



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Matrizes e uma Introdução às Imagens Digitais

Índia Andréia Costa Siqueira

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Moisés dos Santos Ceconello**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Junho - 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A559m Andréia Costa Siqueira, Índia.
Matrizes e uma introdução às imagens digitais / Índia Andréia Costa Siqueira. --
2014
92 f. ; 30 cm.

Orientadora: Moisés dos Santos Cecconello.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso,
Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Cuiabá, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matrizes. 2. Imagens digitais. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

Resumo

Como é de conhecimento comum, o conceito de matrizes faz parte da base curricular do ensino médio atual. Embora muita ênfase seja dada no que se refere à álgebra de matrizes pelos livros didáticos, pouco há sobre as principais aplicações e contribuições da teoria de matrizes no cotidiano. Neste trabalho mostraremos como o conteúdo de matrizes pode ser explorado como caso particular de função e, principalmente, por meio de imagens digitais que estão a cada dia mais presentes em nosso cotidiano, graças à expansão do acesso aos computadores e a rede mundial de computadores - a internet.

Sumário

Resumo	3
Introdução	10
1 Matrizes	12
1.1 Matriz	12
1.2 Matrizes Especiais	14
1.3 Operações com Matrizes	16
1.4 Matrizes e Operações de Arranjos Matriciais	21
2 Imagens Digitais	22
2.1 O que é uma Imagem Digital?	22
2.2 Processamento de Imagens Digitais (PDI)	22
2.3 Conceitos Básicos para o Processamento de Imagens	24
2.3.1 Imagem e Luz	24
2.3.2 Cor	25
2.3.3 Reprodução de Cores	26
2.4 Composição de Imagens	30
2.5 Aquisição e Digitalização de Imagens Digitais	33
2.6 Modelo Simples de Formação de Imagens	37
2.7 Resolução Espacial e Resolução de Intensidade	39

2.8	Tipos de Imagem	43
2.8.1	Imagens binárias ou booleanas	43
2.8.2	Imagens em tons de cinza	44
2.8.3	Imagens coloridas	45
2.9	Vizinhança - Propriedade de uma Imagem Digital	46
3	Manipulação de Imagens Digitais	48
3.1	Operações Lógicas e Aritméticas	48
3.1.1	Operações Pixel a Pixel	48
3.1.2	Operações por Orientação a Vizinhança	56
3.2	Interpolação de Imagens	57
4	Captura de uma Imagem Digital	63
4.1	Transformações Lineares	68
4.1.1	Transformações lineares planas	69
5	Matrizes e Aplicação em Sala de Aula	83
	Considerações Finais	89
	Referências Bibliográficas	91

Lista de Figuras

2.1	Espectro eletromagnético visível	25
2.2	Sistema RGB	26
2.3	Sistema CMY	28
2.4	Cubo de cores RGB	29
2.5	Cubo de cores CMY	30
2.6	Cubo de cores	30
2.7	1ª imagem digital produzida por Kirsch em 1957	33
2.8	Eixos Coordenados	36
2.9	Exemplo do processo de imagem e quantização	40
2.10	Amostragem pixels	41
2.11	Quantização escala de cinza	42
2.12	Representação binária	43
2.13	Imagem em tons de cinza	45
2.14	Imagem em cores (R,G,B)	46
2.15	Vizinhança	47
3.1	Operação aritmética (OPN)	51
3.2	Adição de imagens	53
3.3	Operações aritméticas: subtração, multiplicação e divisão	53
3.4	Imagens X e Y	54
3.5	AND e OR	54

3.6	XOR e (NOT X)AND Y	54
3.7	NOT X e NOT Y	54
3.8	AND	54
3.9	OR	55
3.10	XOR	55
3.11	NOT	55
3.12	Interpolação por vizinho mais próximo	58
3.13	Interpolação bilinear	60
3.14	Aumento de 2X e redução de 1/2	61
3.15	Comparação entre a interpolação VMP e Bilinear	62
4.1	Representação binária da Imagem do Gato Félix	66
4.2	Atividade: Matrix Transposta	66
4.3	Imagem original do Cristo Redentor	67
4.4	Função 2C	68
4.5	Imagem colorida original (RGB)	70
4.6	Função (2R, 3G, 2B)	71
4.7	Transição de imagens	72
4.8	Homer Simpsons (Matriz Identidade)	73
4.9	Dilatação na direção do eixo dos X	74
4.10	Dilatação	75
4.11	Dilatação ou contração na horizontal	76
4.12	Dilatação ou contração na vertical	77
4.13	Cisalhamento horizontal	78
4.14	Cisalhamento vertical	79
4.15	Rotação de um ângulo	80
4.16	Rotação de um ângulo2	82

5.1	Site imagem 1	84
5.2	Site imagem 2	84
5.3	Site imagem 3	85
5.4	Site imagem 4	85
5.5	Site imagem 5	85
5.6	Site imagem 6	85
5.7	Site imagem 8	86
5.8	Site imagem 9	88
5.9	Site imagem 10	88

Lista de Siglas

RGB - Red, Green, Blue

CMY- Ciano, Magenta e Yellow

CMYK - Ciano, Magenta, Yellow e black

BMP - Bitmap (mapa de cores)

NBS - National Bureau Standards

NIST - National Institute of Standards and Technology

PDI - Processamento Digital de Imagens

P& B - Preto e Branco

PMT - PhotoMultiplier Tube

CCD - Charge-Coupled Device

CIS - Contact Imagem Sensors

LED - Light Emitting Diode

NTSC - National Television System Committee

PAL-M - Phase Alternation Line com padrão M (525 linhas)

PAL-G - Phase Alternation Line com padrão G (625 linhas)

Introdução

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”. (Descartes)

Conteúdos do Ensino Médio são comumente abordados de forma mecânica e pouco atrativa. Um desses conteúdos abordados no currículo do Ensino Médio é ensino da Teoria das Matrizes: suas características e operações. Além disso, temos a noção de determinantes de matrizes quadradas, resolução e/ou discussão de sistemas lineares utilizando escalonamento. Raramente nos livros didáticos, aborda-se sua aplicação no cotidiano, concentrando sua apresentação ao aluno em sua grande maioria, como um amontoado de números e operações, com pouca ou nenhuma aplicação. O conteúdo de teoria de matrizes surge naturalmente em diversas situações ou aplicações, muito além da resolução e discussão de sistemas lineares. Imagine um engenheiro eletricitista calculando um curto circuito ou corrente em um sistema sem o auxílio de programas de computador que utilizam matrizes e outros operadores matemáticos, seria muito trabalhoso fazer todos esses cálculos a mão.

Diante desta constatação, a motivação inicial desse trabalho foi a de tornar o conteúdo de Teoria das Matrizes mais próximo do cotidiano do aluno, mostrando-lhe que realmente existem aplicações que ultrapassam o limite dos sistemas lineares. O crescente uso de computadores reforça essa ideia, fazendo com que a Teoria das Matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Mas especificamente, nesse trabalho, focamos sua aplicação na formação e leitura de imagens digitais, tão presentes no cotidiano do educando, muitas vezes nem levada em consideração quando o foco é a aplicação de uma matriz.

Continuando a apresentação de matrizes, percebemos que são trabalhadas no Ensino Superior, em Álgebra Linear e Geometria Analítica. Um exemplo disso é como podem ser utilizadas para identificar qual cônica é descrita por uma determinada equação. Este trabalho visa abordar e apresentar o conceito de matrizes de forma diferenciada. Com ele, o objetivo é abordar o conteúdo teoria de matrizes a partir de uma de suas aplicações: a formação de imagens. Dentro desse contexto, exemplificar sua relação com funções, pois matriz é um caso particular de função, transformações lineares. Como as operações aplicadas às matrizes influenciam e modificam uma imagem, rotacionando, transladando, interferindo em seu brilho, cor, tamanho, além de ampliar e reduzir uma imagem.

Como o PROFMAT tem como um de seus objetivos o aperfeiçoamento do professor de matemática na educação básica, esperamos que este trabalho possa contribuir para a elaboração e abordagem desse conteúdo no Ensino Médio, despertando o interesse no aluno para a investigação, pesquisa e descoberta da matemática no seu cotidiano, bom como algumas de suas aplicações.

Capítulo 1

Matrizes

Além do estudo de matrizes ser uma preparação para o estudo de sistemas lineares, existe outras aplicações deste assunto que devem ser consideradas na compreensão de algumas situações do cotidiano. Para que isso seja possível, é necessário um estudo sobre a teoria de matrizes como pré-requisito para entender essas aplicações.

1.1 Matriz

Considere os seguintes subconjuntos de números naturais \mathbb{N} :

$$I_m = \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

Uma matriz sobre o conjunto de números reais de ordem $m \times n$ é uma função

$$A : I_m \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$$

que para cada par ordenado $(i, j) \in I_m \times I_n$ está associado um único escalar

$$a_{ij} = A(i, j) \in \mathbb{R}$$

denominado elemento da matriz A .

Definição 1.1 – Denominamos matriz a um conjunto de números reais, ou a um conjunto de números complexos, dispostos em linhas e colunas, numa certa ordem, e colocados entre colchetes. Assim, uma matriz real, ou uma matriz complexa, que vamos denotar por A , com m linhas e n colunas, é representada da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ou $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Os escalares a_{ij} são os elementos da matriz, onde o primeiro índice indica a linha e o segundo índice indica a coluna às quais pertence o elemento. Neste caso dizemos que a matriz A de ordem $m \times n$. De forma mais simples, utilizaremos a indicação $A = [a_{ij}]$ para denotar a matriz A e seus elementos.

De forma rigorosa, dizemos que a tabela retangular acima, não é uma matriz, mas sim a representação de uma matriz.

1.2 Matrizes Especiais

Definição 1.2 – Dizemos que as matrizes $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$, cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja quando $m = n$, é a *matriz quadrada*. Neste caso, dizemos simplesmente, que a matriz A possui ordem n .

Definição 1.3 – Dizemos que as matrizes $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$, que possuem todos os elementos a_{ij} nulos é a *matriz nula*, denotada por $A = 0$.

Definição 1.4 – Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem $m \times n$. Dizemos que as matrizes são *matrizes iguais* se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}; \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

Definição 1.5 – Dizemos que a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times 1$, é a *matriz coluna*. Representada na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Definição 1.6 – Dizemos que a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $1 \times n$, é a *matriz linha*. Representada na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

De acordo com a definição 1, dizemos que, em uma matriz A , todos os elementos a_{ij} , com $i = j$, formam a *diagonal principal* da matriz A .

Definição 1.8 – Dizemos que toda matriz $A = [a_{ij}]$ cujos elementos a_{ij} que não fazem parte da diagonal principal são nulos, é a matriz diagonal.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição 1.9 – Dizemos que uma matriz A , que além de quadrada e diagonal, possuir todos os elementos a_{ij} da diagonal principal iguais a 1 é a *matriz identidade*.

Exemplos:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para definir uma matriz $A = [a_{ij}]$, podemos utilizar uma lei de formação, onde para cada um dos valores de i (linha) e j (coluna) encontramos um valor de a_{ij} . Por exemplo, a lei de formação da matriz $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = 2i + j$ nos fornece os valores de cada elemento pertencente a matriz $A = [a_{ij}]$ de acordo com a posição que esse elemento ocupa na mesma.

Exemplo:

Dada a matriz $A_{2 \times 2}$ e a lei de formação $a_{ij} = 2i + j$, construa a matriz A :

Para a_{11} temos $a_{11} = 2 \cdot 1 + 1$ então $a_{11} = 3$;

a_{12} temos $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2$ então $a_{12} = 4$;

a_{21} temos $a_{21} = 2 \cdot 2 + 1$ então $a_{21} = 5$;

a_{22} temos $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2$ então $a_{22} = 6$;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3 Operações com Matrizes

Definição 1.10 – Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem $m \times n$. Definimos como a soma das matrizes A e B , que denotamos por $A + B$, como sendo a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$, onde cada elemento é definido como sendo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

De forma mais simples, denotamos a soma das matrizes A e B por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Analogamente, podemos definir a diferença entre as matrizes A e B , ou seja $A - B$ por $A + (-1)B$. Então $A - B$, denotamos a diferença entre duas matrizes A e B , como sendo $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Definição 1.11 – Seja uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ e um escalar λ . Definimos a multiplicação do escalar λ pela matriz A , denotamos por λA , como sendo a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$, onde cada elemento é definido por

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

De forma mais simplificada, denotamos por $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$, para indicar a multiplicação de uma matriz A por um escalar λ .

Definição 1.12 – Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do tipo $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. O produto AB dessas matrizes, nessa ordem, é a matriz $C = [c_{ij}]$, do tipo $m \times p$, cujo ij -ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Assim o produto das matrizes AB somente poderá ser definido quando o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B .

Exemplo:

Para o produto de uma matriz 3×3 , por exemplo, ao invés de escrevermos a i -ésima linha na forma $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$ escreveremos (a_i, b_i, c_i, d_i) . Com essa notação temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}$$

Então a matriz MN será:

$$MN = \begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}$$

Outra operação comum ao estudo de matrizes é transposição de elementos. Segue então a definição de matriz transposta.

Definição 1.13 – Dizemos que a matriz transposta de uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$, será denotada por $A^T = [a_{ji}]$, e terá ordem $n \times m$. A matriz $A^T = [a_{ji}]$ é obtida pelo intercâmbio das respectivas linhas e colunas da matriz A . Mais precisamente, se $A = a_{ij}$, então $A^T = a_{ji}$.

Exemplo:

Dada a matriz A , escreva a matriz A^T :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Existem algumas regras algébricas úteis para as operações entre matrizes.

Teorema – Cada uma das afirmações a seguir é válida quaisquer que sejam os escalares α e β e quaisquer que sejam as matrizes A , B e C para as quais as operações indicadas estão definidas.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(AB)C = A(BC)$

$$4. A(B + C) = AB + AC$$

$$5. (A + B)C = AC + BC$$

$$6. (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$7. \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$8. (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$9. \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Demonstaremos duas relações, deixando as outras a cargo do leitor:

Demonstração de (4). Suponha que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem $m \times n$ e que $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ são ambas matrizes $n \times r$. Sejam $D = A(B + C)$ e $E = AB + AC$. Então,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{ki} + c_{kj})$$

e

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}$$

Mas

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}$$

logo $d_{ij} = e_{ij}$ e, portanto, $A(B + C) = AB + AC$.

