Em outras palavras, $S$ é a soma da série quando $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n) = S$.

**Observação 3.2.1** *Quando uma série admite uma soma S, essa é classificada como convergente. Caso contrário, se o* $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$ *não existe ou é infinito a série é divergente.*

Esse procedimento é importantíssimo pois não somamos uma infinidade de parcelas. As somas $S_n$ são finitas, já que $n$ é finito. Elas são valores aproximados do que chamamos "soma" da série. O que a definição diz é que o erro que se comete ao tomar $S_n$ no lugar de $S$ pode ser feito tão pequeno quanto queriamos, desde de que façamos $n$ suficientemente grande.

## 3.3 Soma dos termos de uma Série geométrica

A série $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \ldots$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, em que cada termo se obtém do precedente multiplicando-o por uma constante $r$(*a razão*) designa-se por *série geométrica*.

Seja $S_n$ a n-ésima soma parcial temos:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \tag{3.1}$$

Caso r $=1$, temos que $S_n = na$. Caso $r \neq 1$, multiplicando $S_n$ por $r$ temos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + +ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \tag{3.2}$$

subtraindo 3.1 de 3.2, encontramos:

$$rS_n - S_n = ar^n - a \Rightarrow S_n\left(r-1\right) = a\left(r^n - 1\right) \Rightarrow S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{\left(r-1\right)}$$

Se $0 < r < 1$, temos que $\lim\limits_{x\to\infty} r^n = 0$ (exemplo 2.2.3), logo concluímos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{a\left(r^n-1\right)}{\left(r-1\right)} = \frac{a}{1-r}$$

## 3.4 Noção intuitiva de Séries convergentes

**Um primeiro exemplo**

Tomemos a sucessão geométrica de termo geral $\left(a_1 = \frac{1}{2} \text{ e } r = \frac{1}{2}\right)$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^N}$$

O que acontece a esta igualdade se tomarmos o limite $N \to +\infty$?

Tem-se:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^N} = 1$$

Isto significa que, de certa forma, se somarmos a infinidade de parcelas.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}} + \frac{1}{2^{1001}} + \ldots$$

não obtemos uma quantidade infinita como poderíamos pensar. Obtemos simplesmente o valor 1. Escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Este resultado não é assim tão espantoso. É verdade que estamos num certo sentido a somar uma infinidade de parcelas estritamente positivas. Mas também é verdade que essas parcelas são cada vez menores. Aliás, este resultado é muito fácil de perceber intuitivamente: obtém-se uma boa ilustração desta igualdade tomando um segmento de comprimento 1 e dividindo-o sucessivamente ao meio.

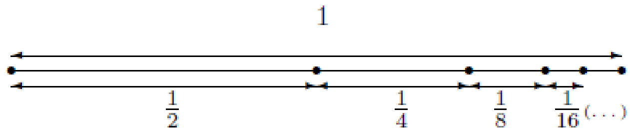


Figura 3.1: representação geométrica

## 3.5 Série Harmônica

O raciocínio intuitivo visto na seção anterior nem sempre dá certo (como ocorre com grande parte dos raciocínios deste tipo em matemática). Vamos analisar o caso da chamada série harmônica abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Como as parcelas (positivas) a serem somadas são cada vez menores e tendendo a 0, a intuição nos levaria a acreditar que tal série seria convergente, o que não é verdade. Considere apenas as somas parciais: $S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \frac{1}{2^n}$. E note que: $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$; $\ldots$ ;$\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$, Assim: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + n\left(\frac{1}{2}\right)$ e como $1 + \frac{n}{2}$ não é limitada superiormente, então $S_{2^n}$ também não é e, portanto, $S_n$ não é limitada e, sendo assim, diverge.

Como cada parcela entre parênteses é maior ou igual a $\frac{1}{2}$, temos que a soma de todas as parcelas pode ser minorada por uma infinidade de parcelas iguais a $\frac{1}{2}$, que tem soma infinita. Por isso é importante conhecer formalmente o conceito de *séries convergentes* para entender o que ocorre em casos como este.

## 3.6 História do xadrez

Segundo a lenda que justifica a origem da criação do xadrez, o jogo teria sido criado com o objetivo de curar a depressão de um rei. Esse teria ficado tão encantado com o jogo que ofereceu ao inventor a recompensa que ele quisesse. O inventor aparentemente pediu pouco. Apenas um tabuleiro cheio de trigo, mas de modo que na primeira casa houvesse um grão, na segunda, dois, na terceira, quatro, e assim sucessivamente, dobrando a quantidade de grãos até a casa 64. Lenda ou não, essa história é um excelente recurso didático: além de evidenciar a velocidade de crescimento de uma função exponencial, é um excelente exercício de somatório de progressões geométricas.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63}$$

Ao ser sugerido a um aluno que calculasse o débito do rei, esse chegaria ao resultado $2^{64} - 1$, o que seria quase 18 "quintilhões" de grãos (o número 1 seguido de 20 zeros). Uma quantidade espantosamente alta.

Em [4] é sugerido uma resposta a tal pedido: seria oferecido ao inventor do jogo uma oferta ainda mais generosa. No lugar de um tabuleiro com 64 casas, seria oferecido um tabuleiro com um número infinito de casas. Assim a nova dívida seria:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} + 2^{65} + \ldots$$

Esse pagamento seria feito da seguinte forma: O que lhe havia sido proposto seria pago em dobro, ou seja,

$$2s = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} + 2^{65} + \ldots\right)$$

Desde que o inventor desse como troco o que havia sido conbinado inicialmente. Intuitivamente essa operação não teria problema uma vez que o valor $(D)$ da dívida real para o inventor seria $D = 2S - S$. Curiosamente, ao ser feito novamente o cálculo da dívida do rei :

$$\begin{aligned}
2s - s &= \left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} + 2^{65} + \ldots\right) \\
&- \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63} + 2^{64} + 2^{65} + \ldots\right) \\
&= -1 + (2 - 2) + \left(2^2 - 2^2\right) + \left(2^3 - 2^3\right) + \left(2^4 - 2^4\right) + \ldots \\
&+ \left(2^{63} - 2^{63}\right) + \left(2^{64} - 2^{64}\right) + \left(2^{65} - 2^{65} + \ldots\right) \\
&\Rightarrow D = -1
\end{aligned}$$

todas as demais parcelas (infinitas) são canceladas. No final das contas, o pobre criador do xadrez acabou ainda devendo um grão $(-1)$ de trigo ao rei. É claro que tal artifício não faz justiça à sagacidade original da história. O problema dessa solução é estender, sem maiores cuidados, para somas infinitas, processos sabidamente válidos para somas finitas.

Um fato curioso é que esse problema foi apresentado a minha turma de mestrado (Profmat) e nenhum dos meus colegas percebeu alguma coisa errada com as operações realizadas ao longo desse problema.

