UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARLON MÜLHBAUER

CARTOGRAFIA: UMA INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

MARLON MÜLHBAUER

CARTOGRAFIA: UMA INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Mateus Bernardes, Dr.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M956c Mülhbauer, Marlon
Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na educação básica / Marlon Mülhbauer. — 2014.
70 f.: il.; 30 cm

Orientador: Mateus Bernardes.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 60-61

1. Matemática – ensino básico. 2. Geometria não euclidiana. 3. Cartografia. 4. Matemática – Dissertações. I. Bernardes, Mateus, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 21

“Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não-euclidiana na educação básica”

por

Marlon Mülhbauer

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 28 de novembro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Mateus Bernardes, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profª Ivanete Zuchi Siple, Dra.
(UDESC/Joinville)

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

Aos meus pais, Luiz e Juraci, irmãos, cunhados, sobrinhos e à minha esposa Edna, que acreditaram em mim para fazer mais este sonho se realizar.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, o centro e o fundamento de tudo em minha vida, por renovar a cada momento a minha força e disposição e pelo discernimento concedido ao longo dessa jornada.
- Ao Colégio Excelência, em especial aos Professores Augustinho Wibbelt e Orestes Hacke, pela flexibilização dos horários e auxílio financeiro.
- Ao Colégio SESI, em especial ao Coordenador Luciano Ribeiro dos Santos, pela flexibilização dos horários.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador, Dr. Mateus Bernardes, que me auxiliou em todas as etapas da execução deste trabalho.
- Ao meu amigo Márcio Dominicali Rigoti, pelo companheirismo nas viagens e por fazer as aulas serem mais descontraídas.
- Ao companheiro e colega de trabalho Adalberto Schalinski, pela indicação e incentivo para realizar esse mestrado.
- Ao amigo Cleiton José Mazur, professor de Geografia, pela indicação de bibliografias que enriqueceram meu conhecimento e auxiliaram na execução desse projeto.
- Aos colegas de turma, pela troca de experiências e discussões que contribuíram para esta caminhada.

RESUMO

MÜLHBAUER, Marlon. CARTOGRAFIA: UMA INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. 70 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Este trabalho tem como objetivo propor a introdução a Geometrias não Euclidianas, principalmente Geometria Esférica, no Ensino Médio, para alunos da segunda série, a fim de melhorar os processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Conta com um breve histórico da geometria, com nomes como Euclides, Bolyai, Lobachevsky e Riemann, e a importância desses pensadores para o aperfeiçoamento deste conteúdo. Além disso, tópicos de cartografia foram explicitados, para nivelar os conhecimentos e conseguirmos alcançar um resultado importante: a determinação da distância entre dois pontos da superfície de uma esfera. As atividades aplicadas para os alunos aparecem no apêndice, após toda a explanação das aulas e conteúdos trabalhados.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Geometria Esférica, Cartografia.

ABSTRACT

MÜLHBAUER, Marlon. CARTOGRAPHY: AN INTRODUCTION TO CONCEPTS NON EUCLIDEAN GEOMETRY IN BASIC EDUCATION. 70 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This project propose the introduction to non Euclidean geometries, especially Spherical Geometry in high school for second graders in order to improve the processes of teaching and learning that discipline. Includes a brief history of geometry, with names like Euclides, Bolyai, Lobachevsky and Riemann, and its importance to the improvement of this content. Furthermore, cartography topics were explained to level the knowledge and can achieve an important result: the determination of the distance between two points on the surface of a sphere. The activities implemented for students appearing in the appendix, after all the explanation of the classes and worked contents.

Keywords: Teaching math, Spherical Geometry, Cartography

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Ensinar Matemática é uma tarefa desafiadora. Aprender então, torna-se cada vez mais difícil, perante as barreiras ligadas a essa disciplina. O professor deve ministrar suas aulas com o objetivo de mediar para o aluno, propiciando um conhecimento que lhe sirva para ter não só raciocínio lógico e espírito crítico a respeito do mundo, mas também treiná-lo a usar sua imaginação e intuição para resolver problemas ao seu redor. Segundo Ávila (2010),

> A intuição é a faculdade mental que nos permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a interveniência do raciocínio. Os matemáticos frequentemente referem-se a algum fato como "intuitivo", querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que o "intuitivo"não é sinônimo de "fácil". Há muitas verdades profunda e difíceis que são apreendidas pela intuição. (ÁVILA, 2010, p.2)

Não raramente, ouvimos perguntas do tipo: "Onde vou usar isso na minha vida?". Infelizmente, nem sempre o professor consegue responder a essa pergunta da maneira que o educando deseja.

O ensino da Matemática na Educação Básica é feito de maneira desvinculada de outras áreas. Assim, pretende-se com esse trabalho contribuir para o ensino da Matemática utilizando tópicos de Geografia.

Segundo as Diretrizes Curriculares Educacionais (GOVERNO DO PARANÁ, 2008, p.56), o professor de Matemática do Ensino Médio deve ensinar, dentre outras, noções de Geometrias Não Euclidianas a seus alunos, visto que alguns problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos através delas. Entretanto, a maioria das diretrizes curriculares, inclusive a de Santa Catarina, e livros didáticos ainda não incentiva a introdução destas geometrias na educação básica.

É visível a falta de material impresso e disponível ao professor a respeito de Geometrias Não Euclidianas. Entretanto, o professor não pode e não deve ser refém do livro didático.

Dessa forma, a proposta de atividades diferenciadas que contemplem esses tópicos vem a calhar no desenvolvimento e no ensino da Matemática com maior qualidade.

Assim, serão introduzidas noções dessas geometrias, especialmente Geometria Esférica a alunos da 2ª série do Ensino Médio, do Colégio Excelência, em Mafra, Santa Catarina, trabalhando de maneira interdisciplinar com Geografia, utilizando conceitos de Cartografia e com o professor de Física, com definições e cálculos que envolvem vetores. Busca-se com este conteúdo instigar os educandos a uma aprendizagem crítica e significativa e, aos poucos, fazer com que se aprofundem nos conceitos, inserindo propriedades e características dessas geometrias e álgebra. Quer-se mostrar que a geometria de Euclides é extremamente importante para todo o desenvolvimento das Geometrias, mas que não é uma verdade absoluta, única e incontestável.

Utilizando tópicos de História da Matemática, pretende-se mostrar que matemáticos como Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann tiveram papel importante para o surgimento dessas novas Geometrias.

No capítulo 3, serão apresentadas as atividades aplicadas com os alunos, em três etapas, desde a mais elementar até a mais aprofundada, para então poder ser feita uma análise do que foi aprendido pelos alunos, elencando os pontos positivos e negativos da aplicação do projeto, com propostas de melhorias para utilização posterior.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo principal introduzir noções de Geometrias Não-Euclidianas para alunos da 2ª série do Ensino Médio, em especial Geometria Esférica, utilizando conceitos de Cartografia.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos estão elencados a seguir:

- Rever conceitos e definições de Geometria Euclidiana;
- Apresentar os Postulados de Euclides, enfatizando o quinto, razão pela qual surgem essas geometrias;
- Estabelecer relações entre as geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana;

- Utilizar conceitos de Cartografia, para contextualizar o estudo da Geometria Esférica;
- Expor as principais propriedades da Geometria Esférica, no que diz respeito a triângulo esférico e distâncias sobre a superfície esférica.
- Efetuar cálculos de distâncias entre pontos distantes do planeta Terra, no plano e na esfera; estabelecendo diferenças.

O capítulo a seguir tratará do referencial teórico do trabalho, fundamentando teoricamente e contextualizando historicamente a Cartografia, as Geometrias Euclidiana e Não Euclidiana. Além disso, falar-se-á sobre questões pedagógicas contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Diretrizes Educacionais Estaduais e Livros Didáticos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A CARTOGRAFIA

Embora às vezes de maneira despercebida, usamos conceitos de cartografia em nosso cotidiano. Por exemplo, ao explorar um guia de ruas de uma cidade, ao consultar uma rota de viagem de um GPS (Global Positioning System), ao analisar a diferença de horários em determinadas regiões do país ou do mundo. Entretanto, todo esse acervo faz parte de um complexo universo de conhecimento técnico, científico e até mesmo artístico, desenvolvido ao longo de muitos séculos.

> Cartografia é a ciência e a arte de expressar graficamente, por meio de mapas e cartas, o conhecimento humano da superfície da Terra. Uma ciência, porque essa expressão gráfica, para alcançar exatidão satisfatória, procura apoio científico na coordenação de determinações astronômicas e matemáticas e nas noções topográficas e geodésicas. É considerada arte, quando se subordina às leis estéticas de simplicidade, clareza e harmonia, procurando atingir o ideal de beleza. (BAKKER, 1965, p.1)

O mais antigo registro de mapa que se tem notícia data de 2400 a 2200 a.C., na Babilônia: o **Ga-Sur**, um pequeno bloco de argila, com cerca de 7 cm x 8 cm, no qual se representa um vale, presumidamente o vale do rio Eufrates. Na Figura 1, mostra-se, à esquerda, o Ga-Sur original e, à direita, sua interpretação.

Já na Grécia, as primeiras concepções cartográficas datam de 1100 a.C. a 750 a.C., aproximadamente, para retratar as epopeias de *Ilíada* e da *Odisseia*, que contam a história da Guerra de Troia, entre gregos e troianos e do retorno de Ulisses.

> As narrativas de Homero sobre as viagens de Ulisses situam-se entre os maiores épicos da Antiguidade, mas não são mera ficção. Essas viagens mapeiam os dois mais importantes mares dos tempos antigos e nos ajudam a compreender como os gregos viam o mundo - inclusive as muitas e surpreendentes deduções que foram capazes de fazer a respeito desse mundo (como a circunferência da Terra), a partir de um conhecimento que hoje parece limitado. (OBREGON, 2002, orelha do livro)

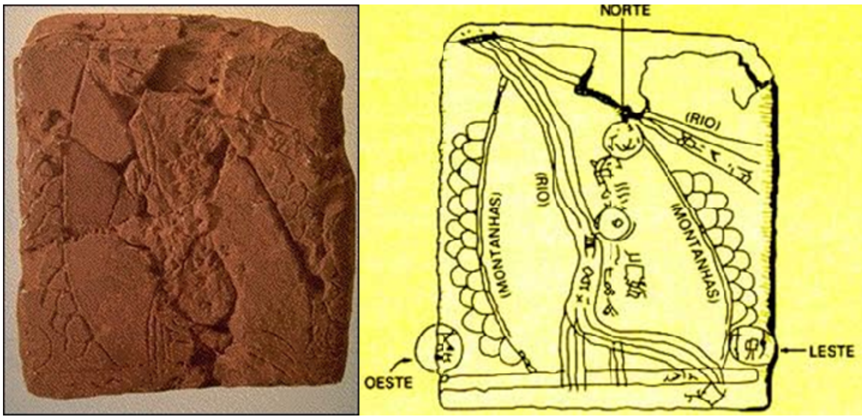


Figura 1: Ga-Sur original e sua interpretação.

Fonte: (TAMDJIAN, 2005)

Por volta de 500 a.C., no Egito, o historiador e geógrafo Hecateu de Mileto deu sua contribuição, criando o primeiro mapa do mundo (Figura 2), no primeiro livro de Geografia da história. Para ele, a Terra era um disco achatado cercado por um oceano.

Entre esse período, de 2400 a.C. a 500 a.C., não foi encontrada nenhuma bibliografia que fornece outros registros a respeito da cartografia.

Figura 2: Representação do primeiro mapa do mundo, feito por Hecateu.

Fonte: (TAMDJIAN, 2005)

Seguindo nesse período, através de filósofos como Parmênides, Eratóstenes e Aristóteles, começou-se a conceber a ideia de que a superfície da Terra era esférica.

Parmênides afirmava que a Terra era esférica, ou próxima disto, ao perceber que o Sol não nascia no mesmo horário em todos os lugares, além de reparar que, ao caminhar para o norte, novas estrelas apareciam e outras tornavam-se invisíveis.

Já Eratóstenes propôs uma teoria para provar que a Terra era esférica observando varetas de igual tamanho e posição que situadas em duas cidades distintas (Siena e Alexandria) produziam sombras distintas num mesmo horário. A Figura 3 ilustra tal situação. Eratóstenes utilizou a distância de cerca de 925 km entre essas cidades e o ângulo do raio solar que incidiu sobre a vareta em Alexandria foi de 7°12'. Segundo Venturi (2007), esse valor também corresponde ao ângulo central (obtido pelo prolongamento das varetas), já que os raios solares se propagam paralelamente. Utilizando-se de proporcionalidade, Eratóstenes concluiu que o comprimento da circunferência da Terra era de 46250 km. Hoje sabemos que esse valor, à linha do Equador, é de aproximadamente 40074 km. Apesar de haver uma diferença de cerca de 15% entre o valor encontrado e o real, foi bastante satisfatório perante os intrumentos de medida daquela época.

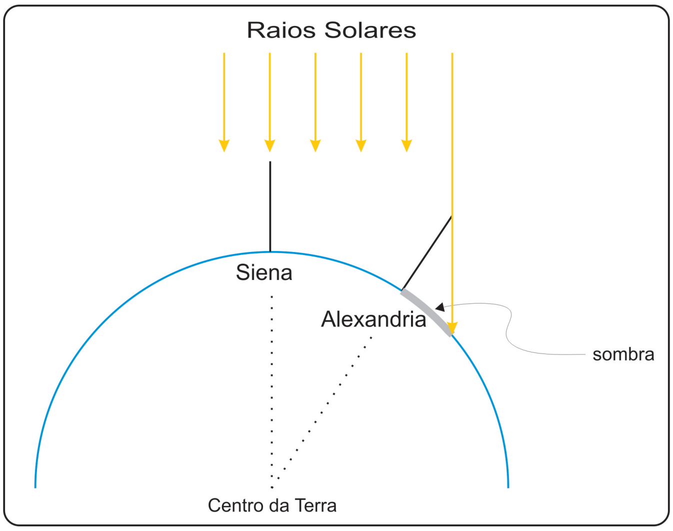


Figura 3: Argumento de Eratóstenes para mostrar que a Terra era esférica.

Fonte: Autor (2014)

Por fim, Aristóteles formulou argumentos para comprovar esta tese, dentre eles a observação de eclipses lunares, nos quais a borda era sempre circular e o fato de perceber estrelas em diferentes posições ao realizar uma viagem, argumento esse semelhante ao de Parmênides.

O desenvolvimento da cartografia ganhou novo ânimo a partir do século XV, em virtude das grandes navegações. Por esse motivo, técnicas de criação de projeções cartográficas tornaram-se fundamentais, tratadas como segredo de estado pelos portugueses.

Inicialmente, os estudos relativos a cartografia estavam focados em definir uma maneira de identificar um posicionamento exato na superfície terrestre, em especial quando se estava em alto mar. Foi o alto investimento das Grandes Navegações que resultou na criação de um sistema de coordenadas geográficas.

O astrolábio, instrumento criado por Hiparco (séc. II a.C.) e aperfeiçoado no século XVIII, inicialmente utilizado para observar estrelas, passou a ser empregado para medir a altura do Sol em relação à linha do horizonte, ao meio dia.

Assim, foram idealizados os princípios de utilização de linhas imaginárias ao redor do mundo, paralelas entre si e à linha do Equador. Essas linhas são chamadas de Paralelos e permitem calcular o que chamamos de Latitude. Esta designa o ângulo entre o plano do Equador e o segmento que une o ponto da superfície e o centro O da esfera. Ela varia de 0° a 90° para Norte e Sul, sendo 0° no Equador e 90° nos pólos. Na Figura 4, pode-se verificar o ponto A, que possui latitude Φ, para o Norte.

