ROSILMAR MENDES SANTIAGO

UMA ABORDAGEM DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

VITÓRIA DA CONQUISTA

ABRIL de 2014

ROSILMAR MENDES SANTIAGO

UMA ABORDAGEM DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Mestrado Profissional em rede Nacional-PROFMAT, no polo da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB.

Orientador:
Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira

VITÓRIA DA CONQUISTA

ABRIL de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Uma abordagem dos conteúdos matemáticos do ensino médio por meio de problemas de otimização e Programação Linear

Rosilmar Mendes Santiago

ORIENTADOR: Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Gonçalo Renildo Lima Cerqueira

Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira (Orientador)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Maria Deusa F. da Silva

Profa. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Roberto Hugo M. dos Santos

Prof. Dr. Roberto Hugo Melo dos Santos
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA

Vitória da Conquista, 11 de Dezembro de 2014

Dedicatória

A quem eu dedico,

Dedico este momento à minha esposa Cristina e aos meus filhos Raquel, Mateus e Davi, presentes de Deus na minha vida e fonte de motivações e inspirações.
Dedico aos meus pais Edivaldo e Jesuina, cujas vidas são para mim um referencial de amor e perseverança.
Dedico aos meus irmãos, irmãs, familiares e amigos do Caminho que constantemente me apoiaram.

Agradecimetos

Agradeço a Deus que é Amor, Mistério, pela oportunidade de realizar este mestrado quando já se esvaíam as esperanças e os sonhos desvaneciam e pelos livramentos visíveis e invisíveis me mantendo protegido.

Agradeço à esposa da minha mocidade, Cristina, companheira inseparável nas viagens semanais para Vitória Conquista, pelo amor e compreensão dispensados a mim nos momentos críticos dessa etapa, e aos meus filhos, Raquel, Mateus e Davi que inconscientemente me estimularam a lutar sempre.

Agradeço aos meus pais Edivaldo e Jesuina, exemplo de vida a serem imitados, e a quem honro e tento a cada dia melhorá-los em mim.

Agradeço aos meus irmãos(as), familiares e amigos que oraram, incentivaram e me acompanharam nessa trajetória, fortalecendo-me nos momentos áridos.

Agradeço aos meus colegas de turma, aos meus professores pelos bons momentos partilhados.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira, pela compreensão, paciência e apoio cúmplices durante a confecção dessa tese.

Epígrafe

“Vi ainda debaixo do sol que não é dos ligeiros o prêmio, nem dos valentes, a vitória, nem tão pouco dos sábios, o pão, nem ainda dos prudentes, a riqueza, nem dos inteligentes, o favor; porém tudo depende do tempo e do acaso. Há tempo para todo propósito debaixo do céu.”

Salomão

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Resumo

Este trabalho é fruto de uma longa jornada de observação e prática no ensino básico, visa apresentar uma proposta de melhoria do processo ensino aprendizagem do Ensino Médio através da utilização dos problemas de otimização lineares e não lineares e programação linear, apresentando um breve estudo dos Parâmentros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM [1]), sua estrutura, e como a partir dos problemas de otimização podemos introduzir os conteúdos curriculares relacionando-os com aplicações práticas do cotidiano, na indústria, no comércio, em empresas do setor público ou privado, visando alcançar os objetivos propostos pelo PCNEM. Veremos neste trabalho que é possível relacionar problemas de otimização a quase todos os conteúdos do ensino médio, apresentando modelos matemáticos, métodos de resolução e as ferramentas computacionais utilizadas para resolvê-los. Distribuímos os problemas de otimização nas três séries do ensino médio, principalmente em funções e geometria, interligando a matemática com outras áreas do conhecimento. A programação linear por ser uma via que permite a solução dos problemas de otimização ganha importância, tendo aqui um histórico da mesma. Segue-se a isso, uma lista de problemas de otimização coletados na internet e deixados aqui em anexo .

Palavras-chave: PCNEM; conteúdos curriculares; problemas de otimização; programação linear; ensino médio.

Abstract

The present study is the result of long observation and practice in basic education. Aims to present a proposal for improving the teaching learning process of high school, trought use the optimization linear problems, nonlinear problems and linear programming, presenting a brief study of the national curriculum parameter setting of high school (PCNEM [1]), its structure, and how from the optimization problems can introduce curricular content, relating them to everyday practical applications in industry, in commerce, in companies from the public or private sector, in order to achieve the objectives proposed by PCNEM. We will see in this study that is it possible to relate optimization problems to almost all high school content, presenting mathematical models, resolution methods and computational tools used to solve them. We Distribute optimization problems in the three high school grades, especially in functions and geometry, interconnecting mathematics with other areas of knowledge. Linear programming to be a way that allows the solution of optimization problems becomes important, and here have a historic of it. Also is still a list of collected optimization problems on internet and left here attached.

Key words: PCNEM, curricular content, optimization problems, linear programming, high school.

1 INTRODUÇÃO

Dentre as motivações que cooperaram para a elaboração dessa dissertação de mestrado está o nascimento do **PACTO** nacional pelo fortalecimento do ensino médio, instituído pelo portaria n^{o} 1.140/2013 do Diário Oficial da União de 9 de dezembro de 2013. A primeira etapa do Pacto consta da formação dos professores através do estudo de seis cadernos, entre os quais citamos o caderno III [22] que trata do currículo e do desafio da formação humana integral. Este caderno aponta para a criação de currículos em rede, integrado com o trabalho, a ciência, a tecnologia e a cultura, propondo aos trabalhadores da educação novas mudanças curriculares no ensino médio, a diminuição da hierarquia entre as disciplinas e a interdisciplinaridade em torno de temas relevantes para a juventude do ensino médio. No estado de Minas Gerais iniciou-se em 2014 a 3^{a} etapa do Reinventando o Ensino Médio, objetivando melhor preparar o aluno para o mercado de trabalho oferecendo um curso técnico de qualidade e melhorando o ensino médio básico. Nesses casos, os problemas de otimização se aplicam perfeitamente. A criação de novos cursos na área técnica se faz necessário, uma vez que alguns setores da indústria tem tido dificuldades em preencher as vagas existentes, devido à falta de mão obra especializada. A maioria dos cursos técnicos que estão sendo criados atualmente no Brasil são da área de tecnologia, engenharia, sistemas de informação ou áreas afins, que detêm em seus currículos boa parte de carga horária associada a disciplinas das ciências exatas, entre elas a matemática. Com base nestas informações, se faz necessário repensar a maneira como a matemática tem sido trabalhada no ensino médio, a metodologia aplicada pelo professor para transmitir os conteúdos da disciplina, o processo ensino aprendizagem, a relação professor - aluno em sala de aula e o mais importante, a maneira de como os conteúdos ensinados têm sido associados à resolução de problemas reais, aqueles que mexem com o cotidiano das pessoas, e que despertam o interesse dos alunos. Uma maneira interessante de associar a matemática com a prática é através da resolução dos problemas de otimização, aqueles que envolvem uma função objetivo e um conjunto de restrições associadas. Trataremos deste tema neste trabalho por entendermos que o mesmo faz cumprir uma importante estratégia de ação explícita no PCNEM [1] p.126, com o intuito de alcançar os objetivos estabelecidos: *"a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações- problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado"*. Assim sendo, apenas reforçamos nesse trabalho a resolução de problemas como ponto de partida para introduzir novos temas, retomar conteúdos já estudados com novas abordagens, interligando-os com os problemas reais, procurando dá resposta à pergunta que 9 de 10 alunos sempre faz quando estão tentando aprender determinado conteúdo matemático, especialmente aqueles que lhe causam maiores dificuldades: "professor, onde eu vou usar isto?". Para tal, os problemas de otimização cumprem bem esta função de aplicabilidade da matemática, estes problemas aparecem com a finalidade de minimizar custos, maximizar lucros, aproveitar melhor os recursos naturais disponíveis na forma de matéria-prima, não deixar mão de obra ociosa. Tais problemas aparecem nas engenharias, no transporte, nas áreas da saúde, em pequenas e grandes empresas de produção. Isso nos aponta um caminho a seguir dentro da matemática.

Meu interesse pela otimização surgiu quando fui contratado por uma universidade privada para ensinar a disciplina de Pesquisa Operacional no curso de Administração. Muitos dos alunos do curso já atuavam no mercado de trabalho, exercendo as mais variadas funções desde administradores de empresas a funcionários de banco, atuando tanto no setor público como no privado. Uma maneira que encontrei para tornar as aulas mais atraentes e dinâmicas foi estimular os alunos a apresentarem problemas de otimização vivenciados por eles na sua realidade profissional. Mesmo não tendo mais os modelos e resoluções dessa época, cito aqui, por exemplo, o caso de um aluno que era produtor de 3 tipos de queijos e que não tinha um controle matemático sobre a quantidade de leite gasto em cada tipo, o tempo gasto para produzir, o peso e o preço exatos de cada tipo de queijo para que obtivesse um lucro máximo. Aliás, nesse caso ele estava perdendo dinheiro, e pudemos ajudá-lo satisfatoriamente, sabendo que ele tinha um limite na quantidade de leite e na demanda de dois tipos de queijo. Para resolver este e os demais problemas utilizamos programação linear para determinar o modelo matemático e o Solver Excel para encontrar uma solução. Esta prática fez com que os alunos passassem a se interessar mais pela disciplina, despertando sua curiosidade. Muitos deles manifestaram o desejo em avançar nos estudos sobre o tema, mas com a minha saída da turma acabei deixando de lado a Pesquisa Operacional e não tenho notícias se de fato alguns deles levaram este desejo adiante.

Hoje, como aluno do PROFMAT, o tema novamente voltou a fazer parte da minha realidade, agora como tema de pesquisa da minha dissertação de mestrado. Lembrando que um dos objetivo do Profmat é melhorar a educação básica como está escrito em seu regimento no capítulo VIII art. 28: *"O Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula"*, penso que podemos contribuir para que os nossos estados, mais especificamente, as escolas onde trabalhamos abracem a iniciativa do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio, adotando as ideias contidas na otimização para revolucionar a maneira de ensinar matemática através de currículos em rede com temas centrais apropriados, contribuindo para beneficiar muitos dos cursos técnicos voltados para tecnologia presentes na telefonia, agropecuária, comércio, economia, transportes, empresas de produção, saúde, administração, etc., que trabalham com otimização em seus currículos.

Os parâmetros curriculares propoem a resolução de problemas no ensino, logo, é preciso citar os aspectos e passos que envolvem a resolução de problemas, bem como destacar a modelagem matemática dos problemas de otimização. Os questionamentos que nortearam o desenvolvimento desse trabalho foram:

- É possível usar os problemas de otimização como fatores desencadeadores para estudar temas novos?
- Podemos usar os problemas de otimização para contextualizar os conteúdos estudados e ligar a matemática com outras áreas do conhecimento?
- É viável inserir Programação Linear no Ensino Médio?
- Dentro de cada série, em quais conteúdos devemos abordá-los?

Organizamos esta dissertação de mestrado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma breve análise dos PCNEM, no capítulo 3 falamos sobre programação linear, enfatizando o modelo e os tipos de resolução dos problemas de otimização lineares, no capítulo 4 tratamos dos problemas de otimização não lineares, destacando o uso da ferramenta Solver para obtenção da solução e em anexo , deixamos uma lista de problemas selecionados da internet.

2 ANÁLISE DA PROPOSTA DOS PCNEM

Muitas reformas curriculares foram desenvolvidas na tentativa de se encontrar um currículo para o ensino médio mais próximo da realidade. Muitos esforços ainda serão despendidos nessa tentativa. Atualmente, por exemplo, encontra-se em vigor o Pacto pelo fortalecimento do ensino médio na perspectiva da formação humana integral. No caderno III [22] de estudos do Pacto encontra-se um importante relato sobre currículo, onde os autores relatam:*"O que elas (as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio-DCNEM) propõem é que toda a atividade curricular do ensino médio se organize a partir de um eixo comum _ trabalho, ciência, tecnologia e cultura _ e que se* ***integre****, a partir desse eixo, à totalidade dos componentes curriculares. É possível reconhecer nessa orientação a possibilidade de o currículo ser capaz de atribuir novos sentidos à escola, de dinamizar as experiências oferecidas aos jovens alunos e de ressignificar os saberes e experiências com os quais se interage nas escolas"*. Nesse sentido, os problemas de otimização cumprem função importante na articulação desse currículo em rede que tem como base um tema abrangente. Ainda no caderno III [22], com base nesse desafio curricular, tem-se uma proposta de caminho para articulação do currículo em rede. Veja abaixo tal proposta.

- *Seleção de conceitos fundamentais por área do conhecimento (sugere-se um mapa conceitual)*;
- *Identificação de conceitos comuns (inter/intra-áreas do conhecimento). Juntar mapas disciplinares e a partir daí fazer um grande mapa curricular*;
- *Proposta de contextos problematizadores que mobilizem os conceitos. Articular com vida cidadãmundo do trabalho*;
- *No caso dos conceitos comuns, viabilizar atividadesprojetos interdisciplinares a partir destes contextos.*

Agora, tentaremos usar os problemas de otimização dentro dessa proposta usando os PCNEM como ponto de partida.

h

Tabela 2.1: Distribuição dos conteúdos curriculares nos PCNEM

1ª SÉRIE	**2ª SÉRIE**	**3ª SÉRIE**
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

2.1 PROPOSTA CURRICULAR

O desenvolvimento deste trabalho passa necessariamente pela análise da proposta curricular contida no PCNEM a fim de se tentar estabelecer uma nova abordagem para o ensino da matemática no ensino médio relacionando seus conteúdos aos problemas de otimização, alguns deles envolvendo programação linear. O quadro abaixo mostra a estrutura dos conteúdos curriculares propostos no PCNEM [1], pág.128, para uma situação de 4 aulas semanais.

Os conteúdos do item (1) referem-se ao eixo temático de Álgebra: números e funções, os conteúdos do item(2) referem-se ao eixo temático Geometria e Medidas e os conteúdos do item (3) referem-se ao eixo temático Análise de dados.