# Capítulo 4

# Método de Exaustão

## 4.1 Eudóxio e o método de exaustão

O método de exaustão é também conhecido por *Princípio de Eudóxio-Arquimedes*, por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudóxio de Cnido (408-355 a. C.) e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu.[12]

Eudoxo apresentou a sua teoria das proporções como modo de ultrapassar as limitações na matemática grega evidenciadas com a descoberta dos incomensuráveis, que deitava por terra a teoria das proporções dos pitagóricos. Arquimedes aplicou o método de exaustão para provar inúmeros resultados relativos a comprimentos, áreas e volumes de diversas figuras geométricas e também ao cálculo de centros de gravidade.

O método de exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto no cálculo se soma um número infinito de parcelas, Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir uma soma de uma série infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Não é, pois, correto falar do método de exaustão como um processo geométrico de passagem para o limite. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas, no entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de limite e de infinito no século XIX. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituíram a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

**Definição 4.1.1** *Sejam dadas quatro grandezas $a$, $b$, $c$ e $d$ e suas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, para toda fração $\frac{m}{n}$, acontece um dos seguintes casos:*

- *Ou $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$, isto é, a fração é menor que ambas;*
- *Ou $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ isto é, a fração é igual a ambas;*
- *Ou $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} > \frac{c}{d}$isto é, a fração é maior que ambas.*

Ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ não podemos ter uma fração que esteja entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Usando esta ideia e o fato de que o conjunto dos naturais não é limitado superiormente, podemos concluir dois resultados:

**Teorema 4.1.1** *Dado um número real $a > 0$ existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.*

***Demonstração:*** A prova deste resultado é simples, pois dado $n \in \mathbb{N}$ existem três opções para uma fração $\frac{1}{n}$. Podemos ter $\frac{1}{n} < a$, e então nada há a provar. Podemos ter $\frac{1}{n} = a$ e assim $\frac{1}{n+1} < a$. Suponhamos então, por absurdo, que estes dois casos não possam acontecer. Então $\frac{1}{n} > a$ para todo número inteiro positivo $n$. Teremos que $n < \frac{1}{a}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ ou seja, o conjunto dos naturais é limitado superiormente, o que é um absurdo. Logo, existe $n_0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.

■

**Teorema 4.1.2 (princípio de Arquimedes)** *Dados dois números reais positivos $a$ e $b$ existe um número inteiro positivo $n$ tal que $na > b$.*

***Demonstração:*** Dado o número $\frac{a}{b}$, pelo teorema 4.1.1, existe um número natural $n_0$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{a}{b}$, o que nos leva concluir que $n_0 a > b$

■

**Observação 4.1.1** *O teorema 4.1.2 (princípio de Arquimedes) pode ser expresso de forma equivalente como segue: Dados dois números reais positivos $a$ e $b$ existe um número natural $n$ tal que $\frac{b}{n} < a$*

Em resumo, o princípio de Arquimedes argumenta que quando duas grandezas são desiguais, é possível achar um múltiplo de qualquer uma delas que seja maior que a outra. Essa ideia serviu de norte para a demonstração do metodo de Exaustão. Esse método tem por base o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.3** *Dadas duas grandezas distintas, se da maior se subtrai mais que sua metade, e do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará sobrando uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.*

***Demonstração:*** Considere $a$ e $b$ duas grandezas do mesmo tipo (figura 4.1) e suponha, sem perda de generalidade, que $a > b$. De acordo com o teorema 4.1.2 Existe um número natural $n$, tal que $nb > a$. Nestas condições tomemos as grandezas


Figura 4.1: $nb > a$

$a$ e $nb$. Se de $a$ retirarmos mais do que sua metade e de $nb$ retirarmos $b$ (que é menos que metade de $nb$), restam-nos duas grandezas $a_1 < \frac{1}{2}a$ e $(n-1)b$, tais que $(n-1)b > a_1$.

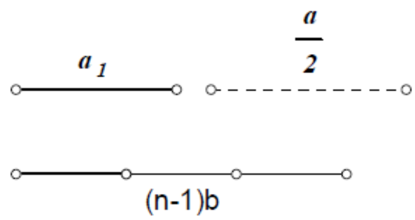


Figura 4.2: $(n-1)b > a_1$

Se, por um processo idêntico ao anterior, de $a_1$ retirarmos mais do que sua metade e de $(n-1)b$ retirarmos novamente $b$ (que é menos que metade de $(n-1)b$ ) ficaremos com duas grandezas $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ e $(n-2)b$, tais que $(n-2)b > a_2$.

Ao fim de $(n-2)$ passos, obtemos uma grandeza $a_{n-2}$ tal que $2b > a_{n-2}$. Se de $a_{n-2}$ retirarmos mais que sua metade e de $2b$ retirar $b$ sobra uma grandeza $a_{n-1}$ tal que $b > a_{n-1}$ (pois a $2b$ retirou-se exatamente a metade). Assim, ao fim de $(n-1)$ passos, obtém-se uma grandeza $a_{n-1}$ menor do que $b$, a menor das grandezas inicialmente dadas, o que prova o princípio de Eudoxo-Arquimedes.

$\blacksquare$

**Observação 4.1.2** *O teorema pode ser provado de forma semelhante mesmo se as partes subtraídas forem iguais às metades.*

Para darmos uma pálida ideia do que é o método de exaustão, nome dado no século XVII por Gregório de S. Vicente, vamos apresentar a demonstração da fórmula do volume de uma pirâmide, resultado bem conhecido da geometria espacial, nos apropriando desse método.

## 4.2 Volume da pirâmide pelo método de Exaustão

Essa demonstração parte da premissa de que o volume de um prisma é conhecido. Trata-se de uma construção interessante de prismas internos a pirâmides.

Seja $ABCD$ uma pirâmide de base triangular. Vamos construir dois prismas também de base triangular no interior dessa pirâmide.

- O primeiro prisma que vamos analisar é formado pelos vértices $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, respectivos pontos médios dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, e pelo vértice $B$.

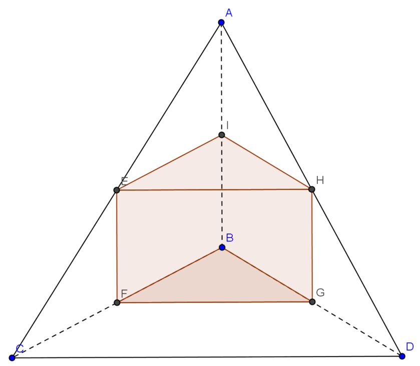


Figura 4.3: Prisma 1

Observe que a área do triângulo $\Delta_{FBG}$ equivale a $\dfrac{1}{4}$ da área do triângulo $\Delta_{CBD}$ ($\frac{1}{2}$ da base vezes $\frac{1}{2}$ da altura ), cuja área chamaremos de $S$.

$$V_{prisma1} = \frac{1}{4}S\frac{1}{2}h = \frac{1}{8}Sh$$

- O outro prisma é formado pelos vértices $E$, $F$, $G$, $H$, $D$ e $J$, ponto médio do lado $\overline{CD}$.

  Observe que esse prisma equivale a metade de um paralelepípedo com área da base igual a metade da área do triângulo $\Delta_{ABC}$ e sua altura é igual a metade da altura da pirâmide.