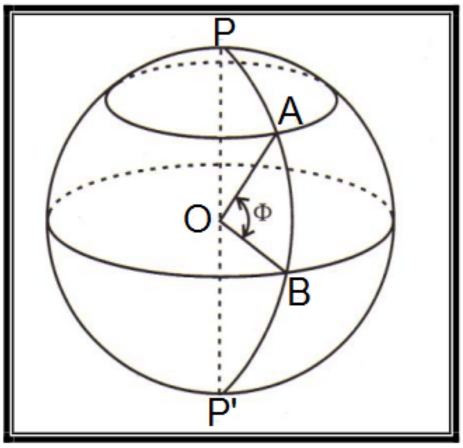


Figura 4: Representação de como se determina a Latitude de um ponto.

Fonte: Autor (2013)

Além disso, os portugueses precisavam de referenciais para definir o quanto estavam se afastando da costa africana, em razão dos ventos empurrarem as embarcações para o alto mar. Então, no início do séc. XVIII, o inglês John Harrison criou um método para se calcular distâncias e variações no sentido leste-oeste. Definida como Longitude, tomou-se as 24 horas do dia terrestre e o fato da forma da Terra ser praticamente esférica (com seu ângulo de 360° de círculo máximo) para estabelecer que a cada hora corresponde um ângulo de 15°. Esse percurso de 15° passou a ser chamado de fuso horário e cada fuso percorrido no sentido leste-oeste corresponde ao atraso de uma hora. As linhas imaginárias que delimitam um fuso são chamadas de Meridianos.

Para padronizar os fusos, tomou-se o Observatório de Greenwich, na Inglaterra, como marco inicial da contagem da longitude. Assim, ela é medida pelo menor arco formado entre o ponto requerido e o Meridiano de Greenwich, com variação de 0° a 180°, para leste e para oeste. A Figura 5 ilustra um ponto B, que possui longitude λ.

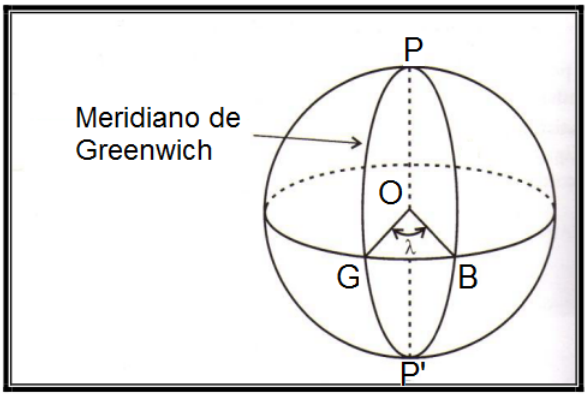


Figura 5: Representação de como se determina a Longitude de um ponto.

Fonte: Autor (2013)

Dessa forma, passamos a conhecer dois elementos fundamentais em Cartografia.

Infelizmente, ao se comparar formas e medidas entre o globo terrestre, uma esfera, e o mapa, um plano; nos deparamos com um problema: a impossibilidade de planificar uma esfera sem apresentar distorções.

É o que trata o Teorema Egrégio de Gauss, publicado em 1828, que afirma que duas superfícies que possuem curvaturas diferentes não podem ser transformadas de uma para outra sem que haja algum tipo de distorção. Por exemplo, o plano e a esfera de raio R, por possuírem curvaturas 0 e $\left(\frac{1}{R^2}\right)$, respectivamente, geram deformações quando se pretende fazer transformações de um para outro. De maneira prática, basta imaginarmos que não é possível embrulhar uma bola com uma folha de papel sem amassá-la ou rasgá-la e, de maneira oposta, não se consegue achatar a casca de um ovo sem que este apresente rupturas.

Esse teorema foi fundamental para os estudos relativos a mapas e projeções, visto que a impossibilidade de transformação perfeita fez surgir formas de se minimizar essas distorções, dependendo do objetivo e da aplicação que esse mapa terá. A Cartografia acaba sendo prejudicada por um problema que é matemático.

Segundo Oliveira (1988), essa planificação só é possível:

> "de maneira imperfeita, infiel, isto é, com algumas alterações e imperfeições. Por isso é que o problema das projeções cartográficas exige não só de nós, para sua com-

> preensão, como dos matemáticos, astrônomos, cartógrafos, enfim todos os que criam projeções, uma grande dose de imaginação." (OLIVEIRA, 1988, p.57)

Dessa forma, na próxima seção, serão explanadas algumas projeções cartográficas, as mais utilizadas, sua importância e suas características, inclusive as regiões que apresentam maiores e menores distorções.

2.1.1 AS PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

As projeções cartográficas são representações sistemáticas dos meridianos e paralelos do globo terrestre numa superfície plana, servindo como base para construção de mapas. Entretanto, como citado na seção anterior, a planificação de uma esfera não está isenta de distorções. Assim, os diversos tipos de projeções cartográficas servem para minimizar essas distorções, dependendo de seu uso.

A seguir, serão elencados os principais tipos de projeções cartográficas, suas características e propriedades, indicando-se também qual sua melhor finalidade.

> A construção de um sistema de projeção será escolhida de maneira que a carta venha a possuir propriedades que satisfaçam as finalidades impostas para a sua utilização. O ideal seria construir uma carta que reunisse todas as propriedades, representando uma superfície rigorosamente semelhante à superfície da Terra. Esta carta deveria possuir as seguintes propriedades: 1- Conformidade: manutenção da verdadeira forma das áreas a serem representadas; 2- Equivalência: inalterabilidade das áreas; e 3- Equidistância: Constância das relações entre as distâncias dos pontos representados e as distâncias dos seus correspondentes. (IBGE, 1998)

Uma maneira de enxergar as projeções é utilizando uma fonte de luz no centro de um globo transparente. Esta luz projeta as sombras dos meridianos, paralelos e outras características geográficas importantes numa superfície disposta tangencialmente ao globo. entretanto, nem toda projeção pode ser ilustrada dessa forma.

2.1.1.1 PROJEÇÃO CILÍNDRICA

A superfície terrestre é representada num cilindro circunscrito à esfera, tendo em comum a linha do Equador (Figura 6). Suas principais características são:

- A linha do Equador é a unica que preserva sua dimensão original;
- Os paralelos e meridianos são todos perpendiculares;

- As regiões mais próximas do Equador são as que apresentam menor deformação. Portanto, quanto maior a latitude, maior a distorção.
- É comumente utilizado para representação de toda a superfície da Terra, (*mapa-múndi*).

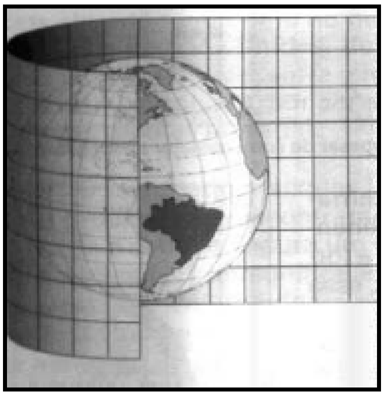


Figura 6: Processo de obtenção de uma projeção cilíndrica.
Fonte: (MENEZES, 2004)

A projeção cilíndrica mais utilizada é a de Mercator[1]. Era do tipo conforme, no qual não se preocupa com áreas e distâncias, mas sim em relacionar os pontos exatamente em suas latitudes e longitudes. Dessa forma, gera-se deformação nos países. Observe na Figura 7 que ao afastar-se da linha do Equador, as deformações aumentam. A Groenlândia, que aparenta ter área maior que a da Austrália, na verdade possui área cerca de 3,5 vezes menor. (A Groenlândia tem área de 2.166.086 km^2 e a Austrália cerca de 7.692.024 km^2)

2.1.1.2 PROJEÇÃO CÔNICA

A superfície terrestre fica inscrita em um cone, tendo em comum uma circunferência, não máxima, da esfera; geralmente um paralelo (Figura 8). Suas principais características são:

- Apenas um hemisfério pode ser cartografado;
- As regiões mais próximas ao pólo e ao Equador são as mais deformadas, sendo nula a deformação no círculo tangente ao cone;
- Sua finalidade é para regiões temperadas, onde as áreas e formas são menos distorcidas.

A Figura 9 abaixo exemplifica uma possível projeção cônica, cujo vértice foi colocado sobre o polo norte.

[1]Apelido do holandês Gerhard Kremer (1512-1594), a figura mais influente da cartografia moderna. Sua projeção foi publicada em 1569.

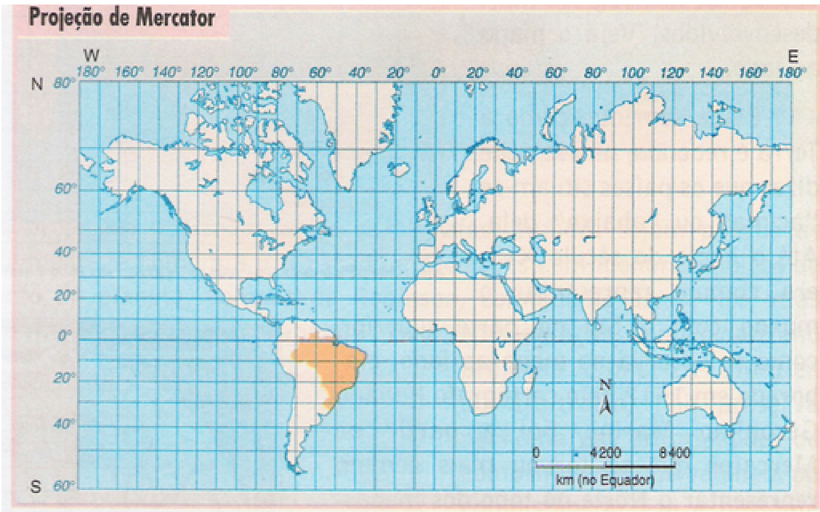


Figura 7: Projeção de Mercator, publicada em 1569, na qual representa o globo terrestre na sua totalidade.

Fonte: (MENEZES, 2004)

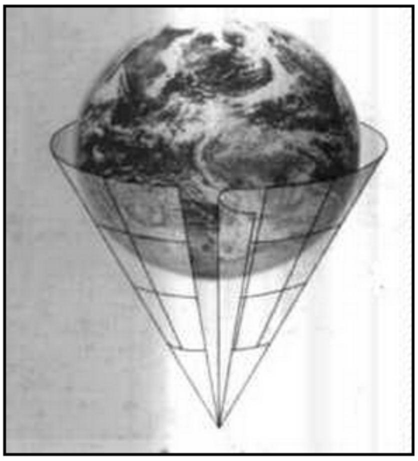


Figura 8: Processo de obtenção de uma projeção cônica.

Fonte: (MENEZES, 2004)

2.1.1.3 PROJEÇÃO AZIMUTAL

Também chamada de projeção Plana ou Polar, é feita apoiando-se a esfera em um plano, possuindo, então, apenas um ponto comum, chamado origem da projeção. Este ponto pode ser escolhido de acordo com a sua preferência e finalidade (Figura 10). Possui como características:

- A partir do ponto de origem (ou ponto de tangência), partem os meridianos, representados por retas;

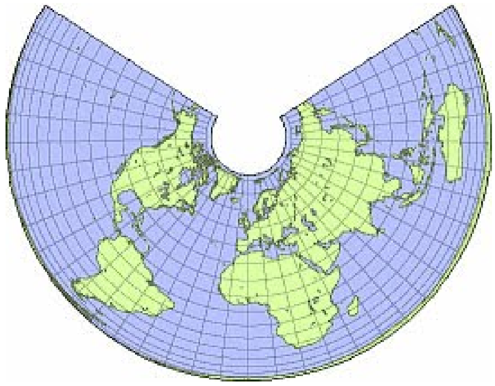


Figura 9: Exemplo de uma projeção cônica.
Fonte: (MENEZES, 2004)

- Os paralelos são representados por circunferências concêntricas;
- As áreas próximas à origem são as que têm menor deformação;
- Amplamente utilizada para navegação aérea, permitindo estabelecer rotas mais precisas;
- É comum verificar esse tipo de projeção em telas de radares.

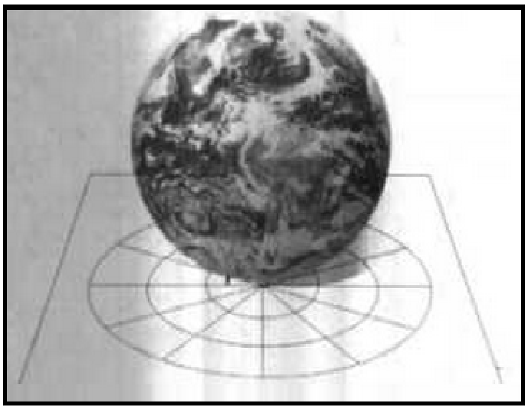


Figura 10: Processo de obtenção de uma projeção azimutal.
Fonte: (MENEZES, 2004)

A título de curiosidade, o logotipo da Organização das Nações Unidas (ONU) representa uma projeção azimutal. Este logotipo tem a finalidade de retratar sua principal área de atuação, o hemisfério norte. Assim, sua origem é o pólo norte. Verifique, também, as áreas do hemisfério sul que aparecem, produzem grandes deformações, como a América do Sul e a Austrália, por exemplo. (Figura 11)

Figura 11: Logotipo da ONU, retratando uma projeção azimutal.

Fonte: (TAMDJIAN, 2005)

2.2 OS PARÂMETROS NACIONAIS, AS DIRETRIZES CURRICULARES E OS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção, serão apresentadas, em linhas gerais, as orientações de como o tema Geometria Esférica deve ser conduzido de acordo com documentos oficiais e com a legislação vigente. Além disso, será feita a análise de livros didáticos disponíveis em escola públicas de Ensino Médio. Estes livros são distribuídos gratuitamente aos educandos, pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), criado em 2004, pelo Governo Federal.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal, em 2000, e tem como objetivo principal uniformizar e sistematizar o ensino no país, estabelecendo eixos norteadores da educação no âmbito teórico e na relação escola-cotidiano.

A Matemática ocupa um papel ímpar nos PCN's,

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são essencialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000b).

Os Parâmetros sugerem que a Matemática, como caráter instrumental, deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas de conhecimento.

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000b)

Os PCN's de Geografia, entretanto, submetem no Ensino Fundamental uma análise apenas física da Terra, como hidrografia, relevo, clima e vegetação. Já no Ensino Médio, o aspecto geométrico da Terra passa a ter maior importância, para auxiliar na compreensão dos fenômenos sociais, políticos e econômicos do mundo, estudados na Geopolítica.

> Nunca o espaço do homem foi tão importante para o desenvolvimento da história. Por isso, a Geografia é a ciência do presente, ou seja, é inspirada na realidade contemporânea. O objetivo principal desses conhecimentos é contribuir para o entendimento do mundo atual, da apropriação dos lugares realizada pelos homens, pois é através da organização do espaço que eles dão sentido aos arranjos econômicos e aos valores sociais e culturais contruídos historicamente. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000c)

Ainda em relação aos Parâmetros Curriculares de Matemática, as finalidades do estudo desta disciplina indicam como objetivos levar o aluno a:

> - aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> - analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas de conhecimento e da atualidade;
> - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
>
>   [...]
> - estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000a)

Uma das intenções deste trabalho é interdisciplinarizar conteúdos de Matemática e Geografia. A interdisciplinaridade permite conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diversas formas de pensamento matemático, além de buscar mostrar a relevância cultural e histórica de certos temas dentro e fora desta área.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio, um complemento aos Parâmetros Curriculares Nacionais, chamados de PCN+, sugerem uma nova abordagem da geometria tradicional ministrada, que ainda se baseia apenas em cálculos de áreas e volumes.

> [...] é importante destacar que este tema estruturador [Geometria e Medidas] pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada na Geometria, com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no Ensino Fundamental com a geometria clássica euclidiana. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2006)

Embasado nessa citação, este trabalho propõe atividades diversificadas em relação ao ensino atual, buscando não apenas transmitir conteúdos e passar fórmulas, mas sim dar significado ao aprendizado, uma visão crítica sobre os fenômenos que nos cercam.