Demonstração de (3). Sejam A uma matriz $m \times n$, B uma matriz $n \times r$ e C uma matriz $r \times s$, Sejam $D = AB$ e $E = BC$. Precisamos mostrar que $DC = AE$. Pela definição de multiplicação de matrizes,

$$d_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \quad \text{e} \quad e_{kj} = \sum_{l=1}^r b_{kl}c_{lj}$$

O elemento (i, j) de DC é

$$\sum_{l=1}^r d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^r \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj}$$

e o elemento (i, j) de AE é

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^r b_{kl}c_{lj} \right)$$

Como

$$\sum_{l=1}^r \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^r b_{kl}c_{lj} \right)$$

tem-se que

$$(AB)C = DC = AE = A(BC)$$

1.4 Matrizes e Operações de Arranjos Matriciais

Uma operação de arranjo matricial é realizada elemento a elemento. Esse fator não afeta o resultado final quando tratamos de adição e subtração entre matrizes. No caso específico de multiplicação entre matrizes é necessário que se faça uma distinção clara entre operações de arranjos matriciais e matrizes. Por exemplo, vejamos as seguintes matrizes 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

O produto da matriz é dado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o produto de arranjo matricial dessas duas matrizes é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

A apresentação dessa distinção se faz necessária quando estamos tratando de imagem digital.

Capítulo 2

Imagens Digitais

2.1 O que é uma Imagem Digital?

Imagens digitais são representações de imagens que são armazenadas em um computador. A coisa mais importante a entender sobre imagens digitais é que você não pode vê-las e elas não têm qualquer tamanho físico até serem exibidas em uma tela de computador ou impressas em papel. Até esse ponto, elas são apenas um grupo de números no disco rígido do computador que descrevem os elementos individuais de uma imagem e como eles são organizados. Estes elementos são denominados pixels (abreviatura de picture elements), e estão dispostas em forma de uma grade com a informação de cada pixel, que contém sobre a sua cor ou intensidade.

2.2 Processamento de Imagens Digitais (PDI)

O processamento digital de imagens se faz necessário para a melhoria da informação virtual e ao processamento de dados de cenas para reprodução automática através de máquinas. Visando a necessidade de me-

lhorar a qualidade da informação para interpretação humana, surgiu o interesse em métodos de Processamento Digital. Uma das primeiras aplicações de PDI foi a melhoria das imagens de jornais que eram enviadas entre Londres e Nova Iorque por volta de 1920, por cabo submarino. Esse processo reduziu o tempo de transmissão de mais de uma semana para menos de três horas o tempo para transportar uma fotografia através do Oceano Atlântico. Um equipamento de impressão especializado codificava as imagens para a transmissão a cabo e depois reconstruía no recebimento. Mas em meados dos anos 60 o processamento de imagem mostra maior evolução. Com a chegada de computadores digitais e o programa espacial norte-americano, faz-se necessário o aprimoramento do armazenamento, transferência e reprodução de imagens. Em 1964 as imagens da lua transmitidas pela sonda Ranger7 foram processadas por um computador para corrigir vários tipos de distorções inerentes à camara de televisão à bordo. As técnicas utilizadas nessa época serviram de base para a restauração de imagens de outros programas espaciais posteriores, como por exemplo, as expedições tripuladas da série Apollo para a lua.

O PDI tem suas aplicações com objetivo de desenvolvimento de métodos para realçar informações contidas em imagens para a interpretação e análise humana, por exemplo: Geologia: estudo da composição e estrutura da superfície, detecção de minerais, óleo e outros recursos naturais; Agricultura: previsão de safras e determinação do tipo de plantação nas áreas de agricultura; Floresta: determinação do tipo de cobertura florestal; Cartografia: mapeamento da superfície terrestre; Análise Ambiental: Monitoramento da poluição e planejamento urbano; Meteorologia: análise de clima e temperatura; Biomedicina: contagem automática de células, entre outras aplicações.

2.3 Conceitos Básicos para o Processamento de Imagens

2.3.1 Imagem e Luz

A aplicação do processamento digital de imagens é tão variadas que requer alguma organização. Uma das formas mais fáceis de desenvolver uma compreensão básica da extensão das aplicações do processamento de imagens é categorizar as imagens de acordo com a sua fonte (por exemplo, visual, raios X e assim por diante). A principal fonte de energia para imagens utilizada atualmente é o espectro eletromagnético de energia. Imagens baseadas na radiação do espectro eletromagnético são as mais familiares, especialmente as imagens nas bandas visuais e de raios X do espectro. Ondas eletromagnéticas podem ser interpretadas como ondas senoidais, de vários comprimentos, que propagam, ou também podem ser vistas como um fluxo de partículas sem massa, cada uma se deslocando em um padrão ondulatório e se movendo na velocidade da luz. Cada partícula em massa contém uma certa quantidade de energia, denominada fóton. Se bandas espectrais forem agrupadas de acordo com a energia do fóton, obtemos o espectro eletromagnético. Variando de raios gama (mais alta energia) em um extremo a ondas de rádio (mais baixa energia) no outro.

A luz é um tipo particular de radiação eletromagnética que pode ser percebida pelo olho humano. O espectro visível cobre uma faixa que vai de $0,43\mu m$ (violeta) até $0,79\mu m$ (vermelho). Por conveniência, o espectro visível é dividido em seis grandes regiões. Nenhuma região termina bruscamente, mas cada faixa se mistura gradativamente à próxima.

2.3.2 Cor

A cor é a sensação produzida pela presença de luz no ambiente. Por sua vez, a luz corresponde à porção visível do espectro eletromagnético. O espectro visível inclui as cores violeta, azul, verde, amarelo, laranja e vermelho. A luz branca (acromática) aparece como uma energia basicamente uniforme para cada comprimento de onda, enquanto a luz colorida apresenta picos de energia em determinadas regiões de comprimento de onda, caracterizando uma concentração de energia em bandas, produzindo as matizes e a pureza das cores.

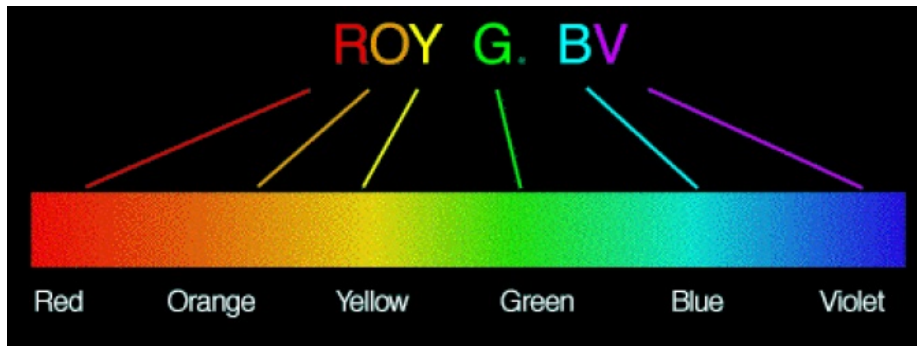


Figura 2.1: Espectro eletromagnético visível

Ao falarmos de cores, temos duas linhas de pensamento distintas: a Cor-Luz e a Cor-Pigmento. Falar de cor sem falar de luz é impossível, mesmo se tratando da Cor-Pigmento, pois ela, a luz, é imprescindível na percepção da cor, seja ela Cor-Luz ou Cor-Pigmento. No caso da Cor-Luz ela é a própria cor e no caso da Cor-Pigmento ela, a luz, é que é refletida pelo material, fazendo com que o olho humano perceba esse estímulo como cor.

Os dois extremos da classificação das cores são: o branco, ausência total de cor, ou seja luz pura; e o preto, ausência total de luz, o que faz com

que não se reflita nenhuma cor. Essas duas "cores" portanto não exatamente cores, mas características de luz, que convencionamos chamar de cor.

2.3.3 Reprodução de Cores

Para a reprodução das cores existem vários sistemas ou espaços, dentre eles alguns fazem uso do processo aditivo. Muito comum, um sistema que utiliza esse processo é o chamado de sistema RGB. Utiliza-se das primárias de luz nas cores vermelho (Red), verde (Green) e azul (Blue). A soma dessas três cores resulta na cor branca e a origem das cores está na cor preta. Como exemplo desse processo temos os sistemas de luz emitida como é o caso dos monitores de TV e computador, data shows, scanners, e câmeras digitais.

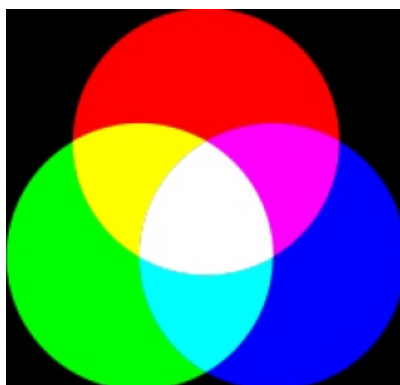


Figura 2.2: Sistema RGB

Uma cor no modelo de cores RGB pode ser descrita pela indicação da quantidade de vermelho, verde e azul que contém. Cada um pode variar entre o mínimo (completamente escuro) e máximo (completamente intenso). Quando todas as cores estão no mínimo, o resultado é preto. Se todas estão no máximo, o resultado é branco.

Uma das representações mais usuais para as cores é a utilização da escala de 0 a 255, bastante encontrada na computação pela conveniência

de se armazenar cada valor de cor em 1 byte (8 bits). Assim, o vermelho completamente intenso quando representado por 255, 0, 0.

Assim também usando o sistema binário é possível representar o sistema de cores pelo sistema RGB semelhante ao uso do 255, usamos o número 1, e para zero o seu próprio valor. Para cada 8 cores, 8 bits.

Outra escala adaptada no sistema RGB é o tipo numérico real. Utiliza uma escala em valores decimais para definir tons da cor, com valor mínimo 0 e valor máximo 1. São eles utilizados da seguinte forma RGB (0.554,1,0.200) o que gera a cor verde-limão.

R	G	B	Valor Binário	Cor
0	0	0	0	Preto
0	0	1	1	Azul
0	1	0	2	Verde
0	1	1	3	Turquesa
1	0	0	4	Vermelho
1	0	1	5	Magenta
1	1	0	6	Amarelo
1	1	1	7	Branco

Outro sistema que aparece na formação das cores é o sistema CMY.

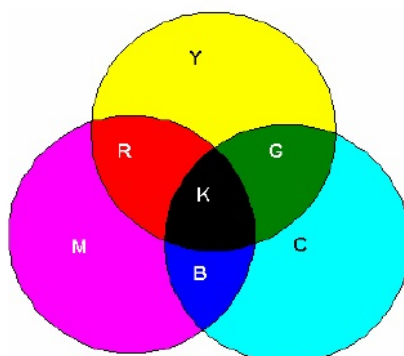


Figura 2.3: Sistema CMY

De forma complementar ao sistema RGB, este sistema baseia-se no processo subtrativo de cores. Nesse sistema aparecem as cores turquesa (Cyan), magenta (Magenta) e amarelo (Yellow). Utilizado por exemplo, na impressão a cores em papel branco, nesse caso nomeado pela sigla CMYK, pois o preto (black) aparece na impressão. O espaço CMY pode ser construído da mesma forma que é construído o espaço RGB, porém as coordenadas do espaço CMY são as cores primárias subtrativas.

R	G	B	Valor Binário	Cor
0	0	0	0	Branco
0	0	1	1	Amarelo
0	1	0	2	Magenta
0	1	1	3	Vermelho
1	0	0	4	Turquesa
1	0	1	5	Verde
1	1	0	6	Azul
1	1	1	7	Preto

A transformação entre o sistema CMY e o sistema RGB é dada por:

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

Para exemplificar, se uma determinada cor é representada no sistema RGB por (0.212, 0.565, 0.354), seus valores no CMY são obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.212 \\ 0.565 \\ 0.354 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos (0.788, 0.435, 0.6460) que é o complementar da cor citada no CMY.

Essa relação entre as cores nos dois sistemas pode ser representada por um cubo, o cubo das cores.

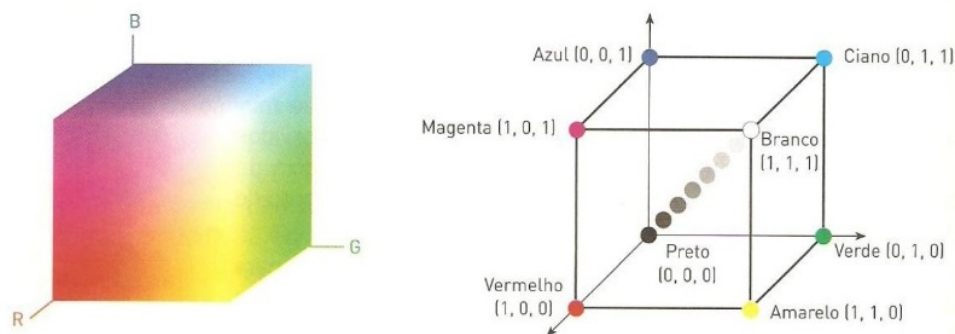


Figura 2.4: Cubo de cores RGB

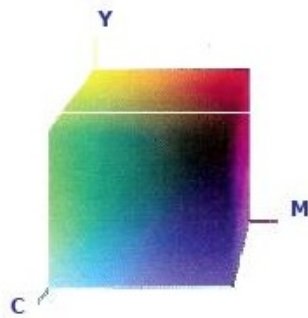


Figura 2.5: Cubo de cores CMY

Note que a posição das cores no cubo de cores RGB e no cubo CMY são complementares, ou seja, estão invertidas. Também é importante observar que a variação entre branco e preto (diagonal do cubo) representa as escalas ou tons de cinza. Então representando em um único cubo de cores os sistemas RGB e CMY, teremos:

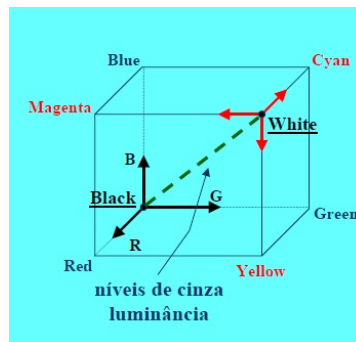


Figura 2.6: Cubo de cores

2.4 Composição de Imagens

Imagens digitais são as imagens que aparecem na tela do seu computador ou em sua televisão. As imagens digitais são formadas por um conjunto de pontos em diferentes tons. Podem ser representadas por matrizes

com $M \times N$ pontos. As imagens digitais que aparecem em uma tomografia, por exemplo, são compostas por matrizes com 256×256 pontos. Em alguns aparelhos mais modernos essa mesma imagem pode ser representada por matrizes com 1024×1024 pontos, o que caracteriza maior precisão e definição da imagem.