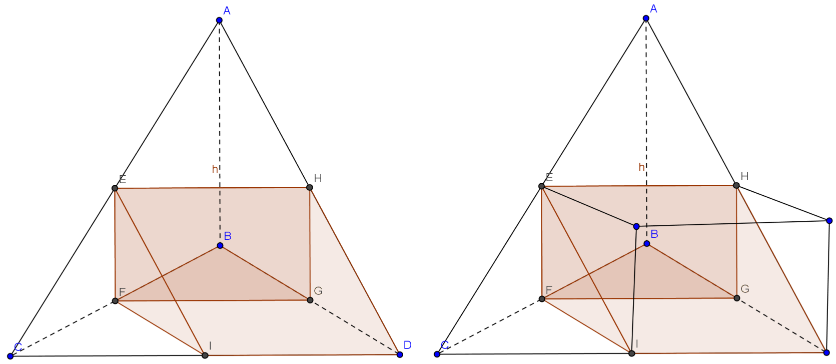


Figura 4.4: Prisma 2

$$V_{prisma2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{8}Sh$$

Somando o volume dos dois prismas temos:

$$V_1 = \frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh.$$

Chamamos essa etapa de $V_1$ pois, vamos repetir esse processo sucessivamente, onde em cada etapa $n$ iremos obter um $V_n$.

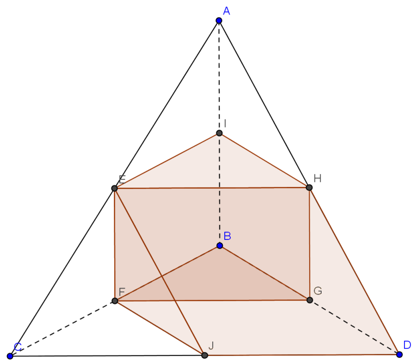


Figura 4.5: Representação de $V_1$

Perceba que ao fazer tal construção surgem duas pirâmides menores, $AIEH$ e $EFCJ$, que são semelhantes a pirâmide $ABCD$ e congruentes entre si. Notemos que $AIEH$ é congruente a pirâmide $IBFG$ e esta por sua vez está contida no prisma $IEHBFG$ (prisma 1). De modo análogo $EFCJ$ é congruente a $HGJD$ e esta por sua vez está contida no prisma $EFIHGD$ (prisma 2).

Repetindo o processo utilizado na pirâmide $ABCD$ para as pirâmides $AIEH$ e $EFCJ$, resultantes da primeira etapa, iremos encontrar quatro prismas com volume igual a $\frac{1}{64}Sh$.

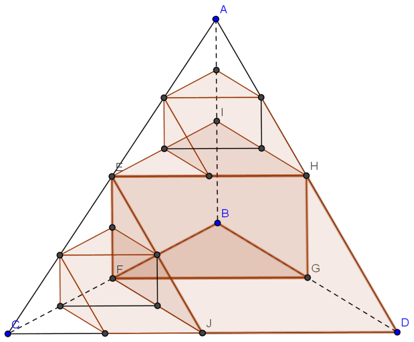


Figura 4.6: Pirâmide e método da exaustação

Somando esses volumes temos:

$$V_2 = \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh = \frac{4}{64}Sh = \frac{1}{16}Sh.$$

Podemos repetir esse procedimento agora indefinidamente, onde em cada etapa $n$ teremos:

$$V_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n Sh$$

sendo que em cada etapa o número de prismas formados será o dobro do número de prismas da etapa anterior. Como o volume dos prismas construidos em cada etapa é maior do que o volume das pirâmides resultantes de cada uma dessas, podemos fazer a diferença entre o volume da pirâmide $ABCD$ e a soma dos volumes dos prismas se tornar tão pequena quanto queiramos, caracterizando assim um processo de exaustão.

Somando essas etapas teremos o volume da pirâmide.

$$V_{\text{pirâmide}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n Sh = \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{4}Sh + \cdots = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)Sh = \frac{1}{3}Sh$$

Perceba que mesmo para uma pirâmide com outras bases podemos utilizar a mesma fórmula, uma vez que podemos seccionar em várias pirâmides de base triangular.

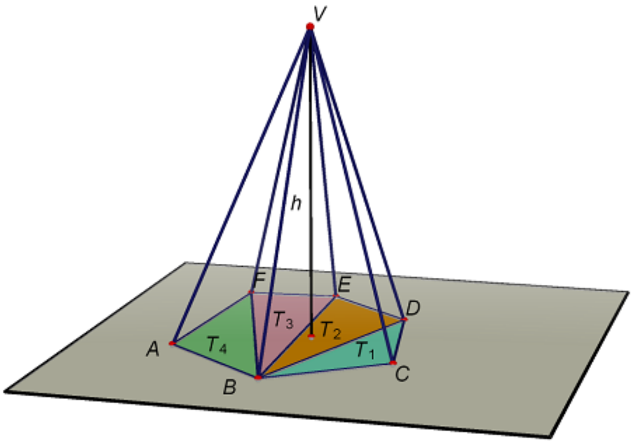


Figura 4.7: Volume de uma pirâmide qualquer

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \cdots + \frac{1}{3}S_nh$$
$$V_{\text{pirâmide}} = \underbrace{\frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n\right)h}_{S}$$
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}Sh$$

# Capítulo 5

# Quadratura da Parábola

No tratado *A quadratura da Parábola*[6], Arquimedes realizou outra das suas espetaculares proezas, ao mostrar como se calcular a área de um segmento qualquer de parábola, região delimitada por um arco de parábola e pelo segmento que une as extremidades de tal arco.

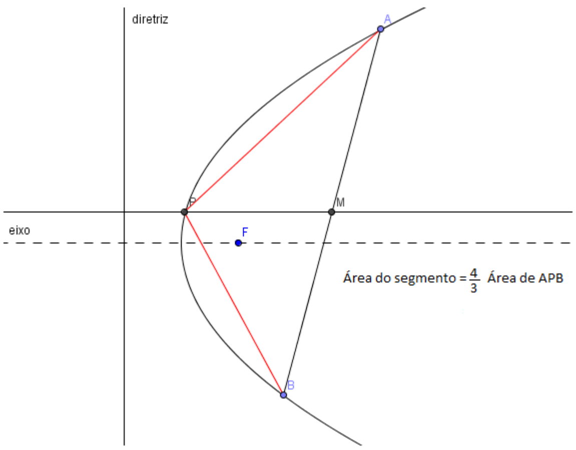


Figura 5.1: Segmento parabólico

O que ele provou foi que a área do segmento de parábola $\overline{AB}$ assim definido é igual a $4/3$ da área do triângulo $\Delta_{APB}$, onde $P$ é o ponto de cruzamento da parábola com a reta paralela ao eixo passando pelo ponto $M$, médio de $\overline{AB}$ (note que, em geral, $P$ não é o vértice da parábola). Trata-se de um resultado inesperado e nada intuitivo, obtido por articuladas combinações da geometria euclidiana.

O método proposto por Arquimedes para quadrar uma parábola baseia-se em três pontos:

1. Um teorema, o qual chamaremos de *Teorema preliminar* .

2. As propriedades elementares de uma parábola.

3. Triângulos construídos por retas tangentes e segmentos internos a parábola, os *triângulos de Arquimedes*, os quais definiremos com mais detalhes ao longo do texto.