Esse estudo interdisciplinar não deve, ou não deveria, ser trabalhado em sala de aula de maneira eventual, esporádica, com dois ou três projetos desenvolvidos durante o ano, mas sim de maneira contínua. A interdisciplinaridade é hoje uma palavra-chave para a organização escolar; pretende-se com isso o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, em favor de um objetivo comum. E mais,

> Partindo-se do pressuposto de que a realidade do mundo é muito mais ampla do que a possibilidade teórica de qualquer área do conhecimento para dar conta de sua explicação e compreensão isoladamente, e de que isso não pode ser feito de forma fragmentada, a prática didática e pedagógica da interdisciplinaridade torna-se um recurso para impedir o estudo fragmentado do mundo. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000a)

Dessa forma, a interdisciplinaridade corroborará o aprendizado, tornando-o global e consistente.

Segundo os Parâmetros Curriculares de Santa Catarina, em Geografia, não se deve trabalhar a cartografia de maneira isolada como um conteúdo à parte, mas sim de maneira contextualizada, de forma que o aprendizado seja mais significativo.

> Neste nível de raciocínio, o critério de seleção/delimitação do conteúdo deve estar referido a temas, enunciados o mais das vezes por problemáticas que vão ser situadas em um espaço e num tempo. Por isso, deve-se ter a referência da cartografia. As noções de cartografia devem ser constantemente trabalhadas, não como um conteúdo em si, mas como um instrumento capaz de permitir que se conheça e represente o espaço estudado. (SANTA CATARINA, 1998a, p.7)

O estudo da cartografia necessita de uma alfabetização, pois existem definições e elementos específicos desta área. Além disso, interdisciplinarizar com Matemática requer um cuidado ainda maior, deve-se tomar cuidado com a terminologia utilizada, fazendo uma adaptação de conceitos das duas disciplinas a fim de aproximá-las, em prol de um aprendizado efetivo.

Os Parâmetros Curriculares de Santa Catarina, em Matemática, ressaltam, e isso facilita a aplicação deste trabalho, que a organização dos temas de uma diretriz curricular ou de um livro didático não precisa obedecer obrigatoriamente a sequência dada. Além disso, salienta que

> [...] o estudo de um determinado tema deve acontecer de forma contextualizada, tanto no aspecto sócio-histórico de produção do conhecimento, quanto nas relações com os demais conteúdos da Matemática, bem como com as outras áreas de conhecimento. (SANTA CATARINA, 1998b, p. 112)

Em se tratando de Geometrias Não Euclidianas, tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais quanto os estaduais de Santa Catarina não sugerem este tópico, ao contrário da Euclidiana, que é sempre citado. Entretanto, os PCN's consideram importantes os tópicos relacionados a História da Matemática e a Resolução de Problemas, e as recomendam. Sendo trabalhada de maneira adequada, não apenas realizando recortes da história, este recurso pode levar a uma consistência dos conteúdos e uma maior apropriação destes.

De maneira semelhante aos parâmetros, os livros didáticos de Matemática ainda não trazem os conteúdos referentes a Geometrias Não Euclidianas para serem trabalhados. Analisando os livros abaixo relacionados, todos disponíveis a qualquer aluno por serem do PNLEM, apenas alguns deles citam a existência de outras geometrias.

- **Matemática: Ciência e Aplicações**; de Gelson Iezzi, entre outros. Volume 2, 5ª edição, Editora Atual, São Paulo: 2010.
- **Matemática: Uma Ciência para a Vida**; de Antônio Carlos Rosso Jr. e Patrícia Furtado. Volume 2, 1ª edição, Editora Harbra São Paulo: 2011.
- **Matemática: Um Novo Olhar**; de Joamir Souza. Volume 3, 1ª edição, Editora FTD, São Paulo: 2010.
- **Matemática: Volume Único**; de Luiz Roberto Dante. 1ª edição, Editora Ática, São Paulo: 2005.
- **Matemática: Ensino Médio**; de Katia Stocco Smole e Maria Ignes Diniz. Volume 2, 6ª edição, Editora Saraiva, São Paulo: 2010.
- **Matemática: Aula por Aula**; de Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva. Volume 2, 2ª edição, Editora FTD, São Paulo: 2005.

- **Matemática: Projeto Eco**; de Cintia Bagatin Lapa e Jorge Luiz Farago. Volume 2, 1ª edição, Editora Positivo, Curitiba: 2010.

- **Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem**; de José Ruy Giovanni, entre outros. Volume Único, 1ª edição, Editora FTD, São Paulo: 2002.

- **Matemática: Ensino Médio**; de Manoel Rodrigues Paiva. Volume 2, 2ª edição, Editora Moderna, São Paulo: 2010.

Destes, o primeiro, (IEZZI et al., 2010), faz uma breve menção sobre a contestação feita por outros matemáticos à obra de Euclides.

> [...] de que sua validade [da Geometria] fosse estabelecida por meio de argumentos lógicos e utilizando nas demonstrações apenas propriedades demonstradas anteriormente. Isso caracterizou uma ruptura definitiva com a Matemática de base experimental e empírica dos séculos anteriores. É bem verdade que séculos depois, os matemáticos verificaram que o método criado por Euclides não foi usado de maneira perfeita na sua obra e que *Os Elementos* tem ainda vários apelos à intuição, criando então outras geometrias além da dele. (IEZZI et al., 2010, p. 252)

De maneira não tão superficial, mas também apenas a título de curiosidade - em um box chamado "Conheça Mais" - o segundo livro elencado, Rosso e Furtado (2011), menciona as Geometrias Não Euclidianas, logo após o livro tratar do quinto postulado de Euclides.

> Esse postulado [o postulado das paralelas] é o mais célebre de todos os postulados enunciados por Euclides, que em sua obra, *Os Elementos*, foi o 5º a ser listado e, por isso, é conhecido como "o quinto postulado de Euclides". A teoria construída admitindo esse postulado é chamada de *geometria euclidiana*.
>
> Esse postulado foi objeto de muita discussão entre os matemáticos que, durante vários séculos, tentaram demonstrá-lo através de outros postulados enunciados por Euclides, pois acreditavam que se tratava de um teorema. Foi somente no século XIX que alguns matemáticos conseguiram demonstrar que o quinto postulado de Euclides se trata realmente de um postulado independente dos outros e necessário na construção da geometria euclidiana.
>
> Eles conseguiram tal feito considerando inicialmente que o postulado de Euclides não era verdadeiro, substituindo-o por outros que deram origem a outras geometrias, conhecidas como *geometrias não euclidianas*. (ROSSO; FURTADO, 2011, p. 371)

Já o livro de Dante (2005), dá uma breve explanação sobre a obra de Euclides, em uma sessão intitulada "Um pouco da História", citando na sequência a existência de outras geometrias.

> [...] Porém, no século XIX, os matemáticos começaram a discutir os axiomas e verificaram um fato surpreendente: bastava por de lado o postulado das paralelas – viga-mestra da obra de Euclides – para tornar possível o desenvolvimento de novos sistemas geométricos. Os matemáticos Lobachevsky (1792-1856) e Riemann (1826-1866) foram os primeiros a criar sistemas diferentes. Essas novas concepções, que se tornaram conhecidas como *geometrias não euclidianas* permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, dentre as quais destaca-se a Teoria da Relatividade de Einstein. (DANTE, 2005, p. 359)

De maneira semelhante, Barreto e Silva (2005) citam a criação dessas novas geometrias, muito tempo depois da euclidiana, explicando que esta foi documentada em *Os Elementos* e que foi muito importante para o desenvolvimento de vários campos da ciência.

> Embora parte de suas obras [de Euclides] tenha tomado rumo ignorado, algumas estão documentadas, como é o caso de *Os Elementos*, composta de 13 livros, sem dúvida sua maior e mais conhecida obra. Nela, Euclides mostra grande arte, método, rigor e capacidade de sistematizar. Expõe a geometria a partir de axiomas e postulados, não demonstráveis, mas essenciais para a estrutura desse estudo. [...]
>
> Somente no início do século XIX, matemáticos como Gauss, Lobachevsky e Riemann estruturaram a geometria não euclidiana, contribuição fundamental para o mundo científico moderno. (BARRETO; SILVA, 2005, p. 301)

Em geral, todos os livros pesquisados dão certa importância à geometria desenvolvida por Euclides, no início dos capítulos dedicados à Geometria Espacial. São apresentados os conceitos primitivos e alguns axiomas. Verifica-se que não há uma ordem exata na transmissão desses dados, apenas alguns, por exemplo, quando é citado "o Quinto Postulado" após outros quatro, que nem sempre são os quatro primeiros postulados de Euclides. É o caso de (LAPA; FARAGO, 2010, p. 197), que cita e enfatiza os postulados de Euclides, entretanto o das paralelas é chamado de "Postulado 7".

Dentre os nove livros consultados, aquele que dá mais atenção às geometrias não-euclidianas é o de Smole e Diniz (2010), que exemplifica com a geometria esférica as geometrias não euclidianas. Elas utilizam uma possível rota no planeta Terra, que passa pelas cidades de Havana, Tanger e Cairo, mostrando que no globo terrestre, estão alinhadas num mesmo círculo máximo, porém na planificação de um mapa não. Mesmo estando em caráter de curiosidade no livro didático, é uma boa introdução prática a esse assunto, gerando interesse e despertando a criatividade dos educandos.

> Outras geometrias surgiram no século XIX, quando alguns matemáticos puseram em dúvida alguns postulados de Euclides e descobriram que, admitindo outros postulados, chegavam a outra geometrias também válidas, as Geometrias Não Euclidianas.
>
> A Geometria Não Euclidiana mais fácil de se visualizar é a esférica, em que tudo se passa numa esfera e tem a Terra como modelo. (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 210)

E, principalmente por esse motivo, a falta de material didático para os alunos, que esse projeto se justifica: mostrar aos educandos a geometria esférica e, mais do que isso, que existem geometrias diferentes da geometria euclidiana, que lhes proporciona uma melhor compreensão do mundo em que vivem.

Em seguida, trataremos da Geometria, através de um breve histórico, mostrando a evolução desta área e situando cronologicamente as novas descobertas até, por fim, chegarmos à Geometria Esférica e suas características.

2.3 A GEOMETRIA

Datar a origem da matemática e da geometria é um tanto quanto arriscado, visto que os primórdios e registros dessa área são mais antigos que a origem da própria escrita. Entretanto, os últimos seis mil anos têm fornecido maiores informações, mais eficazes e seguras sobre essa origem, a partir do momento em que o homem passou a registrar seus feitos. Matemáticos que se propuseram a estudar os prováveis motivos da origem da geometria são Heródoto e Aristóteles, baseado na origem egípcia.

Segundo (LEONARDO, 2010, p.105), Heródoto (485 - 420 a.C.) possuía uma teoria que a geometria surgiu em virtude das necessidades cotidianas do povo, geralmente em relação a medição de terras a cada ano após as inundações dos rios. Já Aristóteles (384 - 322 a.C.) acreditava na existência de uma classe sacerdotal, que se dedicava a estudos para construção de templos.

Apesar do fato de as teorias seguirem rumos distintos, há um aspecto comum, os geômetras egípcios eram chamados de "esticadores de cordas"‘, e esse título serve para justificar qualquer uma das teorias, tanto para medição de terras, quanto para auxílio na construção de seus templos.

Além disso, para Boyer (1974), existiria a possibilidade de surgimento da matemática, e da geometria, apenas pelo seu prazer, visto que os vestígios matemáticos da antiguidade se preocupavam também com o aspecto estético, buscando padrões e simetrias em desenhos.

> A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que geralmente propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não com auxílio prático à mensuração. (BOYER, 1974, p. 5)

As ideias de Aristóteles eram semelhantes às dos geômetras da Índia, visto que se utilizavam de cordas para auxiliar na construção de templos e altares. Lá eram chamados de *Sulvasutras* (Regras de Cordas) e, segundo Boyer (1974, p. 6), tanto os do Egito quanto os da Índia provinham de uma fonte comum, “uma protogeometria relacionada com os ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia.”

Por volta do século VI a.C., Tales de Mileto trouxe uma nova forma de pensar a geometria, através de métodos dedutivos e sem utilizar a álgebra. Outro importante nome da geometria, Pitágoras de Samos foi um provável companheiro de estudos de Tales que realizou estudos referentes a retas paralelas e triângulos, sendo o mais importante o teorema que leva seu nome.

Pitágoras também deu sua contribuição para os fundamentos lógico dedutivos da geometria, o que mais tarde seria usado por Euclides em sua mais célebre obra.

> [...] os significados desses termos devem ser claros para o leitor e, assim, os gregos sentiam que o discurso deveria começar com uma lista de explanações e definições desses termos técnicos. Depois dessas explanações e definições terem sido dadas, as afirmações iniciais, chamadas de axiomas ou postulados do discurso, seriam enunciados. Essas afirmações iniciais, segundo os gregos, deveriam ser cuidadosamente escolhidas de maneira que sua veracidade fosse completamente aceitável pelo leitor em vista das explanações e definições já citadas. (EVES, 1992, p.9)

Seguindo o desenvolvimento da geometria na Grécia, três autores que merecem destaques são: Euclides, cujos feitos serão tratados na próxima seção; Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (262-194 a.C.).

Arquimedes foi um matemático extremamente dedicado à geometria. Foi autor de compilações que tratavam de definições em geometria plana, além de alguns tópicos na geometria espacial. Descobriu as fórmulas para se calcular áreas da superfície esférica e da calota esférica, além do volume da esfera e do segmento esférico. Teve influência na origem do cálculo integral e foi o precursor dos métodos para se calcular as aproximações de π, sendo que estabeleceu o intervalo $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ para seu valor, nos dando a aproximação de $3,14$ usada até hoje.

Apolônio foi um astrônomo que teve papel importante na matemática ao criar a obra *Seções Cônicas*, denominando-as de Elipse, Hipérbole e Parábola, e estabelecendo relações e fórmulas usadas até hoje. Por tal feito, é conhecido como “o Grande Geômetra”. Além disso, seus feitos foram fundamentais para a construção utilizando régua e compasso. “O Problema de Apolônio”, por exemplo, é um clássico e instigante trabalho no qual se contrói um círculo tangente a outros três dados.

Com a morte de Apolônio, a era de ouro da geometria grega chegava ao fim, sem ter muitas contribuições dos matemáticos posteriores.

Entre séculos XV e XVII a matemática volta a ter grandes contribuições no ramo geométrico. A geometria projetiva surgiu na época do Renascimento, quando artistas e engenheiros procuraram criar leis para projetar objetos sobre uma tela. A mais significativa obra a respeito das projeções foi de Geràrd Desargues, cuja obra foi publicada em Paris, em 1639. Mas as ideias de Desargues não foram muito disseminadas, não pela qualidade de sua obra, mas por um marco matemático que o deixou na sombra das grandes descobertas.

> Há várias razões pela qual o pequeno livro de Desargues tenha sido negligenciado. Ele foi eclipsado pela Geometria Analítica, mais flexível, introduzida por Renè Descartes dois anos antes. [...] Além disso, Desargues adotou um estilo e uma terminologia tão excêntricos, que obscureciam seu trabalho e desencorajavam os outros que tentaram apreciar devidamente seus resultados. (EVES, 1992, p.15)

Posterior a esta data, entre os séculos XVII e XIX, surgem grandes nomes da matemática, que tiveram fundamental papel relacionado aos tópicos desse trabalho: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), Johann Bolyai (1802-1860) e George Friederich Bernhard Riemann (1826-1866). Suas ideias serão citadas na sequência.

2.3.1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Segundo Boyer (1974, p.74), pouco se sabe sobre a história de Euclides, inclusive sua origem, que acredita-se ser de Megara e não de Alexandria, como sempre aparece nos livros. Esta cidade, na verdade, é atribuída juntamente com seu nome graças aos seus estudos (esses sim muito bem registrados) feitos em sua maioria nesse local.