A imagem digital é composta pelos computadores de maneira semelhante a composição de dados armazenados. Os computadores utilizam uma linguagem binária para essa composição. Binária porque toda e qualquer informação é armazenada com a utilização de dois valores: 0 ou 1, por esse motivo recebe o nome de *bit* (binary digit). Então, 1 bit num armazenamento de uma imagem em escala de cinza, pode assumir 2 tons (1 ou 0) que, de acordo com o sistema adotado, corresponde ao branco e preto. Caso tenhamos 2 bits, teremos uma combinação de 4 tons diferentes, ou seja, 4 formas diferentes de combinar o 1 e o 0, que variam do tom mais claro ao tom mais escuro.

Veja:

1 bit	1 ou 0	2 tons
2 bit	00 ou 01 ou 10 ou 11	4 tons
3 bit	000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 ou 111	8 tons

Percebemos que para cada quantidade de bits temos como resultado 2^n tons, onde n é a quantidade de bits utilizados na composição, 8 bits correspondem a 1 byte.

Mais tons na composição da imagem significa que a imagem está próxima de sua representação real. Para o armazenamento de imagens em tons de cinza, 256 tons são necessários para a composição da maioria das imagens. Essa quantidade de tons de cinza é suficiente na maioria das repre-

representações de imagem. No entanto, em alguns casos, quando existe a necessidade de reproduzir uma imagem mais detalhada e evitar os erros de arredondamento nos cálculos numéricos, como por exemplo em imagens médicas, onde é necessária uma maior precisão.

Uma imagem digital é também representada por pixels. Pixel ou pel é o menor ponto em que é representada uma imagem. Do inglês *picture element* (elemento da figura), o pixel não tem uma dimensão ou comprimento pré definido, pois depende do tamanho do campo de visão e da matriz de imagem. Quanto maior for a quantidade de pixels em uma imagem, maior será a sua resolução, melhor será a qualidade. O número total de pixels de uma imagem é obtido pelo produto da quantidade de pixels que existem na vertical pela quantidade de pixels que existem na horizontal da matriz que representa essa imagem. Esse número total é chamado de tamanho da matriz.

É necessário que se deixe claro que essas matrizes estão representadas num computador. Se pensarmos só na relação: tamanho de matrizes e qualidade de imagens, podemos concluir que é melhor a composição de matrizes maiores para obter imagens com melhor qualidade. Mas matrizes maiores possuem mais pontos, portanto os pixels possuem menor área, gerando mais detalhes. Essa situação cria uma necessidade maior do esforço computacional envolvido nessa composição, porque precisa de mais espaço no disco rígido, o que pode atrapalhar o processo.

2.5 Aquisição e Digitalização de Imagens Digitais

O termo imagem (monocromática), refere-se a função bidimensional de intensidade da luz $f(x, y)$, onde x e y representam as coordenadas espaciais e o valor da f em qualquer ponto (x, y) é proporcional ao brilho (ou níveis de cinza) da imagem naquele ponto. Para representar o brilho se torna útil a visualização de um terceiro eixo, valores mais altos representam regiões de maior brilho.

Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz, onde cada elemento localizado numa linha e coluna, refere-se a um ponto da imagem, identificando nesse ponto o nível de cinza correspondente. A imagem matricial, ou imagem raster, é mais conhecida como *bitmap* ou mapa de bits (BMP) A primeira imagem digital foi feita por Russell Kirsch em 1957, no NBS, agora conhecido como National Institute of Standards and Technology (NIST). Esse pioneiro da computação perguntou-se o que aconteceria se os computadores pudessem olhar para as imagens. Então ele construiu um scanner tubular e digitalizou uma foto 3×4 do filho Waden, de 3 meses. Essa imagem digital tinha 176 pixels em uma área de $5 \times 5\text{cm}$.



Figura 2.7: 1ª imagem digital produzida por Kirsch em 1957

O pixel é a menor parte de uma imagem digital ao qual se atribui uma cor. A um conjunto de pixels se dá o nome de megapixels. Deve-se tomar cuidado com essa nomenclatura, pois o prefixo mega (M) utilizado na computação tem valor diferente do utilizado pelo Sistema Internacional de Medidas (SI). No SI, utilizando o sistema decimal, um mega corresponde a 10^6 (1.000.000), já no ambiente computacional, que usa o sistema binário, um mega equivale a 2^{20} (1.048.576). Essa correspondência é feita pela proximidade dos dois valores.

As imagens são sinais contínuos, portanto, na sua aquisição essas imagens são discretizadas e representadas numa estrutura de dados para serem processadas por computadores. Um exemplo de estrutura de dados usada são as matrizes. Então, a função imagem $f(x, y)$ pode ser estruturada numa matriz de M linhas e N colunas, formando a amostragem da imagem. Na forma de equação, escrevemos a representação de uma matriz numérica $M \times N$ como

$$f(x) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

Os dois lados dessa equação são formas equivalentes de representar quantitativamente uma imagem digital. O lado direito é uma matriz de números reais. Cada elemento dessa matriz é chamado *pixel*.

Em algumas discussões é vantajoso utilizar uma notação matricial mais tradicional para expressar uma imagem digital e seus elementos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

Observa-se que $a_{ij} = f(x = i, y = j) = f(i, j)$, de forma que as duas matrizes anteriores são idênticas. Podemos até representar uma imagem como um vetor, v . Por exemplo, um vetor coluna de tamanho $M \times 1$ é formado fazendo com que os primeiros M elementos de v correspondam à primeira coluna de A , os próximos M elementos correspondam à segunda coluna e assim por diante. Da mesma forma, também podemos utilizar as linhas em vez das colunas de A para formar um vetor desse tipo. As duas representações são válidas desde que sejam consistentes.

Muitos dispositivos de visualização de imagem varrem uma imagem começando do canto superior esquerdo e se movendo para a direita uma linha por vez. Além disso o primeiro elemento de uma matriz estar localizado no canto superior esquerdo. Unindo-se esse dois fatores, a origem de uma imagem digital se localiza na parte superior esquerda, com o eixo x positivo se estendendo para baixo e o eixo y positivo se estendendo para a direita, tornando essa representação matematicamente correta. A função $f(x, y)$ é representada nessa adaptação do sistema de coordenadas em que a origem se localiza no canto superior esquerdo.

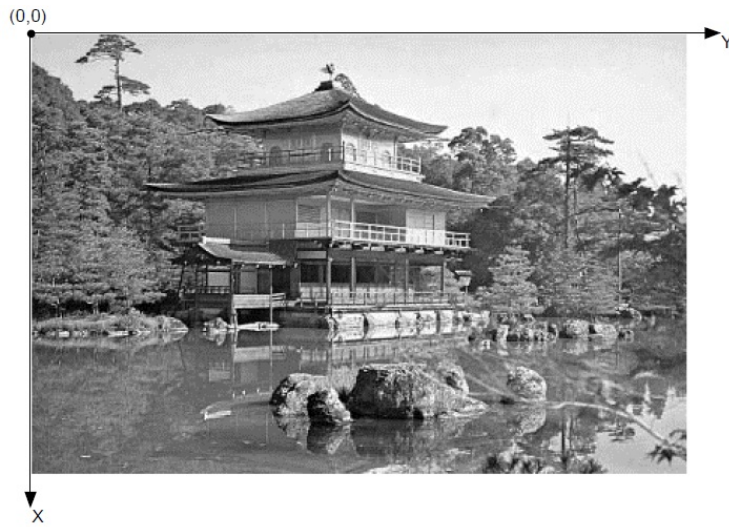


Figura 2.8: Eixos Coordenados

No processo de digitalização de imagem, a única restrição em relação aos valores de M e N (números) é que eles sejam inteiros positivos, mas por outro lado os valores de L (níveis de intensidade), devido a algumas considerações de hardware no processo de armazenamento e quantização, costumam ser potências de 2:

$$L = 2^k$$

O número de bits necessários para o armazenamento de uma imagem digitalizada é

$$b = M \times N \times k$$

Uma imagem com 256 valores discretos possíveis de intensidade (imagem de 8 bits) com $M = 1024$ e $N = 1024$ (tamanho), necessita de 8.388.608

bits para seus armazenamento.

2.6 Modelo Simples de Formação de Imagens

Quando uma imagem é gerada a partir de um processo físico, seus valores de intensidade são proporcionais à energia irradiada por uma fonte real (por exemplo, ondas eletromagnéticas). em consequência, $f(x, y)$ deve ser diferente de zero e infinito, ou seja:

$$0 < f(x, y) < \infty$$

A função $f(x, y)$ pode ser caracterizada por dois componentes: quantidade de iluminação da fonte (iluminação) que incide na cena que está sendo vista e quantidade de iluminação refletida (refletância) pelos objetos, na cena. Esses elementos são expressos por $i(x, y)$ e $r(x, y)$, respectivamente. As duas funções se combinam como produto para formar $f(x, y)$:

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

com $0 < i(x, y) < \infty$ e $0 < r(x, y) < 1$.

A refletância está entre 0 (absorção total) e 1 (refletência total). Essas expressões se aplicam a imagens formadas pela transmissão de iluminação através de objetos, como uma radiografia de tórax, por exemplo. Nesse caso, ao invés de refletividade teríamos a transmissividade, com os mesmos limites e a mesma função representada como o produto acima.

As médias a seguir ilustram algumas faixas típicas de $i(x, y)$:

Luz do Sol num dia claro iluminando a superfície da Terra	90.000 lm/m^2
Luz do Sol num dia nublado iluminando a superfície da Terra	10.000 lm/m^2
Lua cheia em uma noite clara	0,1 lm/m^2
Iluminação em um escritório comercial	1.000 lm/m^2

E de forma similar, alguns valores de $r(x, y)$:

Veludo preto	0,01 lm/m^2
Aço inoxidável	0,65 lm/m^2
Tinta branca em uma parede plana	0,80 lm/m^2
Metal prateado	0,90 lm/m^2
Neve	0,93 lm/m^2

Expressamos a intensidade (nível de cinza) de uma imagem monocromática em qualquer coordenadas (x_0, y_0) , por:

$$l = f(x, y)$$

De acordo com as expressões de i e r anteriores, vemos que l está na faixa:

$$L_{min} \leq l \leq L_{max}$$

Temos como requisito para L_{min} que ele seja positivo e L_{max} que seja finito, então:

$$L_{min} = i_{min}r_{min} \quad \text{e} \quad L_{max} = i_{max}r_{max}$$

O intervalo $[L_{min}, L_{max}]$ é chamado de escala (ou intensidade) de cinza, costuma-se deslocar numericamente esse intervalo para o intervalo $[0, L - 1]$, onde $l = 0$ é considerado preto e $l = L - 1$ é considerado branco na escala de cinza. Todos os valores compreendidos entre estes são tons de cinza variando de preto a branco. No caso de uma imagem que possui informações em intervalos ou bandas distintas de frequência, é necessário uma função $f(x, y)$ para cada banda, como é o caso de imagens coloridas padrão RGB, que são formadas pela informação de cores primárias aditivas.

2.7 Resolução Espacial e Resolução de Intensidade

Uma imagem digital surge da conversão de dados contínuos, captados de diversas formas por sensores, em formato digital. Uma imagem pode ser contínua em relação às coordenadas x e y e também em relação a amplitude. A digitalização dos valores relativos às coordenadas é chamada *amostragem* e a digitalização dos valores relativos a amplitude é chamada *quantização*.

A resolução espacial, ou amostragem, é a medida do menor detalhe que podemos discernir em uma imagem. Representada por pares de linhas por unidade de distância e pixels por unidade de distância. A primeira estabelece uma medida para cada linha e, baseado nisso quantos pares de linhas verticais aparecem por unidade de distância. A segunda, muito usada por editoras e gráficas, é também chamada de dpi - dots per inch (pontos por polegada) nos Estados Unidos. Para se ter uma noção da qualidade, um jornal pode ter resolução de 75 dpi, uma revista 133 dpi e uma página de um livro 2400 dpi. Também chamada de ppi (pixels por polegada).

A resolução de intensidade, ou quantização, é a medida da menor variação de nível de intensidade na imagem. Essa resolução normalmente é de 8 bits, 16 bits em casos que se quer melhor o realce, e raramente com 32 bits, pois utilizaria muito espaço para armazenamento.

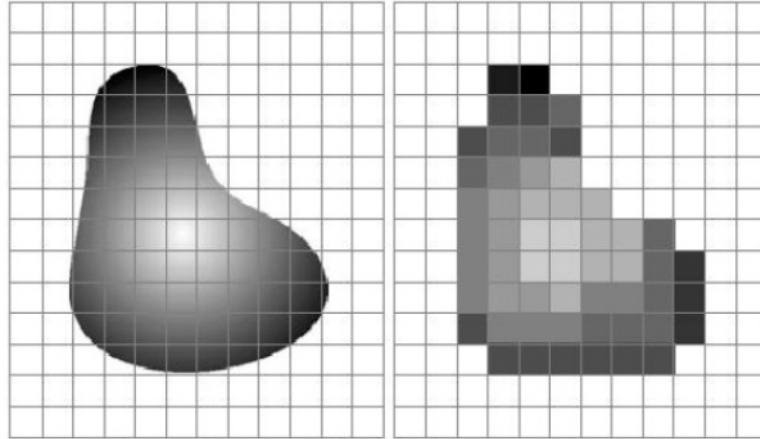


Figura 2.9: Exemplo do processo de imagem e quantização

Numa imagem temos a função unidimensional que representa os valores de intensidade (amplitude). Para realizar a amostragem tomamos essa imagem e traçamos um segmento de reta qualquer. No decorrer deste, temos amostras igualmente espaçadas, cada amostra representa a intensidade naquele determinado ponto. O conjunto desses pontos nos dá a função da amostragem. Mas esses valores devem ser convertidos em quantidades discretas (quantizados). Isso é feito quando acrescentamos para cada ponto, um valor correspondente numa escala de intensidade. A escala varia entre o preto e o branco. Os níveis de intensidade contínuos são quantizados quando atribuímos um valor de escala para cada amostra.