Como o estudo das funções ocupa boa parte da carga horária da 1ª série e é um tema importante e é pré-requisito para os demais, e como os modelos de programação linear envolvem um conjunto de funções lineares, após ensinar o conteúdo de função do 1º grau a seus alunos, o professor já pode introduzir os problemas de otimização lineares associados a esse conteúdo, juntamente com programação linear, podendo inclusive resolver tais problemas pelo método gráfico, já introduzindo o conceito de inequações do 1º grau, que serão discutidos no capítulo 3. Outro tópico importante são os problemas de otimização não linear, como o clássico problema da cerca_“Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma região retangular junto a um rio para confinar alguns animais. O lado da região retangular junto a margem do rio não é cercado. Quanto deve ser x, a medida em metros da base da região retangular, para que a área cercada **A** seja a maior possível?”. Este problema envolve função polinomial do segundo grau, podendo ser introduzido para chegar-se à definição e ao desencadeamento do estudo da função quadrática, pois o modelo algébrico do mesmo nos leva a um problema de valor máximo. Este problema da cerca e outros problemas de valor mínimo estão em anexo . Ainda na 1ª série, após ensinar estatística aos alunos, o professor pode resolver problemas de otimização que envolvem médias, pois os mesmos já terão estudado este conteúdo. Muitos desses problemas podem ser encontrados em Elon [2]. Os problemas de programação linear com três ou mais variáveis também podem ser ensinados na 1ª série com o auxílio da ferramenta Solver do LibreOffice Calc (Linux) e do Excel, fazendo uso da tecnologia de modo inteligente e metodológica. Assim, faz-se necessário observar a funcionalidade da sala de informática, e passar aos alunos conhecimento básico do Calc ou Excel para uso da ferramenta Solver na resolução dos problemas. O método Simplex que será abordado no capítulo 3 exige conhecimento sobre matrizes, tema que não é contemplado nos PCNEM e Conteúdos Básicos Curriculares-**CBC**s, e mesmo quando é abordado acontece na 2ª série. Logo, esse método poderá ser melhor ensinado e aproveitado pelos alunos depois do ensino das matrizes e de sistemas lineares, na 2ª série, tanto para aplicar como para desencadear o estudo de matrizes, determinantes e sistema linares.

Na 2ª série, problemas de otimização que envolvem áreas e volumes podem ser introduzidos após ensinar aos alunos geometria espacial. Muitos destes problemas envolvem sólidos inscrito ou circunscrito. Dentre os muitos problemas que podem ser trabalhados com este tema, destacam-se, por exemplo, *qual o volume máximo de um cilindro inscrito em um cone específico* e *dado um retângulo de área qualquer, qual a medida da base do retângulo para que o perímetro do retângulo seja o menor possível?* Mais problemas ver em anexo . Tais problemas envolvem outras áreas do conhecimento, deixando em evidência a interdisciplinaridade.

Na 3ª série, boa parte da carga horária é ocupada por conteúdos de geometria analítica. Embora muitos professores prefiram inserir os problemas de programação linear no 3ºano, como por exemplo o trabalho de Rech [14] que foi aplicado após o ensino de determinantes no 3º ano, por entenderem que os alunos encontram-se melhor preparados para absorvê-los, os mesmos prblemas por ess proposta podem ser introduzidos já no 1º ano, imediatamente após os alunos aprenderem funções e inequações do 1º grau, a exemplo do que é feito em Portugal conforme Pinto [16], o que didaticamente é mais vantajoso, pois colabora para que o conteúdo passado seja melhor compreendido pelo discente.

A proposta dos PCNEM permite trabalhar com o tema proposto nesse trabalho, e as secretarias estaduais de educação poderiam contemplar o assunto na proposta dos PCNEM, sem que cada professor o fizesse por conta própria. Ressaltamos que não haverá excesso carga horária com o tema proposto, pois uma vez trabalhado na 1ª série juntamente com função afim e inequações lineares com duas variáveis usando algumas horas aulas, já não se gastará mais carga horária com o tema em si, podendo o professor apenas acrescentar problemas contextualizados alusivos à otimização durante suas aulas, de forma natural . De qualquer forma, independentemente se as Secretarias Estaduais de Educação-SEEs politicamente acrescentarão o tema em seus Conteúdos Básicos Curriculares-**CBC**s, cada professor, em benefício do processo ensino x aprendizagem, pode trabalhar com os problemas de otimização envolvendo programação linear ou não linear. No Pacto pelo fortalecimento do ensino médio, ou no reinventando o ensino médio em Minas Gerais, ou em qualquer outro modelo estadual no qual se oferta cursos técnicos aos alunos com vistas a prepará-los para o mercado de trabalho que necessita de profissionais da área técnica, é imprescindível inserir no currículo a programação linear, pois uma das exigências das empresas, hoje, é que seus processos de produção possam ser melhorados evitando situações de risco, maximizando lucros, minimizando custos e otimizando recursos naturais contribuindo para preservar a qualidade do meio ambiente, o que pode ser atingido com o uso da otimização. O sucesso da aplicação do tema proposto e consequentemente uma melhor qualificação do ensino médio passa pelo perfil que se espera do professor. Cursos de capacitação e políticas públicas de valorização do professor são imprescindíveis para o sucesso do ensino e dos alunos. De fato sem uma boa formação dos nossos alunos, é vão todo esforço. Ubiratan D'ambrósio [3] direciona para uma abordagem "holística" da educação matemática, remetendo para uma "educação para a paz" segundo o autor. No ambiente de sala de aula onde se efetiva a apropriação do conhecimento de professor e alunos, deve necessariamente existir esse ambiente de paz, de proximidade entre professor e alunos, conteúdo e alunos, mas um dos fatores que levará a esse fim é a capacitação do professor para tal levando-o ao perfil exigido para o ensino e uso das ferramentas computacionais. Os melhores resultados da escola em que trabalho nas avaliações externas do Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Básica (SIMAVE) foram conseguidos pelas turmas do 9º ano do ensino fundamental e 2º e 3º do ensino médio. Um professor preparado com boa metodologia, conteúdo e equipado tecnologicamente, fará grande diferença no ensino e teremos resultados melhores. Esse é um dos motivos de ter escolhido esse tema, pois há boas e muitas ideias interessantes, mas é preciso investir mais no professor e, no caso da proposta dessa dissertação, na introdução de problemas de otimização e de programação linear nos conteúdos curriculares.

2.2 FASES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

com respeito à resolução de problemas o PCNEM diz na p.126 que *"resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado"*. E mais, *"Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para* *isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido".* Como nesse trabalho estamos focando o ensino de problemas de otimização no ensino médio, em Polya [4] encontramos quatro passos para a resolução de um problema: *"primeiro, temos de compreender o problema. Segundo, temos que estabelecer um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. E quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa".* Na primeira fase, temos que ter clareza do problema, na segunda fase, temos que conhecer as variáveis e como estão interligadas para modelarmos e montarmos o plano, na terceira fase, executamos o plano encontrando a(s) solução(ões) e, na quarta fase, fazemos uma retrospectiva, validando e confirmando a solução ótima. O CBC-Minas [5] diz que: *"um dos principais objetivos do ensino de matemática, em qualquer nível, é o de desenvolver habilidades para a solução de problemas".* Nesse sentido o papel do professor é o de levar os alunos à resolução de uma ampla variedade de problemas, desenvolvendo nos mesmos a capacidade de abstração e a habilidade de atribuir significado aos conceitos concretos e abstratos estudados. A resolução de problemas permite a conexão entre vários conteúdos matemáticos já estudados, e destes com outras áreas de conhecimento quando o professor prepara com antecedência, confeccionado ou procurando problemas sugestivos e contextualizados com o ambiente social, econômico e geográfico dos alunos.

3 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Programação Linear (PL) ganha importância por ser um assunto que pode ser trabalhado dentro de temas transversais, ou seja, temas que atuam como eixo unificador em torno do qual organizam-se as disciplinas, devendo ser trabalhados de modo coordenado e não como um assunto descontextualizado nas aula, permitindo ao aluno resolver problemas simples e úteis de outras áreas do conhecimento utilizando conteúdos já aprendidos, além de motivá-los para a aprendizagem de outros conteúdos contemplados no PCNEM. A sua conectividade com outras áreas do conhecimento, tais como economia, administração, agropecuária, computação, engenharias etc, permite ensiná-la no já na 1ª série do ensino médio. Problemas matemáticos analíticos ou geométricos podem ser resolvidos com técnicas que envolvem PL. Matéria de Barros [6] com o título "Fazendas-escolas são mais complicadas do que parecem" ressalta a importância de se utilizar PL em escolas do ensino médio. A matéria relata que na cidade de Formoso do Araguaia (TO), na escola fazenda Canuanã vivem 1 173 pessoas, das quais 909 são alunos, todos cuidando de plantações e animais, utilizados na produção de diversos alimentos como sorvetes e geléias, que servem como prática de aprendizagem e sustento para os seus habitantes. Para produzir somente o suficiente para consumo, a escola mantinha dois lotes de terra para a produção de 10 000 aves por ano, gerando gastos extras desnecessários. A descoberta foi feita por Barros [6], que utilizou programação linear para construir um modelo matemático para a produção de alimentos da escola fazenda, possibilitando descobertas que seriam impossíveis de se detectar somente com olhos humanos. Entre as várias descobertas, Barros [6] descobriu que a escola deveria produzir apenas 1 000 aves por ano nos dois lotes para que os alunos pudessem aprender o processo de produção, e para sustento dos habitantes da fazenda, a escola economizaria mais se comprasse as aves do mercado. Este exemplo além de motivar os estudantes, mostra como os Problemas de PL podem ser utilizados para melhorar a cadeia de produção, ajudando nas tomadas de decisão que possibilitem evitar o desperdício de recursos, no caso da fazenda podemos citar a água, a energia elétrica, a ração, as vacinas e a mão de obra. Vê-se que o modelo usado por Barros [6] tem potencial para ser aplicado em diversas situações semelhantes a esta, em diferentes setores agropecuários. O termo Programação tem a ver com estratégia, um plano ou programação de ação pré-estabelecida. Como veremos, o tema surgiu num contexto de guerra, conforme Sousa [10]. Aqui, o termo não está ligado à programação em computadores. Portanto, Programação Linear é uma técnica utilizada na resolução de problemas de otimização que usa modelos matemáticos lineares para ajudar na tomada de decisões. Daí o fato de que a modelagem é indispensável na resolução de um problema que envolve programação linear. Essa técnica é composta de uma função objetivo e de restrições que são representadas por inequações e equações lineares. Marins [9], em seu livro de Pesquisa Operacional cita as razões abaixo para o uso da Programação Linear:

1. Grande variedade de situações podem ser aproximadas por modelos lineares.

2. Existência de técnicas (algoritmos) eficientes para a solução de modelos lineares.

3. Possibilidade de realização de análise de sensibilidade nos dados do modelo.

4. Estágio de desenvolvimento da tecnologia computacional.

Nesse sentido, são os problemas de otimização que motivaram o surgimento da Programação Linear e, consequentemente, da Pesquisa Operacional, ajudando na tomada de decisões a partir da 2ª guerra mundial, onde uma equipe multidisciplinar foi, segundo Sousa [10], contratada para ajudar a tomar decisões num contexto em que a otimização de recursos e as táticas de guerra são importantes. Isso aconteceu entre 1939 e 1945 quando as gerências militares britânica e americana empregaram uma abordagem científica para tratamento de problemas de gerenciamento de recursos escassos como tropas, munição, remédios etc., de forma eficaz. Conforme história citada por Sousa [10], o problema de otimizar uma função linear sujeita a restrições lineares surgiu com os estudos de Fourier sobre sistemas lineares de inequações em 1826. Na sequência, ainda segundo Sousa [10], o russo Kantorovich escreve sobre a importância desses problemas práticos e cria um algoritmo para a sua solução. Esse trabalho de Kantorovich, conforme Sousa [10], infelizmente não ficou conhecido como deveria, chegando por exemplo, ao Ocidente só em 1950. O ápice da Programação Linear como técnica usada para otimizar uma função linear sujeita a restrições com inequações lineares, se deu na década de 40 com George Dantzig, quando formulou o problema das dietas como um problema de mistura de componentes. Dantzig, além de formular o problema de programação linear também criou o algoritmo Simplex para a solução do mesmo. De nacionalidade estadunidense, Dantzig trabalhou no Pentágono, órgão de defesa americano, entre 1941 e 1945 como especialista em planejamento e programação de atividades militares. E como atuou mais no ramo científico da matemática, não recebeu, em 1975, o prêmio Nobel da Ciência em Economia da Academia real de Ciência que foi concedido ao matemático e economista russo de origem judaica Leonid V. Kantorovich. Ainda assim, George Dantzig permanecerá na história como como um dos principais entre aqueles que contribuíram na arquitetura e construção da Programação Linear. A influência da Segunda Guerra Mundial foi decisiva para o surgimento da PL e seu posterior desenvolvimento. Haviam necessidades (planejar, transportar) e financiamentos (o Projeto SCOOP; o desenvolvimento dos computadores; a Conferência de Chicago em 1949, onde matemáticos, economistas e estatísticos de instituições acadêmicas e de várias agências governamentais apresentaram trabalhos usando PL).

Com o desenvolvimento tecnológico a partir da 2^a guerra mundial, a programação linear entra no mundo das grandes empresas ajudando-as em seus planejamentos, tais como chamadas telefônicas, transportes, voos de avião, produção em larga escala, economia, saúde, etc. Segue daí um crescimento rápido do tema com as técnicas matemáticas e com os recursos computacionais como métodos de resolução, onde as grandes empresas passaram a valorizar os matemáticos no auxílio de tomadas de decisão, deixando de confiar somente na intuição e experiência de seus administradores.