É fato que ao se mencionar Euclides, automaticamente a obra *Os Elementos* vem à memória. Entretanto, ele foi autor de mais de doze obras, dos mais diversos tópicos, como óptica, astronomia, música e seções cônicas. Mas desses, apenas cinco sobreviveram até hoje: *Os elementos*, *Os Dados*, *Os Fenômenos*, *Divisão de Figuras* e *Óptica*.

É inegável que *Os Elementos* é a obra mais célebre de Euclides e há quem diga de toda a história da matemática. Traz conceitos de uma matemática elementar, utilizando de aritmética, geometria sintética e até mesmo álgebra (num aspecto geométrico, diferente da álgebra moderna). É composta de treze volumes, nos quais os seis primeiros tratam da geometria plana elementar, os três seguintes sobre a teoria dos números, o décimo sobre incomensurabilidade e os três últimos sobre geometria espacial. Na Figura 12 podemos visualizar uma ilustração da capa de "Os Elementos".

Figura 12: Capa da coletânea de livros Os Elementos, de Euclides, traduzido para o inglês. Fonte: (IEZZI et al., 2010)

Os livros não possuem introdução e já partem para uma série definições explanadas de maneira direta, sem nenhuma preparação para tal. Alguns exemplos dessas definições são: *um ponto é o que não tem parte*; *linha é comprimento sem largura* e *uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura*.

Após essas definições, Euclides forneceu uma lista de axiomas (proposição admitida como verdade sem necessidade de demonstração, cujo caráter é aparente) e postulados (semelhante ao axioma, mas menos óbvia). Nos livros consultados e listados na Seção 2.2, os axiomas e postulados são, de maneira errada, considerados sinônimos. De qualquer forma, Boyer (1974) cita as dez pressuposições, de maneira separada, assim como Euclides, a seguir:

> *Postulados*: Seja postulado o seguinte:
> 1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
> 2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> 3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> 4. Que todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Axiomas (ou noções comuns):
1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa também são iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

Uma representação do postulado 5 pode ser visualizada na Figura 13. Se $\alpha + \beta < 180^o$, então as retas *r* e *s* se encontrarão ao prolongá-las para a direita, neste caso.

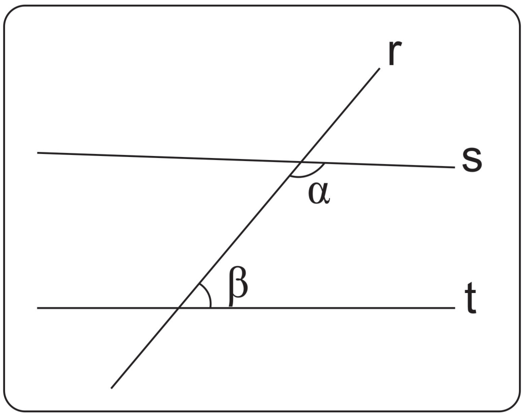


Figura 13: Representação do quinto postulado.

Fonte: (Autor, 2014)

Entretanto, o quinto postulado, que na obra de Euclides é descrito como: *"Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos"* na maioria dos livros didáticos é substituído pelo resultado equivalente: *"Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada"*. Essa reformulação do enunciado se deve ao matemático escocês John Playfair (1748-1829).

Por séculos este postulado foi motivo de críticas. Nomes como Proclus (410-485), Nasiredin (1201-1274), Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833) e Bertrand (1731-1812) acharam estranho Euclides usar o quinto postulado apenas a partir da 29ª proposição, tendo usado os outros quatro até então. Além disso, Euclides tratou como teorema a afirmação de que *A soma de dois ângulos de um triângulo é sempre menor que dois retos*. Porém, esta é a recíproca do quinto postulado. Assim, esse também seria suscetível de prova.

2.3.2 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

No início do século XIX, após todas as tentativas dos matemáticos acima citados de provar o quinto postulado usando os quatro anteriores, e chamá-lo assim de teorema, alguns célebres matemáticos começaram a expor suas ideias e efetivamente mostrar que ele era independente dos outros e que isso seria fundamental para a origem de novas geometrias. O primeiro foi Carl Friedrich Gauss, no qual é descrito por Barbosa (2009):

> Nos anos críticos que antecederam a descoberta da nova Geometria, a figura dominante do mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que deu uma grande contribuição no desenvolvimento de ideias que levaram à sua descoberta. Poucos dos seus resultados, frutos de muitos anos de pesquisa sobre problemas associados ao quinto postulado, foram tornados públicos durante a sua vida. Algumas cartas a outros interessados naqueles problemas, críticas de tratados sobre paralelas, e notas inéditas descobertas entre seus trabalhos, são toda a evidência disponível de que foi ele o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma Geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides. Foi ele o primeiro a designar a nova Geometria de Não Euclidiana. (BARBOSA, 2009, p. 37)

Janos Bolyai (1802-1860), filho do matemático húngaro Wolfgang Bolyai, teve sua vida focada na matemática. Aos treze anos já dominava o cálculo e começou a estudar e tentar desvendar o postulado das paralelas ao ver que seu pai não havia tido sucesso. Ao verificar que não era possível prová-lo, mas ao substituí-lo pela sua negação, de que por um ponto fora de uma reta não passa apenas uma reta paralela à reta dada, surgia uma nova geometria, também válida, Janos comunicou seu pai e este remeteu uma carta a Gauss, seu amigo. Carl, não se sabe se desmerecendo o trabalho de Janos, disse que já havia chegado a estas conclusões cerca de 30 anos antes, o desencorajou e, a partir daí, não publicou mais nada. Mesmo assim, em 1832, Janos publicou esses resultados no apêndice de uma obra de seu pai.

Paralelamente a Bolyai, Nicolai Lobachevski também chegou aos resultados do húngaro, motivo pelo qual ele dividiu os créditos da descoberta desta nova geometria.

Para eles, ao negar o quinto postulado, na analogia de Playfair, poderíamos ter nenhuma ou mais de uma reta paralela a uma dada passando por um ponto. De maneira especial, eles trabalharam com a ideia de se ter mais de uma paralela. Surgia a Geometria Hiperbólica.

Anos mais tarde, por volta de 1855, o matemático alemão Bernhard Riemann negou a outra parte do quinto postulado, que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela à reta dada. Esse foi o princípio da Geometria Elíptica. Sendo a esfera um caso especial de elipsoide, nossos estudos sobre geometria esférica seguirão as propriedades relativas à geometria elíptica de Riemann.

Tanto a Geometria Hiperbólica como a Elíptica diferem da de Euclides pelo fato de usarem um plano diferente do convencional. Essa diferenciação ocorre de maneira numérica através do conceito de 'curvatura' e, segundo (KASNER; NEWMAN, 1968, p.147), "a Geometria Euclidiana ou Parabólica tem curvatura zero; a Geometria Riemanniana, Esférica ou Elíptica tem curvatura positiva e a Geometria Lobachevskiana ou Hiperbólica tem curvatura negativa."

Assim, podemos elencar as três geometrias através de sua curvatura, além de uma propriedade relativa a triângulos, de acordo com as ideias de Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann H. Lambert (1728-1777).

- A geometria euclidiana utiliza superfície de curvatura zero, e seu triângulo possui soma de ângulos internos igual a 180^o;
- A elíptica utiliza superfície com curvatura positiva e a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180^o e menor que 540^o, sendo mínima quando os vértices estão mais próximos e máxima quando estão próximos de uma circunferência máxima (que definiremos a seguir e intitularemos Geodésica);
- A hiperbólica possui curvatura negativa e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180^o, sendo mais próxima de zero quão mais próximos são seus vértices.

A Figura 14 simplifica essa ideia.

Dois exemplos que remetem a superfície positiva e negativa são um ovo e uma corneta, respectivamente. Esses exemplos estão representados pela Figura 15.

A seguir, será dada ênfase na geometria elíptica, em particular a esférica, suas definições, propriedades, características e aplicações em situações cotidianas, que terá grande importância no desenvolvimento das atividades em sala.

2.3.3 A GEOMETRIA ESFÉRICA

Por razões agrícolas, geográficas, astrológicas e religiosas, nossos ancestrais procuravam entender o comportamento de corpos celestes (Lua, Terra e estrelas). Inicialmente, tentavam usar de seus conhecimentos para se localizar ao realizar grandes viagens. Supondo que a Terra e os outros astros eram esféricos, necessitavam de conhecimento sobre distâncias sobre uma superfície esférica. Dessa forma, acredita-se que a Geometria Esférica seja a primeira geometria não-euclidiana, desenvolvida basicamente nas áreas da Astronomia e Navegação.

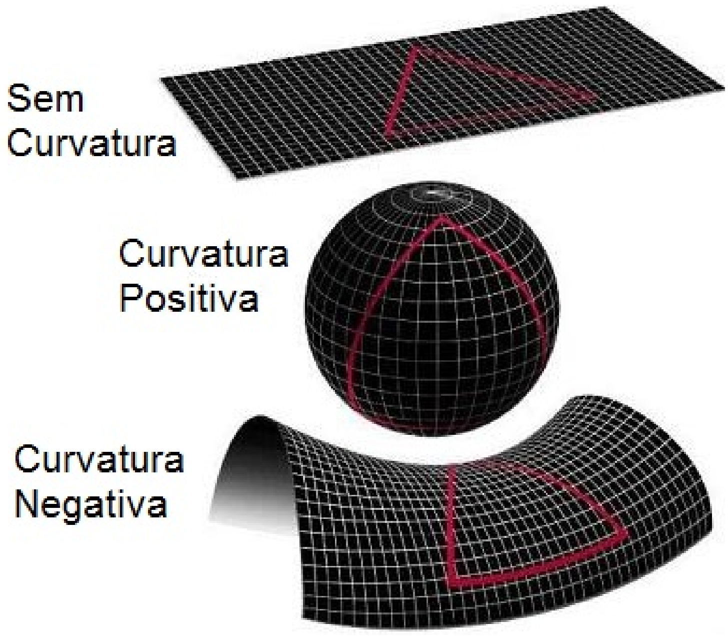


Figura 14: Representação simplificada das curvaturas das geometrias euclidiana, elíptica e hiperbólica.

Fonte: (SILVA, 2011)

Figura 15: Um ovo e uma corneta, representando curvaturas positiva e negativa, respectivamente.

Fonte: Autor (2014)

Nesta seção, alcançamos alguns resultados da geometria elíptica, particularmente para a esférica. Inicialmente, vemos algumas definições na esfera, que serão requisitos para uma melhor compreensão do que vem adiante. Em seguida, desenvolvemos algumas ferramentas que possibilitarão cálculos na superfície esférica e, por fim, determinamos um método para calcular a distância entre dois pontos de uma esfera.

Definição 2.1. *Esfera: Chama-se esfera de raio r, com centro na origem O de $\mathbb{R}^3$ o conjunto E*

$$E = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \ / \ |\overrightarrow{v}| = r\}$$

Seja $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$, então $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Assim, E é o conjunto das soluções da equação $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

A Figura 16 representa a esfera descrita acima.

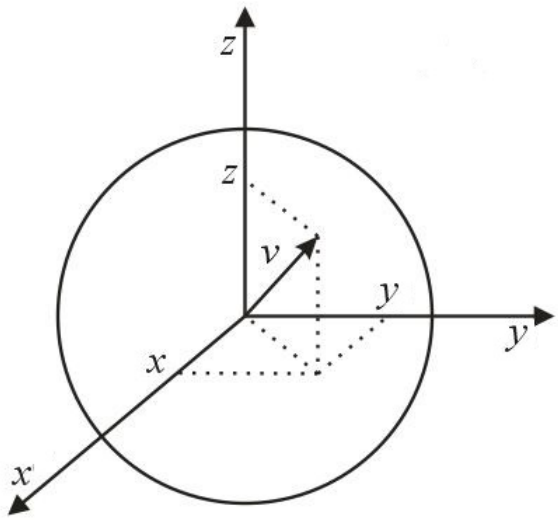


Figura 16: A esfera.

Fonte: Autor (2014)

Definição 2.2. *Círculo Máximo de uma Esfera: Dada uma esfera E, chama-se de círculo máximo a intersecção da superfície esférica de E com um plano que passa pelo seu centro.*

Na Terra, os meridianos e a Linha do Equador são exemplos de círculos máximos.

Definição 2.3. *Pontos antípodas da esfera: Dois pontos, P e P', de uma esfera são chamados de antípodas se P for simétrico a P' em relação ao centro O da esfera.*

Dessa forma, segundo Latas (2013, p.23), "dois círculos máximos de uma esfera se interceptam em dois pontos antípodas" (vide Figura 17). Como os círculos máximos fazem o papel de retas na superfície esférica (LATAS, 2013, p.23), reafirma-se a ideia de Riemann (conforme a subseção 2.3.2) de que por um ponto fora de uma reta não há nenhuma paralela a ela. Na Terra, é fácil visualizar dois pontos antípodas, basta analisar as intersecções de dois meridianos, os pólos Norte e Sul.

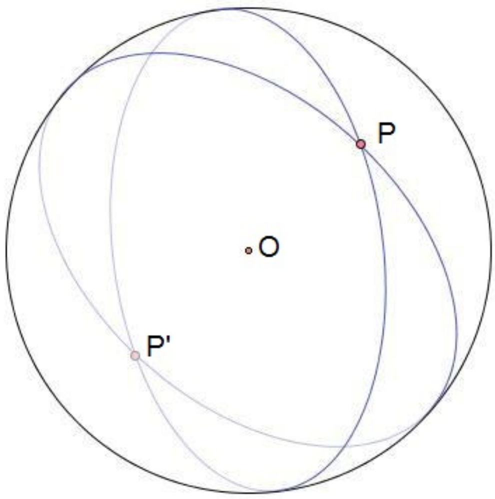


Figura 17: Representação de P e P’, pontos antípodas.

Fonte: Autor (2014)

Definição 2.4. *Geodésica: Chama-se geodésica a curva de menor distância entre dois pontos de uma superfície.*

No caso de uma superfície de curvatura zero, o plano euclidiano, a geodésica é o segmento de reta que une esses pontos. Entretanto, se a superfície for outra, pode não ser mais um segmento de reta. No caso específico da esfera, a geodésica é um arco de círculo máximo na esfera. A Figura 18 a seguir ilustra uma geodésica AB numa esfera E.

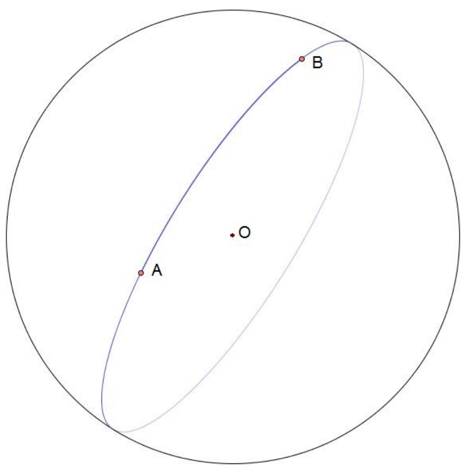


Figura 18: Geodésica que passa por A e B.

Fonte: Autor (2014)

A seguir, faremos algumas considerações sobre as coordenadas esféricas de um ponto.

É habitual utilizarmos a notação $P = (x, y, z)$ para representar um ponto em $\mathbb{R}^3$, onde x é a projeção de P no eixo X, y é a projeção de P no eixo Y e z é a projeção de P no eixo Z.

Entretanto, ao representarmos um ponto $P = (x, y, z)$ pertencente a uma esfera, pode ser mais conveniente fazê-lo como uma tripla $P = (r, \alpha, \theta)$, de modo que:

r: é a distância de P à origem O da esfera;

α: é o ângulo entre a projeção de $\overrightarrow{OP}$ no plano OXY e o eixo X; e

θ: é o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o plano OXY.