Do ponto de vista qualitativo, quantos pontos e níveis de cinza serão necessários para que a versão digitalizada de uma imagem apresente qualidade comparável à imagem original? Quanto maior for a quantidade de

pontos melhor, mais isso implicaria em maiores custos de digitalização e armazenamento. Veja como a imagem depende tanto da quantidade de pontos como da quantidade de níveis de cinza. Na imagem abaixo, foram mantidos os 256 níveis de cinza, mas foi reduzida a quantidade de pixels. Em (a) 256×256 pixels, em (b) 128×128 , em (c) 64×64 e em (d) 32×32 pixels.

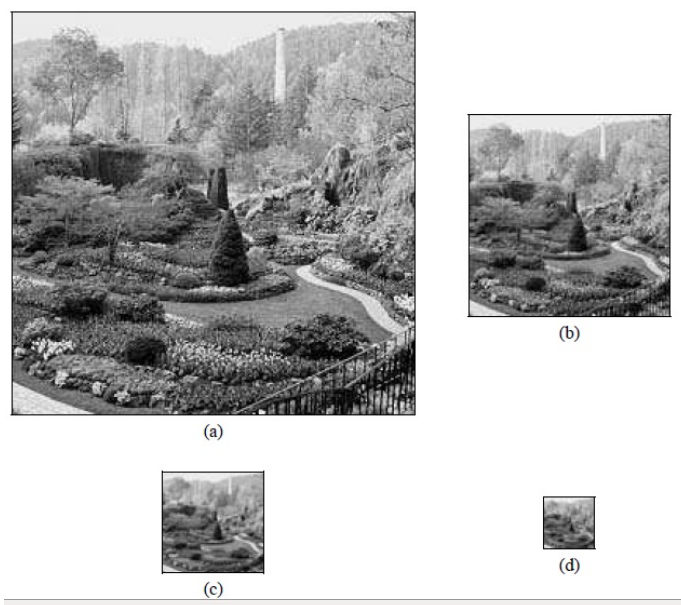


Figura 2.10: Amostragem pixels

Agora veja a variação da quantidade de níveis de cinza, mantendo-se constante a quantidade de 442×229 pixels. Em (a) 256 níveis de cinza (2^8) de (b) a (h) os níveis foram diminuindo: 128, 64, 32, 16, 8, 4 e 2 respectivamente. A partir da imagem com 32 tons de cinza (d) é perceptível o surgimento de uma imperfeição na imagem, conhecida como 'falsocontorno'.



Figura 2.11: Quantização escala de cinza

Para obter uma imagem digital de qualidade semelhante a de uma imagem de televisão P&B, são necessários 512×512 pixels e 128 níveis de cinza. Em geral, 64 níveis de cinza são considerados suficientes para o olho humano. Apesar disto, a maioria dos sistemas de visão artificial utiliza imagens com 256 níveis de cinza. Os processos de amostragem e quantização podem ser aprimorados usando técnicas adaptativas. Sob o aspecto da amostragem, a idéia básica é utilizar maior número de pontos em regiões de grande detalhe, e da mesma forma das regiões homogêneas de grandes dimensões, que poderiam ser amostradas com menor número de pixels. Sob o ângulo da quantização, uma vez que o olho humano não é capaz de perceber sutis diferenças de tons de cinza nas imediações de variações abruptas de intensidade, o objetivo seria utilizar poucos níveis de cinza nestas regiões. O principal

obstáculo para a implementação destas técnicas é a necessidade de identificação prévia (ainda que aproximada) das regiões presentes na imagem e das fronteiras entre elas.

2.8 Tipos de Imagem

2.8.1 Imagens binárias ou booleanas

Uma imagem binária pode ser formada por matrizes compostas de números 1 e 0. Estes números especificam os tons do pixel (branco ou preto).

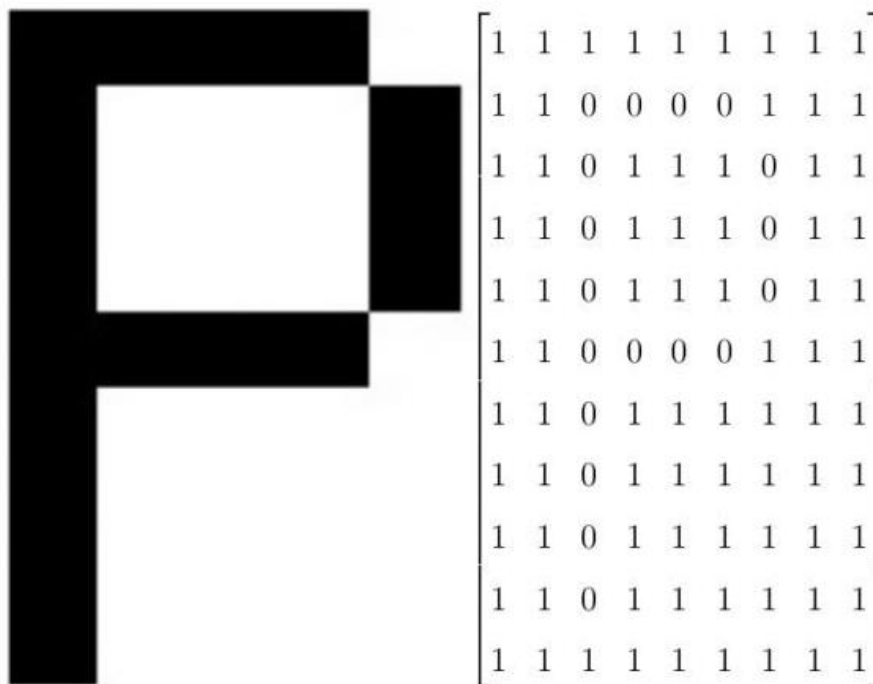


Figura 2.12: Representação binária

Na primeira imagem temos uma imagem binária da letra P, aquela que aparece na tela. Na segunda imagem temos a matriz 11 x 9 correspon-

dente, está é a memória da imagem no disco rígido.

2.8.2 Imagens em tons de cinza

Também representadas por matrizes, cada elemento está associado a intensidade do pixel correspondente. São imagens em que a variação da tonalidade de cinza está entre o preto e o branco. Na sua grande maioria, os arquivos digitais usam $256(2^8)$ números inteiros, que equivalem aos 256 tons de cinza, que vão do número 0 (preto) ao 255 (branco). Essa quantidade de tons de cinza é suficiente na maioria das representações de imagem. No entanto, em alguns casos, quando existe a necessidade de reproduzir uma imagem com mais detalhes e evitar os erros de arredondamento nos cálculos numéricos, como nas imagens médicas, se faz necessário o uso mais tons de cinza.

O número dos níveis de cinza é dado por:

$$G = 2^b$$

Onde G é o número dos níveis de cinza e b é a quantidade de bit/pixel, no caso descrito acima, 256 níveis de cinza correspondem a 8 bits por pixel.

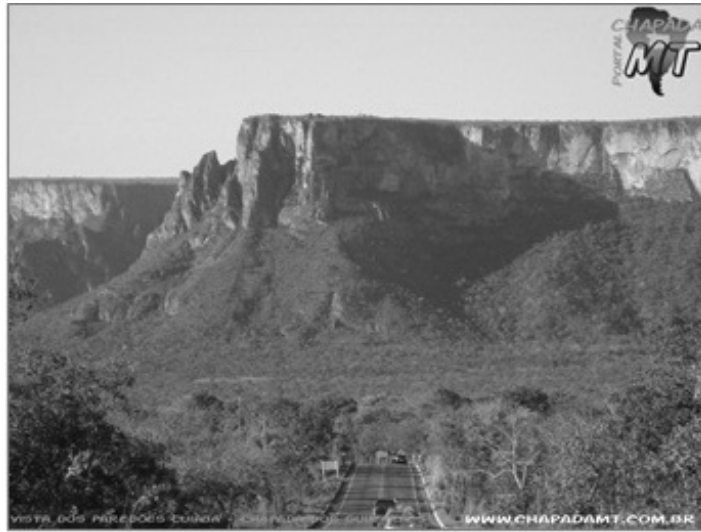


Figura 2.13: Imagem em tons de cinza

Acima temos uma imagem da Web, em tons de cinza

2.8.3 Imagens coloridas

Em imagens coloridas, necessitamos das três cores-luz primárias que são o vermelho (Red em inglês), verde (Green em inglês) e azul (Blue em inglês) luz, esse sistema de cores é chamado de sistema RGB. No sistema RGB cada cor é representada por um tripla ordenada (R, G, B) , de números inteiros, com $0 \leq R \leq 255$, $0 \leq G \leq 255$, $0 \leq B \leq 255$. Sendo assim, podemos associar cada cor do sistema RGB com pontos com coordenadas inteiras de um cubo de aresta 255. Essas três cores estão relacionadas, cada uma, a uma matriz. A combinação dessas três matrizes determinam uma totalidade de 256^3 ou $(2^8)^3 = 2^{24} = 16777216$ cores diferentes. Esse sistema será melhor detalhado no decorrer deste trabalho.

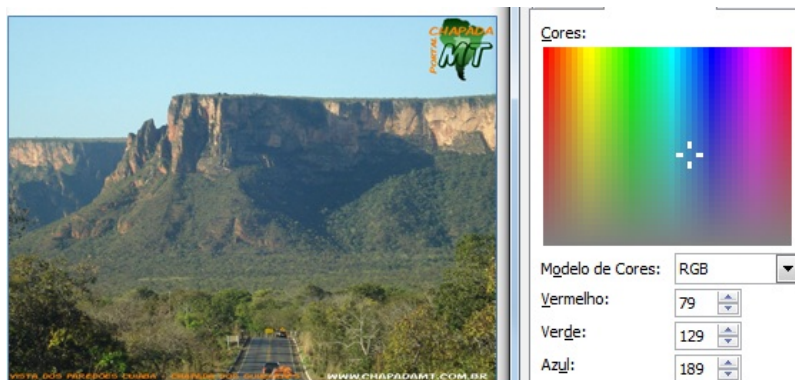


Figura 2.14: Imagem em cores (R,G,B)

Temos a mesma representação da imagem 2.13, mas agora utilizando o sistema RGB.

2.9 Vizinhaça - Propriedade de uma Imagem Digital

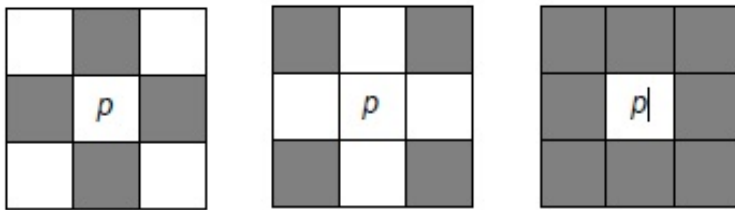
Uma imagem digital é representada pela função $f(x, y)$ discretizada tanto espacialmente quanto em amplitude. Uma imagem digital pode ser vista como uma matriz cujas linhas e colunas identificam um ponto na imagem, cujo valor corresponde ao nível de cinza da imagem naquele ponto. Para efeito de notação, uma imagem digital será indicada por $f(x, y)$. Quando nos referirmos a um pixel em particular, utilizaremos letras minúsculas, tais como p e q .

Um pixel p , de coordenadas (x, y) , tem 4 vizinhos horizontais e verticais, cujas coordenadas são $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$ e $(x, y - 1)$. Estes pixels formam a chamada "4-vizinhaça" de p , que será designada $N_4(p)$. Os quatro vizinhos diagonais de p são os pixels de coordenadas $(x - 1, y - 1)$, $(x - 1, y + 1)$, $(x + 1, y - 1)$ e $(x + 1, y + 1)$, que constituem o conjunto $N_d(p)$.

A "8-vizinhança" de p é definida como:

$$N_8(p) = N_4(p) \cup N_d(p)$$

Os tipos de vizinhança mencionados, estão ilustrados a seguir:



Conceitos de 4-vizinhança, vizinhança diagonal e 8-vizinhança.

Figura 2.15: Vizinhança

Capítulo 3

Manipulação de Imagens Digitais

3.1 Operações Lógicas e Aritméticas

Como vimos uma imagem, depois de ser adquirida e digitalizada, pode ser representada por uma matriz de números inteiros. Então ela pode ser manipulada utilizando operações lógicas e/ou aritméticas que podem ser pixel a pixel ou orientadas a vizinhança.

3.1.1 Operações Pixel a Pixel

As operações pixel a pixel podem ser representadas pela notação:

$$X \text{ opn } Y = Z$$

Onde X e Y podem ser imagens (matrizes) ou escalares. Z obrigatoriamente é uma matriz e opn é um operador aritmético (+, -, x ou /) ou

lógico (AND, OR, XOR) binário. O termo binário aqui utilizado refere-se a dois operandos e não tem nada relacionado com imagem binária.

Mas qual é o objetivo de se realizar uma operação aritmética sobre imagens?

Observe a tabela abaixo, para entender qual é o efeito ou aplicação causado por uma operação aritmética sobre imagens (ou imagem e escalar):

Operação	Efeito sobre a imagem	Aplicações
Adição	Z é o resultado da soma dos valores de intensidade de X e Y . Se Y for um escalar positivo, Z será uma versão mais clara de X ; o acréscimo de intensidade será o próprio valor Y .	Normalização de brilho de imagens e remoção de ruídos.
Subtração	Z é o resultado da diferença dos valores de intensidade de X e Y . Se Y for um escalar positivo, Z será uma versão mais escura de X ; o decréscimo de intensidade será o próprio valor de Y .	Detecção de diferenças entre duas imagens (eventualmente adquiridas de forma consecutivas) da mesma cena
Multiplicação	Z é o produto dos valores de intensidade de X e Y . Se Y for um escalar positivo, os valores de intensidade de Z serão diretamente proporcionais a X por um fator Y .	Calibração de brilho
Divisão	Z é o razão dos valores de intensidade de X e Y . Se Y for um escalar positivo, os valores de intensidade de Z serão inversamente proporcionais a X por um fator Y .	Normalização de brilho

O processo de normalização de brilho consiste em adequar a faixa total de níveis de cinza a um intervalo pré-definido, já a calibração de brilho é um processo semelhante à normalização de brilho, mas que pode estar relacionado à adequação a diferentes valores de iluminância sobre uma mesma cena, por exemplo.