Existem muitos trabalhos sobre o tema na literatura, entre eles os trabalhos de Silva [11] que fala sobre a modelagem, a programação linear e faz uma proposta sequenciada de aplicação de PL no ensino médio sem indicar em quais conteúdos e em qual momento iniciar, Santos [12] que também destaca a PL com ênfase na modelagem e resolução gráfica propondo a sua inserção no ensino médio, sem contudo detalhar como fazer essa inserção, e Rocha [13] que trata de problemas simples de otimização como uma das vias da matemática aplicada, apresentando modelos simples de resolução desses problemas com o objetivo de abordar conteúdos como funções e relações entre médias, mas não encontramos na literartura trabalhos que propõe essa inclusão de PL e problemas de otimização não lineares no ensino médio e a relaciona com os conteúdos dos PCNEM. O artigo do professor Rech [14] faz uma aplicação dos problemas de otimização lineares em uma única turma de 3^a série/EM após o ensino de determinantes, mas não cita o seu uso nas demais séries. Muitos trabalhos se tornam inviáveis pela linguagem excessivamente técnica, outros não focaram os problemas de otimização não lineares. Nessa dissertação de mestrado busco associar o tema proposto com os PCNEM distribuindo-os nas três séries do Ensino Médio, respaldado pela realidade carente da matemática no EM evidenciada pelos resultados das avaliações externas como o Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica - PROEB e pelo Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, experiência em sala e pela abundante discussão sobre a utilidade dos problemas de otimização. Ainda na proposta de inclusão de PL no ensino médio, Melo [15] faz uma experiência em uma turma de 2^a série do ensino médio, e desenvolve as atividades após ensinar resolução de sistemas, no entanto investe muito tempo falando de resolução de problemas, mas não questiona sobre o momento e série para iniciar o estudo de PL. Mesmo sendo um trabalho de boa qualidade, bem feito, ele deixa a entender que PL deve ser inserido e ensinado como um tema novo a ser acrescentado nos conteúdos curriculares, na 2^a série. Preocupante, pois na Europa, Portugal faz uso de PL no 11^o ano do Programa de Matemática como conteúdo obrigatório conforme Pinto [16].

Neste trabalho sustentamos a proposta de que PL deve ser ministrado espontaneamente, na 1^a série após estudo da função afim e inequações, apresentando problemas previamente selecionados, dentro da realidade do alunos, com roteiro e objetivos definidos, dividindo a turma em grupos (2 ou 3 alunos) propondo a resolução dos mesmos, seguindo os 4 passos de resolução de um problema propostos por Polya [4] em seu antigo novo livro “A Arte de Resolver

Problemas". Conquanto não tenhamos feito uma aplicação dessa proposta, mesmo já tendo resolvidos PPL em séries diferentes como desafio, aplicação de conteúdos e abordagem de temas novos, podemos afirmar, com base nas experiências de muitos professores e aplicações e pesquisas feitas por colegas sobre o tema, sendo alguns trabalhos citados nessa dissertação como por exemplo a tese de Silva [11], que os problemas de programação linear são importantíssimos na relação da matemática com outras áreas do conhecimento, na perspectiva de tirar os alunos da passividade, conformismo e do desânimo em sala, do ponto de vista de ensinar matemática através da resolução de problemas que é o objetivo mais enfático dos PCNEM. Faz-se necessário trabalhar com os alunos apenas os problemas de otimização lineares com duas variáveis com solução inteira, facilitando a resolução gráfica manual e passando pela solução gráfica no software GeoGebra, com mais um ponto positivo, o estímulo ao uso da sala de informática presente em quase todas as escolas, mas ainda não usadas significativamente pelos professores. Se necessário, pode-se nesse momento, apresentar a ferramenta Solver para resolver PPL com 2 ou mais variáveis, já na 1ª série.

3.1 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO QUE ENVOLVEM PROGRAMAÇÃO LINEAR

A fim de introduzirmos os principais conceitos de PL em problemas de otimização, apresentamos a seguir uma situação prática após visitarmos a cerâmica UNIÃO, com o intuito de criar um problema que se enquadrasse na proposta deste trabalho a fim de propor para os meus alunos das turmas de 2014. O proprietário da empresa, experiente junto ao SEBRAE, questionou se seria possível melhorar o seu lucro. Após conversamos, montamos a função objetivo e tivemos dificuldades nas restrições pois ele não tinha limites na mão de obra e na matéria-prima, mas tão somente na capacidade do forno. Fizemos algumas modificações no processo, impusemos alguns limites e ele percebeu que foi possível melhorar o seu lucro mudando a quantidade de blocos de 6 e 8 furos a serem produzidas. A seguir o problema, já com as adaptações para essa proposta.

O Problema: *A cerâmica União produz entre outros produtos, blocos de 6 furos e 8 furos. Cada um dos 4 fornos que possui comporta uma quantidade de 12 mil blocos. O lucro é de R\$ 9,00 por cada mil blocos de 6 furos e R\$ 10,00 por cada mil blocos de 8 furos. Por questões ambientais ela só dispunha de 16 m^3 de argila por forno. Se colocar apenas blocos de 6 furos o forno comporta 14 mil, e se for apenas de 8 furos o forno comporta 10 mil blocos. Com essas condições impostas, qual a quantidade em milhares de cada tipo de bloco a empresa deve produzir em cada forno para que se tenha um lucro máximo*?

Antes de modelarmos e resolvermos este este problema, vamos caracterizar os PPL.

3.2 MODELAGEM DE UM PROBLEMA

É imprescindível que professor e alunos interajam na construção do modelo ideal, cujo modelo estando pronto torna mais fácil encontrar o método de resolução pertinente. A construção do modelo matemático linear é a parte mais delicada do processo. Vale lembrar que este momento é justamente aquele onde os alunos não gostam, pois têm que pensar. Eles preferem as fórmulas prontas para apenas fazerem aplicação. Como pensar é difícil mas vale a pena, o professor deve propor uma discussão significativa do problema até que surja da parte dos alunos ideias apropriadas. Não há uma receita pronta, mas segundo Medeiros [17] cap. 2 p.15, a construção do modelo segue 3 passos em roteiro:
i) determinação das variáveis de decisão,
ii) determinação da função objetivo e
iii) determinação das restrições.
Determinar as variáveis de decisão consiste em definir especificamente dentro do problema proposto, seja de produção, investimento, etc, quais as decisões que devem ser tomadas. Isso nos levará às variáveis de decisão (x, y, z, ...). Na segunda fase, definidas as decisões a serem tomadas, devemos identificar o objetivo do problema, que geralmente, são de maximização de lucros ou de minimização de custos ou perdas. Isso nos levará à construção da função objetivo que é dependente linearmente das variáveis de decisão predeterminadas. Aqui mais uma vez, a noção de função é trazida à tona, sendo necessária a construção de uma lei de associação entre o que se quer otimizar e as variáveis de decisão envolvidas no processo. Na terceira fase, as restrições são condições a serem impostas no processo de tomada de decisão dependendo das limitações dos recursos disponíveis, como matéria-prima, mão de obra, tempo de produção, etc. As restrições a serem impostas devem ser expressas na forma linear. Pacca [8] p.25, nos diz que os modelos de programação linear constituem um tipo especial de modelo de otimização, e deve possuir as seguintes características:
a) ***Proporcionalidade:*** a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema.
b) ***Não negatividade:*** deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo e qualquer proporção de dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
c) ***Aditividade:*** o custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
d) ***Separabilidade:*** pode-se identificar de forma separada o custo específico das operações de cada atividade.
Neste trabalho, usamos a forma canônica abaixo para desenvolver e modelar um problema de

programação linear.

$$Maximizar\ Z = cx$$
$$Sujeito\ a: \begin{cases} AX \geq B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Detalhando esta formulação algébrica geral temos:

$$Maximizar\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$Sujeito\ a: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \text{com } x_j \geq 0, a_{ij} \in \mathbb{R}, j \in \{1,2,3,...,m\} \text{ e } i \in \{1,2,3,...,n\} \end{cases}$$

Observe que A é uma matriz mxn, X é uma matriz linha das variáveis, B é uma matriz coluna dos termos independentes (segundos membros) e $x_i \geq 0$ são as condições de não negatividade. Portanto, A, X e B são, respectivamente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

.

Ainda segundo Pacca[8], um modelo de programação linear, desenvolvido na forma canônica pode, sem qualquer perda para suas propriedades matemáticas, ser reescrito em outra forma básica e vice-versa, através das seguintes operações elementares:

Operação 1: *mudança no critério de otimização, ou seja, transformação de maximização para minimização e vice-versa.* Max($f(x)$) = Min($-f(x)$) e Min($f(x)$) = Max($-f(x)$) na função objetivo.

Obs.: esta operação é muito utilizada na resolução de um PPL pelo método Simplex.

Operação 2: *transformações de desigualdades em igualdades e vice-versa.* Aqui temos dois casos a examinar:

1º caso: restrições de desigualdades do tipo $\leq$ em igualdades. Seja $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq b$. Podemos introduzir uma variável de folga por excesso, ficando $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b$ com $x_{n+1} \geq 0$;

2º caso: restrições de desigualdades do tipo $\geq$ em igualdades. Seja $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq b$.

Introduzindo uma variável de folga por perda teremos $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} = b$ com $x_{n+1} \geq 0$. Pacca [8] classifica os problemas de programação linear em cinco níveis de dificuldade conforme a complexidade da modelagem: *fácil, pequeno grau de dificuldade, razoável grau de dificuldade, difícil e desafio*. Como o nosso objetivo é tornar o ensino de matemática no ensino médio mais atraente e contextualizado, faremos nesse momento a modelagem de dois problemas, um de nível fácil e um com pequeno grau de dificuldade.

Problema 1(Fácil): Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 peças de couro para fabricar um sapato e uma peça de couro para fabricar um cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 10 unidades e que o lucro por cada sapato é de R$ 5,00 e o do cinto é de R$ 2,00, modele o sistema de produção do sapateiro, sendo que o seu objetivo é maximizar o seu lucro por hora.

Solução: Aqui, o primeiro passo para a elaboração do modelo de programação está ligado à definição das variáveis de decisão. Neste caso, esta etapa é simples pois a função objetivo e as restrições estão diretamente associadas às variáveis. O objetivo no problema é maximizar o lucro por hora da produção cujos quantitativos são passíveis de programação. O problema está exposto exatamente no planejamento desses quantitativos; portanto, é natural que as variáveis sejam os quantitativos das peças produzidas.
1. Escolha das variáveis de decisão
x = quantidade de peças de sapato a serem produzidas por hora;
y = quantidade de peças de cinto a serem produzidas por hora.
Definidas as variáveis de decisão devemos encontrar a lei de associação que exprima a função objetivo em função dessas variáveis.
2. Determinação da função objetivo
Maximizar z = $f(x,y) = 5x + 2y$
Lucro em reais em função da quantidade de peças de sapatos e cintos produzidos por hora.

Obviamente, nos problemas de programação lineares as variáveis de decisão, necessariamente, devem estar sujeitas às limitações impostas pelo processo de produção, e aqui essas imposições são o tempo e as peças de couro. Observe que para cada peça produzida existe um tempo estabelecido e um limite de peças de couro no estoque, levando-nos às duas restrições do processo de produção.

3. Determinação das restrições do problema
a) Restrição associada ao tempo.
6 sapatos por hora implica em 1 sapato a cada 10 minutos e 5 cintos por hora
implica em 1 cinto a cada 12 minutos. Como 1 hora = 60 minutos, temos

$10x + 12y \leq 60.$

b) Restrição associada às peças de couro
Como são 2 peças de couro por sapato e 1 por cinto, temos

$2x + 1y \leq 10.$

Chegamos finalmente ao modelo completo do problema:

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 5x + 2y$$
$$sujeito\ a: \begin{cases} 10x + 12y \leq 60 \\ 2x + 1y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Problema 2(Pequeno grau de dificuldade): Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a R$ 20,00 de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a R$ 10,00 de lucro por caixa, e no máximo 150 caixas de tangerinas a R$ 30,00 de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.

Solução:
1. Determinação das variáveis de decisão
Neste problema, poderíamos ficar em dúvida quanto à quantidade de caixas de laranjas ser uma variável ou não, além de termos que tomar cuidado com os termos pelo menos e no máximo que aparecem no problema.
x = quantidade de caixas de pêssegos a serem transportadas;
y = quantidade de caixas de tangerinas a serem transportadas.

2. Determinação da função objetivo
A quantidade de caixas de laranjas produzirá um lucro fixo de 200 x R$ 20,00 = R$ 4000,00, e teremos:

Maximizar $z = f(x,y) = 10x + 30y + 4000.$
Lucro em reais.

3. Determinação das restrições
a) Restrição associada à quantidade de caixas de frutas.
Como, obrigatoriamente, devem ser levadas 200 caixas de laranjas e o máximo imposto são 800 caixas , restam $800 - 200 = 600$ caixas. Temos:

$x + y \leq 600.$

b) Restrição associada à quantidade de caixas de pêssegos

$x \geq 100.$

c) Restrição associada à quantidade de caixas de tangerinas

$y \leq 150.$

d) Restrições de não negatividade

$x \geq 0, y \geq 0.$

Portanto, temos o seguinte modelo:

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 10x + 30y + 4000$$
$$Sujeito\ a: \begin{cases} x + y \leq 600 \\ x \geq 100 \\ y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3.3 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA

Nos PPL com duas variáveis x e y com x, $y \geq 0$, teremos o conjunto de soluções viáveis no 1º quadrante do sistema de coordenadas cartesianas, pois se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos as situações abaixo conforme figuras 3.1 e 3.2.

E a figura 3.3 representa a intersecção das soluções $x \geq 0$ e $y \geq 0$ que é a região das soluções viáveis de um PPL.

As restrições de um PPL são do tipo $ax + by \geq 0$ ou do tipo $ax + by \leq 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$.
Veja na figura 3.4 a representação da solução de $ax + by = c$.
Veja na figura 3.5 a representação da solução de $ax + by > c$.
Veja na figura 3.6 a representação da solução de $ax + by < c$

. As definições e teoremas aqui usados foram tirados de Pacca [8].