## 5.1 Conceitos Notáveis

Nesta seção vamos relembrar alguns conceitos e demonstrar alguns teoremas da geometria plana essenciais para a demonstração desse tratado.

**Definição 5.1.1 (Mediatriz)** *Denomina-se mediatriz de um segmento de reta, a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.*

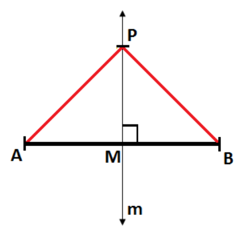


Figura 5.2: Mediatriz

Na figura abaixo, $M$ é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $m$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

**Proposição 5.1.1** *todo ponto da mediatriz equidista dos extremos do segmento.*

***Demonstração:*** Seja $P$ um ponto qualquer da mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$ (por construção), que $B\widehat{M}P = A\widehat{M}P = 90°$ (ângulo reto), e que $\overline{MP}$ é um lado comum aos triângulos $\Delta_{AMP}$ e $\Delta_{BMP}$, logo, pelo caso de congruência LAL esses triângulos são congruentes e por conseqüência $\overline{AP} = \overline{PB}$ .

■

**Proposição 5.1.2** *Só os pontos da mediatriz equidistam dos extremos desse segmento.*

***Demonstração:*** Seja $E$ um ponto qualquer do plano, tal que $\overline{EA} = \overline{EB}$, vamos provar que $E$ pertence à mediatriz de $\overline{AB}$. De fato, ligando $E$ ao ponto médio de $\overline{AB}$ formamos dois triângulos: $\Delta_{AME}$ e $\Delta_{BME}$.

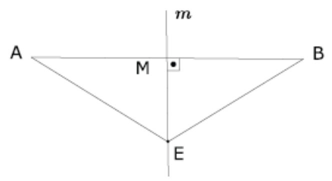


Figura 5.3: Unicidade da mediatriz

Temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$ (por construção), $\overline{AE} = \overline{EB}$ (por hipótese) e $\overline{EM}$ é um lado comum aos triângulos $\Delta_{AME}$ e $\Delta_{BME}$. Pelo caso de congruência LLL esses triângulos são congruentes o que nos leva a conluir que os ângulos $A\widehat{M}E$ e $B\widehat{M}E$ são retos, uma vez que são congruentes e adjacentes suplementares. Assim a reta $\overline{EM}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio. Pela unicidade da perpendicular temos que $\overline{EM} = m$, o que nos leva a concluir que $E$ pertence à mediatriz $m$ de $\overline{AB}$.

■

**Observação 5.1.1** *O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de* ***circuncentro****. Ele é o centro da circunferência na qual o triângulo está inscrito.*

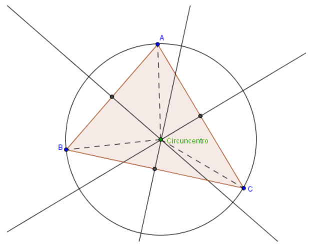


Figura 5.4: circuncentro

**Teorema 5.1.1 (Base Média)** *Se por $M$, ponto médio de $\overline{AB}$ num triângulo $\Delta_{ABC}$, traçamos uma reta $r$ paralela ao lado $\overline{BC}$, esta encontra o lado $\overline{AC}$, necesariamente, no seu ponto médio.*

***Demonstração:*** Seja $N$ o ponto médio de $\overline{AC}$. Trace uma semi-reta pelo ponto $C$, paralela ao lado $\overline{AB}$, a qual encontrará $r$ num ponto $D$. Como mostra a figura 5.5 abaixo.

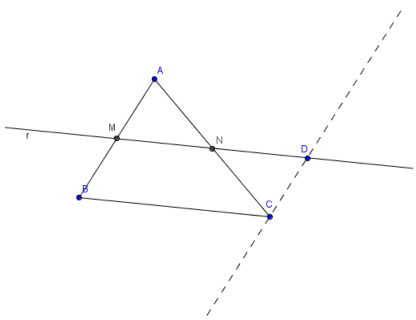


Figura 5.5: base média de um triângulo

Então, o quadrilátero $MBCD$ é um paralelogramo, pois seus lados são paralelos, logo $\overline{MB} = \overline{CD}$. Sabemos por hipótese que $\overline{AM} = \overline{MB}$, sendo assim $\overline{AM} = \overline{CD}$.

Observe que os ângulos $A\widehat{M}N$ e $C\widehat{D}N$ são alternos internos e os ângulos $A\widehat{N}M$ e $D\widehat{N}C$ são opostos pelo vértice. Pelo caso de congruência ALA os triângulos $\Delta_{AMN}$ e $\Delta_{CDN}$ são congruentes logo $\overline{AN} = \overline{NC}$. Assim $N$ é o ponto médio de $\overline{AC}$.

■

**Corolário 5.1.1** *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.*

***Demonstração:*** De acordo com o teorema anterior, sabemos que $\overline{MN} = \overline{BC}$ e os triângulos $\Delta_{AMN}$ e $\Delta_{CDN}$ são congruentes. como $MBCD$ é um paralelogramo temos que $\overline{BC} = \overline{MD} = 2\overline{MN}$, ou seja, $\overline{BC} = \dfrac{\overline{MN}}{2}$

■

**Teorema 5.1.2** *A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados não-paralelos de um trapézio e é paralela as suas bases passa pelo ponto médio do outro lado não -paralelo.*

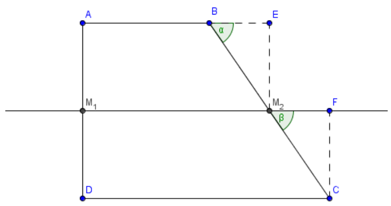


Figura 5.6: Reta paralela as bases do trapézio

***Demonstração:*** Considere o trapézio $ABCD$ e a reta $r$ que passa pelo ponto $M_1$ ponto médio do lado $\overline{AD}$ e paralela as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam $E$ e $F$, projeções ortogonais de $M_2$, que é o ponto de interseção entre $r$ e $\overline{BC}$, e o ponto $C$, respectivamente.Perceba que $\overline{EM_2} = \overline{AM_1} = \overline{FC} = \overline{M_1D}$ e os ângulos $E\widehat{B}M_2$ e $F\widehat{M_2}C$ são congruentes. Como os triângulos $\Delta_{BEM_2}$ e $\Delta_{FM_2C}$ são retângulos temos pelo caso ALA que eles são congruentes o que nos leva a concluir que $M_2$ é ponto médio de $\overline{BC}$.

■

## 5.2 Parábolas

Para calcular a área de um segmento parabólico Arquimedes demonstrou importantes teoremas e proposições, que foram fundamentais para a realização de seus cálculos. Para compreender essas proposições, começaremos essa seção relembrando conceitos mais elementares intrísecos as parábolas.