Operações aritméticas: Sejam duas imagens X e Y de igual tamanho. Estas imagens podem ser processadas pixel a pixel utilizando um operador aritmético ou lógico, produzindo uma terceira imagem Z , cujos pixels correspondem ao resultado de $X \text{ opn } Y$ para cada elemento de X e Y , conforme ilustra a figura a seguir:

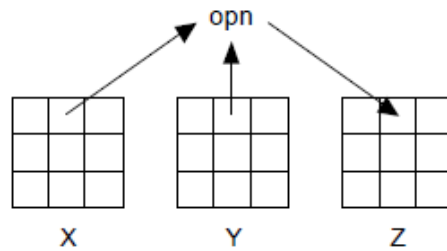


Figura 3.1: Operação aritmética (OPN)

Ao realizar essas operações, devemos tomar cuidado com problemas de *underflow* e *overflow* do resultado. Por exemplo, somando duas matrizes com 256 tons de cinza podemos obter como resultado valores maiores que 255 para algum pixel, ou menores que 0 se pensarmos na subtração de matrizes. Para solucionar esse problema podemos: manter o valor encontrado para cada pixel e depois normalizá-lo de acordo com o maior e o menor valor encontrado; Truncar os valores que excederam os valores permitidos igualando-os a 0 (negativos) e 255 (maiores que 255). Para a primeira solução utilizaremos a relação abaixo normalização dos valores encontrados:

$$g = \frac{255}{f_{max} - f_{min}}(f - f_{min})$$

Exemplo:

Considere as matrizes X e Y que representam trechos 3×3 de imagens com 256 tons de cinza. Ao adicionarmos X e Y , obtemos um resultado intermediário, sem considerações de *underflow* e *overflow*:

$$X = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 0 & 10 & 50 \\ 50 & 250 & 120 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 100 & 220 & 230 \\ 45 & 95 & 120 \\ 205 & 100 & 0 \end{bmatrix}$$

Após a adição obtemos:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 300 & 320 & 430 \\ 45 & 105 & 170 \\ 255 & 350 & 120 \end{bmatrix}$$

Então, utilizando a fórmula acima para a normalização dos valores, fazemos com que a escala $[45, 350]$ seja adequada ao intervalo $[0, 255]$, chegando ao resultado:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 213 & 230 & 238 \\ 0 & 50 & 105 \\ 175 & 255 & 63 \end{bmatrix}$$

Mas, se decidirmos pela segunda solução para considerar *underflow* e *overflow*, truncamos os valores maiores que 255, trocando-os 255:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 255 & 255 & 255 \\ 45 & 105 & 170 \\ 255 & 255 & 120 \end{bmatrix}$$

O processo de normalização descrito acima, pode ser ilustrado pelas imagens binárias abaixo:

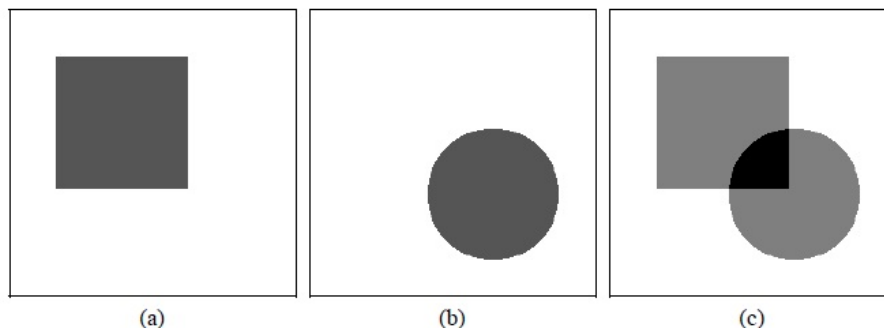


Figura 3.2: Adição de imagens

Trechos das imagens (a) e (b) são representados pelas matrizes X e Y , respectivamente; Em (c) $X + Y$, normalizado.

Abaixo, os mesmos trechos (a) e (b) após operações de subtração, multiplicação e divisão:

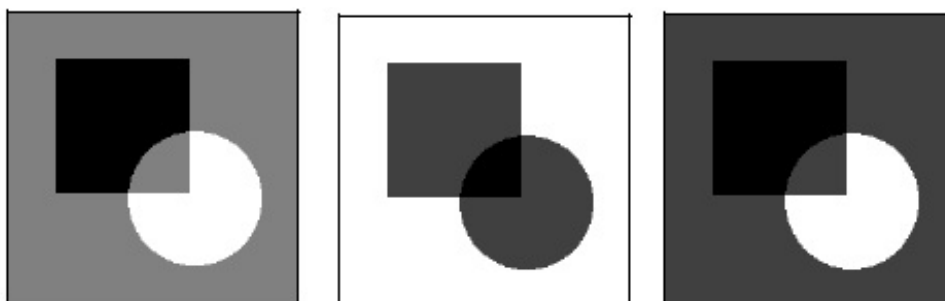
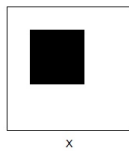
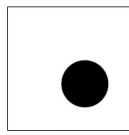


Figura 3.3: Operações aritméticas: subtração, multiplicação e divisão

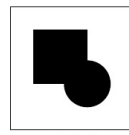
Operações lógicas: também chamadas de operações booleanas, podem ser efetuadas entre dois operandos (AND, OR, XOR) ou com um único operando (NOT) que chamamos de operação de complemento. Podem ser realizadas com qualquer quantidade de níveis de cinza, mas não melhor compreendidas quando vistas em imagens binárias:



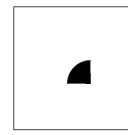
X



Y



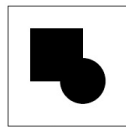
X and Y



X or Y

Figura 3.4: Imagens X e Y

Figura 3.6: XOR e (NOT X)AND Y



X xor Y



(not X) and Y



not X



not Y

Figura 3.5: AND e OR

Figura 3.7: NOT X e NOT Y

Exemplos nas mesmas operações lógicas acima, mas sobre imagens monocromáticas:

Exemplo 1 - Operação AND entre imagens monocromáticas : (a) X, (b) Y e (c) X and Y



(a)

(b)

(c)

Figura 3.8: AND

Exemplo 2 - Operação OR entre imagens monocromáticas : (a) X, (b) Y e (c) X or Y

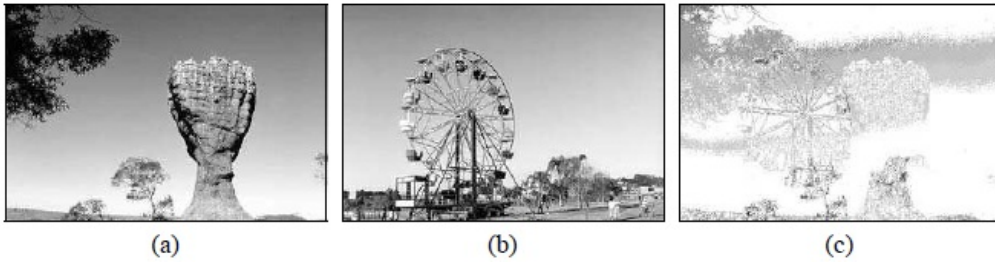


Figura 3.9: OR

Exemplo 3 - Operação XOR entre imagens monocromáticas : (a) X , (b) Y e (c) $X \text{ xor } Y$

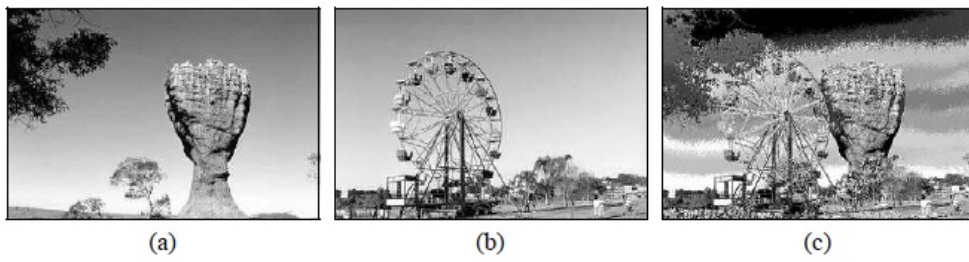


Figura 3.10: XOR

Exemplo 4 - Operação NOT sobre imagem monocromática : (a) X , (b) $NOT Y$



Figura 3.11: NOT

3.1.2 Operações por Orientação a Vizinhança

Operações lógicas e aritméticas orientadas a vizinhança utilizam o conceito de convolução com máscaras (ou janelas ou templates). A abordagem desse conceito, por ser mais ampla, será apenas citada de maneira superficial.

Seja uma sub-área de uma imagem onde: Z_1, \dots, Z_9 são os valores de tons de cinza de cada pixel:

Z_1	Z_2	Z_3
Z_4	Z_5	Z_6
Z_7	Z_8	Z_9

E seja uma máscara 3×3 de coeficientes genéricos W_1, \dots, W_9 :

W_1	W_2	W_3
W_4	W_5	W_6
W_7	W_8	W_9

A máscara percorrerá a imagem, desde o seu canto superior esquerdo até seu canto inferior direito. A cada posição relativa da máscara sobre a imagem, o pixel central da subimagem em questão será substituído, em uma matriz denominada 'imagem-destino', por um valor:

$$Z = \sum_{i=1}^9 W_i \cdot Z_i$$

Essas operações de convolução com máscaras são muito utilizadas no processamento de imagens. Uma seleção apropriada dos coeficientes W_1, \dots, W_9 torna possível uma grande variedade de operações úteis, tais

como redução de ruído, afinamento e detecção de características da imagem. Mas a operação de convolução com máscaras exige grande esforço computacional. Por exemplo, a aplicação de uma máscara 3×3 sobre uma imagem 512×512 requer nove multiplicações e oito adições para cada localização de pixel, num total de 2.359.296 multiplicações e 2.097.152 adições. Por esta razão, aliada à relativa simplicidade de implementação de multiplicadores, somadores e registradores de deslocamento, a literatura registra diversas implementações de convolução com máscaras em hardware.

3.2 Interpolação de Imagens

Interpolação é o processo que utiliza dados conhecidos para estimar valores em pontos desconhecidos. A interpolação ou reamostragem de imagens é amplamente utilizada em processamento de imagens e vídeos. Ela é utilizada para ampliar, reduzir, e rotacionar imagens, para corrigir distorção da lente, para fazer interpolação de cores nos dispositivos para aquisição de imagens (câmeras, scanners, etc), para registrar imagens (criar uma única imagem "grudando" duas ou mais imagens), estabilizar tremor da câmera de vídeo, para corrigir a movimentação do paciente em imagens médicas, para normalizar imagens médicas que envolvem vários sujeitos, etc. As forma mais conhecida de interpolação são

Interpolação por vizinho mais próximo (VMP): apesar de mais simples é pouco utilizada pois produz distorções na imagem.

Interpolação bilinear e a interpolação cúbica: são mais utilizadas por apresentarem menor perda de qualidade.

A interpolação por vizinho mais próximo é um método de interpolação determinista no qual o valor estimado é sempre igual à sua amostra

mais próxima não considerando qualquer outra. Dada a sua simplicidade é regularmente utilizado para interpolações rápidas e em áreas de estudo bem amostradas. Pode aparecer na variação: *replicação de pixels* - caso especial quando zoom é um numero inteiro de vezes (2, 3, 4, ...).

Considere uma imagem 500×500 e uma ampliação para 750×750 , uma ampliação de $1,5\times$. Imagine um grade de 750×750 com o mesmo espaçamento de pixels da imagem original. Reduza o grade para se sobrepor a imagem de 500×500 . Agora atribua a cada posição da grade de 750×750 um valor de pixel mais próximo na imagem original, fazendo a sobreposição. Expanda a grade 750×750 para seu espaçamento original.



Figura 3.12: Interpolação por vizinho mais próximo

Na figura o nível de cinza do ponto C foi transferido para a posição X . As vantagens desse tipo de interpolação se dão pelo processamento rápido e pelo fato de não criar novos valores de níveis de cinza, ou seja, mantém a estatística da imagem.

Exemplificando esse processo numa ampliação de $2\times$ temos, em uma

amostra da função $f(x, y)$:

$$\begin{array}{ccc} \cdots & f(i, j) & f(i, j + 1) \cdots \\ \cdots & f(i + 1, j) & f(i + 1, j + 1) \cdots \end{array}$$

Acrescentando linhas e colunas de zeros, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} \cdots & f(i, j) & 0 & f(i, j + 1) \cdots \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & f(i + 1, j) & 0 & f(i + 1, j + 1) \cdots \end{array}$$

Após a interpolação temos a imagem reconstruída em tamanho duplicado:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & f(i, j) & f(i, j) & f(i, j + 1) & \cdots \\ & & f(i, j) & f(i, j) & f(i, j + 1) \\ \cdots & f(i + 1, j) & f(i + 1, j) & f(i + 1, j + 1) & \cdots \end{array}$$

Apesar de simples, essa técnica pode produzir artefatos e distorções em linhas retas.

Na *interpolação bilinear* os valores dos pixels acrescidos são obtidos através da média ponderada dos níveis de cinza próximos dos novos pixels. A vantagem dessa técnica é a suavização da imagem original, devido a média ponderada.