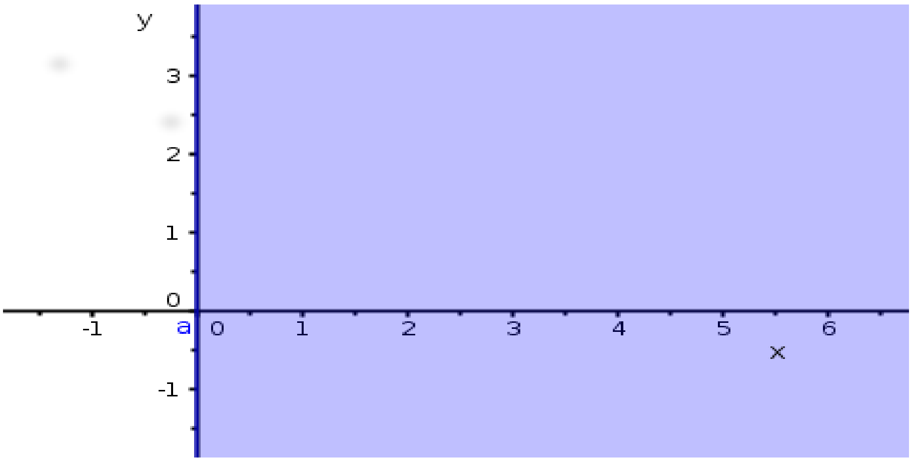


Figura 3.1: Solução de $x \geq 0$

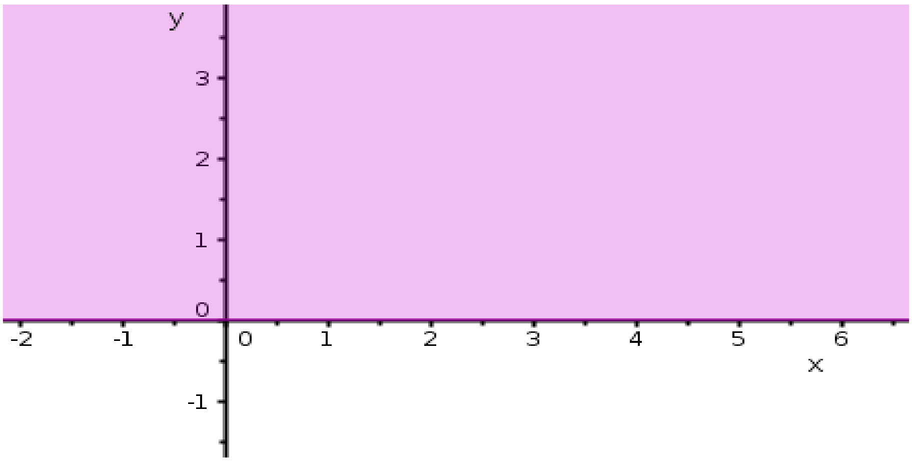


Figura 3.2: Solução de $y \geq 0$

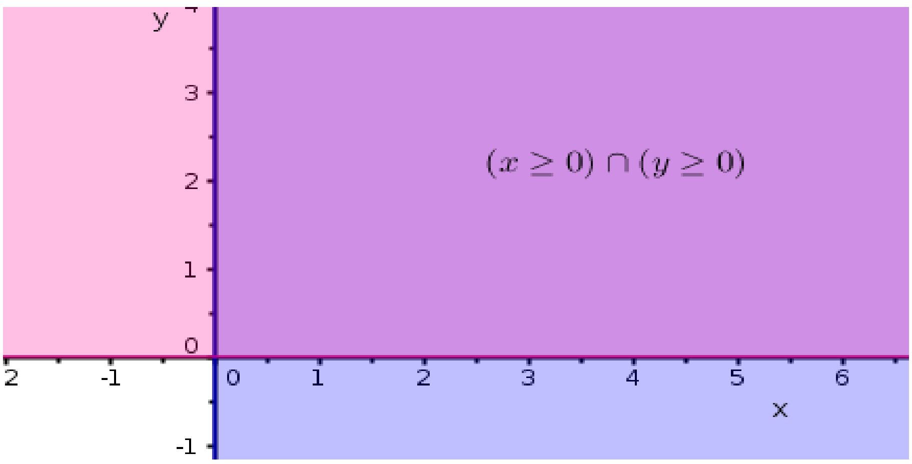


Figura 3.3: Solução de $(x \geq 0) \cap (y \geq 0)$

Definição 1 *Em um problema de programação linear, chamamos de* ***solução viável*** *a qualquer ponto pertecnte à região (ou conjunto) de soluções viáveis à intersecção de um número finito de restrições que são retas ou semiplanos. Esta região de soluções viáveis está sempre contida no 1^o quadrante, como vimos acima.*

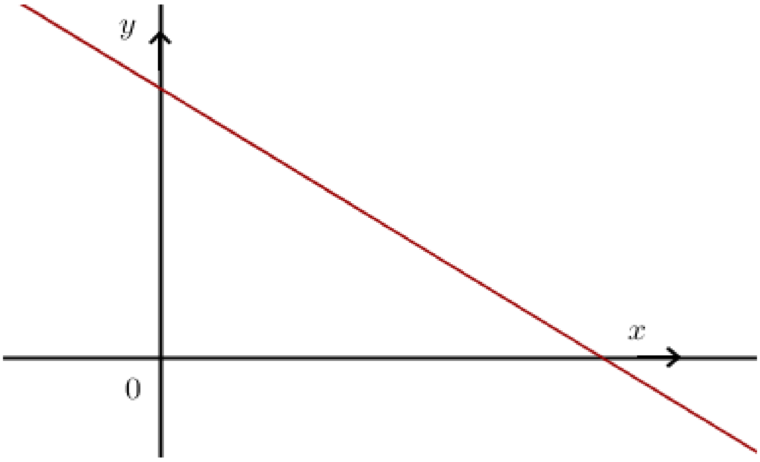


Figura 3.4: Solução de $ax+by=0$

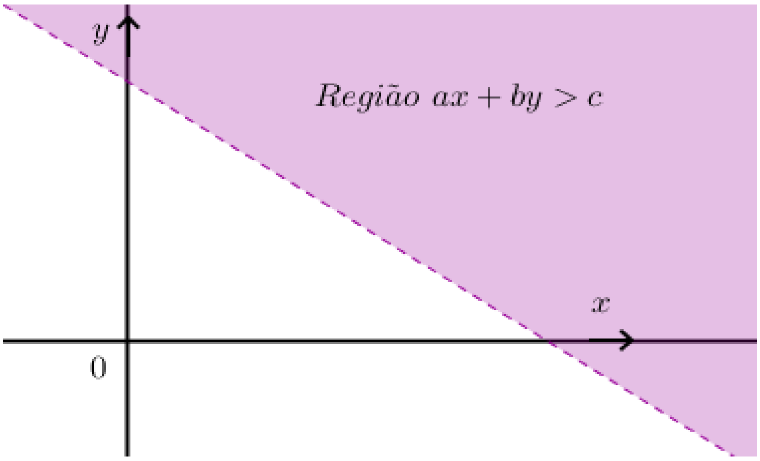


Figura 3.5: Solução de $ax+by>0$

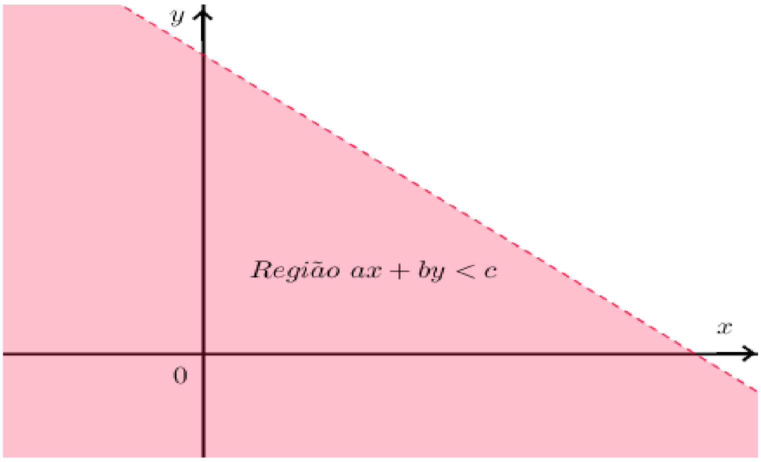


Figura 3.6: Solução de $ax+by<0$

Definição 2 *Uma região de soluções viáveis é dita* limitada *quando a figura geométrica representar um polígono convexo, ou seja, região que pode ser englobada por um círculo. Caso contrário, ela é dita* ilimitada.

Vide figuras 3.7 e 3.8. . .

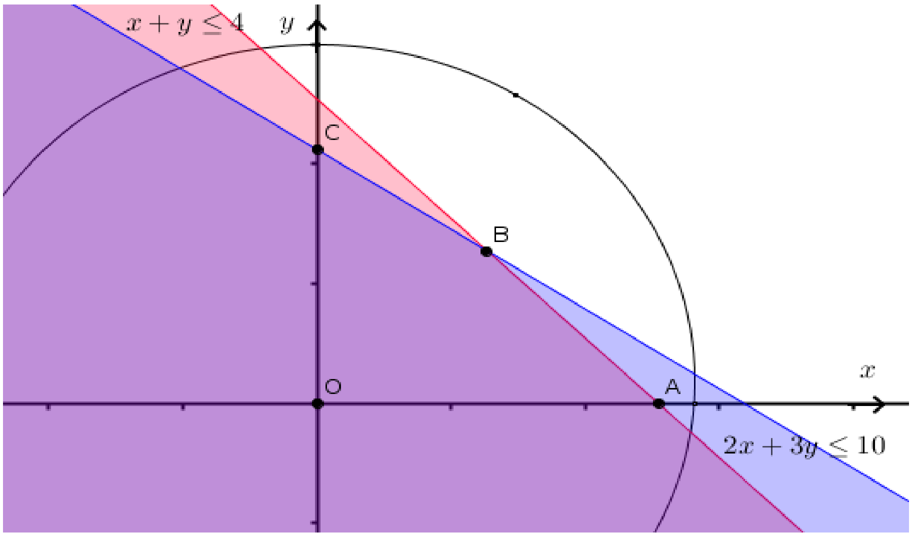


Figura 3.7: Região limitada OABC

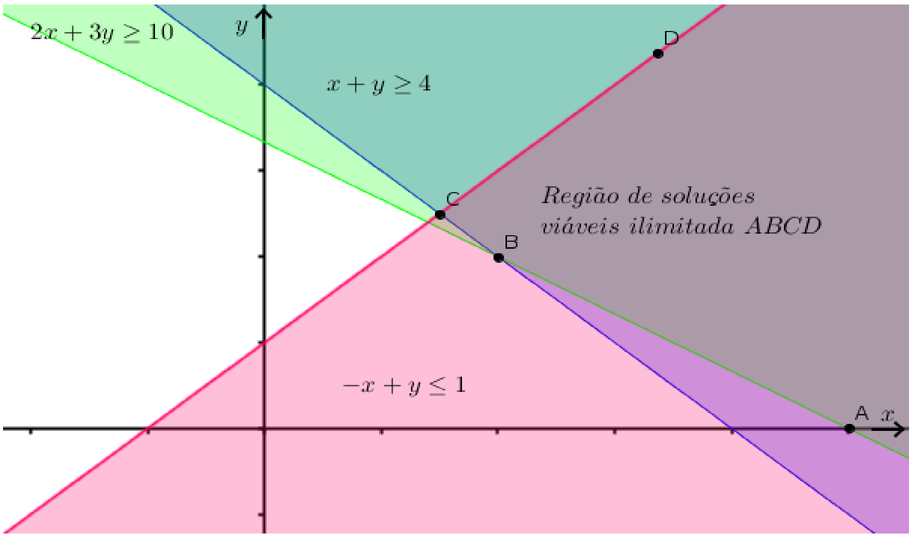


Figura 3.8: Região ilimitada ABCD...

A região(ou conjunto) de soluções viáveis quando não vazia, apresenta vértices que aqui chamamos de pontos extremos. O, A, B e C na figura 3.7 e A, B e C na figura 3.8, são esses pontos extremos.

Teorema 1 *O conjunto das soluções viáveis de um problema de programação linear é um conjunto convexo. Para demonstração ver em Pacca [8].*

Teorema 2 *Toda solução básica viável do sistema é um ponto do conjunto de soluções viáveis, ou seja, é um extremo do conjunto convexo. Para demonstração ver em Pacca [8].*

O Teorema 3 a seguir completa a associação do teorema 2 da correspondência no sentido de solução básica viável para ponto extremo.

Teorema 3 *Um ponto X é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um problema de programação linear se e somente se $X \geq 0$ for uma solução básica do sistema.*

No caso do Simplex, seção 3.5 do capítulo 3 o sistema mencionado no teorema corresponde ao sistema de equações lineares já acrescidas as variáveis de folga, seja por excesso ou por perda.

Corolário 1: O conjunto dos pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado em C_m^n, ou seja, combinação de m elementos tomados n a n, onde m e n correspondem, respectivamente, ao número de linhas e ao número de colunas do sistema, correspondendo também ao número de linhas e número de colunas do quadro Simplex desconsiderando a linha da função objetivo.
Agora, para entendermos e justificarmos o método Simplex que descreveremos mais adiante, no que diz respeito ao valor ótimo atingido pela função objetivo, precisamos de mais um teorema. Ele nos dirá qual a relação entre os pontos extremos e o valor ótimo da função objetivo. Existe alguma garantia de que o valor ótimo seja alcançado nos pontos extremos da região convexa de soluções viáveis?

Teorema 4 ***1.*** *Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo do teorema 1.*
2. *Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

No caso, o método Simplex explicado na seção 3.5 do capítulo 3 vai, basicamente, experimentar uma sequência de soluções básicas viáveis até chegarmos à solução ótima para a função objetivo. Veja a figura 3.9.

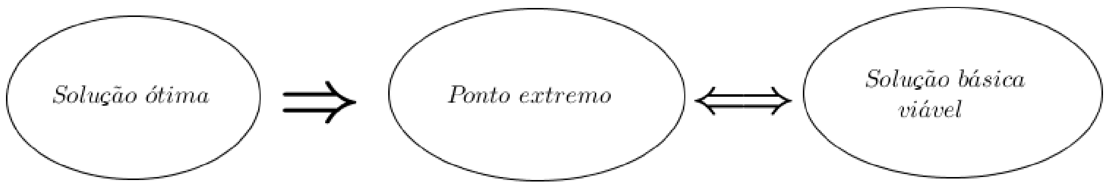


Figura 3.9: Correspondência com a solução ótima

3.4 APLICAÇÃO PRÁTICA

Voltemos ao problema da cerâmica para modelarmos e resolver graficamente.