**Definição 5.2.1 (Conceito de Parábola)** *Seja $d$ uma reta e $F$ um ponto fora desta. Chamamos parábola $\varphi$ de diretriz $d$ e foco $F$ o conjunto dos pontos $P\,(x, y)$ tais que a distância de $P$ a $F$ é igual a distância de $P$ a $d$.*

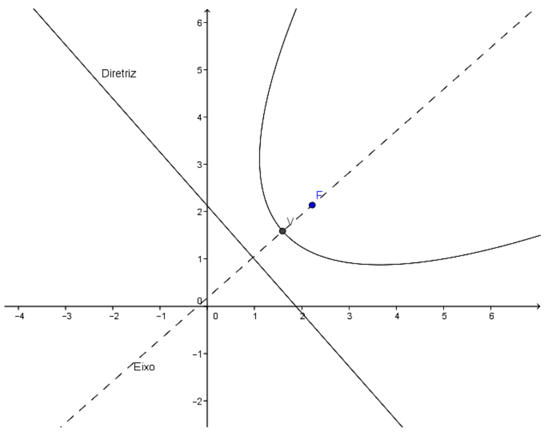


Figura 5.7: elementos da parábola

Observe que na figura acima aparecem outros elementos da parábola além da diretriz e do foco. são eles:

- **eixo:** reta que passa pelo foco e e perpendicular a diretriz
- **vértice** ($V$)**:** ponto do eixo que pertence a parábola, isto é, ponto médio do segmento determinado pelo foco e o ponto de interseção entre a diretriz e o eixo;.

A parábola corresponde ao lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz). Observe que uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz (**interior da curva**) e outra onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz (**exterior da curva**).

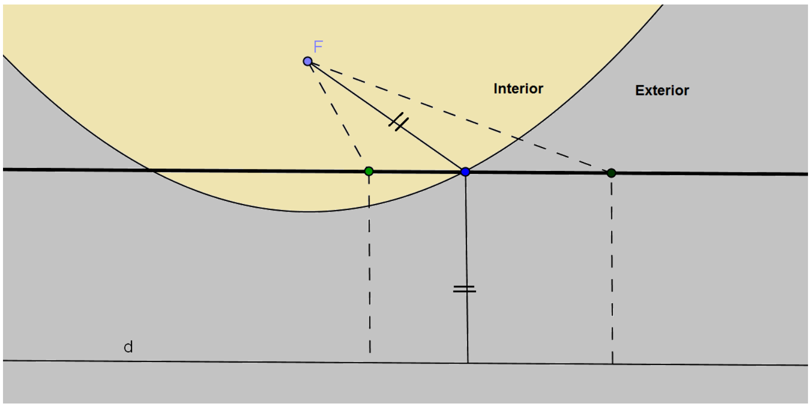


Figura 5.8: Lugar Geométrico dos pontos interiores e exteriores à Parábola

Vamos também definir um procedimento geométrico para encontrar reta tangente a parábola [5]. Lembramos que uma reta $r$ é tangente a uma parábola em um ponto $P$ da mesma quando todos os pontos de $r$, com exceção do ponto $P$, estão no exterior da parábola. Essa construção é um passo importante na determinação da área do segmento parabólico. A ideia é simples - De um ponto $P$ da parábola trace a sua projeção ortogonal a reta diretriz, ligue esse ponto ao foco da parábola. A reta que passa pelo ponto $P$ e pelo ponto médio do segmento que possui como extremidades o foco da parábola e a projeção ortogonal de $P$ é necessáriamente a reta tangente a parábola nesse ponto. veja a demonstração.

**Proposição 5.2.1 (Tangente à parábola)** *Sejam $P$ um ponto da parábola $\varphi$ de foco $F$ e diretriz $d$, $D$ a projeção ortogonal de $P$ sobre a diretriz, e $t$ a reta que passa pelo ponto $P$ e pelo ponto médio do segmento segmento $\overline{FD}$. Temos que $t$ é tangente à parábola $\varphi$ no ponto $P$ sendo também a mediatriz do segmento $\overline{FD}$ e bissetriz do ângulo $D\widehat{P}F$ .*

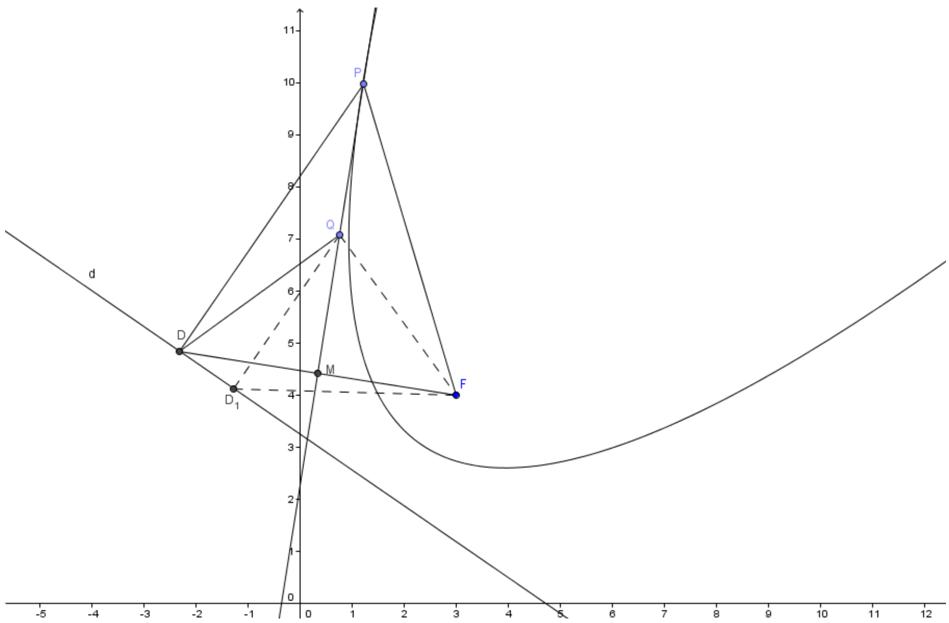


Figura 5.9: Reta tangente a parábola

***Demonstração:*** Seja $M$ o ponto médio de $\overline{FD}$ temos que $\overline{DM} = \overline{MF}$, $\overline{PF} = \overline{PD}$ (definição de parábola), e $\overline{PM}$ é um lado comum dos triângulos $\Delta_{FPM}$ e $\Delta_{DPM}$, logo, pelo caso de congruência LLL esses triângulos são congruentes. Perceba que os ângulos $D\widehat{P}M$ e $F\widehat{M}P$ são retos, pois são congruentes e adjacentes suplementares, logo a reta $t$ é mediatriz do lado $\overline{FD}$ e bissetriz do ângulo $D\widehat{P}F$. Basta agora provar que $t$ é tangente a parábola no ponto $P$, ou seja, todos os demais pontos dessa reta são exteriores a parábola. Para isso, tomemos agora $Q$ um ponto qualquer da reta

$t$, distinto de $P$. Se $D_1$ é projeção ortogonal do ponto $Q$ na diretriz temos que o triângulo $\Delta_{D_1QD}$ é reto e que $\overline{QD_1} < \overline{QD}$ (hipotenusa) e, portanto, $\overline{QF} = \overline{QD} > \overline{QD_1}$ ou seja, $Q$ é um ponto exterior à parábola. Logo, concluímos que a reta $t$ é tangente à parábola em $P$.