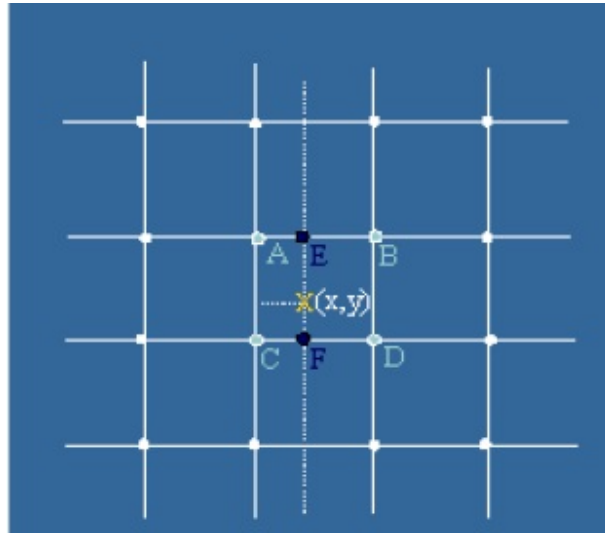


Figura 3.13: Interpolação bilinear

O valor obtido pela média ponderada dos níveis de cinza dos pontos E e F é transferido para a posição X .

Refazendo a ampliação em $2\times$ temos, em uma amostra da função $f(x, y)$:

$$\begin{array}{ccc} \cdots & f(i, j) & f(i, j + 1) \cdots \\ \cdots & f(i + 1, j) & f(i + 1, j + 1) \cdots \end{array}$$

Acrescentando linhas e colunas não nulas, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & f(i, j) & a & f(i, j + 1) & \cdots \\ & & b & c & d \\ \cdots & f(i + 1, j) & e & f(i + 1, j + 1) & \cdots \end{array}$$

Para os valores acrescentados temos:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(f(i, j) + f(i, j + 1))}{2} \\
 e &= \frac{(f(i + 1, j) + f(i + 1, j + 1))}{2} \\
 b &= \frac{(f(i, j) + f(i + 1, j))}{2} \\
 d &= \frac{(f(i, j + 1) + f(i + 1, j + 1))}{2} \\
 c &= \frac{(f(i, j) + f(i, j + 1) + f(i + 1, j) + f(i + 1, j + 1))}{4}
 \end{aligned}$$

Perceba o efeito da interpolação por vizinho mais próximo e da interpolação bilinear, em ampliações de $2\times$ ou numa redução de $\frac{1}{2}$:

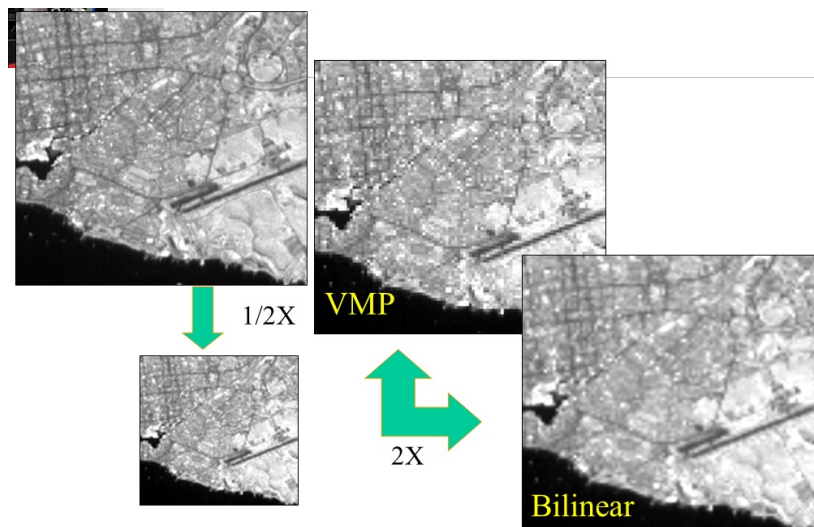


Figura 3.14: Aumento de $2X$ e redução de $1/2$

Percebe-se a suavização dos níveis de cinza, como citado na interpolação bilinear.

Abaixo a comparação entre os dois processos de interpolação. A primeira linha indica a replicação feita com interpolação por vizinho mais próximo. Na linha abaixo a mesma sequência com interpolação bilinear:

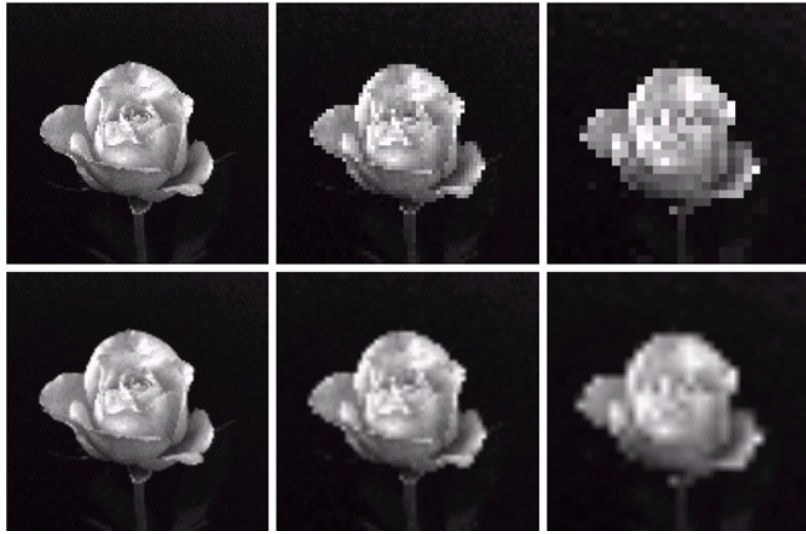


Figura 3.15: Comparação entre a interpolação VMP e Bilinear

Na *interpolação bicúbica* o procedimento é semelhante a interpolação bilinear, a variação é que ao invés de utilizar os 4 vizinhos mais próximos para o cálculo da média, utilizam-se os 16 vizinhos mais próximos

Capítulo 4

Captura de uma Imagem Digital

A imagem digital pode ser obtida através de:

1. Scanners: Existem vários tipos (scanner de mesa, de tambor, de mão, leitor de código de barras, etc) mas o funcionamento basicamente é o mesmo. Atavés de leitura óptica convertem imagens, fotos, ilustrações e textos em papel, num formato que pode ser manipulado pelo computador. Dispõe de uma fonte de luz (lâmpada fluorescente, lâmpada do tipo catodo-frio, etc) em forma de linha que varre a imagem e mede a quantidade de luz refletida ou transmitida em cada ponto. A luz captada é convertida em sinal elétrico através de um conjunto de foto-detetores ou sensores. O tipo de sensor é fundamental para a qualidade da imagem scaneada. Existem os PMT utilizados em scanners de tambor, são caros mas utilizados na indústria gráfica para impressões de alta qualidade. Os CCD, mais comuns, são utilizados em scanners domésticos. Possuem boa qualidade e preço mais baixo. Os scanners de mesa usam feixes de sensores CCD organizados em forma de linha reta. Finalmente temos os sensores CIS, que utilizam uma série de

LEDs (vermelhos, azuis e verdes) para produzir a luz branca, substituindo assim os espelhos e lentes dos sensores CCD tornando o escaneamento mais leve e gastando menos energia. A qualidade não é muito boa, por isso é utilizado em aplicações simples.

2. Digitalizadores de sinal de vídeo: Digitalizadores de Sinal de Vídeo dependem do padrão de vídeo utilizado, NTSC, PAL-M, etc. Em geral são de baixa resolução. Alguns permitem capturar um único quadro, chamados de Frame Grabbers, outros permite gravar seqüências inteiras em tempo real, são chamados de Vídeo Grabbers. Algumas placas gráficas já incorporaram, além da saída para o monitor de vídeo, a saída para vídeo analógico compatível com os padrões conhecidos, e possuíam também entrada para vídeo analógico e para RF, ou seja, podia-se ligar o vídeo cassete no computador para capturar e gerar novos vídeos, assim como usar o computador como sintonizador de TV (sinal de Rádio Freqüência).

Uma imagem de vídeo gerada por uma câmera ou um videocassete pode ser digitalizada diretamente a partir do sinal elétrico que a representa, que em geral está disponível como uma saída do equipamento. O sinal de vídeo é organizado em linhas de imagem, que contém um sinal analógico cada uma. Portanto, o número de linhas da imagem já é praticamente definido pelo próprio sinal de vídeo; para os sistemas NTSC e PAL-M esse valor é 525 e para o sistema PAL-G é 625. Dentre estas apenas aproximadamente 480 são visíveis (na realidade somente de 240 a 360 linhas do sinal de vídeo contém informação relevante). O número de colunas é normalmente escolhido de acordo com o número de linhas para manter a razão de aspectos da imagem. A escolha do número de colunas também é limitado pela banda do canal de vídeo, que para o sinal padrão NTSC é da ordem de no máximo 750 pixels por linha. Nas televisões comerciais existem cerca de 440 pontos

numa linha horizontal. A calibração em alguns casos é feita ajustando-se o nível de branco e o nível de preto. Além disso, é preciso não esquecer de regular a própria câmera, realizando o que se chama de "bater o branco", ou seja, para uma determinada luz informar para a câmera o nível de branco para a gravação. As câmeras domésticas tentam realizar essa calibração automaticamente. Quando se está trabalhando diretamente com o conjunto câmera/digitalizador, após a captura da imagem, pode-se tentar melhorar a qualidade da mesma com um método muito simples. Com a câmera desfocada e/ou com um fundo neutro, como um papel cinza, captura-se uma imagem, esta imagem ao ser subtraída da imagem normalmente capturada elimina sujeiras que por ventura estejam na lente ou em um fundo irregular advindo de problemas de alinhamento do equipamento, etc.

3. Câmeras digitais: Numa câmera tradicional é utilizado o filme fotográfico para o armazenamento da luz captada pela objetiva. Na câmera digital o filme é substituído por sensores CCD. Esses sensores, também chamados de fotodiodos, são responsáveis por armazenar a ínfima parte da imagem capturada pela objetiva. Cada minúscula parte da imagem emite luz, essa luz, quando em contato com o fotodiodo, gera eletricidade, que é armazenada na memória da câmera numa matriz. Cada parte dessa matriz tem o endereço e o nome (valores numéricos) de cada raio de luz emitido pela imagem quando capturada pela objetiva da câmera. Essa matriz de valores numéricos armazenada em tons de cinza (monocromática). Com uma matriz de 50x50 fotodiodos, teoricamente, seria possível criar uma imagem como esta, pixelizada, acromática, mas reconhecível:



Figura 4.1: Representação binária da Imagem do Gato Félix

No caso das imagens coloridas, esse recurso não se aplica, porque os sensores só leem apenas valores de luminosidade que não tem relação com cor. Em meados dos anos 80, os engenheiros da Kodak criaram um forma de contornar esse fator, criaram o arranjo ou padrão Bayer, que consiste num filtro de cores, organizado da forma abaixo. Percebe-se que existe muito mais a cor verde do que vermelho e azul, exatamente o dobro destas. Isso se deve ao fator dos olhos serem mais sensíveis à cor verde.

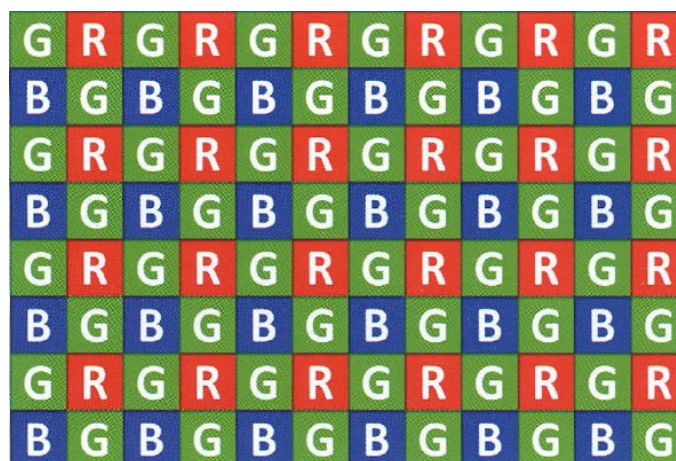


Figura 4.2: Atividade: Matrix Transposta

Temos ainda sensores em preto e branco, que ainda não pode ser chamado de cor. Mas temos valores de luminosidade ligados ao colorido da cena. São três grupos de pixels juntos que devem ser separados em três canais de cor e montar a imagem colorida. Para isso é necessário um software responsável pelo processo de interpolação, explicado em mais detalhes neste trabalho, no capítulo sobre interpolação de imagens. Veja abaixo o como ficaria a imagem do gatinho captada por cada um dos canais (vermelho, azul e verde). Os pontos pretos são aqueles lugares no sensor que não receberam a luz referente ao canal. Por exemplo: diferente de vermelho no canal vermelho. Abaixo está a composição da imagem colorida, efetuada com a junção dos três canais.

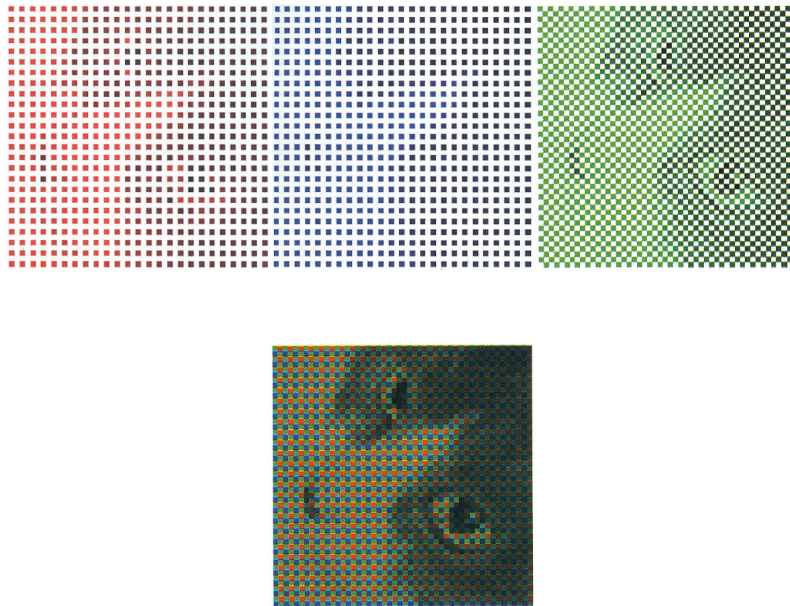


Figura 4.3: Imagem original do Cristo Redentor

Percebe-se que a imagem conjugada pela junção dos três canais está mais reconhecível do que a imagem formada só por tons de cinza. Mas mesmo

assim apresenta vários pontos pretos, pelo fato de esses pontos poderem receber apenas $\frac{1}{3}$ da informação referente as cores. Para resolver esse problema é que se faz uso do software responsável por interpolar os canais. Ele "adivinha" de acordo com as cores próximas, qual deve ser a cor referente ao ponto de ausência de cor (preto). Após a execução desse software a imagem fica assim:



Figura 4.4: Função 2C

Lembrando que esse processo está sendo explicado com base em uma matriz 50×50 , em uma situação real, tem-se matrizes muito maiores, com muito mais pixels. Além de interpolar o software deve também administrar outros tipificadores de cor como: balanço de branco, interpretação colorimétrica, correção de gama, redução de ruído e aplicação de nitidez, saturação e contraste.