Para utilização futura, denotaremos r de raio, α de longitude e θ de latitude. Vide Figura 19.

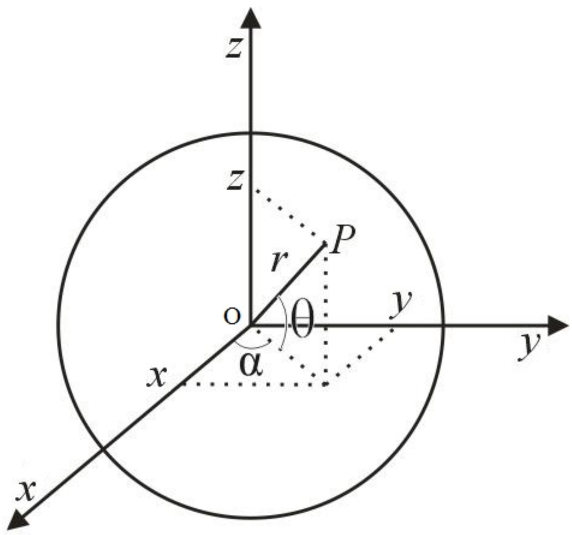


Figura 19: Longitude α e latitude θ em uma esfera de raio r.

Fonte: Autor (2014)

Vale salientar que, em cursos de graduação de Matemática e Engenharias, a latitude é o ângulo formado entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo OZ. Esse fato se deve ao fato de ser mais fácil obter o ângulo entre duas retas do que entre uma reta e um plano. Essa representação dada à Figura 19 é utilizada para manter o padrão representado nos livros de Geografia dos alunos.

As coordenadas esféricas de um ponto $P \in E$, e sua representação cartesiana são tais que

$$P = (r, \alpha, \theta) = (x, y, z) = (r\cos\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\theta)$$

Para mostrar as relações que formam esse ponto $P = (r\cos\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\theta)$

da esfera, basta analisarmos a Figura 20, e utilizarmos relações trigonométricas no triângulo retângulo, que seguem:

No triângulo OXP', $OP' = r\cos\theta$, $OX = r\cos\alpha\cos\theta$ e $XP' = OY = r\sin\alpha\cos\theta$ e, pelo triângulo OPP', $PP' = OZ = r\sin\theta$

Em particular para a Terra, consideraremos as intersecções entre os planos OXZ e OXY e a esfera como sendo o Meridiano de Greenwich e a Linha do Equador, respectivamente.

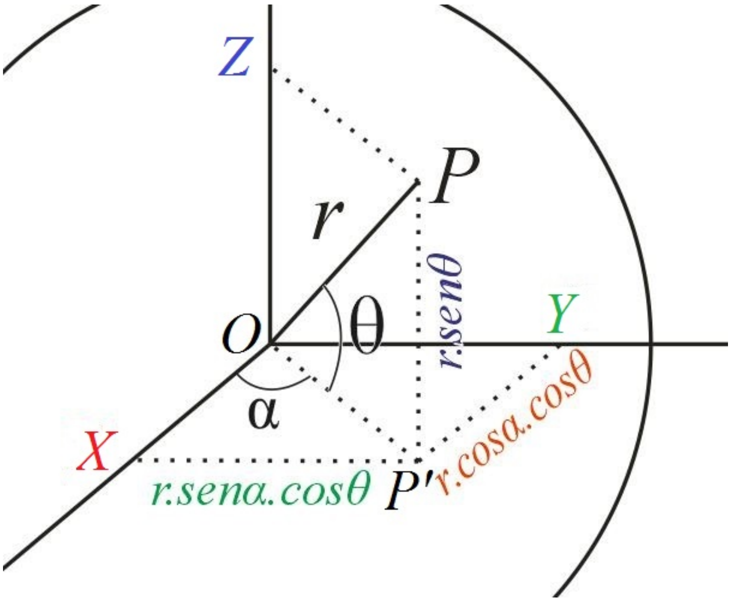


Figura 20: Coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto da superfície esférica.

Fonte: Autor (2014)

A seguir, serão definidos dois importantes elementos da Álgebra, que facilitarão a compreensão e os cálculos das distâncias na esfera: a norma de um vetor e o produto interno. Antes disso, ainda, precisamos definir o que é uma métrica e um espaço métrico.

Definição 2.5. *Métrica e Espaço Métrico: Uma métrica num conjunto A é uma função* $d : A \times A \to \mathbb{R}$*, que associa a cada par ordenado* $(x,y) \in A$ *um número real* $d(x,y)$*, chamado distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as propriedades:*
p1) $d(x,x) = 0$
p2) Se $x \neq y$*, então* $d(x,y) > 0$
p3) $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetria)*
p4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(desigualdade triangular)*

Um Espaço Métrico é um par (A,d)*, onde A é um conjunto e d é uma métrica de A.*

Dois exemplos de espaço métrico são:

- a **reta**, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais juntamente com a métrica definida por $d(x,y) = |x-y|$

- o **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^3$, com a distância entre dois pontos, x e y, no espaço tridimensional, dada por $d(x,y) = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$, onde $x = (a,b,c)$ e $y = (d,e,f)$.

Definição 2.6. *Norma de um vetor: Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real* $||\ || : E \to \mathbb{R}$ *que associa a cada vetor* $\overrightarrow{u} \in E$ *o número real* $||\overrightarrow{u}||$*, chamado norma de* $\overrightarrow{u}$*. Sendo* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in E$ *e* α *real, as condições abaixo devem ser satisfeitas:*
c1) Se $\overrightarrow{u} \neq 0$*, então* $||\overrightarrow{u}|| \neq 0$
c2) $||\alpha \cdot \overrightarrow{u}|| = |\alpha| \cdot ||\overrightarrow{u}||$
c3) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$

Temos como exemplo de espaço vetorial normado o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (exemplificado acima), de modo que: $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, para $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$, ou seja, num espaço vetorial normado, $||\overrightarrow{u}|| = d(\overrightarrow{u}, 0)$, isto é, a norma de um vetor é a sua distância até a origem. De modo geral, a norma induz uma métrica, definindo-se $d(x,y) = ||x-y||$. Assim, todo espaço vetorial normado torna-se um espaço métrico.

Definição 2.7. *Produto interno: Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função* $<\ ,\ >: E \times E \to \mathbb{R}$ *que associa a cada par ordenado de vetores* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in E$ *um número* $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$*, chamado produto interno de* $\overrightarrow{u}$ *por* $\overrightarrow{v}$*. Sendo* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w} \in E$ *e* α *real, devem ser satisfeitas as condições abaixo:*
c1) $< \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} > = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} >$
c2) $< \alpha \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = \alpha \cdot < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$
c3) $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
c4) Se $\overrightarrow{u} \neq 0$*, então* $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} > > 0$

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $\overrightarrow{u} \in E$ como

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >} \Leftrightarrow ||\overrightarrow{u}||^2 = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >$$

O exemplo mais clássico de espaço vetorial com produto interno, segundo (LIMA, 1977, p.6) é o $\mathbb{R}^3$, sendo que, para $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ e $\overrightarrow{v} = (d,e,f)$, temos

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

.

Podemos ainda representar o ângulo entre os vetores através de seu produto interno. Observe a Figura 21 a seguir, para os vetores $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ e $\overrightarrow{v} = (d,e,f)$

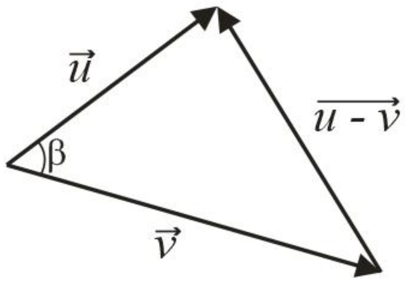


Figura 21: Diferença entre os vetores.

Fonte: Autor (2014)

Pelo Teorema dos Cossenos,

$$||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - 2.||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos\beta \Rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u-v}||^2}{2.||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-[(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2]}{2.||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)+2.(ad+be+cf)}{2.||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||} \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left[\frac{ad+be+cf}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||}\right] \Longleftrightarrow \beta = \arccos\left[\frac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||}\right]$$

Para o caso específico de dois vetores, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pertencentes a uma esfera com raio r, obtemos: $\beta = \arccos\left[\dfrac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>}{r^2}\right]$

Além disso, como esse ângulo obtido é central, tem medida equivalente ao arco de círculo máximo. Assim, para determinar a distância entre as cidades, usa-se proporcionalidade entre o comprimento da circunferência máxima, com seu ângulo total de 360^o, e o comprimento da geodésica, com o ângulo β, calculado.

Por exemplo, vamos calcular a distância entre duas cidades: Buenos Aires, na Argentina e Berlim, na Alemanha, com coordenadas geográficas $34^o36'47''$ S, $58^o22'38''$ O e $52^o31'27''$ N,$13^o24'37''$ L, respectivamente. (Fonte: *http://www.distanciasentre.com*)

Convertendo os ângulos para a forma decimal, supondo o raio da Terra 6371 km e analisando seu sinal, temos as coordenadas esféricas:

Buenos Aires: $(r,\alpha,\theta) = (6371;\ -58,376^o;\ -34,613^o)$

Berlim: $(r,\alpha,\theta) = (6371;\ 13,41^o;\ 52,523^o)$

Após isso, obtém-se as coordenadas cartesianas dessas cidades, representadas pelos vetores a seguir:

Buenos Aires: $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1) = (2749,32;\ -4464,77;\ -3618,92)$

Berlim: $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2) = (3770,7;\ 899,0;\ 5056,01)$.

Seguinte a isso, calcula-se o produto interno entre os dois vetores:

$$< \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v} >= (x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + x_3 \times y_3) =$$

$$(2749,32 \times 3770,7) + (-4464,77 \times 899,0) + (-3618,92 \times 5056,01) = -11944263,02$$

Assim, $\beta = \text{arccos}\left[\dfrac{-11944263,02}{6371^2}\right] = -0,294268752 \Rightarrow \beta = 107,11369^o$

Mas, se uma circunferência máxima da Terra mede $2.\pi.6371 = 40030,17\ km$, então o arco $\beta = 107,11369^o$ medirá $40030,17.\dfrac{107,11369^o}{360^o} = 11910,5$ km

Segundo o site **Distance.to** (*http://br.distance.to*), a distância entre as cidades é de 11911,96 km, ou seja, uma variação de cerca de $0,012\%$. Essa diferença provém das aproximações utilizadas tanto nas transformações de coordenadas, quanto no raio do planeta. Vale lembrar ainda que a Terra não é perfeitamente esférica (seria melhor modelada como uma elipsoide) e, portanto, seu raio vaira de 6357 km (raio polar) e 6378 km (raio equatorial).

A figura 22 a seguir ilustra a tela do site mencionado, mostrando a trajetória geodésica entre as cidades, que é diferente do segmento de reta no mapa.

Na sequência, será explicitado o desenvolvimento do projeto, detalhando as atividades realizadas com os alunos, a metodologia empregada, os objetivos a serem alcançados e os materiais utilizados, ou seja, um roteiro para que outros professores possam utilizar esse material com seus alunos. Em seguida, se faz análise dos resultados obtidos com sua aplicação e

Figura 22: Layout do site Distance.to que indica a distância entre Buenos Aires e Berlin.

Fonte: Distance.to (2014)

sugestões/correções para aplicações futuras.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 ATIVIDADES

As atividades propostas aos alunos da segunda série do Ensino Médio consistiram em três listas de exercícios, produções próprias, enfatizando a região na qual está localizada a escola, e que serão explicitadas superficialmente a seguir. Uma explanação mais detalhada será dada na seção Desenvolvimento das Aulas e Análise dos Resultados.

A atividade 1 consistiu em partes num diagnóstico do conhecimento dos alunos, contendo perguntas referentes à geometria euclidiana e conceitos mais básicos, como escala. A outra parte foi experimental, pretendendo estimular a curiosidade dos alunos ao trabalhar com uma questão atípica até então, utilizando uma bola de isopor, mostrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo (esférico) é maior de 180º.

Para essa atividade, os alunos foram dispostos individualmente em suas carteiras, permitindo para a questão 2 que disutissem em grupos de até quatro pessoas. O objetivo desse primeiro trabalho foi retomar conceitos já estudados pelos educandos e analisar sua capacidade de gerar conjecturas no exercício da bola de isopor, defendendo suas respostas e posicionamentos ao se comparar com os demais alunos.

Os materiais necessários para sua execução foram: as folhas com as atividades, bolas de isopor (com diâmetro 6 cm já são suficientes), lápis, borracha, transferidor de graus e régua (daquelas flexíveis, que facilitam o traçado dos triângulos esféricos).

Após esse desenvolvimento, foram iniciados os trabalhos com geometrias diferentes da de Euclides. Na Atividade 2, questionou-se definições num primeiro momento básicas e diretas da geometria (plana), mas no âmbito esférico. Foram solicitadas, também, atividades relacionadas a conceitos geográficos, como latitude e longitude, além dos primeiros cálculos que envolvem distâncias na esfera.

Para essa atividade, os tópicos foram trabalhados de maneira expositiva, utilizando o quadro de giz e o projetor de slides, ilustrando os conceitos de cartografia: latitude, longitude, meridianos e paralelos. Os objetivos da aplicação dessa segunda folha de exercícios eram fazer com que os alunos tenha uma leitura correta do significado das coordenadas geográficas de qualquer lugar na Terra, compreender a diferença entre conceitos primitivos da geometria, plana e elíptica, e saber os conceitos de ângulo central e comprimento de circunferência, a fim de calcular distâncias entre cidades pertencentes a um mesmo círculo máximo da Terra, considerada esférica e, assim, um caso particular na geometria elíptica.

Além do quadro de giz e do projetor de slides, acima citados, necessitou-se para a execução dessa etapa de um microcomputador, lápis, borracha, régua e calculadora simples (mesmo a maioria dos alunos já estarem com suas calculadoras científicas em mãos, estas que seriam usadas na atividade 3, seguinte).

Já na Atividade 3, os cálculos relacionados com o produto interno, demonstrado nas aulas foram aplicados. Inicialmente de maneira mais direta, apenas para exercitar o que foi aprendido. Em seguida, estes conceitos foram sendo aprofundados, necessitando fazer a conversão das coordenadas geográficas de pontos específicos do planeta em coordenadas esféricas e cartesianas. Seguindo esse raciocínio, usou-se novamente o produto interno, aí sim, para obter a distância entre dois pontos quaisquer da Terra.

Essa atividade final também foi desenvolvida, inicialmente, de maneira expositiva, novamente com o auxílio do quadro de giz e do projetor de slides. Foram explicitadas as definições que envolvem vetores, o produto interno e a determinação do ângulo entre os vetores, que de maneira especial foi aplicado para determinar o comprimento da geodésica que une duas cidades. Já os alunos, para resolver a folha 3 de atividades, foram dispostos em duplas ou trios e, ao serem entregues tais folhas, o acompanhamento das resoluções foi feito mais de perto. Pequenos erros em relação a sinais, arredondamentos e manejo da calculadora científica foram ajustados para otimizar as respostas a serem dadas.

Objetivava-se com essa atividade, de maneira primordial, que os alunos usassem os conceitos vetoriais para descobrir a distância entre dois pontos na esfera. Os materiais utilizados foram exatamente os mesmos para a atividade 2, claro que agora com a obrigatoriedade de se usar a calculadora científica.

Fica a cargo do professor que por ventura venha a utilizar esse material modificar essa metodologia. Talvez enfatizar a resolução de exercícios de aprofundamento e deixar as atividades 1, 2 e 3 como instrumento avaliativo seja uma alternativa.

Na seção seguinte, será dada uma ênfase maior nas atividades aplicadas e nos resultados obtidos. Recortes das questões serão posicionados no decorrer do texto, para situar melhor o leitor sobre o que foi pedido. As atividades completas, disponíveis para professores poderem aplicar a seus alunos, ou extrair as ideias centrais para produzirem suas próprias atividades, serão dispostas no apêndice desse trabalho.