∎

**Teorema 5.2.1 (Preliminar)** *Sejam $A$ e $B$ dois pontos de uma parábola e $O$ o ponto de interseção entre as retas tangentes à parábola passando por esses pontos. A reta que passa pelo ponto $O$ e é paralela ao eixo da parábola passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$.*

***Demonstração:***

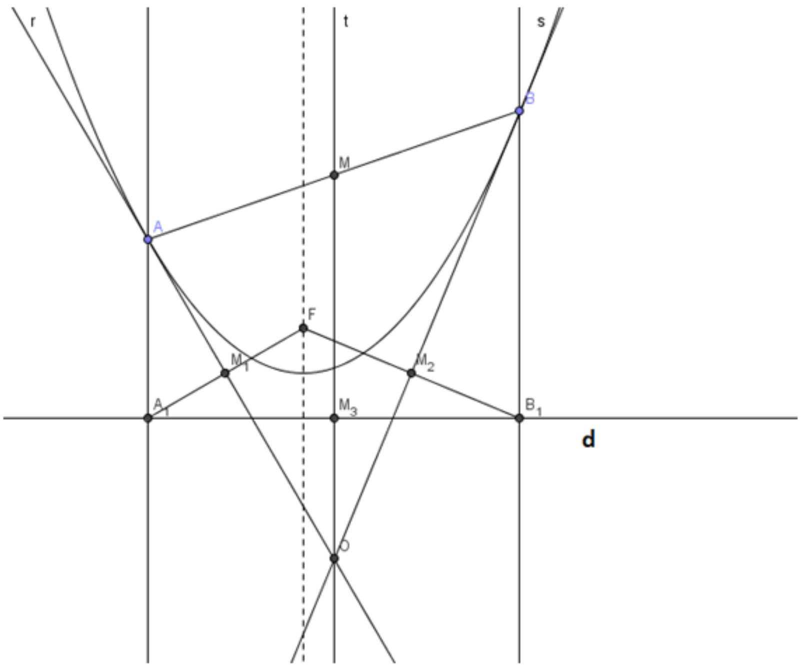


Figura 5.10: Teorema preliminar

∎

Sejam $A_1$ e $B_1$ as projeções ortogonais de $A$ e $B$ sobre a reta diretriz. Desta forma, a reta $r$ que passa pelo ponto médio $M_1$ do segmento $\overline{A_1F}$ e pelo ponto $A$ é tangente a parábola no ponto $A$ segundo a proposição 5.2.1. Da mesma forma a reta $s$ que passa pelo ponto médio $M_2$ do segmento $\overline{B_1F}$ e pelo ponto $B$ é tangente a parábola no ponto $B$. Observe que $r$ e $s$ são mediatrizes do triângulo $\Delta_{A_1B_1F}$. seja $t$ uma reta paralela ao eixo da parábola e que passa por $O$, circuncentro do triângulo $\Delta_{A_1B_1F}$, então $t$ é perpendicular ao segmento $\overline{A_1B_1}$, o que nos leva a concluir que $t$ também é mediatriz do triângulo $\Delta_{A_1B_1F}$, passando pelo ponto médio $M_3$ do segmento $\overline{A_1B_1}$. Perceba ainda que $AA_1B_1B$ é um trapézio, logo pelo teorema 5.1.2, $t$ passa pelo ponto médio $M$ do segmento $\overline{AB}$.

## 5.3 Triângulos de Arquimedes

**Definição 5.3.1 (Triângulo de Arquimedes)** *Seja $O$ o ponto de interseção entre as retas tangentes $r$ e $s$ relativas aos ponto $A$ e $B$ de uma parábola. O triângulo $\Delta_{ABO}$ é denominado triângulo de Arquimedes relativo ao segmento de parábola $\overline{AB}$.*

Os triângulos de Arquimedes são de significativa importância para o tratado *Quadratura da parábola.* Eles são originados a partir do segmento de reta que delimita o segmento parabólico e pelo ponto de interseção das retas tangentes aos extremos desse segmento. Arquimedes percebeu que esses triângulos poderiam ser subdivididos em quatro outros triângulos com áreas estratégicamente correlacionadas. Essas subdivisões seriam repetidas sucessivas vezes e dariam origem a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots$$

Observe a seguinte construção:

Considere o triângulo de Arquimedes $\Delta_{ABO}$. A partir do ponto $O$ em que as tangentes se cruzam, trace uma paralela ao eixo. Segundo o Teorema 5.2.1, esta

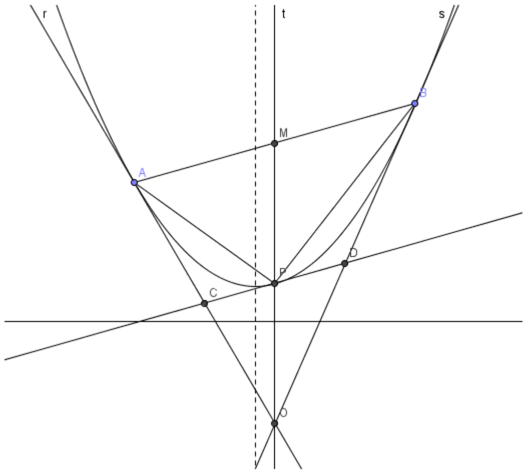


Figura 5.11: Construção 1 - triângulos de arquimedes

paralela cortará o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio $M$ e a parábola num ponto $P$. Trace por $P$ a tangente $u$ a parábola. Sendo $C$ e $D$ os pontos em que $u$ corta as retas $r$ e $s$, respctivamente. Traçando-se por $C$ uma paralela ao eixo, pelo Teorema 5.2.1 esta cortará o segmento $\overline{AP}$ em seu ponto médio $k$. De acordo com o Teorema 5.1.1, a paralela à base do triângulo $\Delta_{APM}$ que passa pelo ponto médio de $\overline{AP}$ passa, também, pelo ponto médio do segmento $\overline{AM}$, ou seja, $M'$ é ponto médio de $\overline{AM}$. Da mesma forma, traçando por $D$ uma paralela ao eixo, essa interceptará o segmento $\overline{BP}$ no seu ponto médio $L$, e o segmento $\overline{MB}$ no seu ponto médio $M''$. Como o segmento $\overline{CM'}$ é paralelo a base do triângulo $\Delta_{AOM}$ e passa por $M'$, ponto médio de $\overline{AM}$, então pelo Teorema 5.1.1, o segmento $\overline{CM'}$corta $\overline{AO}$ no seu ponto médio . Logo, $C$ é o ponto médio de $\overline{AO}$. De maneira análoga, temos que $D$ é o ponto médio de $\overline{OB}$. Concluindo que a reta $\overline{CD}$, ou seja $u$, passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ do triângulo $\Delta_{ABO}$. De acordo com o corolário 5.1.1 o segmento $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e igual a sua metade(base média). Além disso os triângulos $\Delta_{M''BD}$ e $\Delta_{PDO}$ são congruentes, o que nos leva a concluir que $\overline{M''D} = \overline{PO} = \overline{MP}$, ou seja, $P$ é ponto médio do segmento $\overline{OM}$.