4.1 Transformações Lineares

Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear, ou aplicação linear, é uma função de V em W , $F : V \rightarrow W$, que

satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} em V ,

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v)$$

4.1.1 Transformações lineares planas

É toda função cujo domínio e contradomínio constituem o \mathbb{R}^2 ou seja todas as transformações lineares cujo $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}$. Tomando essas transformações lineares e suas representações geométricas temos:

4.1.1.1 Reflexões

a) Reflexão em relação ao eixo x : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo dos x :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned}$$

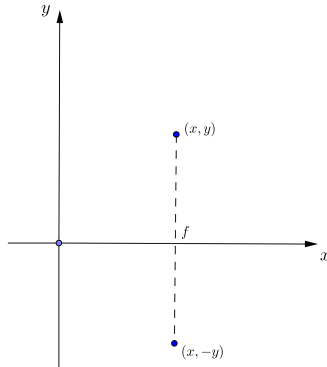


Figura 4.5: Imagem colorida original (RGB)

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

b) Reflexão em relação ao eixo y : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(-x, y)$, simétrica em relação ao eixo dos y :

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

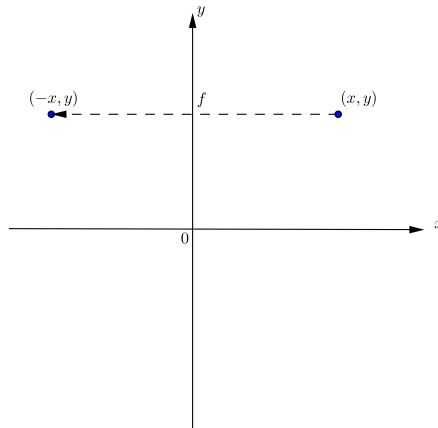


Figura 4.6: Função (2R, 3G, 2B)

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

c) Reflexão em relação à origem: Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(-x, -y)$, simétrica em relação à origem:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

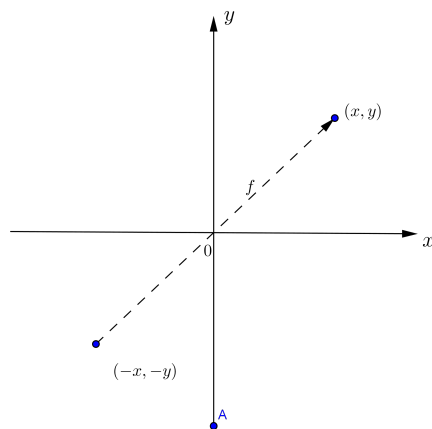


Figura 4.7: Transição de imagens

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

d) Reflexão em relação à reta $y = x$: Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem (y, x) , simétrica em relação à reta $y = x$:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

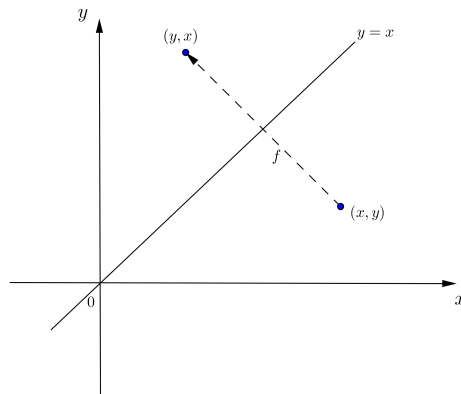


Figura 4.8: Homer Simpson (Matriz Identidade)

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

e) Reflexão em relação à reta $y = -x$: Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(-y, -x)$, simétrica em relação à reta $y = -x$:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, -x)$$

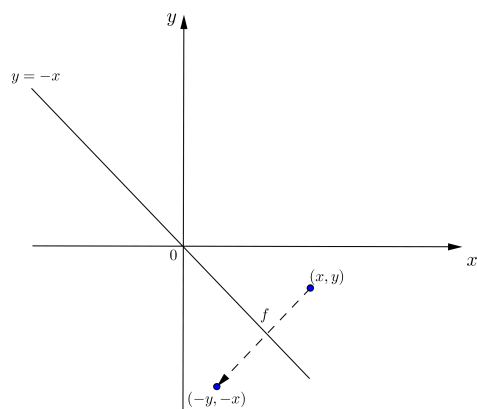


Figura 4.9: Dilatação na direção do eixo dos X

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

4.1.1.2 Dilatações e Contrações

a) Dilatação ou contração na direção do vetor: Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$$

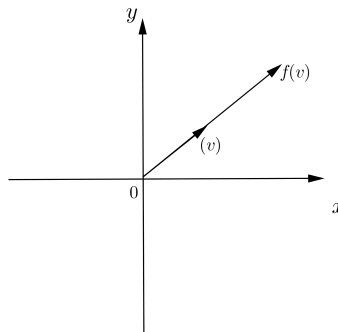


Figura 4.10: Dilatação

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Observe que se $\alpha > 1$ temos uma dilatação e se $0 < \alpha < 1$ temos uma contração.

b) Dilatação ou contração na direção do eixo dos x : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(\alpha x, y)$,

com $\alpha \in \mathbb{R}$, a transformação dada é também chamada dilatação ou contração na direção horizontal de um fator α .

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\alpha x, y)$$

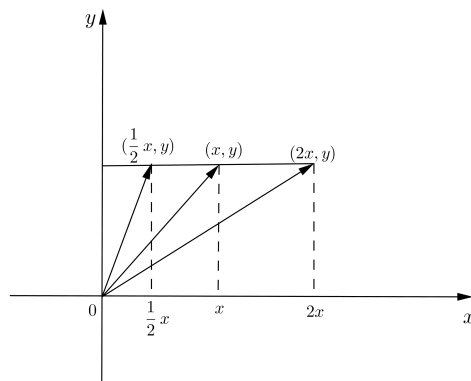


Figura 4.11: Dilatação ou contração na horizontal

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix}$$

c) Dilatação ou contração na direção do eixo dos y : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(x, \alpha y)$,

com $\alpha \in \mathbb{R}$, a transformação dada é também chamada dilatação ou contração na direção vertical de um fator α .

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, \alpha y) \end{aligned}$$

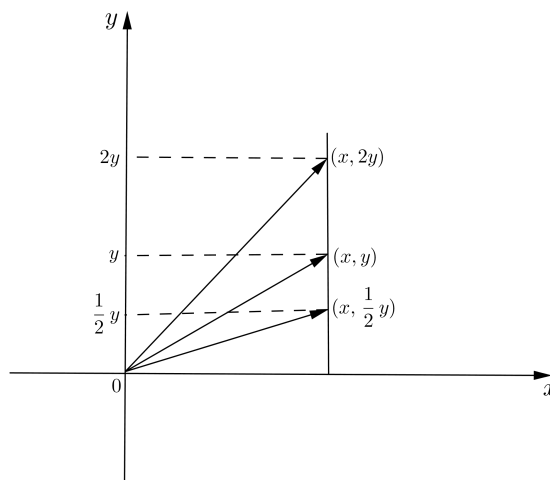


Figura 4.12: Dilatação ou contração na vertical

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

4.1.1.3 Cisalhamentos

O efeito do cisalhamento, para um determinado valor de α , é transformar um retângulo num paralelogramo de mesma base e mesma altura.

a) Cisalhamento na direção do eixo dos x : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(x + \alpha y, y)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Esse cisalhamento é também chamado cisalhamento horizontal de fator α .

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + \alpha y, y)$$

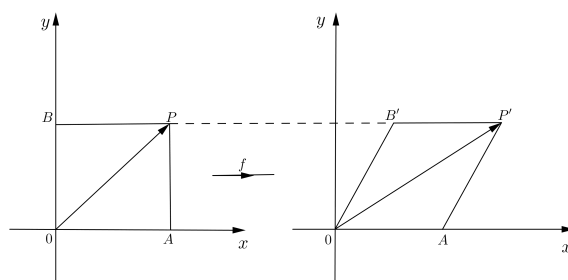


Figura 4.13: Cisalhamento horizontal

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix}$$

b) Cisalhamento na direção do eixo dos y : Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x, y) para a sua imagem $(x, \alpha x + y)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Esse cisalhamento é também chamado cisalhamento vertical de fator α .

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, \alpha x + y)$$

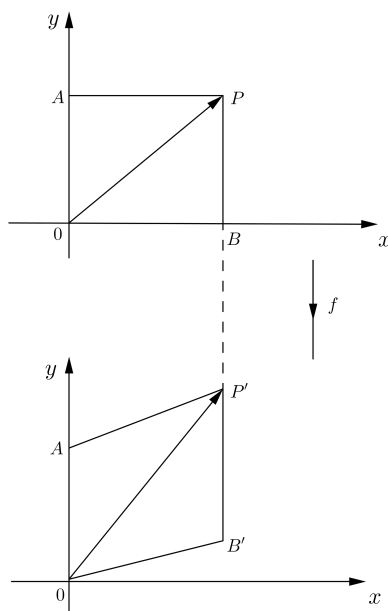


Figura 4.14: Cisalhamento vertical

A matriz canônica associada a essa transformação é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha x + y \end{bmatrix}$$

4.1.1.4 Rotações de um ângulo θ : (no sentido anti-horário)

Observe como podemos obter a matriz de rotação de um ângulo α , sendo $0 < \alpha < 1$: Vamos tomar o vetor $v(x, y)$ e o vetor v rotacionado a partir do ângulo θ : $R_\theta(v)$

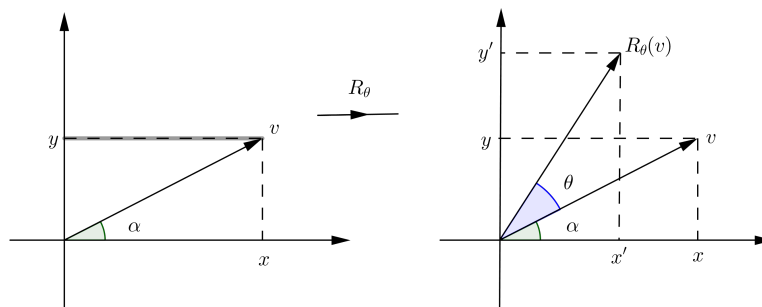


Figura 4.15: Rotação de um ângulo

$$x' = r \cos(\alpha + \theta)$$

$$x' = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

mas $r \cos \alpha = x$ e $r \sin \alpha = y$, então:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

Analogamente:

$$y' = r \operatorname{sen} \alpha + \theta$$

$$y' = r \operatorname{sen} \alpha \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \alpha$$

$$y' = y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta$$

Assim a transformação linear de rotação será:

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y \cos \theta + x \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como exemplo consideremos o caso particular de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Nesse caso, $\cos \theta = 0$ e $\operatorname{sen} \theta = 1$. Então:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

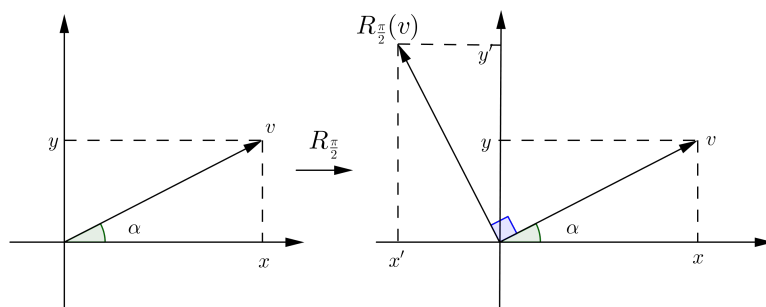


Figura 4.16: Rotação de um ângulo2

Capítulo 5

Matrizes e Aplicação em Sala de Aula

Apresentar o conceito de matrizes na educação básica é um problema constante. Livros didáticos apresentam poucos exemplos e muitas vezes estes se apresentam aos alunos como exemplos pouco atrativos. Para que o assunto seja melhor introduzido no ensino básico, apresento aqui algumas ideias lúdicas e interessantes aplicações que podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de matrizes.

A Universidade Federal Fluminense (UFF) apresentou no II Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, realizado em 2011 em Cuiabá - MT, algumas propostas de aplicação de conteúdos matemáticos associados a tecnologia de informação. Como o assunto me interessou, comecei a acompanhar o site desenvolvido pela universidade, especificamente onde se apresentavam softwares associados a apresentação de matrizes (<http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-br.html>)

Para introduzir o conceito, o software associa matrizes à representação de imagens binárias, citando as imagens que vemos na internet ou obtemos

a partir de uma câmara digital.