3.2 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

As atividades do projeto aconteceram nas quintas feiras, no período vespertino, contraturno das aulas normais, para um grupo de 21 alunos da segunda série do Ensino Médio do Colégio Excelência, de Mafra-SC, que se dispuseram a participar, de maneira voluntária e desvinculada de acréscimo de nota em suas médias, das 13h30min às 16h. Em virtude de se tratar de uma escola particular, com material de uma franquia e com calendário e cronograma de provas preestabelecidos, não foi possível trabalhar com toda a turma no período matutino.

A Tabela 1 a seguir representa o cronograma das atividades realizadas, num total de 12 quintas-feiras.

Tabela 1: Cronograma das atividades realizadas

Semana	Data	Atividade Realizada
1	12/set	Introdução e objetivos do trabalho; aplicação da Atividade 1.
2	19/set	Entrega da Atividade 1; comentários.
3	26/set	Revisão de trigonometria.
4	03/out	Conceitos de cartografia.
5	10/out	Aplicação da Atividade 2.
6	17/out	Entrega da Atividade 2; comentários.
7	24/out	Vetores: Conceitos iniciais, operações.
8	31/out	Coordenadas esféricas e cartesianas.
9	07/nov	Demonstração da fórmula do ângulo entre dois vetores
10	14/nov	Determinação da distância entre dois pontos na esfera; exercícios.
11	21/nov	Aplicação da Atividade 3.
12	28/nov	Entrega da Atividade 3; comentários e considerações finais

3.2.1 ETAPA I - SEMANAS 1 A 4

Num primeiro momento, não foi explicitado aos alunos quais eram os objetivos finais das aulas, apenas foi-lhes dito que era um trabalho relacionado a Geometria.

Seguido a isso foram entregues as folhas relativas a Atividade 1 (vide Apêndice A) e as bolas de isopor necessárias para realizar um dos exercícios. Essa atividade consistiu num diagnóstico sobre o conhecimento prévio desses alunos a respeito de tópicos de geometria euclidiana.

Para a questão 1, era esperado um acerto total dos três itens: a, b e c. Entretanto, ao se perguntar sobre a menor distância entre dois pontos, 8 alunos responderam apenas *uma reta*, ao invés de *o segmento de reta que une os dois pontos* ou outra resposta semelhante. Já para os itens a e c, sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo e definições de reta e segmento de reta, não houveram problemas.

1) De acordo com seus conhecimentos de Geometria até hoje, responda:
   a) Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo?
   b) Qual a menor distância entre dois pontos?
   c) Qual a definição de reta e segmento de reta? A reta é infinita? É ilimitada?

Figura 23: Questão 1, atividade 1.

Fonte: Autor (2014)

A questão 2 consistiu de uma atividade prática com a bola de isopor que lhes foi entregue: marcar três pontos, uní-los, utilizando as réguas flexíveis, medir os ângulos formados e determinar sua soma. Como esperado, essa primeira parte procedeu de maneira correta, para os itens a, b e c. Para responder os dois últimos itens, d e e, foi pedido para que ele interagissem uns com os outros e fizessem comparações com as respostas das somas obtidas. Nesse momento começou a despertar nos alunos a curiosidade em razão da diversidade de respostas: $2/3$ dos alunos obtiveram respostas entre 240^o e 360^o; 4 obtiveram valores entre 180^o e 220^o e os outros 3 entre 360^o e 480^o.

Para o item *e* que correspondia ao intervalo de variação dessa soma, esperava-se que os alunos respondessem *valores compreendidos entre* 180^o *e* 540^o. Porém, as respostas não foram satisfatórias. O grupo todo respondeu de maneira incompleta, mas não totalmente errada. Respostas como *maior que* 180^o e *menor que* 360^o apareceram em 16 das 21 atividades. Além disso, as outras respostas foram distintas, mas nunca com limite inferior e superior. Vide Figura 24

A Tabela 2 indica a distribuição das respostas dadas na questão 2, item *e*, enquanto que a figura 25 ilustra algumas das bolas de isopor entregues pelos alunos com a atividade proposta.

Foi verificado que, para essa atividade prática, poderia ter sido oferecido elásticos aos alunos, além das bolas de isopor, que teria facilitado na construção dos triângulos esféricos e na medição dos ângulos.

2) Na bola de isopor que lhe foi fornecida, marque três pontos quaisquer. Unindo esses pontos formamos o que chamamos de triângulo esférico. Com o auxílio de um transferidor de graus, determine o valor de cada ângulo interno desse triângulo e, em seguida, sua soma.

a) Qual o valor da soma obtida?

b) O que você pode observar em relação a resposta dada no item 'a' da questão 1 com o item 'a' da questão 2?

c) Você consegue explicar o fato da resposta do item 'a' não ser a tradicional?

d) Compare as respostas obtidas em relação ao item 'a' da questão 2 com seus colegas. São iguais?

e) Você consegue determinar o intervalo de variação das respostas obtidas?

Figura 24: Questão 2, atividade 1.

Fonte: Autor (2014)

Tabela 2: Tabela de distribuição dos intervalos encontrados para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Variação	Quantidade de Respostas
$[180^o;240^o[$	4
$[240^o;300^o[$	9
$[300^o;360^o[$	5
$[360^o;420^o[$	2
$[420^o;480^o[$	1
$[480^o;540^o[$	0

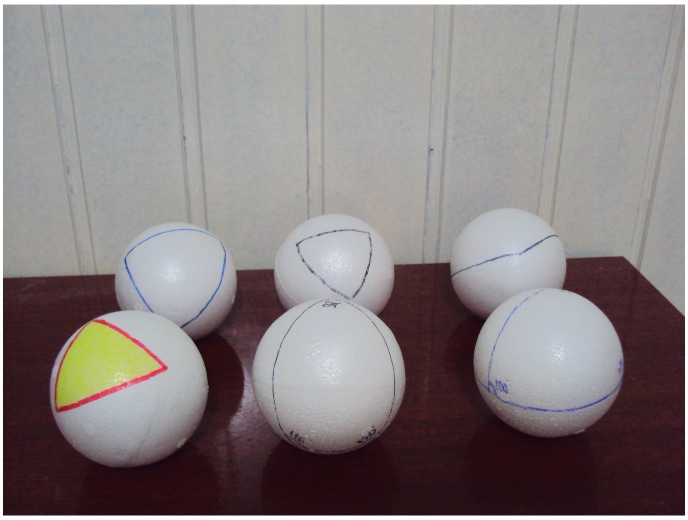


Figura 25: Algumas das representações do triângulos esféricos entregues pelos alunos.

Fonte: Autor (2014)

A questão 3 referia-se a escalas de um mapa. Por se tratar de um tópico trabalhado com os educandos no ano anterior, no conteúdo *Razões e Proporções* e ter um baixo grau de dificuldade, não houveram grandes divergências nas respostas obtidas em relação aos valores corretos. Essas divergências surgem naturalmente em virtude das aproximações utilizadas no momento da medição da distância entre as cidades no mapa.

3) Dado o mapa abaixo, que está na escala **1 : 30.000.000**, determine a distância linear entre as cidades de:

a) Brasília e Rio de Janeiro:

b) Brasília e Florianópolis:

Figura 26: Questão 3, atividade 1.

Fonte: Autor (2014)

Na semana seguinte foram entregues as atividades aos alunos e feitos alguns comentários sobre as respostas dadas. Assim como se esperava, a questão *2 'e'* prendeu a atenção dos educandos quando foi dito que a variação da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está entre 180^o e 540^o.

Dessa forma, foram levados para essa aula uma bola de isopor maior e elásticos para tentar explicar o por quê desses valores. Construímos então, dois triângulos, um com os vértices muito próximos, que o deixou quase plano, e outro com os três vértices o mais afastados possível, mas muito próximos de uma circunferência máxima, supondo então, que se fosse possível colocar os vértices sobre esse mesmo círculo, teríamos três ângulos rasos, totalizando 540^o. A Figura 27 a seguir mostra a bola de isopor e os dois triângulos utilizados na explicação anterior. Entretanto, pela imagem o triângulo com soma próxima a 540^o não fica totalmente visível.

As duas semanas que seguiram foram dedicadas a retomadas de conteúdos já conhecidos pelos alunos. Dentre eles, revimos tópicos de trigonometria no triângulo retângulo e em triângulos quaisquer (especialmente o teorema dos cossenos) e ângulos (submúltiplos do grau e operações). Além disso, foram trabalhados conceitos de cartografia, como latitude e longi-

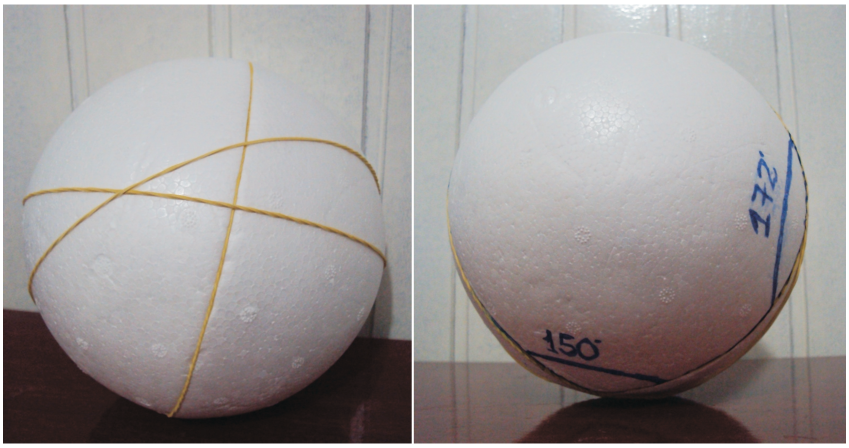


Figura 27: Representação dos triângulos com somas próximas dos valores mínimo e máximo.
Fonte: Autor (2014)

tude, meridianos e paralelos da Terra, procedendo de maneira natural, visto que o professor da disciplina de Geografia já os havia ensinado, cerca de dois meses antes.

Aproveitando a explicação de cartografia, foi definido com os alunos os conceitos de reta e segmento de reta na esfera, associando às linhas imaginárias da Terra. Diferentemente do que se esperava, não houve indagação dos educandos quando dito que todos os meridianos representavam retas, mas que dos paralelos apenas a Linha do Equador era uma reta. E isso acabou não sendo prejudicial, visto que seria retirada essa dúvida na prática, na Atividade 3, que será comentada a seguir.

Com esses assuntos tratados, estavam aptos a realizar a Atividade 2 (vide Apêndice B), na quinta feira seguinte.

3.2.2 ETAPA II - SEMANAS 5 A 10

A questão número 1 desta atividade foi bastante trivial, retomando a questão 1 da atividade anterior e comparando as geometrias. Visto que esses assuntos foram abordados e enfatizados em semanas anteriores — definições de reta e segmento de reta no plano e na esfera, não houveram erros nas respostas dadas. As respostas do item *b*, subitem *ii*, apareceram diferentes, mas representavam a mesma ideia: 15 responderam *"arco de circunferência máxima"*; 4 responderam apenas *"Geodésica"*; um aluno respondeu de maneira mais detalhada *"um arco de circunferência máxima da Terra, chamada Geodésica"* e um último de maneira mais informal respondeu *"uma fração de uma circunferência da Terra, mas não qualquer circunferência, a maior possível"*. Essa questão está ilustrada a seguir, na Figura 28.

1) Agora, com os conhecimentos que você tem sobre Geometria Não Euclidiana, especialmente na Geometria Esférica, responda:
   a) Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo:
      i) No plano?
      ii) Na esfera?
   b) Qual a menor distância entre dois pontos:
      i) No plano?
      ii) Na esfera?
   c) Qual a definição de reta e segmento de reta na esfera? A reta é infinita? É ilimitada?

Figura 28: Questão 1, atividade 2.

Fonte: Autor (2014)

A questão 2 possuía um aspecto geográfico importante, a interpretação das coordenadas geográficas de uma cidade na Terra. Foi-lhes pedido para escrever o que significa a sentença: *As coordenadas geográficas da cidade de Mafra-SC são: 26°10'21" S e 49°55'51" O*. É claro que com termos diferentes, mas todos conseguiram se expressar de maneira correta. Além disso, essa questão pediu para que representassem aproximadamente a cidade de Mafra-SC num globo ilustrado na sequência. Nessa etapa também todos obtiveram êxito. Entretanto, em uma das atividades, a representação ficou mais detalhada. O aluno, ao invés de apenas marcar o ponto para identificar a cidade, traçou um meridiano e um paralelo correspondentes à cidade, e enfatizou: *"Mafra se localiza na intersecção entre o paralelo 26°10' S e o meridiano 49°55' O"*.

2) Explique o que significa dizer que as coordenadas da cidade de Mafra-SC são: 26°10'21" S e 49°55'51" O ? Represente aproximadamente a cidade de Mafra-SC no globo terrestre abaixo.

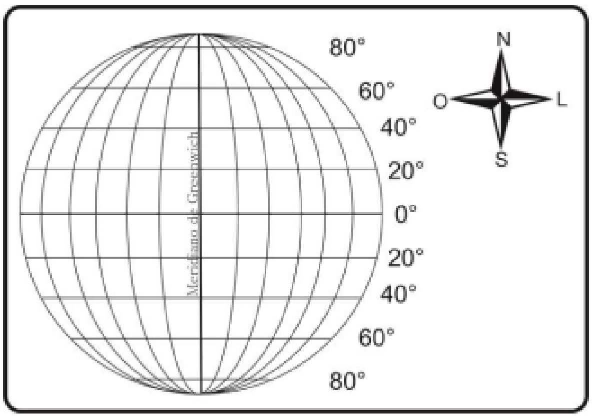


Figura 29: Questão 2, atividade 2.

Fonte: Autor (2014)

A Figura 30 mostra duas respostas representadas pelos alunos, uma mais elaborada *(i)*, descrita acima e a outra trivial *(ii)*.