O Problema: *A cerâmica União produz entre outros produtos, blocos de 6 furos e 8 furos. Cada um dos 4 fornos que possui comporta uma quantidade de 12 mil blocos. O lucro é de R$ 9,00 por cada mil blocos de 6 furos e R$ 10,00 por cada mil blocos de 8 furos. Por questões ambientais ela só dispunha de 16 m^3 de argila por forno. Se colocar apenas blocos de 6 furos o forno comporta 14 mil, e se for apenas de 8 furos o forno comporta 10 mil blocos. Com essas condições impostas, qual a quantidade em milhares de cada tipo de bloco a empresa deve produzir em cada forno para que se tenha um lucro máximo*?

1.Variáveis de decisão

x = quantidade em milhares de blocos de 6 furos.

y = quantidade em milhares de blocos de 8 furos.

2. Função objetivo

Maximizar $z = f(x,y) = 9x + 10y$.

3. Restrições do problema

a) Restrição do forno para as quantidades de blocos de 6 e 8 furos juntos

$x + y \leq 12$.

b) Restrição do forno para as quantidades de blocos de 6 e 8 furos isoladamente $x \leq 14$ e $y \leq 10$.

c) Restrição da argila.

Faz-se necessário discutir com os alunos as relações entre m^3 e dm^3. Para mil blocos de 6 furos gasta-se $1,2dm^3x1000 = 1200dm^3$ e para cada mil blocos de 8 furos gasta-se $1,6dm^3x1000 = 1600dm^3$. Como $16m^3 = 16000dm^3$, temos $1200x + 1600y \leq 16000$ que dividindo ambos os membros por 1000 resulta em

$1,2x + 1,6y \leq 16$.

d) Restrição de não negatividade $x \geq 0, y \geq 0$.

Temos portanto, o seguinte modelo:

$$\mathit{Maximizar}\ z = f(x,y) = 9x + 10y$$

$$\mathit{Sujeito\ a}: \begin{cases} x + y \leq 12 \\ x \leq 14 \\ y \leq 10 \\ 1,2x + 1,6y \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3.4.1 SOLUÇÃO GRÁFICA

Construamos a região de soluções viáveis para a restrição $x + y \leq 12$. É só construir a reta suporte da equação $x + y = 12$ que equivale à função afim $y = -x + 12$, e é mais próximo dos alunos de 1ª série. Está representada pela figura 3.10 . Na sequência, identificamos o semiplano $x + y \leq 12$ usando um ponto Q pertencente ao semiplano abaixo da reta, por exemplo, se Q satisfazer à restrição então, este é o semiplano procurado. Caso contrário, o semiplano será o outro situado acima da reta. Também podemos usar a ideia de que a restrição do tipo $\leq$ terá como solução o semiplano abaixo da reta construída, e que a restrição do tipo $\geq$ terá como solução o semiplano acima da reta.

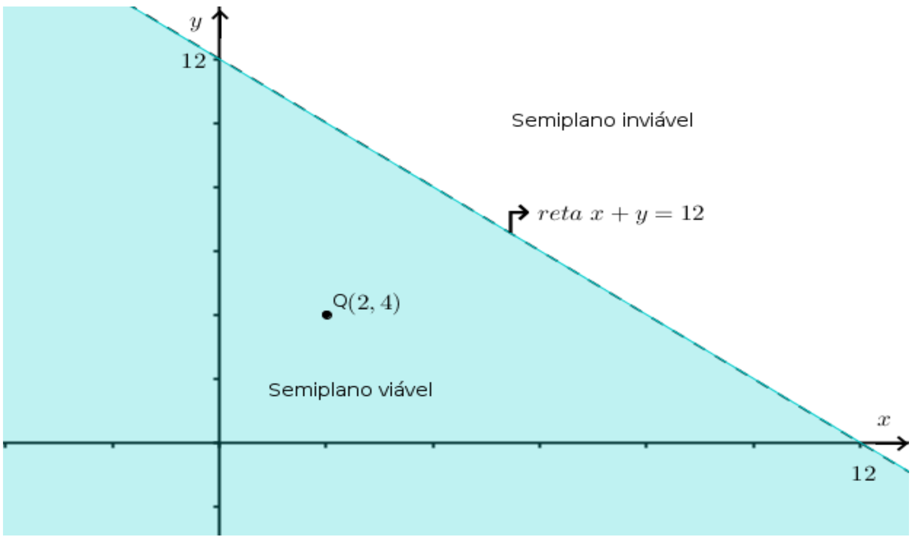


Figura 3.10: Representação do semiplano $x + y \leq 12$

Continuamos construindo os semiplanos das restrições restantes. No caso de $x \leq 14$, semiplano é o que fica à esquerda da reta $x = 14$. Se a restrição for do tipo $x \geq c$, com c real, o semiplano viável é o que fica à direita da reta $x = c$. Veja as regiões de soluções viáveis nas figuras 3.11, 3.12 e 3.13.
Solução de $x \leq 14$.

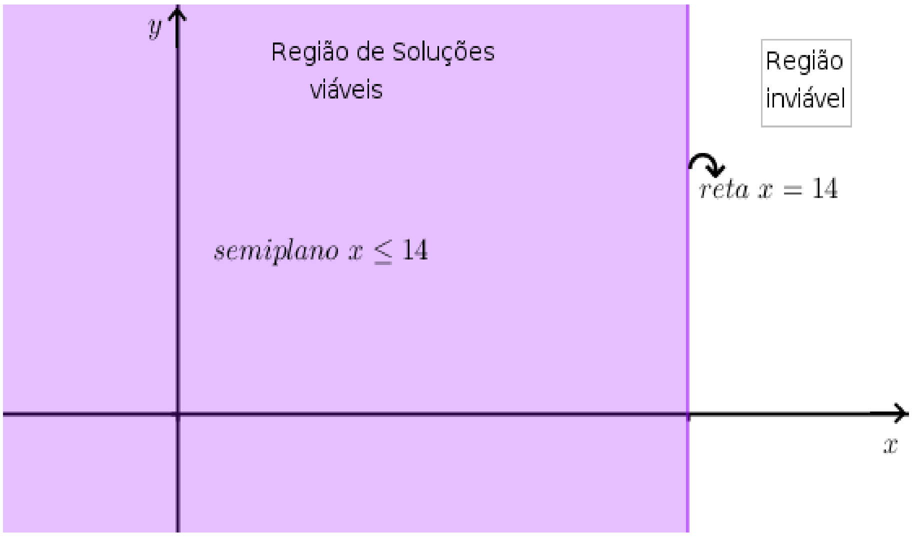


Figura 3.11: Região viável de $x \leq 14$

Solução de $y \leq 10$.

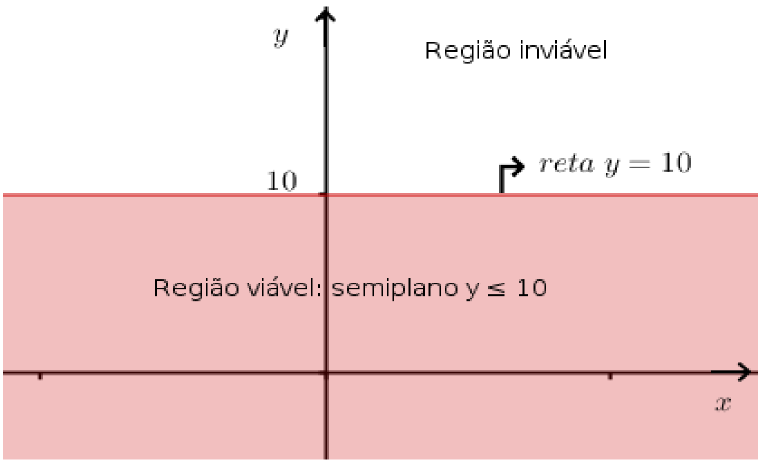


Figura 3.12: Representação de $y \leq 10$

Solução de $1,2x + 1,6y \leq 16$.
Agora, considerando o 1º quadrante como região das soluções viáveis por conta das restrições de não negatividade, é só fazer a intersecção de todas as restrições obtendo o conjunto(região) de soluções viáveis. Neste caso, teremos a região convexa limitada OABC mostrada na figura 3.14.

Terminada essa 1ª etapa vamos separar essa região de soluções viáveis OABC e analisá-la na 2ª etapa visando encontrar o ponto ótimo que maximiza o lucro do proprietário da cerâmica. Veja a figura 3.15. Para encontrarmos o ponto ótimo, traçamos as curvas de nível da função objetivo Maximizar Z = $9x + 10y$. Curvas de nível é um conjunto de retas paralelas que é obtido a partir da variação de Z. Se neste momento o professor estiver trabalhando na 3ª série com estudo analítico da reta, é fácil mostrar o paralelismo entre retas que estejam na forma geral $Ax + By = C$.

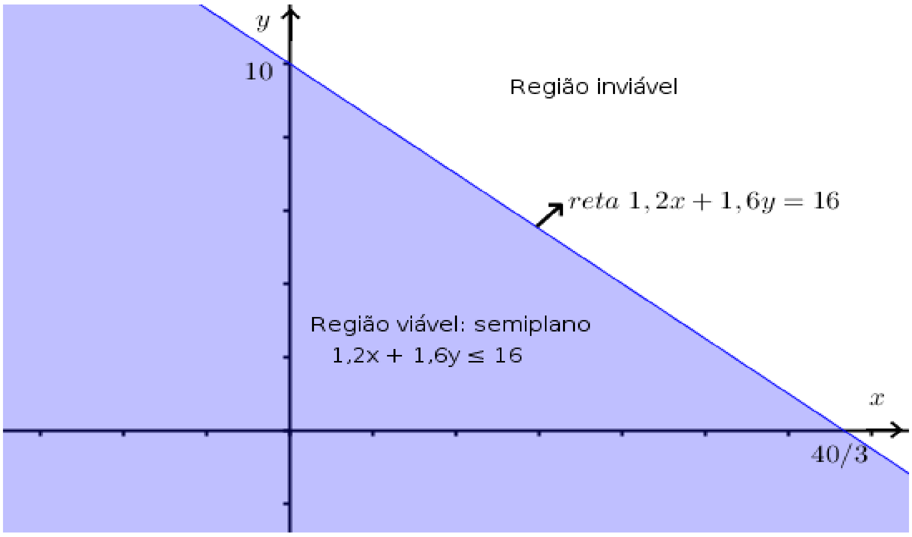


Figura 3.13: Representação de $1,2x+1,6y \leq 16$

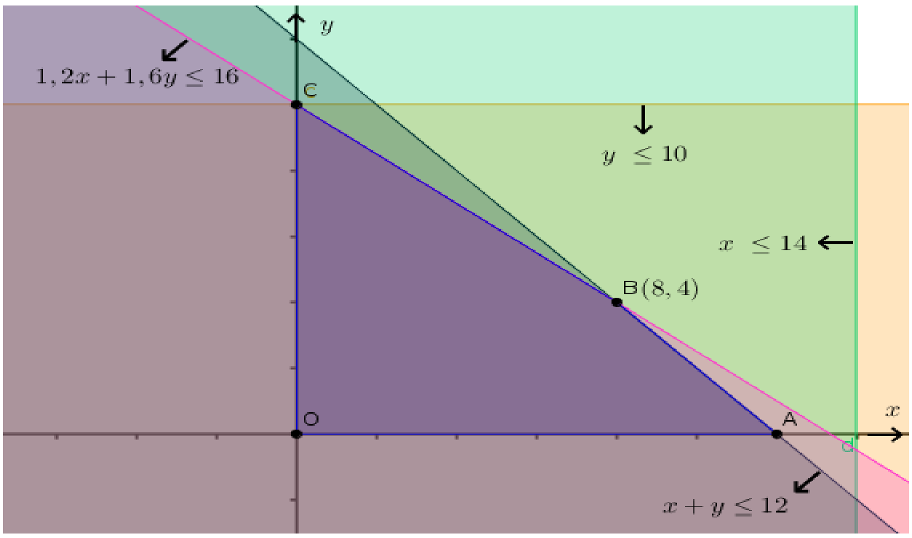


Figura 3.14: Representação do conjunto de soluções viáveis OABC

Retas paralelas terão os mesmos coeficientes A e B, e diferente coeficiente C. Neste problema, vamos atribuir à função objetivo os valores Z = 0, Z = 20, Z = 45, Z = 70, Z = 100, Z = 120 e Z = 112, encontrando, respectivamente, as curvas de nível representadas por retas pontilhadas na Figura 3.16. Estas curvas de nível nos mostra que à medida que aumentamos Z(lucro) a partir de zero, vamos obtendo pontos ótimos melhores até chegar no ponto extremo B$(8,4)$ que é a solução ótima do problema, ou seja, é o único ponto de intersecção da curva de nível representada pela equação $9x+10y = 112$ com a região de soluções viáveis. A partir daí, para Z > 112, as curvas de nível não mais farão intersecção com a região de soluções viáveis OABC.

Devido ao fato da região de soluções viáveis ser constituída de infinitos pontos, se torna impossível testar ponto a ponto substituindo-os na função objetivo. Logo, se torna mais fácil encontrar o solução ótima como fizemos acima, que é uma aplicação do teorema apresentado abaixo.