Uma exemplo é a imagem abaixo:

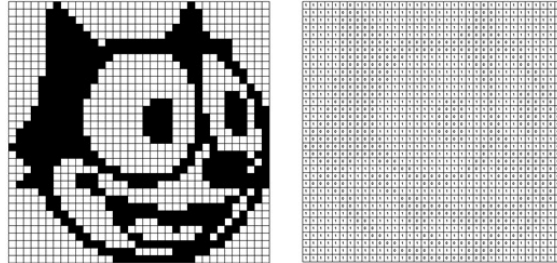


Figura 5.1: Site imagem 1

Para mostrar o que as operações aplicadas a matriz causam a imagem, utiliza o conceito de matriz transposta em um de seus desafios:

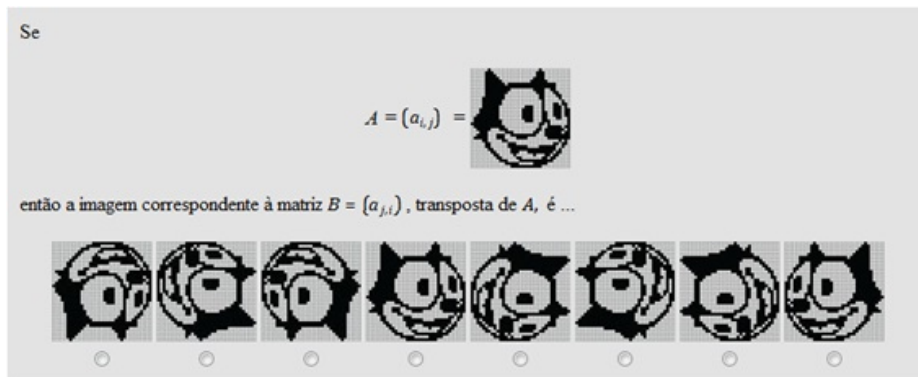


Figura 5.2: Site imagem 2

Abordando imagens em tons de cinza, cita a escala de 0(preto) a 255(branco) para indicar na matriz os vários tons de cinza. Lembrando que esse conceito é utilizado quando não há necessidade de muita precisão na imagem. Se necessário maior precisão, como nas imagens médicas, é necessário aumentar a escala de tons de cinza. Também demonstra a aplicação de funções na alteração nas matrizes de cores.



$$f(c) = 2c$$



Figura 5.3: Site imagem 3

Figura 5.4: Site imagem 4

Para imagens coloridas, a utilização de 3 matrizes é necessária (sistema RGB) cada matriz representa uma cor vermelho (Red), verde (Green) e azul (Blue). A tripla ordenada (0, 0, 0) representa o preto e a tripla ordenada (255, 255, 255) representa o branco. Dentro dessa escala, cada ordenada representa quanto de cada cor existe no ponto em questão. O software permite que se altere a quantidade de cada valor de azul, verde ou vermelho, mudando a tonalidade total da imagem. Veja um exemplo:



Figura 5.5: Site imagem 5



Figura 5.6: Site imagem 6

Outro software que existe nesse site é aquele que relaciona o sistema de cores RGB e o cubo de cores. Cada cor do sistema é um vértice não

adjacente do cubo. O vértice entre os citados corresponde a cor preto. A diagonal leva ao outro vértice, união das três cores, ou seja o branco. O software permite, por botões deslizantes, alterar a cor que aparece pela variação de cada coordenada da tripla ordenada (R,G, B).

Os softwares do site destinados a relação entre matrizes e imagens também incluem a adição entre matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar. Conceitos muitas vezes aplicados no ensino médio com o intuito de pura e simplesmente somar valores numéricos, podem também ser enriquecidos com a possibilidade de que a soma de matrizes pode fazer a transição de uma imagem para outra. Veja abaixo um exemplo de transição entre imagens a partir da soma e multiplicação por escalar:

Usando-se as operações de multiplicação por escalar e soma de matrizes, é possível criar um efeito de transição entre duas imagens de mesmo tamanho. Considere, por exemplo, duas imagens em tons de cinza de mesmo tamanho representadas pelas matrizes A e B (que, portanto, terão as mesmas dimensões). Para cada escalar (número real) t no intervalo $[0, 1]$, defina a matriz

$$C(t) = (1 - t)A + tB.$$

Note que $C(0) = A$, $C(1) = B$ e, para $0 < t < 1$, as entradas da matriz $C(t)$ estão entre as respectivas entradas das matrizes A e B . Portanto, quando t varia de 0 a 1, a matriz $C(t)$ varia de A a B . Para o caso de imagens coloridas, a transformação acima deve ser aplicada para as matrizes R, G e B que compõem a imagem. O *software* abaixo ilustra esta ideia: mova o controle deslizante para ajustar o valor de t e visualizar a imagem correspondente. Para selecionar imagens diferentes, clique nos ícones no final da página.

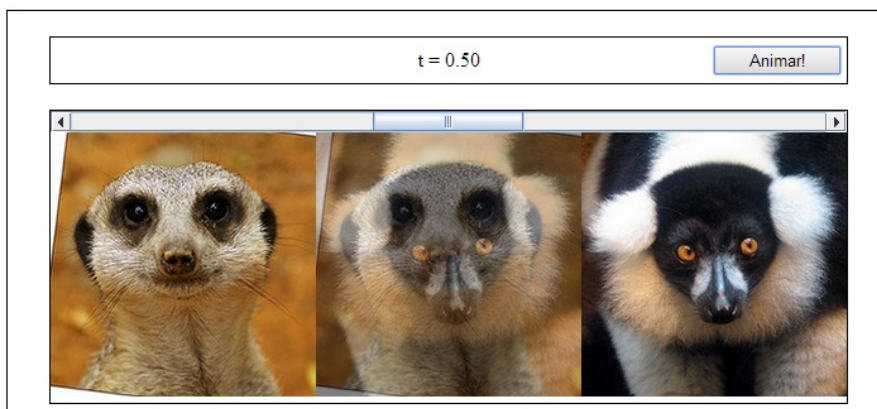


Figura 5.7: Site imagem 8

A maioria desses softwares foi produzido pelo Prof^o Humberto José Bortolossi. Pesquisando, descobri que além dos citados, mais um tem relação com este trabalho: a relação entre as transformações lineares e a formação de imagens, que está abordado em uma página com uma coletânea de trabalhos desenvolvidos pelo Prof^o Humberto (<http://www.professores.uff.br/hjbortol/trabalhos.html>). Nesse caso em específico, a aplicação de transformações lineares não é um conteúdo da educação básica, mas nada impede que alunos deste nível de ensino tenham um conhecimento prévio de sua aplicação, pois para isso a utilização da multiplicação de matrizes é essencial.

No arquivo que é interativo, utiliza-se a transformação linear dada por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No arquivo temos como domínio um quadrado com a imagem do personagem Homer Simpson, conforme modificamos os valores de a , b , c e d temos a representação gráfica da imagem da transformação linear aplicada. Veja:

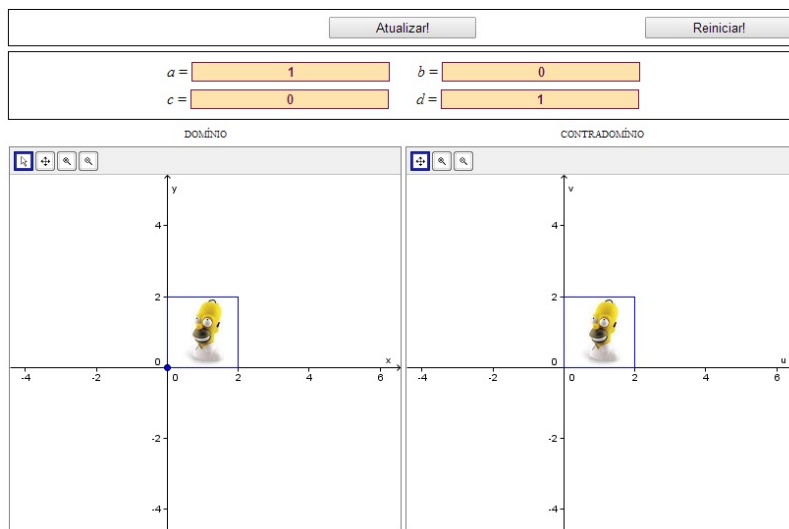


Figura 5.8: Site imagem 9

Quando modificamos a matriz de transformação linear, por exemplo atribuindo $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 1$ temos uma dilatação na direção do eixo dos x , como visto em capítulos anteriores

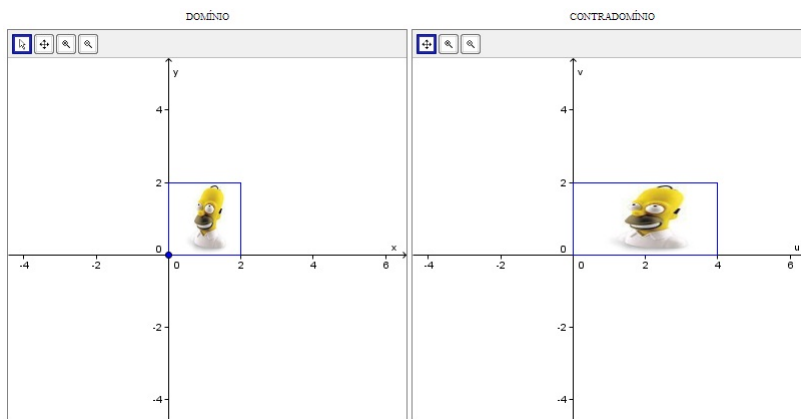


Figura 5.9: Site imagem 10

Este é um exemplo das inúmeras transformações que podem ser visualizadas com esse arquivo interativo, que tem como base um software livre Geogebra.

Considerações Finais

O PROFMAT - Mestrado Profissionalizante em Matemática visa ampliar o conhecimento de professores da educação básica, para que estes tenham melhor embasamento para ministrar suas aulas. A matemática é uma ciência encantadora, não só pelos seus infinitos segredos, mas pelo seu poder de fascinação. Ensinar matemática requer conhecimento, mas acima de tudo requer paixão. Alunos das escolas de educação básica podem e devem aprender matemática das mais diversas maneiras, caminhos ou formas. É papel do professor criar essas oportunidades diferentes de aprendizagem. Seja ampliando sua relação com a tecnologia, seja apresentando aplicações cotidianas de conceitos matemáticos. Ao passo que este educando entende o significado que a matemática tem em seu cotidiano, aumenta o interesse por aprender mais, entender mais. Pode-se, nesse processo, além de conseguir melhores resultados do ponto de vista do ensino-aprendizagem, conseguir personagens interessados em pesquisar e ampliar os conhecimentos adquiridos na educação básica.

Um dos pontos em questão é a falta de aplicação e conteúdos atraentes. No ensino médio da Educação Básica a situação se agrava, pois não é fácil atrair a atenção de adolescentes e adultos para a matemática apresentada nas escolas. Uma forma de modificar essa situação é tornar esses conteúdos mais interessantes. Mas como proceder diante dessa situação?

Uma sugestão seria que o educando soubesse mais sobre as aplicações, pois o que se compreende se aprende melhor e com mais facilidade.

O objetivo desse trabalho é reunir informações que sirvam como fonte de consulta e ampliação do conhecimento sobre matrizes e sua aplicação na formação de imagens. Não que essa seja a única aplicação de teoria de matrizes, mas quem sabe uma das que são próximas à realidade que vem se construindo. A tecnologia se desenvolve a cada dia, as pessoas sentem necessidade de ampliar conhecimentos adquiridos e construir novos conhecimentos, muitas vezes conhecimentos estes que alunos das escolas julgam estar fora do ambiente escolar, que não tem nenhuma relação. Mostrar essa ligação se torna necessária para que estes tenha ampliado seu interesse por conhecer mais, compreender. Sendo essa uma de várias aplicações de matrizes, pode-se introduzir o conteúdo no ensino médio de forma diferenciada, além de da interdisciplinaridade com física, geografia, artes, entre outras, o conceito de matrizes pode ser integrado com o ensino de funções, potenciação e geometria analítica, tornando simples e atrativo o que muitas vezes é vazio e sem aplicação nenhuma.

Referências Bibliográficas

- [1] <http://www.uff.br/cmde/matriz/matriz-html/matriz-br.html>; **Autor: Dirce Uesu Pesco e Humberto José Bortolossi; Título: Matrizes e Imagens Digitais**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [2] <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2011.1/aal/tl2x2/tl2x2-html/tl2x2-br.html>; **Autor: Humberto José Bortolossi; Título: A Geometria das Transformações Lineares do Plano no Plano**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [3] VILLEGAS, Alex; **Como funciona a Captura Digital In: O Controle da Cor - Gerenciamento de Cores para Fotógrafos**, Editora Photos, Santa Catarina, 2009.
- [4] DAVID C. Lay; **Cálculo das funções de uma variável Volume 2**, 7° Ed., LTC Editora, Rio de Janeiro, 2004.
- [5] MARQUES FILHO, Ogê; VIEIRA NETO, Hugo; **Processamento Digital de Imagens**, Tradução Elza F. Gomide, Brasport, Rio de Janeiro, 1999.
- [6] <http://museum.nist.gov/panels/seac/NEWBORN.HTM>; **Autor: Russell A. Kirsch ; Título: SEAC and the Start of Image Proces-**

- ing at the National Bureau of Standards, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [7] <http://www.if.ufrgs.br/oei/cgu/espec/intro.htm>; **Título: Observatório Educativo Itinerante**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [8] <pt.wikipedia.org/wiki/RGB>; **Título: RGB**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [9] <pt.wikipedia.org/wiki/CMYK>; **Título: CMYK**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [10] <tudosobreacor.blogspot.com.br/2011/02/representação-de-um-cubo-com-as-cores.html>; **Título: Base sobre a teoria da cor aplicada aos sistemas digitais**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [11] <tudosobreacor.blogspot.com.br/2011/02/modelo-cmyk-caracterização.html>; **Título: Base sobre a teoria da cor aplicada aos sistemas digitais**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [12] <www.vision.ime.usp.br/~ronaldo/mac0417-03/aula-03.html> ; **Autor: Ronaldo Fumio Hashimoto; Título: Visão e Processamento de Imagens**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [13] <www.dgi.inpe.br/CDSR>; **Autor: INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais; Título: Catálogo de Imagens**, Data de acesso: 10 de junho de 2014.
- [14] GONZALEZ, Rafael C; WOODS, Ricardo E; **Uma História da Matemática**, Processamento Digital de Imagens, 3ª edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2010.

- [15] PAULA FILHO, Wilson de Pádua; **Multimídia: conceitos e aplicações**, 2^a edição, LTC, Rio de Janeiro, 2011.
- [16] BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G; **Álgebra Linear**, 3^a edição, Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1980.
- [17] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César; **A matemática do ensino médio**, volume 3, 6^a edição, SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [18] IEZZI, **Fundamentos da Matemática Elementar IV** 2^a edição, Atual Editora, São Paulo, 1977.