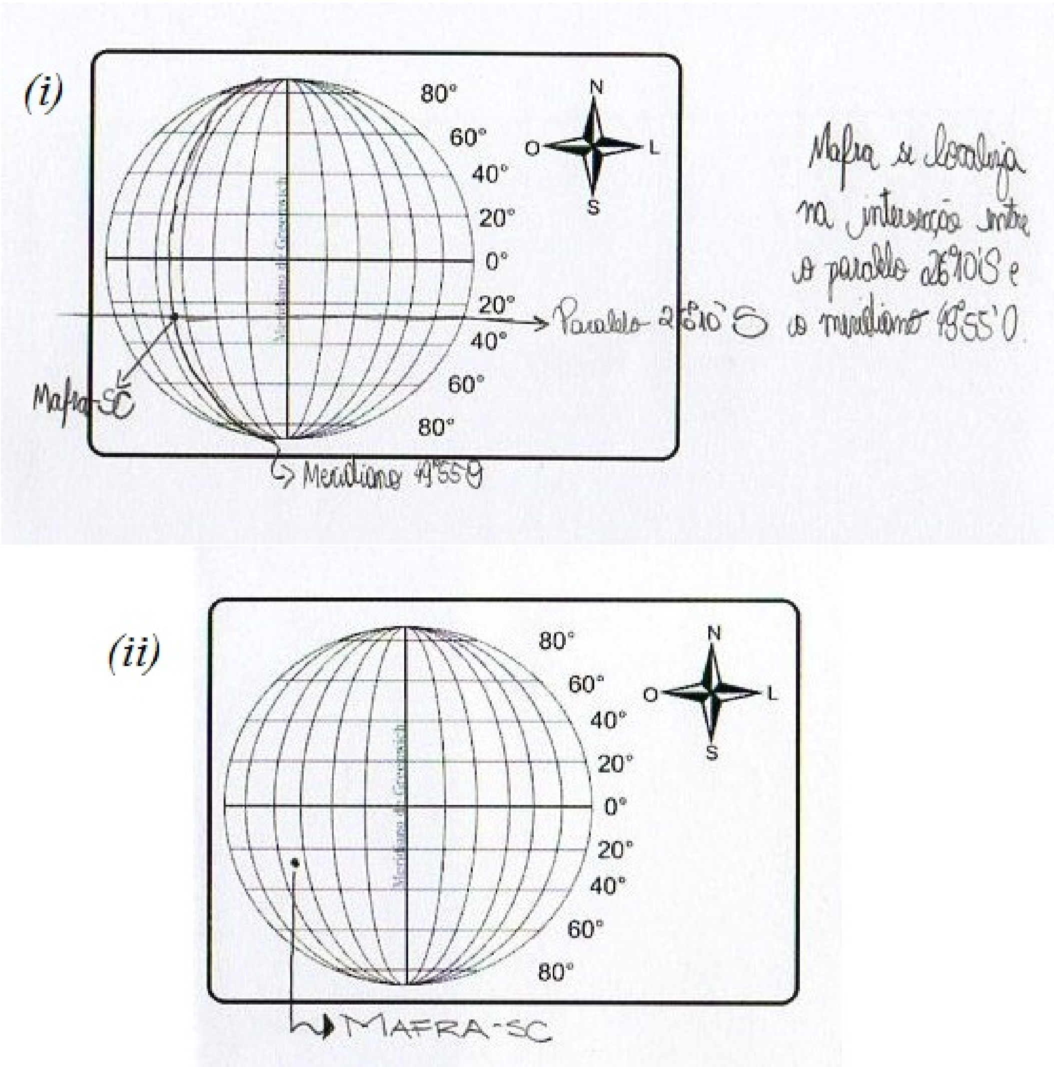


Figura 30: Representações aproximadas da cidade de Mafra-SC, realizadas por dois alunos. Fonte: Autor (2014)

As questões 3 e 4 eram semelhantes, pois pediam a distância entre duas cidades que se localizavam em um mesmo círculo máximo: Mafra-SC e Chaves-PA com mesma longitude (cerca de 49°55' O) e Macapá-AP e Pontianak-Indonésia sobre a Linha do Equador. Essas questões deveriam ser resolvidas através do cálculo do comprimento de um arco de circunferência, utilizando a soma ou a subtração das coordenadas geográficas (latitudes na questão 3 e longitudes na questão 4)

Dezoito alunos acertaram ambas as questões, diferindo as respostas em cerca de um quilômetro. Essas discrepâncias surgem em razão dos arredondamentos utilizados na conversão dos ângulos para suas representações decimais. Os outros 3 alunos erraram uma das duas

3) Considerando que as cidades de Mafra-SC e Chaves-PA localizam-se praticamente na mesma longitude (cerca de 49°55' O) e que a Terra seja perfeitamente esférica com raio 6400 quilômetros, determine a menor distância entre as cidades. Dados: Latitude de Mafra-SC: *26°10'21"S* e de Chaves-PA: *0°9'37"S*.

Figura 31: Questão 3, atividade 2.

Fonte: Autor (2014)

4) Considerando que as cidades de Macapá-AP e Pontianak-Indonésia localizam-se praticamente sobre a linha do Equador (Latitude zero) e que a Terra seja perfeitamente esférica com raio 6400 quilômetros, determine a menor distância entre as cidades. Dados: Longitude de Macapá-AP: *5°04' O* e de Pontianak-Indonésia: *109°20' L*.

Figura 32: Questão 4, atividade 2.

Fonte: Autor (2014)

questões: um acertou a questão 3 e errou a 4, e os outros dois fizeram o oposto. Todavia, o erro cometido foi semelhante. A questão 3 pedia para calcular a distância de duas cidades que se situavam numa mesma longitude e, por estarem ambas no hemisfério sul, suas latitudes deveriam ser subtraídas, ao invés de somadas, como fez o aluno. Analogamente, a questão 4 pedia a distância entre duas cidades de mesma latitude, mas que situavam em lados opostos ao meridiano de Greenwich, portanto suas longitudes deveriam ser somadas, diferentemente do que aconteceu.

Na quinta feira seguinte, as atividades foram devolvidas e os exercícios comentados, enaltecendo a brilhante resolução da questão 2 feita por um dos alunos ao enfatizar a posição da cidade de Mafra-SC numa representação no globo e, principalmente, explicando aos alunos quando se somam e quando se subtraem os ângulos das coordenadas. Para isso, fez-se uma associação com a distância entre pontos pertencentes à reta real. Se estão em lados iguais à origem, subtrai-se, caso contrário, soma-se.

A partir deste momento, os assuntos referentes a geometria esférica, de maneira mais específica e aprofundada, começaram a ser desenvolvidas. Conceitos iniciais sobre vetores (definição, representação e operações) foram revisadas, visto que já haviam tido este conteúdo com o professor de Física. Primeiramente, estudou-se vetores no plano. Relembramos propriedades do paralelogramo para definir equipolência, o Teorema de Pitágoras para determinar a distância entre dois pontos no plano e, consequentemente, definimos norma de um vetor. Posterior a isso, utilizamos o Teorema dos Cossenos, revisto na semana 3, para desenvolver uma expressão que determina o ângulo entre dois vetores com origem comum. Exercícios para fixação foram passados e, concluindo este encontro, as relações obtidas foram generalizadas para vetores no espaço.

Na semana posterior, os trabalhos se basearam nos vetores diretamente ligados à esfera. Construímos, no quadro de giz, uma esfera centrada na origem de um sistema tridimensional de coordenadas. Através da definição de esfera, desenvolvemos sua equação cartesiana, lembrando que cada ponto de sua superfície, aplicado a esta equação, torna-a uma sentença verdadeira.

Na sequência, utilizamos os conceitos de latitude e longitude da cartografia para representar um ponto da superfície esférica não mais como uma terna *(x,y,z)* relativa às projeções nos eixos, mas sim por meio destes termos cartográficos e de seu raio. Assim, definimos coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto e as definimos, utilizando relações elementares de trigonometria no triângulo retângulo. Visto que, nas aulas, esses significado geográficos ficaram bem explicitados, não se tiveram problemas para a realização desse exercício.

Foi fixado com os alunos que o plano *OXZ* seria aquele utilizado como a origem da contagem da longitude e o plano *OXY* para a latitude. Nesse momento, um dos alunos indagou se outro plano poderia ser utilizado para tal e, respondendo afirmativamente, pode ser dado a eles noções de rotação e translação dos eixos, que podem ser realizadas, desde que os referenciais das coordenadas sejam alterados. Para o planeta Terra, fixamos o plano *OXZ* como aquele que contém o Meridiano de Greenwich e o plano *OXY* a Linha do Equador.

Os trabalhos dessa semana foram encerrados transformando as coordenadas geográficas da cidade de Mafra-SC (26°10' S; 49°55' O) em coordenadas esféricas e cartesianas, considerando a Terra perfeitamente esférica, com raio 6400 km. Desenvolvido junto com os alunos, convertemos a latitude e a longitude para graus decimais e analisamos seus sinais. Na sequência, substituímos na expressão genérica das coordenadas cartesianas e encerramos este encontro.

Seguindo com os tópicos de coordenadas esféricas e cartesianas, a semana seguinte se baseou em determinar a distância entre dois pontos da esfera. Particularmente, a menor distância entre duas cidades distintas da Terra, através da geodésica que as contém.

Inicialmente, foi mostrado que unindo o centro da Terra a cada ponto de sua superfície, obtemos um vetor (com norma 6400 km, a medida considerada como raio do planeta). Posterior a isso, escolhemos duas cidades: Buenos Aires e Berlim, com coordenadas $34^o36'47''$ S, $58^o22'38''$ O e $52^o31'27''$ N, $13^o24'37''$ L, respectivamente. Convertemos essas coordenadas geográficas para esféricas e cartesianas e calculamos o ângulo entre os vetores, sobre os quais as cidades são extremos, com origem comum no centro da Terra. Esse ângulo foi calculado através do produto interno (Definição 2.8).

Como o ângulo central corresponde ao arco do círculo que ele delimita, foi possível determinar a distância entre as cidades através de proporcionalidade com o comprimento total de uma circunferência máxima. Em seguida, foi proposto aos alunos que pesquisassem e elegessem duas cidades para que se calculasse sua menor distância.

Acompanhando as resoluções, pode-se observar que a maior dificuldade foi a determinação do produto interno, não por ser uma relação complexa, mas por utilizar valores com várias casas decimais numa sequência de somas e produtos. Sendo assim, foram passadas algumas dicas para melhor utilização da calculadora científica, como as teclas de memória e de parênteses; que facilitam a resolução de uma expressão matemática. Nesse quesito, a utilização de uma planilha eletrônica facilitaria e agilizaria as resoluções, otimizando o tempo para discussões e retirada de outras dúvidas.

Após concluída essa atividade, foram retiradas as dúvidas e encerramos a aula, informando-lhes sobre a aplicação da última atividade, na semana seguinte.

3.2.3 ETAPA III - SEMANAS 11 E 12

A Atividade 3 (vide Apêndice C) iniciou com uma questão puramente mecânica: determinar o produto interno e o ângulo entre dois vetores em $\mathbb{R}^3$ dados. Todos os alunos resolveram de maneira correta, mas o item *b* foi apresentado de maneiras distintas. Por ser permitida a utilização da calculadora, 5 alunos não deixaram a resposta da forma prevista inicialmente, $\alpha = \text{arccos}\dfrac{\sqrt{10}}{35}$, mas sim descobrindo seu valor aproximado em graus, $\alpha \approx 84,816^o$, com a tecla "$\cos^{-1}$". Foi comentado na entrega da atividade que, já que a aproximação foi feita, poderiam ter utilizado os submúltiplos do grau, deixando a resposta na forma $\alpha \approx 84^o48'58''$.

1) Considere os vetores no espaço definidos por $\vec{v} = (3,2,1)$ e $\vec{w} = (1,-3,5)$. Determine:
   a) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.
   b) O ângulo entre os vetores.

Figura 33: Questão 1, atividade 3.

Fonte: Autor (2014)

A questão 2 pediu para que os alunos transformassem as coordenadas geográficas da cidade de Paris em coordenadas esféricas. Nenhum problema ocorreu, visto que os valores eram inteiros e, além disso, como a cidade está localizada nos hemisférios Norte e Leste, possui sinais positivos nas suas coordenadas cartesianas. Essa questão poderia ter sido subdividida em dois itens, *a* e *b*, afim de aumentar seu grau de complexidade, pedindo para converter as coordenadas de outra cidade, com valores não inteiros e não positivos, para analisar o comportamento dos alunos em sua resolução.

2) Considere a cidade de Paris, na França, com coordenadas 48° N e 9° L. Supondo a Terra perfeitamente esférica com raio 6400 km, centrada na origem de um sistema de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ; transforme suas coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas.

Figura 34: Questão 2, atividade 3.

Fonte: Autor (2014)

As questões 3, 4 e 5 se basearam numa mesma situação problema: determinar a distância entre duas cidades sobre um mesmo paralelo, nesse caso, sobre o Trópico de Capricórnio. Primeiramente, foi pedido para que se calculasse a distância percorrida sobre o Trópico, com uso de trigonometria no triângulo retângulo. Seguido a isso, foi pedido para calcular pela geodésica e, por fim, fazer um comparativo entre as respostas encontradas.

3) As cidades de Maringá-PR e Sorocaba-SP são 'cortadas' pelo Trópico de Capricórnio, paralelo que divide as Zonas Tropical Sul e Temperada Sul da Terra. Sua latitude é 23°26'16" S. Determine a distância entre essas cidades, se for percorrido um trajeto sobre o Trópico e se a Terra for uma esfera perfeita de raio 6400 km. Dados: cos(23°26'16") = 0,8954; longitude de Maringá-PR: *51°56' O* e de Sorocaba-SP:*47°45' O*.

Figura 35: Questão 3, atividade 3.

Fonte: Autor (2014)

4) Agora, transforme as coordenadas geográficas da questão anterior em coordenadas cartesianas, com o centro da Terra na origem de um sistema tridimensional de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ. A seguir, calcule através de produtos internos a distância entre as cidades de Maringá e Sorocaba.

Figura 36: Questão 1, atividade 4.

Fonte: Autor (2014)

5) Qual distância foi a menor? O que você consegue concluir a respeito de distâncias entre cidades num mesmo paralelo? E entre duas cidades quaisquer?

Figura 37: Questão 5, atividade 3.

Fonte: Autor (2014)

Infelizmente o resultado não foi satisfatório, por dois motivos principais: as cidades de Maringá-PR e Sorocaba-SP são bastante próximas (a geodésica que as une representa cerca de 1,13% de uma circunferência máxima) e, como consequência disso e o fato dos alunos usarem poucas casas decimais, o resultado foi o oposto ao esperado. Isso fez com que a resposta da questão 5 contrariasse tudo o que havia sido trabalhado nas aulas, ou seja, os cálculos mostravam que o arco de círculo máximo não é o menor caminho entre dois pontos da esfera.

Para reparar esse erro, na semana seguinte essa questão foi refeita, utilizando a calculadora científica do computador, com todas as casa decimais fornecidas (cerca de 30, contra as 8 ou 10 casas decimais das calculadoras científicas dos alunos). Dessa vez a resposta foi a esperada e reforçou-se a definição de geodésica. Mesmo assim, a diferença entre as respostas foi pequena: a distância percorrida pela geodésica foi cerca de 4 % menor que a percorrida pelo paralelo. A Figura 38 a seguir ilustrou essa situação, com outras duas cidades: Nova Iorque e Madri.

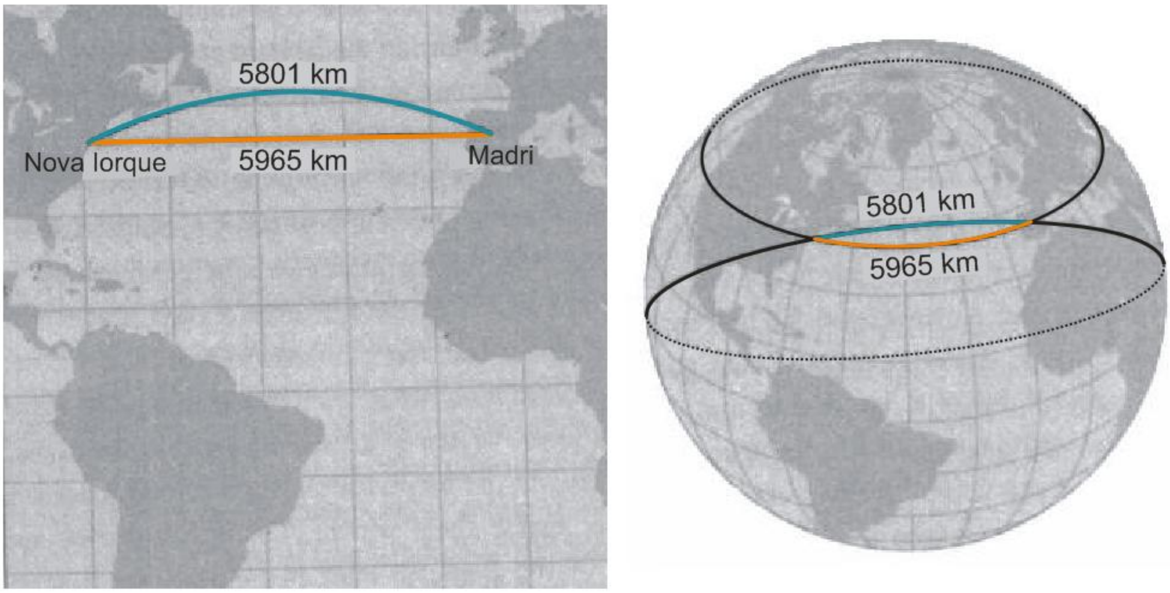


Figura 38: Representação das distâncias entre Nova Iorque e Madri, pelo paralelo e pela geodésica. Fonte: (MLODINOW, 2010, Adaptado)

Outro aspecto que ficou falho nas questões 3, 4 e 6 foi o pequeno espaço para a resolução das questões, fato esse comentado pelos próprios alunos. Por conter uma quantidade de cálculos consideravelmente grande, as informações acabaram se acumulando, comprometendo a organização das respostas.