Sendo assim, a tangente $\overline{CD}$ e os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{AP}$ dividem o triângulo $\Delta_{AOB}$, cuja área chamaremos de $S$, em quatro triângulos:

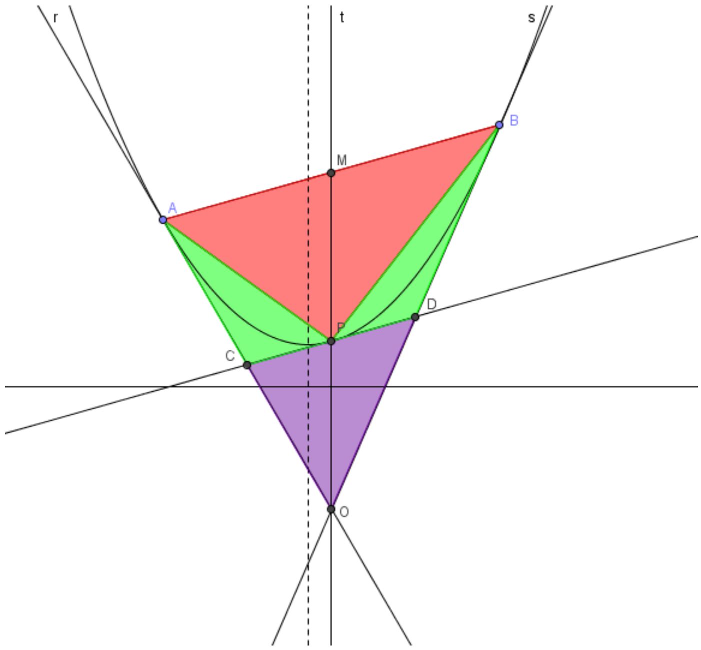


Figura 5.12: Sub-divisões do Triângulo de Arquimedes

- O triângulo $\Delta_{APB}$, interno a parábola, possui a mesma base de $\Delta_{AOB}$, cuja área chamaremos de $S_0$, mas a altura de $APB$ é a metade da altura de $AOB$, logo área de $\Delta_{APB}$ é a metade da área do triângulo $\Delta_{AOB}$, ou seja, $S_0 = \dfrac{S}{2}$.
- Considere o triângulo $\Delta_{COD}$, externo a parábola. Perceba que a base do triângulo $\Delta_{COD}$ equivale a metade da base do triângulo AOB e sua altura também equivale a metade da altura de $\Delta_{AOB}$, ou seja, $A_{COD} = \dfrac{S}{4} = \dfrac{S_0}{2}$
- Finalmente, considere os triângulos $\Delta_{APC}$ e $\Delta_{PBD}$ que são triângulos de arquimedes relativos aos segmentos de parábola $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Perceba que a soma das suas áreas é igual a $\dfrac{1}{4}$ da área do triângulo $\Delta_{AOB}$.

$$A_{AOB} = A_{APB} + A_{COD} + A_{APC} + A_{PBD}$$
$$S = \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + A_{APC} + A_{PBD}$$
$$A_{APC} + A_{PBD} = \frac{S}{4} = \frac{S_0}{2}$$

Tome os pontos $P'$ e $P''$ em que $\overline{CM'}$ e $\overline{DM''}$ cortam a parábola. Temos que o triângulo $\Delta_{AP'P}$ é interno ao triângulo $\Delta_{APC}$, assim como o triângulo $\Delta_{PP''B}$ é interno ao triângulo $\Delta_{PBD}$, temos que a soma das suas áreas equivale a metade da soma das áreas dos triângulos $\Delta_{APC}$ e $\Delta_{PBD}$:

$$A_{AP'P} + A_{PP''B} = \frac{1}{2}A_{ACP} + \frac{1}{2}A_{PDB} = \frac{1}{2}\left(A_{ACP} + A_{PDB}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times A_{APB} = \frac{1}{4}S_0.$$

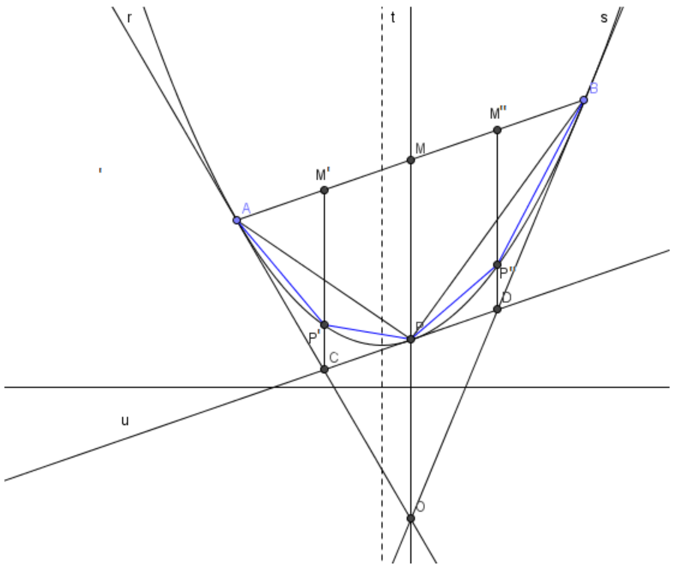


Figura 5.13: Construção 2 - triângulos de arquimedes

Acabamos por provar que a soma das áreas dos triângulos $\Delta_{AP'P}$ e $\Delta_{PP''B}$ é um quarto da área do triângulo $\Delta_{APB}$ (ver figura 5.13).

## 5.4 Quadratura da Parábola e o Método de Exaustão

O processo agora pode ser repetido indefinidamente, onde em cada etapa somamos áreas equivalentes a 1/4 das áreas agregadas na etapa anterior. O que nos leva a uma sequência cujo termo geral $a_n$ é igual a:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^n S_0$$

**Observação 5.4.1** *$a_n$ é a n-ésima etapa desse processo. É importante ressaltar que quando destacamos do segmento de parábola o triângulo $\Delta_{APB}$ estamos retirando mais da metade da área do segmento. Como isso se repete em cada etapa, o Teorema 4.1.3 (Eudóxio) permite afirmar que estamos em um processo de exaustão, ou seja, a diferença entre a área do segmento e a soma das áreas dos sucessivos triângulos pode ser feita tão pequena quanto queiramos.*

Concluímos que a área do segmento parabólico $\overline{AB}$ é dada por :

$$A_{seg} = S_0 + \frac{1}{4}S_0 + \frac{1}{4^2}S_0 + \frac{1}{4^3}S_0 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n S_0$$

Hoje acostumados a somar progressões geométricas com infinitos termos, diríamos imediatamente que a soma é $\frac{4}{3}S_0$. Também é possível concluir que a área do segmento parabólico é $\frac{2}{3}$ da área do triângulo $\Delta_{ABC}$. Arquimedes, entretanto, teve que chegar ao mesmo resultado usando outro método, o qual ele chamou de dupla redução ao absurdo [3].