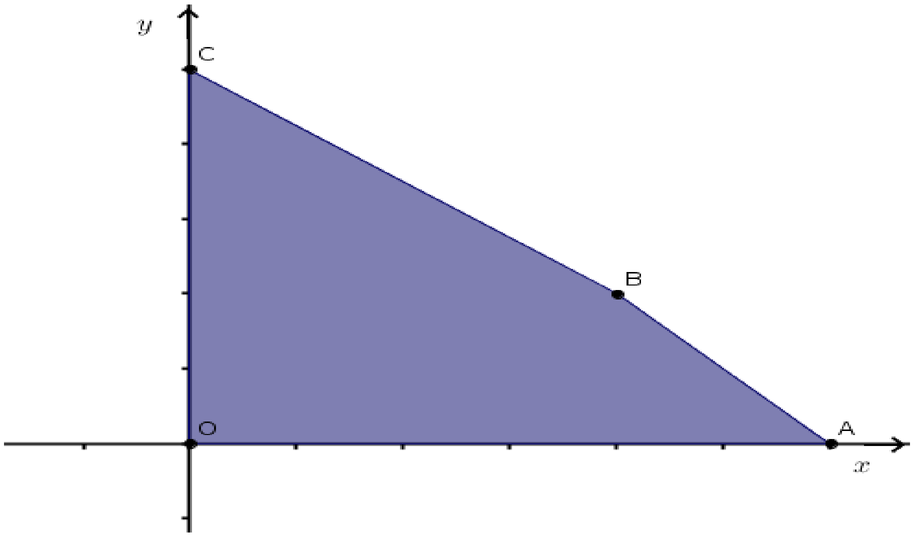


Figura 3.15: Região de soluções viáveis OABC do problema da cerâmica

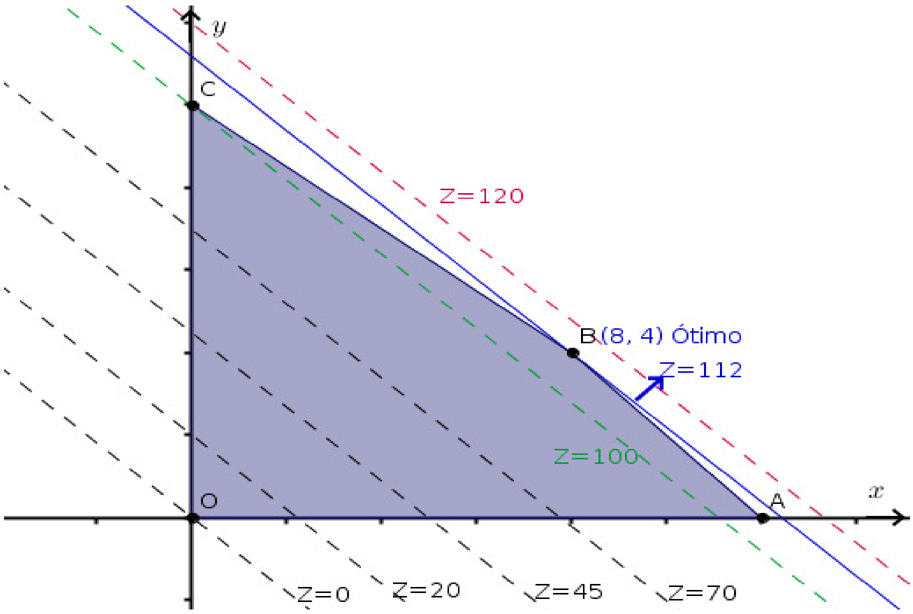


Figura 3.16: Representação da solução ótima através das curvas de nível de Z = 9x + 10y

Teorema 5 *Se a região de soluções viáveis de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região de soluções viáveis é ilimitada, então a função objetivo pode ou não atingir valores máximos ou mínimos, contudo, se atingir um máximo ou mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.*

De acordo com esta região de soluções viáveis, um problema de programação linear, segundo Melo [15] pode ser classificado em:

Caso 1: *O problema de programação Linear tem uma única solução ótima.*

Caso 2: *O problema de programação Linear tem infinitas soluções ótimas.*

Caso 3: *O problema de programação Linear é impossível, ou seja, a região de soluções viáveis*

é vazia, não existe solução ótima.
Caso 4: *O problema de programação Linear é ilimitado, ou seja, existem pontos na região viável cujo valor da função objetivo é arbitrariamente alto no caso de problema de maximização e arbitrariamente pequeno no caso de problema de minimização.*

Sendo assim, vamos representar graficamente cada um dos quatro casos, através de exemplos genéricos.
Caso 1.

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 4x + 3y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ 2x + 1y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Observe a representação da região de soluções viáveis do caso 1 na figura 3.17.
Neste caso 1, se a função objetivo fosse minimizar $Z = 4x + 3y$, a única solução seria o ponto

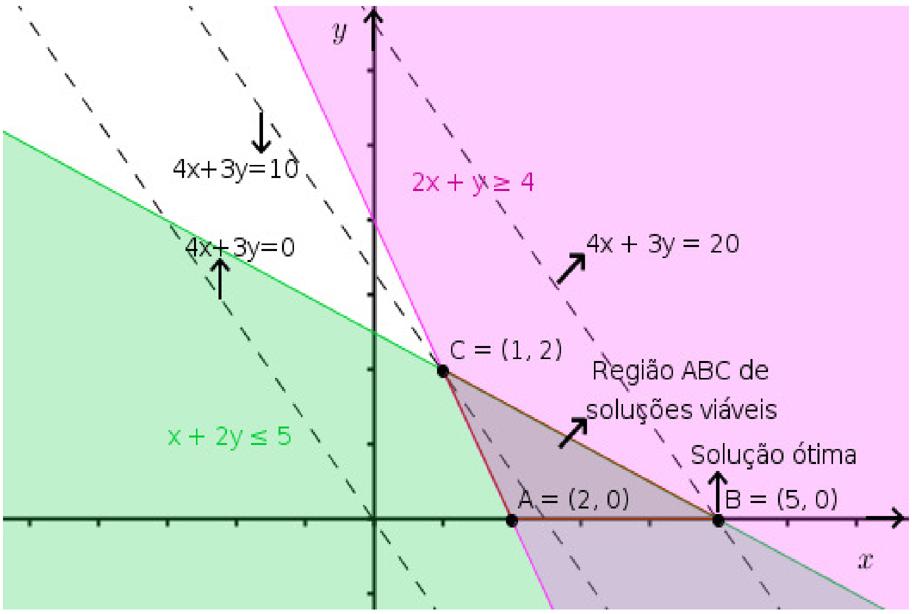


Figura 3.17: Caso 1

A = $(2,0)$.
Caso 2: mostrado na figura 3.18.

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 1,5x + 2y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} 2x + y \leq 18 \\ 3x + 4y \leq 21 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

No caso 2, as curvas de nível da função objetivo (Z = 0, Z = 4, Z = 8 e Z = 10,5) nos dá

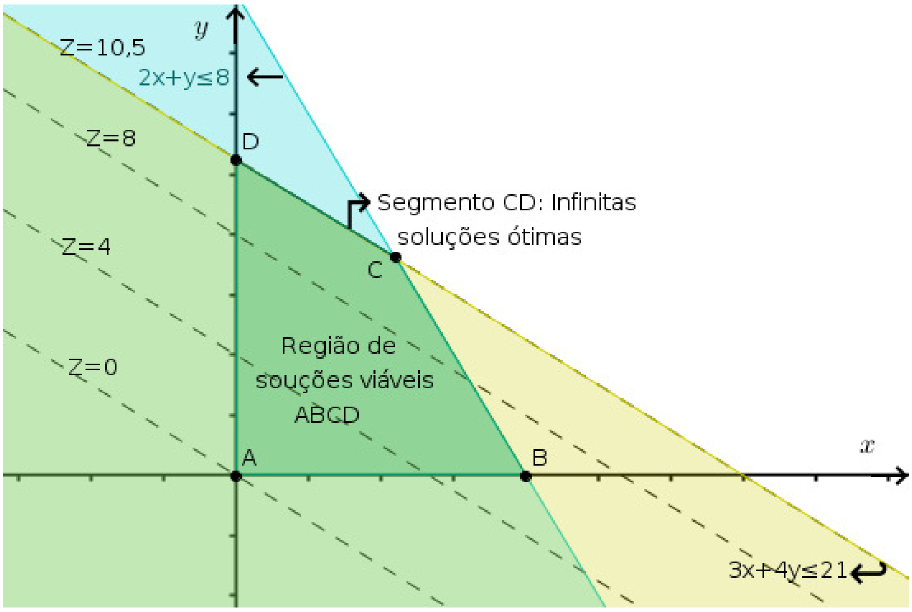


Figura 3.18: Caso 2

solução ótima para Z = 10,5, mas a intersecção da curva de nível Z = 10,5 com a região de soluções viáveis ABCD é exatamente o segmento CD. Conclui-se que a solução deste problema de programação linear são os infinitos pontos do segmento CD. Ou ainda melhor, as operações com conjuntos estudadas na 1^a série são trabalhadas nesses casos, a distribuição dos conteúdos em forma de *espiral* são usadas nos problemas de otimização, e isso só aumenta a importância dessa proposta.

Caso 3: Mostrado na figura 3.19.

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 3x + 5y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} x + y \leq 4 \\ 7x + 5y \geq 35 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

No caso 3,$(x+y \leq 4) \cap (7x+5y \geq 35) = \emptyset$ no 1^o quadrante, o que nos garante a não existência de uma solução ótima para o problema. A figura 3.20 mostra o último caso, o 4.

Caso 4:

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 4x + 5y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} 2x + 3y \geq 10 \\ 2x + y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Mostrar aos alunos, matematicamente, que Z máximo tende ao infinito talvez fique mais atraente usando sequências infinitas. No exemplo do caso 4, observa-se que para qualquer valor real

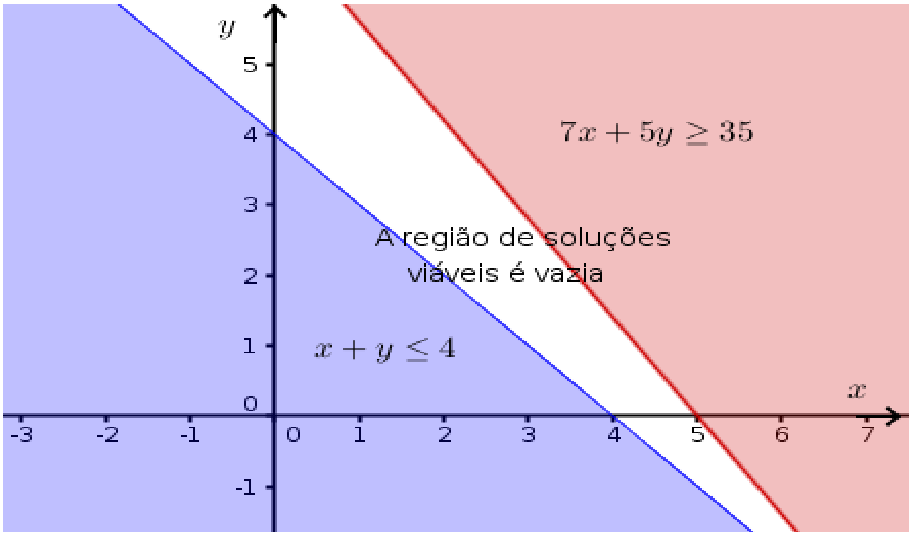


Figura 3.19: Caso 3

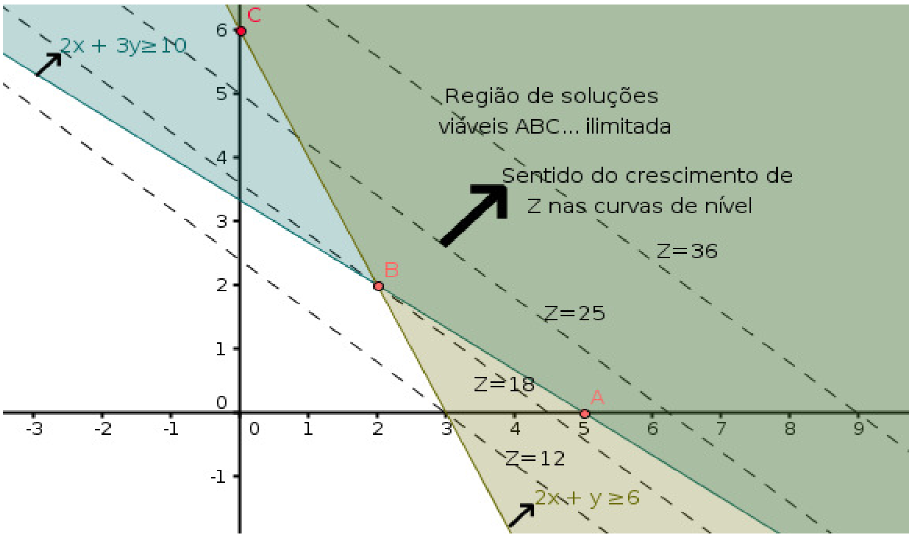


Figura 3.20: Caso 4

M arbitrariamente grande, existe, no mínimo um ponto $P = (x_p, y_p)$ pertencente à região de soluções viáveis ABC... ilimitada, tal que $Z = f(x_p, y_p) = 4x_p + 5y_p > M$. Na prática, é mais difícil mostrar que o lucro máximo de uma empresa é ilimitado, ou que o custo mínimo da empresa é zero. Logo, o problema deve ser preparado com antecedência, escolhendo aqueles que tem significado prático real e que seja condizente com o contexto cultural e geográfico dos alunos. Deve-se buscar um problema inicial de uma instituição pública ou privada, onde seja possível fazer uma visita com os alunos, abrindo também, espaço para a construção de um miniprojeto interdisciplinar. Num problema de produção de blocos, por exemplo, há espaço para falar de geografia, impactos ambientais, empreendedorismo, etc.

3.5 O MÉTODO SIMPLEX

Exemplo para um problema com duas variáveis

Aqui usaremos os teoremas 1, 2, 3 e 4 citados anteriormente, principalmente o 4. O método simplex vai, basicamente, experimentar uma sequência de soluções básicas viáveis até chegarmos à solução ótima do sistema para a função objetivo. Continuaremos a usar o modelo do problema da cerâmica já apresentado na seção 3.4, e já resolvido graficamente, mas agora, eliminaremos as restrições 2 e 3 apegados ao fato de que as mesmas não interferiram na região de soluções viáveis OABC da figura 3.14.

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 9x + 10y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} x + y \leq 12 \\ 1,2x + 1,6y \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Evitaremos falar da linguagem vetorial que é extremamente importante em Álgebra Linear, muito usada na matemática aplicada nos cursos de graduação, no entanto, está distante da realidade do ensino médio. Como o tema Matrizes e Sistemas Lineares não são contemplados nos PCNEM, mas são usados em alguns CBCs estaduais, então é extremamente viável falar do método simplex. Faremos este capítulo adaptando ao nível do ensino médio sem perdas para a matemática. As bases teóricas do método simplex exposto abaixo foram colhidas de Medeiros [17].