Para finalizar a Atividade 3, a questão 6 pedia novamente a menor distância, agora entre Lisboa e Rio de Janeiro. Como as cidades estão mais distantes (a geodésica entre Rio de Janeiro e Lisboa mede cerca de 19,5% de uma circunferência máxima), os diferentes arredondamentos não interferiram tanto nas respostas obtidas em relação ao valor real, diferentemente do problema da distância entre Maringá e Sorocaba. Dos 21 alunos que realizaram essa atividade, dois deles ainda apresentavam dificuldade com os sinais, na transformação para coordenadas esféricas. Contudo, foi-lhes auxiliado ainda durante a execução da atividade e puderam concluí-la de maneira suficiente. A questão 6 está ilustrada na Figura 39.

6) Calcule a menor distância entre as cidades de Lisboa (38°25'12" N e 9°6'36" O) e Rio de Janeiro (22°54'10" S e 43°12'27" O)

Figura 39: Questão 6, atividade 3.

Fonte: Autor (2014)

Como atividade futura, essa questão poderia ser desmembrada em vários itens, para facilitar a organização dos alunos. Por exemplo, iniciar com a transformação das coordenadas, seguindo com a aplicação do produto notável e determinação do ângulo e, por fim, determinar a distância entre as cidades.

Após a entrega dessa atividade, em 28 de novembro, realizamos comentários finais sobre as questões, foi agradecido aos alunos pela colaboração e pela oportunidade de aplicar esse projeto, reforçando o seu principal objetivo que é enriquecer os conteúdos e o ensino da Matemática na Educação Básica.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletir sobre o que, como, para que e para quem ensinar é uma tarefa que deveria estar no cotidiano de todo professor. Especialmente para o professor de Matemática que encontra várias barreiras diante de seus alunos. Perguntas como: *"Onde vou usar isso na minha vida?"* não devem ser entendidas apenas como uma reclamação por parte dos alunos, mas como um propulsor para que se busque atualização de seus conceitos e melhoria na metodologia das aulas.

Com esse intuito, esse projeto vem não só para ensinar tópicos de Geometrias Não Euclidianas para os alunos, mas também para servir de material para o professor de Matemática se atualizar, enriquecer suas habilidades e competências e fazer em sala algo além do que faz tradicionalmente.

A interdisciplinaridade e a contextualização, tantas vezes enfatizadas nesse trabalho, reforçam a ideia de que o aprendizado se faz de maneira mais eficaz quando há significado para a vida do educando. Assim, estudar de maneira conjunta Matemática, Geografia e Física, torna o conhecimento relativo às geometrias não euclidianas algo com maior sentido em suas vidas.

As atividades presentes nos apêndices podem ser utilizadas pelos professores que decidirem abordar os tópicos de geometrias não euclidianas com seus alunos. É livre para esses profissionais usá-las na íntegra ou adaptar – o que acho mais conveniente – para a região na qual se encontram, para tornar o aprendizado mais atrativo.

Através de tópicos da História da Matemática mostrou-se o trabalho árduo em torno do quinto postulado de Euclides, sua criação, sua posterior negação e a consequente criação de outras geometrias. Acredita-se que a História da Matemática pode despertar no professor o desejo de melhorar o ensino dessa disciplina, pois pode gerar discussões entre os alunos sobre as reais necessidades da época e do dia a dia.

Vale salientar a importância da disciplina de Geografia para o desenvolvimento da Geometria Esférica. Os estudos da esfericidade da Terra e as grandes navegações foram o estopim para o aperfeiçoamento da Cartografia e subsequentemente dessa geometria.

Estudos de trigonometria e geometria plana tiveram papel importantíssimo nesse trabalho, juntamente com os vetores. Dessa forma, conseguimos determinar o ângulo entre dois vetores e, com isso, atingir um de nossos objetivos, determinar a distância mínima entre dois pontos da superfície de uma esfera.

No desenvolvimento das atividades, tivemos pequenas divergências nas respostas dos alunos, mas isso estava dentro de um desvio aceitável, dentro dos objetivos iniciais de cada uma dessas atividades, visto que a heterogeneidade entre eles existe. Entretanto, nem todos os resultados obtidos foram os esperados. Alguns dos exercícios deveriam ter sido mais claros, melhor elaborados pois, por exemplo nas questões 3 e 4 da Atividade 3, as aproximações utilizadas inverteram todas as definições trabalhadas anteriormente, principalmente a definição de geodésica. Porém, pode-se reparar esse erro e aprender com ele, já que novas explicações foram dadas, novos cálculos efetuados (com a maior quantidade de casas decimais possível) e as respostas corretas foram obtidas. Dessa forma, ainda se tinha espaço para novas discussões nas aulas com os alunos: a importância e o cuidado com os arredonadamentos e as aproximações.

Além disso, outra metodologia que poderia ser aplicada a esse projeto seria o uso de tecnologias diferentes da calculadora científica, como planilhas eletrônicas, que agilizariam os cálculos e otimizariam o tempo das aulas para discussão, softwares de geometria dinâmica auxiliariam na visualização das propriedades na esfera, entre outras. Essa forma de aplicação está nos planos futuros, para novas aplicações em novas turmas e, dessa vez, caso possível, que seja aplicada a toda turma, concomitantemente aos outros conteúdos tradicionalmente ministrados.

Por fim, deseja-se que este trabalho sirva como fonte de inspiração e estudos, tanto para docentes quanto para discentes, a fim de que a Educação Básica da Matemática seja fortalecida e aprofundada, que o senso crítico dos alunos seja despertado e que se criem cidadãos mais ativos e reflexivos. Foi visível a satisfação dos alunos com o contato com uma nova forma de pensar a geometria, as geometrias não euclidianas. O despertar para um sentido diferenciado do aprendizado deve ser um dos primeiros objetivos de um profissional da educação, quando prepara suas aulas.

REFERÊNCIAS

BAKKER, M. P. R. **Introdução ao Estudo de Cartografia**. Rio de Janeiro: Marinha do Brasil, 1965.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

BARRETO, B. F.; SILVA, C. X. da. **Matemática: Aula por Aula**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: USP, 1974.

DANTE, L. R. **Matemática: Volume Único**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. São Paulo: Atual, 1992.

GOVERNO DO PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED/DEPG, 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/File/matematica.pdf>. Acesso em: 14 de outubro de 2013.

IBGE. **Noções Básicas de Cartografia**. Rio de Janeiro: Fundação IBGE, 1998. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/cartografia/manual_nocoes/representacao.html>. Acesso em: 03 de dezembro de 2014.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

LAPA, C. B.; FARAGO, J. L. **Matemática: Projeto Eco**. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

LATAS, J. A geometria do planeta terra. 2013. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_EM121_pp21-26_5144340c0bc6d.pdf>. Acesso em: 28 de outubro de 2014.

LEONARDO, F. M. de. **Projeto Araribá 7 ano Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1977.

MENEZES, E. F. de. **Projeções Cartográficas**. Rio de Janeiro: FTD, 2004.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Orientações curriculares para o ensino médio: linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais + (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 22 de outubro de 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 03 de janeiro de 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências humanas e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciah.pdf>. Acesso em: 03 de janeiro de 2014.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: a História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço**. São Paulo: Geração, 2010.

OBREGON, M. **Além dos Limites do Oceano: Navegando com Jasão e os Argonautas, Ulisses, os Vikings e outros exploradores do mundo antigo**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2002.

OLIVEIRA, C. de. **Curso de Cartografia Moderna**. Rio de Janeiro: IBGE, 1988.

ROSSO, A. C.; FURTADO, P. **Matemática: Uma ciência para a vida**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 2011.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular: Geografia**. Florianópolis: SED/SC, 1998. Disponível em: <http://www.sed.sc.gov.br/secretaria/documentos/doc_download/922-geografia.pdf>. Acesso em: 05 de janeiro de 2014.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular: Matemática**. Florianópolis: SED/SC, 1998. Disponível em: <http://www.sed.sc.gov.br/secretaria/documentos/doc_download/381-matematica.pdf>. Acesso em: 05 de janeiro de 2014.

SILVA, K. B. R. da. **Noções de Geometrias Não Euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais**. Curitiba: CRV, 2011.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

TAMDJIAN, J. O. **Geografia Geral e do Brasil: estudos para compreensão do espaço**. São Paulo: FTD, 2005.

VENTURI, J. J. Eratóstenes e a esfericidade da terra. 2007. Disponível em: <http://www.educacional.com.br/articulistas/outrosOutros_artigo.asp?artigo=jacir0003>. Acesso em: 10 de abril de 2014.

ÁVILA, G. Objetivos do ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, v. 27, n. 1, 2010.

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1

ATIVIDADE 1 - MATEMÁTICA	PROFESSOR(A): MARLON MÜLHBAUER	SÉRIE: 2ª E.M.	BIMESTRE: 4º
NOME:		Nº	TURMA:

INSTRUÇÕES GERAIS:

01. Respostas claras e com letra legível;
02. Esta atividade contém 03 questões.

DATA:

NOTA:

1) De acordo com seus conhecimentos de Geometria até hoje, responda:
   a) Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo?

   b) Qual a menor distância entre dois pontos?

   c) Qual a definição de reta e segmento de reta? A reta é infinita? É ilimitada?

2) Na bola de isopor que lhe foi fornecida, marque três pontos quaisquer. Unindo esses pontos formamos o que chamamos de triângulo esférico. Com o auxílio de um transferidor de graus, determine o valor de cada ângulo interno desse triângulo e, em seguida, sua soma.
   a) Qual o valor da soma obtida?

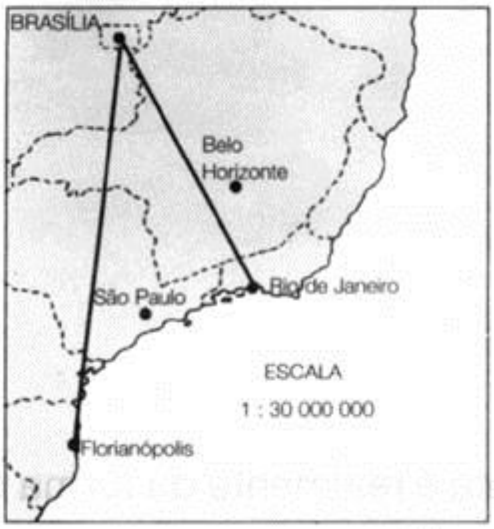
   b) O que você pode observar em relação a resposta dada no item ‘a’ da questão 1 com o item ‘a’ da questão 2?

   c) Você consegue explicar o fato da resposta do item ‘a’ não ser a tradicional?

d) Compare as respostas obtidas em relação ao item ‘a’ da questão 2 com seus colegas. São iguais?

e) Você consegue determinar o intervalo de variação das respostas obtidas?

3) Dado o mapa abaixo, que está na escala **1 : 30.000.000**, determine a distância linear entre as cidades de:



a) Brasília e Rio de Janeiro:

b) Brasília e Florianópolis:

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2

ATIVIDADE 2 - MATEMÁTICA	PROFESSOR(A): MARLON MÜLHBAUER	SÉRIE: 2ª E.M.	BIMESTRE: 4º
NOME:		Nº	TURMA:

INSTRUÇÕES GERAIS:

01. Respostas claras e com letra legível;
02. Esta atividade contém 04 questões.

DATA:

NOTA:

1) Agora, com os conhecimentos que você tem sobre Geometria Não Euclidiana, especialmente na Geometria Esférica, responda:
   a) Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo:
      i) No plano?

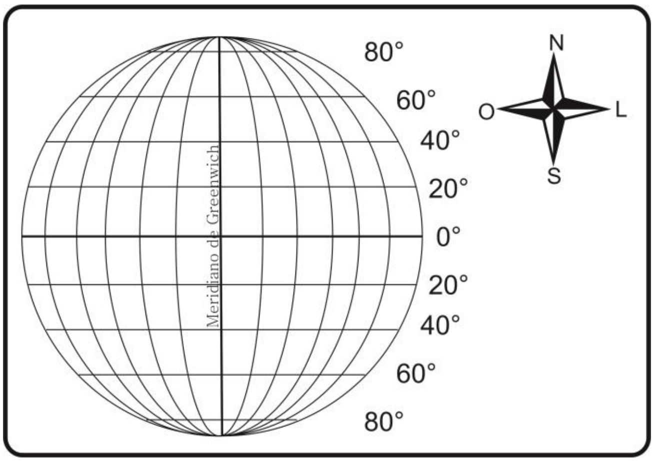
      ii) Na esfera?

   b) Qual a menor distância entre dois pontos:
      i) No plano?

      ii) Na esfera?

   c) Qual a definição de reta e segmento de reta na esfera? A reta é infinita? É ilimitada?

2) Explique o que significa dizer que as coordenadas da cidade de Mafra-SC são: 26°10’21” S e 49°55’51” O ? Represente aproximadamente a cidade de Mafra-SC no globo terrestre abaixo.



3) Considerando que as cidades de Mafra-SC e Chaves-PA localizam-se praticamente na mesma longitude (cerca de 49°55’ O) e que a Terra seja perfeitamente esférica com raio 6400 quilômetros, determine a menor distância entre as cidades. Dados: Latitude de Mafra-SC: *26°10’21”S* e de Chaves-PA: *0°9’37”S*.

4) Considerando que as cidades de Macapá-AP e Pontianak-Indonésia localizam-se praticamente sobre a linha do Equador (Latitude zero) e que a Terra seja perfeitamente esférica com raio 6400 quilômetros, determine a menor distância entre as cidades. Dados: Longitude de Macapá-AP: *5°04’ O* e de Pontianak-Indonésia: *109°20’ L*.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3

ATIVIDADE 3 - MATEMÁTICA	PROFESSOR(A): MARLON MÜLHBAUER	SÉRIE: 2ª E.M.	BIMESTRE: 4º
NOME:		Nº	TURMA:
INSTRUÇÕES GERAIS: 01. Respostas claras e com letra legível; 02. Esta atividade contém 06 questões.		DATA:	NOTA:

1) Considere os vetores no espaço definidos por $\vec{v} = (3,2,1)$ e $\vec{w} = (1,-3,5)$. Determine:

a) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

b) O ângulo entre os vetores.

2) Considere a cidade de Paris, na França, com coordenadas 48° N e 9° L. Supondo a Terra perfeitamente esférica com raio 6400 km, centrada na origem de um sistema de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ; transforme suas coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas.

3) As cidades de Maringá-PR e Sorocaba-SP são 'cortadas' pelo Trópico de Capricórnio, paralelo que divide as Zonas Tropical Sul e Temperada Sul da Terra. Sua latitude é 23°26'16" S. Determine a distância entre essas cidades, se for percorrido um trajeto sobre o Trópico e se a Terra for uma esfera perfeita de raio 6400 km. Dados: cos(23°26'16") = 0,8954; longitude de Maringá-PR: *51°56' O* e de Sorocaba-SP:*47°45' O*.

4) Agora, transforme as coordenadas geográficas da questão anterior em coordenadas cartesianas, com o centro da Terra na origem de um sistema tridimensional de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ. A seguir, calcule através de produtos internos a distância entre as cidades de Maringá e Sorocaba.

5) Qual distância foi a menor? O que você consegue concluir a respeito de distâncias entre cidades num mesmo paralelo? E entre duas cidades quaisquer?

6) Calcule a menor distância entre as cidades de Lisboa (38°25'12" N e 9°6'36" O) e Rio de Janeiro (22°54'10" S e 43°12'27" O)