## 5.5 Método de Dupla redução ao absurdo

Para entender o que Arquimedes fez, observe:

$$S_n = S_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Como já sabemos, a área dos triângulos removidos em cada etapa somam 1/4 do total das áreas dos triângulos removidos na etapa imediatamente anterior, ou seja:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{4}, \text{ ou } 4a_n = a_{n-1}$$

Para lidar com $S_n$, Arquimedes provou que se a ela adicionarmos 1/3 do último termo $a_n$ obtemos o número $4S_0/3$, independente de $n$. Isso se faz notando que:

$$a_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4a_n}{3} = \frac{a_{n-1}}{3}$$

Então,

$$S_n + \frac{a_n}{3} = (S_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + \left(a_n + \frac{a_n}{3}\right)$$
$$S_n + \frac{a_n}{3} = (S_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + \frac{a_{n-1}}{3}$$

Isto é,

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3}$$

Se substituirmos o índice $n$ por $n-1$, depois $n-2$, etc, obteremos:

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = S_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{3} = \cdots = S_0 + \frac{S_0}{3}$$

isto é:

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_0 + \frac{S_0}{3} = \frac{4}{3}S_0$$

Estamos agora prontos para terminar a demonstração com a dupla redução ao absurdo. Segundo [2] devemos explorar duas hipóteses:

**hipótese 1**: Vamos supor que $A_{seg} > \frac{4S_0}{3}$. Sendo assim dados $A_{seg}$ e $A_{seg} - \frac{4S_0}{3}$, dois números reais e positivos, Pelo Teorema 4.1.3, depois de um certo número $n$ de etapas de remoções de triângulos, obteremos:

$A_{seg} - S_n < A_{seg} - \frac{4S_0}{3}$, logo $S_n > \frac{4S_0}{3}$. O que é um absurdo pois $S_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4}{3}S_0$.

**hipótese 2**: Suponha agora que $A_{seg} < \frac{4S_0}{3}$. Assim, dados $S_0$ e $\frac{4S_0}{3} - A_{seg}$, dois números reais positivos, Pelo Teorema 4.1.1 existe um $n$ tal que $\frac{S_0}{4^n} < \frac{4S_0}{3} - A_{seg}$, ou seja, existe um $n$ tal que $a_n = \frac{S_0}{4^n}$ é menor do que $\frac{4S_0}{3} - A_{seg}$.

como já sabemos $S_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4S_0}{3}$, então $\frac{4S_0}{3} - S_n = \frac{a_n}{3}$. Portanto podemos facilmente concluir que:

$$\frac{4S_0}{3} - S_n = \frac{a_n}{3} < a_n < \frac{4S_0}{3} - A_{seg} \Longrightarrow \frac{4S_0}{3} - S_n < \frac{4S_0}{3} - A_{seg}$$

Esse resultado nos leva a concluir que $S_n > A_{seg}$, o que é um absurdo uma vez que $S_n$ constitui de sucessivas partições do segmento parabólico, ou seja, $S_n < A_{seg}$. Com isso Arquimedes demonstrou que a área do segmento de parábola não pode ser nem menor nem maior do que $\frac{4S_0}{3}$, logo deve ser igual a esse número.

# Conclusão

Os gregos estiveram a um passo da construção do Cálculo dois séculos antes de Cristo, sem ter ainda sequer uma linguagem algébrica simbólica [1], mas, foram limitados pela falta de conhecimento sobre o infinito. Assim como os gregos, muitos alunos esbarram nas dificuldades representadas pela *linguaguem matemática* do Cálculo e pelo direcionamento limitado da noção de infinito.

Ao estudar Sequências Numéricas, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, conteúdos estes que já fazem parte da base curricular do Ensino Médio, percebemos que ainda é possível modificar o enfoque que hoje é dado a esses assuntos, facilitando a compreensão de alguns conceitos, em especial, os que fazem uso da ideia de infinito, e torná-los mais atrativos. O uso da História da Matemática pode servir como uma ferramenta motivadora, além de dar uma nova forma de ver e entender a matemática.

Ao compreender o problema da quadratura da parábola e outros problemas propostos no trabalho conseguimos mostrar como se deu a evolução nos processos utilizados para trabalhar com somas infinitas, além de sinalizarmos para o cuidado quando lidamos com essas somas. Caso divergente, alguns resultados não podem ser obtidos utilizando operações que naturalmente dariam certo para uma quantidade finita de parcelas a somar (olhar a Seção 3.6). Fazendo isso, além de desmistificar que a Matemática é uma ciência pronta e acabada, ou seja, que ela está em constante mudança, contribuímos para a consolidação da base conceitual dos alunos sobre o uso de processos infinitos, que é fator fundamental para o sucesso na aplicação em qualquer outra área da Matemática.

Na finalização deste trabalho reforçamos a importância do professor ter domínio sobre limites e séries para que assim ele possa conduzir o seu aluno a ter uma concepção intuitiva correta sobre esses tópicos, permitindo que esse possa fugir de eventuais contradições e dificuldades ao ingressar no Ensino Superior.

# Referências Bibliográficas


[1] Amadei, F. L.;*O Infinito: um obstáculo no estudo da Matemática.* 2005. 122p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, p. 48 - 49, São Paulo, 2005. Disponível em: < http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1311 > Acesso em: 14 jan. 2014.

[2] Ávila,Geraldo;*Arquimedes, o rigor e o Método*, SBM, pg. 39 - 41, 1991. Disponível em: < http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo /n04/n04_Artigo_01.pdf>,Acesso em:22 Mar/2014.

[3] Ávila,Geraldo;*Ainda as séries infinitas*,RPM 31, pg.9 - 10, 1991.

[4] Barco, Luiz ; *Em Busca do Infinito. Superinteressante*, São Paulo, p. 65 - 65, 01 nov. 1988.

[5] Dorrie, H.;*100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution.* Dover,1965.

[6] Garbi,Gilberto; *A rainha das ciências*, 3 e.d. Editora livraria da física, São Paulo, 2006.

[7] Iezzi, G.; Murakami, C.; Machado, N.J. *Fundamentos de matemática elementar.* Vol. 8 (Limites, Derivadas, Noções de Integral). 5a ed. São Paulo, Atual Editora, 1993.

[8] Ifrah, G. *Os Números: A História de uma grande invenção*, p.333,7 ed. São Paulo: Editora Globo S.A, 1994.

[9] Lima, Ellon Lages; *Análise Real volume 1*,8 e.d. IMPA, p. 37 - 45, Rio de Janeiro, 2006.

[10] Mometti, A. L.; *O Infinito e as Metáforas no Ensino de Cálculo.* 2007. 272p. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- PUC, São Paulo, 2007.

[11] Paranhos, P. J.; *Infinitos Enumeráveis e Não Enumeráveis.* 2005. 122p. Dissertação (Mestrado PROFMAT) . UFF,Rio de Janeiro,2013. Disponível em <http:bit.profmat-bm.org.br/xmlui/bitstream /handle/123456789/506/2011_00401_PEDRO_JOL_PARANHOS.pdf?sequence=1> Acesso em 31 out. 2013.

[12] Vaccari, A.; Pacheco, E.R.; *O Método de Exaustão em Textos de História da Matemática*,Tese (Graduação de Matemática)-Universidade Estadual do Centro-Oeste, Paraná, 2007. Disponível em: < http://www.academia.edu/4619393/O_M> Acesso em:08 nov/2014.