- *A solução ótima de um problema de programação linear, quando existe, encontra-se em um dos extremos do conjunto de soluções viáveis.*
- *A mudança de um extremo do conjunto de soluções viáveis para outro extremo, é feita pela substituição de uma variável básica por uma variável não básica.*
- *A seleção da variável não básica para entrada na nova base é feita atendendo ao seu coeficiente corrente conforme equação da função objetivo atual.*
- *A variável básica que entra na base está associada ao menor valor dos quocientes entre os termos da direita e os coeficientes positivos da variável que entra na base.*

Vamos rescrever o modelo do problema acrescentando as variáveis de folga:

$$Maximizar\ z = f(x,y) = 9x + 10y$$

$$sujeito\ a: \begin{cases} x + y + t = 12 \\ 1,2x + 1,6y + w = 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

As **variáveis básicas** são t e w (as variáveis de folga) e as **variáveis não básicas** são x e y (as varáveis de decisão). Escrevendo a função objetivo colocando as variáveis no 1º membro e montando um sistema junto com as restrições, teremos:

$$\begin{cases} z-9x-10y+0t+0w=0 \\ 0z+x+y+t+0w=12 \\ 0z+1,2x+1,6y+0t+w=16 \end{cases}$$

Dispondo tudo isso num quadro teremos:

Tabela 3.1: Quadro simplex 1.1

z	x	y	t	w	b
1	-9	-10	0	0	0
0	1	1	1	0	12
0	1,2	1,6	0	1	16

a) Começando com uma solução básica inicial indicada pelo ponto O = (0, 0), que é justamente a origem da região de soluções viáveis do método geométrico, aplicaremos o teste de otimalidade que consiste em avaliar o efeito da permuta de uma variável básica por outra não básica, analisando se o valor de z melhora ou não. No caso acima, temos como solução básica inicial $t=12$, $w=16$, $x=0$ e $y=0$, que nos dá $z=0$. Esta solução que tem $x=y=0$ e $z=0$ corresponde ao ponto extremo O = (0, 0) da região de soluções viáveis da figura 3.15. Obviamente, essa solução não é ótima pois examinando a função objetivo na forma normal $z=9x+10y$ e $x=0$, $y=0$ e $z=0$, temos:

- Se x entra na base com valor 1, o valor de z passa de $z=0$ para $z=9$, aumentado 9 unidades, exatamente o valor do coeficiente de x.
- Se y entra na base com valor 1, o valor de z passa de $z=0$ para $z=10$, aumentando 10 unidades, exatamente o valor do coeficiente de y.

Por outro lado, se o coeficiente de x ou y fosse negativo, a entrada dessa variável diminuiria o valor de z, de acordo com o seu coeficiente. Podemos concluir, neste teste de otimalidade, que enquanto a função objetivo apresentar variáveis não básicas com coeficientes positivos, ela poderá ser aumentada, não sendo portanto a solução ótima.
b) Cálculo da nova solução básica
Pelo quadro acima, a **variável que entra na base** é a variável com coeficiente negativo de maior valor absoluto. Tanto pelo teste quanto pelo quadro, y é a variável que entra na base, ou seja, a cada unidade y que aumenta em milhares de blocos ocorre um aumento no lucro(z) de 10 reais.

A **variável que sai** é aquela que primeiro se anula com a entrada da variável y escolhida anteriormente. Ela pode ser achada dividindo os termos independentes à direita pelos coeficientes de y. Assim, sai a variável w da 2ª restrição ou da 3ª linha do quadro. No quadro seguinte, aparece também em destaque a linha e o **elemento pivô**(1,6) e a variável$y$ que entra.

Tabela 3.2: Quadro simplex 1.2

z	x	y	t	w	b
1	-9	-10	0	0	0
0	1	1	1	0	12
0	1,2	1,6	0	1	16

Como 12 : 1 = 12, 16 : 1,6 = 10 e 10 < 12, temos que a 3ª linha em destaque é a linha da variável que sai, no caso, w. Temos ainda que a intersecção dessa 3ª linha com a coluna da variável que entra, em destaque, gera o elemento pivô também em destaque. No caso da descoberta da linha pivô onde se divide os termos independentes da direita pelos coeficientes da variável que entra, vale destacar que consideramos o *menor valor positivo*, sendo desconsiderados os quocientes negativos e impossível(divisão por zero). Na sequência, dividimos a linha pivô pelo valor do elemento pivô, obtendo a nova linha pivô

z	x	y	t	w	b	
0	1,2	1,6	0	1	16	$\rightarrow$ linha pivô
0	0,75	1	0	0,625	10	$\rightarrow$ linha pivô $\div 1,6 =$nova linha pivô

Agora, vamos zerar os demais elementos da coluna da variável que entra a partir do novo elemento pivô que é unitário. Para isto, basta multiplicar os elementos da nova linha pivô pelo oposto do coeficiente da variável que entra na outra linha, e somam-se os resultados correspondentes obtendo uma nova linha.

z	x	y	t	w	b	
0	0,75	1	0	0,625	10	$\rightarrow$ nova linha pivô $\times 10(opostode-10)$
0	7,5	10	0	6,25	100	$\rightarrow$ resultado nova linha pivô $\times 10$
0	-9	-10	0	0	0	$\rightarrow$ 1ª linha
0	-1,5	0	0	6,25	100	$\rightarrow$= nova 1ª linha(soma das 2 linhas anteriores)

z	x	y	t	w	b	
0	0,75	1	0	0,625	10	$\rightarrow$ nova linha pivô $\times(-1)(opostode1)$
0	-0,75	-1	0	-0,625	-10	$\rightarrow$ resultado nova linha pivô $\times(-1)$
0	1	1	1	0	12	$\rightarrow$ 2ª linha
0	0,25	0	1	-0,625	2	$\rightarrow$= nova 2ª linha(soma das 2 linhas anteriores)

Dispondo as novas linhas em um novo quadro, temos

Tabela 3.3: Quadro simplex 1.3

z	x	y	t	w	b
1	-1,5	0	0	6,25	100
0	0,25	0	1	-0,625	2
0	0,75	1	0	0,625	10

c) A partir desse novo quadro conclui-se a nova solução: $z = 100$, $x = 0$, $y = 10$, $t = 2$ e $w = 0$. Observe que esses valores saem das colunas das variáveis que tem um coeficiente igual a 1 e os demais iguais a zero, no caso, z, y e t, cujos valores são iguais aos termos independentes da direita. Quando os coeficientes não são iguais a zero, as variáveis, no caso x e w, assumem valores iguais a zero. Esta solução $x = 0$ e $y = 10$ equivale ao ponto extremo C=(0, 10) no conjunto de soluções viáveis da figura 14. Houve uma produção de 10 milhares de blocos de 8 furos, não houve produção de blocos de 6 furos atingindo um lucro z máximo de R$ 100,00. Como $w = 0$, significa que não houve sobra de argila, toda a matéria prima foi utilizada na produção dos blocos de 8 furos. Assim, $t = 2$ indica uma sobra para a produção de 2 mil blocos de 6 furos que foram impedidos de serem produzidos pela falta de argila. Como vimos anteriormente no teste de otimalidade, ainda é possível melhorar o valor do lucro z pois a linha da função objetivo ainda apresenta valor negativo(- 1,5), indicando que o processo de busca do valor ótimo para z deve continuar. Então, recomeça-se todo o processo descrito anteriormente.

Cálculo da nova solução: A variável que entra na base é x cujo único coeficiente negativo na linha da função objetivo é -1,5. Dividindo os termos independentes pelos respectivos coeficientes da coluna de x, temos: 2 : 0,25 = 8 e 10 : 0,75 = 13,333.... . Como 8 < 13,333... temos que a 2ª linha é a linha da variável que sai, neste caso, é t. Logo, fica assim o novo quadro:

Tabela 3.4: Quadro simplex 1.4

z	x	y	t	w	b
1	-1,5	0	0	6,25	100
0	0,25	0	**1**	-0,625	2
0	0,75	**1**	0	0,625	10

O elemento pivô é 0,25. Dividindo os elementos da 2ª linha pelo valor do elemento pivô temos:

z	x	y	t	w	b	
0	**0,25**	0	1	-0,625	2	$\rightarrow \div 0,25$ obtém-se
0	1	0	4	-2,5	8	$\rightarrow$ nova linha pivô

Vamos zerar os demais coeficientes da coluna de x, obtendo assim novas linhas, multiplicando essa nova linha pivô pelo valor oposto do coeficiente da coluna de x.

z	x	y	t	w	b	
0	1	0	4	-2,5	8	$\rightarrow \times 1,5(opostode-1,5)$ obtém
0	1,5	0	6	-3,75	12	$\rightarrow$ resultado (l_2)
1	-1,5	0	0	6,25	100	$\rightarrow$ 1ª linha(l_3). Agora, $l_2 + l_3$
1	0	0	6	2,5	112	$\rightarrow$= nova 1ª linha

z	x	y	t	w	b	
0	1	0	4	-2,5	8	$\rightarrow \times(-0,75)(opostode0,75)$ obtém
0	-0,75	0	-3	1,875	-6	$\rightarrow$ resultado (l_2)
0	0,75	1	0	0,625	10	$\rightarrow$ 3ª linha(l_3). Agora, $l_2 + l_3$
0	0	1	-3	2,5	4	$\rightarrow$= nova 3ª linha

Reescrevendo as novas linhas em um novo quadro temos:

Tabela 3.5: Quadro simplex 1.5

z	x	y	t	w	b
1	0	0	6	2,5	**112**
0	**1**	0	4	-2,5	**8**
0	0	**1**	-3	2,5	**4**

Pelo teste de otimalidade este resultado explícito no quadro é ótimo, pois não há coeficientes negativos na 1ª linha da função objetivo. O valor ótimo para o lucro é $z = 112$ reais, quando são produzidos $x = 8$ mil blocos de 6 furos e $y = 4$ mil blocos de 8 furos, não havendo sobra na capacidade do forno ($t = 0$) e nem sobra de argila ($w = 0$). Esta solução ótima $x = 8$ e $y = 4$ é justamente o ponto extremo ótimo B=(8, 4) da figura 14 do método gráfico, confirmando o teorema 4 deste capítulo.

3.5.1 EXEMPLO PARA UM PROBLEMA COM TRÊS VARIÁVEIS

Acrescentaremos ao problema da cerâmica mais um produto a ser fabricado: a lajota. **Eis o problema com o acréscimo**: *A cerâmica União produz entre outros produtos, blocos de 6 furos, blocos de 8 furos e a lajota. Cada um dos 4 fornos que possui comporta uma quantidade de 12 mil blocos e lajotas. O lucro é de R\$ 9,00 por cada mil blocos de 6 furos, R\$ 10,00 por cada mil blocos de 8 furos e R\$ 15,00 por cada mil lajotas. Por questões ambientais ela só dispunha de 18m*$_3$ *de argila por forno, e gasta-se 1,2 dm*^{3}*, 1,6 dm*^{3} *e 1,8 dm*^{3} *para produzir, respectivamente, um bloco de 6 furos, um bloco de 8 furos e uma lajota. O mercado local tem uma demanda de no máximo 2 mil lajotas, pois o isopor tem tido prioridades nos forros com lages. Com essas condições impostas, qual a quantidade em milhares de cada tipo de bloco e de lajota a empresa deve produzir em cada forno para que tenha um lucro máximo?*

1.Variáveis de decisão
x = quantidade em milhares de blocos de 6 furos
y = quantidade em milhares de blocos de 8 furos
z = quantidade em milhares de lajotas.

2. Função objetivo
Maximizar L = $f(x,y,z) = 9x + 10y + 15z$.

3. Restrições do problema
a) Restrição do forno para as quantidades de blocos de 6 e 8 furos e de lajotas juntos
$x + y + z \leq 12$.
b) Restrição da argila
$1,2x + 1,6y + 1,8z \leq 18$.
c) Restrição para a demanda da lajota
$z \leq 2$.
d) Restrição de não negatividade
x, y e $z \geq 0$.

Temos portanto, o seguinte modelo:

$$Maximizar\ L = f(x,y,z) = 9x + 10y + 15z$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} x + y + z \leq 12 \\ 1,2x + 1,6y + z \leq 18 \\ z \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Acrescentando as variáveis de folga no modelo, teremos:

$$Maximizar\ L = f(x,y,z) = 9x + 10y + 15z + 0k + 0t + 0w$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} x + y + z + k = 12 \\ 1,2x + 1,6y + 1,8z + t = 18 \\ z + w = 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Trazendo as variáveis da função objetivo para o 1º membro fica assim:
L $-9x - 10y - 15z - 0k - 0t - 0w = 0$. Dispondo tudo isso num quadro teremos

Tabela 3.6: Quadro simplex 2.1

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-9	-10	-15	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	12
0	1,2	1,6	1,8	0	1	0	18
0	0	0	1	0	0	1	2

Obviamente temos uma solução básica inicial com $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ (variáveis não básicas) e $k = 12$, $t = 18$ e $w = 2$ (variáveis básicas), com lucro L = 0. Pelo teste de otimalidade esta solução não é ótima pois na função objetivo há coeficientes negativos. Como -15 é o que tem maior valor absoluto, concluímos que z é a variável que entra na base, e para descobrirmos a variável que sai dividimos os termos independentes da direita pelos respectivos coeficientes da coluna da variável z que entra na base, escolhendo o quociente de menor valor positivo. Temos então, $12 \div 1 = 12$, $18 \div 1,8 = 10$ e $2 \div 1 = 2$, como $2 < 10 < 12$ ficamos com o número 2 e a linha da variável que sai é a 4ª. Portanto, entra a variável não básica z e sai a variável básica w. Veja no quadro a seguir:

Tabela 3.7: Quadro simplex 2.2

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-9	-10	-15	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	12
0	1,2	1,6	1,8	0	1	0	18
0	0	0	1	0	0	1	2

Como o elemento pivô é 1, para zerarmos os demais elementos da coluna de z basta multiplicarmos a linha pivô pelo valor oposto de cada coeficiente da coluna de z, e somarmos a linha pivô com cada nova linha que surge como resultado do produto anterior.

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow$ linha pivô
0	0	0	15	0	0	15	30	$\rightarrow \times 15$
1	-9	-10	-15	0	0	0	0	$\rightarrow$ + 1ª linha
1	-9	-10	0	0	0	15	30	$\rightarrow$= nova 1ª linha

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow$ linha pivô
0	0	0	-1	0	0	-1	-2	$\rightarrow \times(-1)$
0	1	1	1	1	0	0	12	$\rightarrow$ + 2ª linha
0	1	1	0	1	0	-1	10	$\rightarrow$= nova 2ª linha

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0	0	1	0	0	1	2	$\rightarrow$ linha pivô
0	0	0	-1,8	0	0	-1,8	-3,6	$\rightarrow \times(-1,8)$
0	1,2	1,6	1,8	0	1	0	18	$\rightarrow$ + 3ª linha
0	1,2	1,6	0	0	1	-1,8	14,4	$\rightarrow$= nova 3ª linha

Reescrevendo, o novo quadro fica assim:

Tabela 3.8: Quadro simplex 2.3

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-9	-10	0	0	0	15	**30**
0	1	1	0	**1**	0	-1	**10**
0	1,2	1,6	0	0	**1**	-1,8	**14,4**
0	0	0	**1**	0	0	1	**2**

Vê-se claramente que a nova solução básica é lucro L = 30, $z = 2$, $k = 10$, $t = 14,4$ e $x = y =$

$w = 0$. Mas, pelo teste de otimalidade, esta solução ainda não é ótima pois temos -9 e -10 negativos na linha da função objetivo, e como 10 é o maior valor absoluto temos que y é a nova variável a entrar na base. Agora, dividindo os termos independentes pelos respectivos coeficientes da coluna da variável y, descobriremos a linha da variável que sai. Temos: $10 \div 1 = 10$, $14,4 \div 1,6 = 9$ e $2 \div 0$(impossível), e como $9 < 10$ segue que a linha da variável que sai é a 3ª, $1,6$ é o elemento pivô e t é a variável que sai da base de solução. Veja no quadro abaixo:

Tabela 3.9: Quadro simplex 2.4

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-9	-10	0	0	0	15	30
0	1	1	0	1	0	-1	10
0	1,2	**1,6**	0	0	1	-1,8	14,4
0	0	0	1	0	0	1	2

Continuemos a busca pela solução ótima.

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	1,2	1,6	0	0	1	-1,8	14,4	$\rightarrow$linha pivô
0	0,75	1	0	0	0,625	-1,125	9	$\rightarrow \div 1,6$(pivô) =

nova linha pivô.

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0,75	1	0	0	0,625	-1,125	9	$\rightarrow$ nova linha pivô
0	7,5	10	0	0	6,25	-11,25	90	$\rightarrow \times 10$
1	-9	-10	0	0	0	15	30	$\rightarrow$ + 1ª linha
1	-1,5	0	0	0	6,25	3,75	120	$\rightarrow$= nova 1ª linha

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0,75	1	0	0	0,625	-1,125	9	$\rightarrow$ nova linha pivô
0	-0,75	-1	0	0	-0,625	1,125	-9	$\rightarrow \times(-1)$
0	1	1	0	1	0	-1	10	$\rightarrow$ + 2ª linha
0	0,25	0	0	1	-0,625	0,125	1	$\rightarrow$= nova 2ª linha

A 4ª linha não precisa ser alterada por já possuir o elemento zero nessa coluna de y. Assim, reescrevendo o quadro teremos:

Tabela 3.10: Quadro simplex 2.5

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-1,5	0	0	0	6,25	3,75	**120**
0	0,25	0	0	**1**	-0,625	0,125	**1**
0	0,75	**1**	0	0	0,625	-1,125	**9**
0	0	0	**1**	0	0	1	**2**

A nova solução básica é lucro L = 120, $y = 9$, $z = 2$, $k = 1$ e $x = t = w = 0$. No entanto, ainda não é a solução ótima, pois temos valor negativo na linha da função objetivo. Como -1,5 é o único valor negativo na linha da função objetivo, x é a nova variável a entrar na base de solução. A nova linha da variável que sai é a 2ª linha, pois $1 \div 0,25 = 8$, $9 \div 0,75 = 12$ e $2 \div 0$ é impossível nos dando $8 < 12$. O elemento pivô é 0,25 e variável que sai é k. Veja no quadro abaixo:

Tabela 3.11: Quadro simplex 2.6

L	x	y	z	k	t	w	b
1	-1,5	0	0	0	6,25	3,75	120
0	0,25	0	0	1	-0,625	0,125	1
0	0,75	1	0	0	0,625	-1,125	9
0	0	0	1	0	0	1	2

Continuemos em busca da solução ótima:

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	0,25	0	0	1	-0,625	0,125	1	$\rightarrow$linha pivô
0	1	0	0	4	-2,5	0,5	4	$\rightarrow \div 0,25$(pivô) =

nova linha pivô.

Vamos zerar os demais elementos da coluna de x.

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	1	0	0	4	-2,5	0,5	4	$\rightarrow$ nova linha pivô
0	1,5	0	0	6	-3,75	0,75	6	$\rightarrow \times 1,50$
1	-1,5	0	0	0	6,25	3,75	120	$\rightarrow$ + 1ª linha
1	0	0	0	6	2,5	4,5	126	$\rightarrow$= nova 1ª linha

L	x	y	z	k	t	w	b	
0	1	0	0	4	-2,5	0,5	4	$\rightarrow$ nova linha pivô
0	-0,75	0	0	-3	1,875	-0,375	-3	$\rightarrow \times(-0,75)$
0	0,75	1	0	0	0,625	-1,125	9	$\rightarrow$ + 3ª linha
0	0	1	0	-3	2,5	-1,5	6	$\rightarrow$= nova 3ª linha

A quarta linha já tem o elemento da coluna de x igual a zero. Segue-se que o novo quadro fica assim:

Tabela 3.12: Quadro simplex 2.7

L	x	y	z	k	t	w	b
1	0	0	0	6	2,5	4,5	**126**
0	**1**	0	0	4	-2,5	0,5	**4**
0	0	**1**	0	-3	2,5	-1,5	**6**
0	0	0	**1**	0	0	1	**2**

Como não há elementos negativos na linha da função objetivo, a solução explícita no quadro é ótima. Temos um lucro L = 126 reais, produção de $x = 4$ mil blocos de 6 furos, $y = 6$ mil blocos de 8 furos e $z = 2$ mil lajotas. Além do mais, não houve sobra nem na capacidade do forno e nem na quantidade de argila disponível, e foi suprida a demanda do mercado para a lajota. As variáveis de folga tiveram valores iguais a zero. Essa discussão final da solução ótima com o processo de produção é importante em sala de aula, visando despertar a curiosidade e capacidade de interpretação dos alunos. Observem que durante o processo de busca pela solução ótima no simplex, optamos por trabalhar com números na forma decimal, no entanto, o professor pode explorar as operações com frações conforme a necessidade do momento.

3.6 USO DA FERRAMENTA SOLVER DO BROFFICE-CALC NA RESOLUÇÃO DE UM PPL

Este momento ganha importância na dimensão do uso do computador, da mesma forma que a calculadora se tornou aliada na aplicação do método Simplex, abrindo uma grande porta para discussão e uso dos recursos tecnológicos já presentes nas escolas, inclusive com salas de informática montadas com computadores, data-shows, etc. Neste caso devemos apresentar aos alunos a ferramenta Solver, poderosa na resolução de problemas de otimização, que no caso do LibreOffice Calc do Linux só resolve problemas lineares enquanto no OpenOffice Excel do Windows resolve os problemas de otimização lineares e não lineares.

O solver é uma ferramenta do BrOffice Calc e do Excel muito usado para fins de análises hipotéticas, como no nosso caso dos problemas de programação linear permitindo resolver sistemas lineares com várias incógnitas através de métodos do tipo maximizar ou minimizar uma meta, em torno de uma função objetivo, também chamada de célula alvo. Segundo Júnior e Souza [18], numa planilha o Solver "*trabalha com um grupo de células relacionadas direta ou indiretamente com a fórmula na célula de destino. O Solver ajusta os valores nas células* *variáveis que você especificar _ chamadas de células ajustáveis _ para produzir o resultado especificado por você na fórmula da célula de destino*". Veja na figura 3.21 como chegar à janela de resolução através do Solver, clicando no item Solver através do *menu Ferramentas*. .

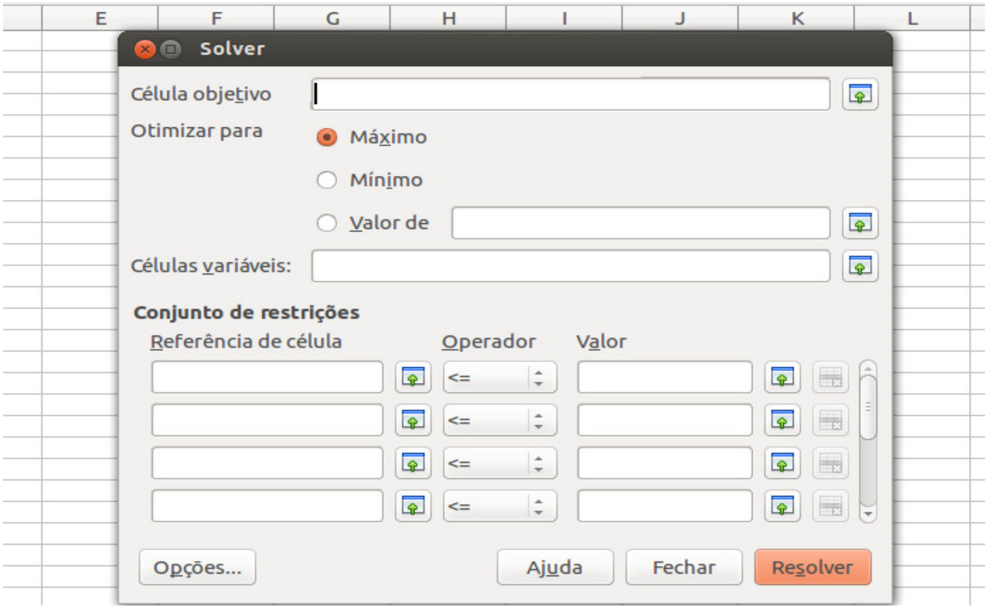


Figura 3.21: Janela do Solver no Calc

O objetivo do processo de resolução do Solver é encontrar através de um conjunto de equações e inequações lineares, chamado de *conjunto de restrições*, os valores das variáveis previamente selecionadas nas *células variáveis*, resultando em um valor ótimo (no nosso caso, de máximo ou de mínimo) na *célula objetivo* destinada para a função objetivo.

A seguir, usaremos os dois problemas resolvidos anteriormente graficamente e algebricamente para mostrar como funciona o Solver no Calc e o no Excel.

1º exemplo:*A cerâmica União produz entre outros produtos, blocos de 6 furos e 8 furos. O lucro é de R$ 9,00 por cada mil blocos de 6 furos e R$ 10,00 por cada mil blocos de 8 furos. Cada um dos 4 fornos que possui comporta uma quantidade de 12 mil blocos. No entanto, se colocar apenas blocos de 6 furos o forno comporta 14 mil, e se for apenas de 8 furos o forno comporta 10 mil blocos. Por questões ambientais ela só dispunha de 16* m^3 *de argila por forno, e gasta-se 1,2* dm^3 *e 1,6* dm^3 *para produzir, respectivamente, cada bloco de 6 e 8 furos. Com essas condições impostas, qual a quantidade em milhares de cada tipo de bloco a empresa deve produzir em cada forno para que tenha um lucro máximo?*

O modelo: Sendo

x = quantidade em milhares de blocos de 6 furos

y = quantidade em milhares de blocos de 8 furos

temos portanto, o seguinte modelo:

$$Maximizar\ L = f(x,y,z) = 9x + 10y$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} x + y \leq 12 \\ 1,2x + 1,6y \leq 16 \\ x \leq 14 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Há várias formas de disposição dos dados do modelo na planilha. Em cada exemplo, é usada uma disposição diferente. O vídeo de Vieira [19] acessado em 02/04/2014, não é audível mas visualmente, segue um passo a passo inteligível. Além do mais, pode-se consultar Narciso [20] para alternativas do Solver. Agora vamos, a partir da figura 3.22, detalhar os passos para a disposição dos dados do modelo do exemplo 1 na planilha do Calc.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Lucro Z(R$)	112				
3		X(Blocos 6 furos)	8				
4		Y(Blocos 8 furos)	4				
5		FUNÇÃO OBJETIVO	9	10			
6							
7		RESTRIÇÕES	COEFICIENTES		Lado Esquerdo	Operador	Lado Direito
8		i)	1	1	12	<=	12
9		ii)	1,2	1,6	16	<=	16
10		iii)	1		8	<=	14
11		iv)		1	4	<=	10
12		v)	1		8	>=	0
13		vi)		1	4	>=	0
14							

Figura 3.22: Disposição dos dados do problema na planilha

Inicialmente, escolhemos as células destino do Lucro Z e das variáveis x e y, onde o Solver colocará o resultado encontrado, que nesse caso foram as células C2, C3 e C4, respectivamente. Depois, escolhemos as células onde colocaremos os coeficientes das variáveis da função objetivo e das restrições. A células escolhidas foram C5 e D5 para a função objetivo e de C8 e D8 até C13 e D13 para as 6 restrições, incluindo as de não negatividade. À frente de cada restrição, ou em qualquer outro lugar, colocamos o *lado esquerdo* (LHS) onde ficará a fórmula da restrição, o operador matemático da restrição e o *lado direito* (RHS) da restrição que são os termos independentes. Também, colocamos a fórmula da função objetivo na célula de destino. A fórmula de cada célula foi:

Tabela 3.13: Fórmulas no Solver para 2 variáveis

CÉLULA	FÓRMULA
C2	=C5*C3 + D5*C4
E8	=C8*C3 + D8*C4
E9	=C9*C3 + D9*C4
E10	=C10*C3
E11	=D11*C4
E12	=C12*C3
E13	=D13*C4

Dispostos os dados na planilha invocamos o Solver no *menu Ferramentas*, e deixando a janela ao lado dos dados na planilha fazemos o seguinte:

a) Clicamos no campo *célula objetivo* e depois na célula C2. Figura 3.23. .

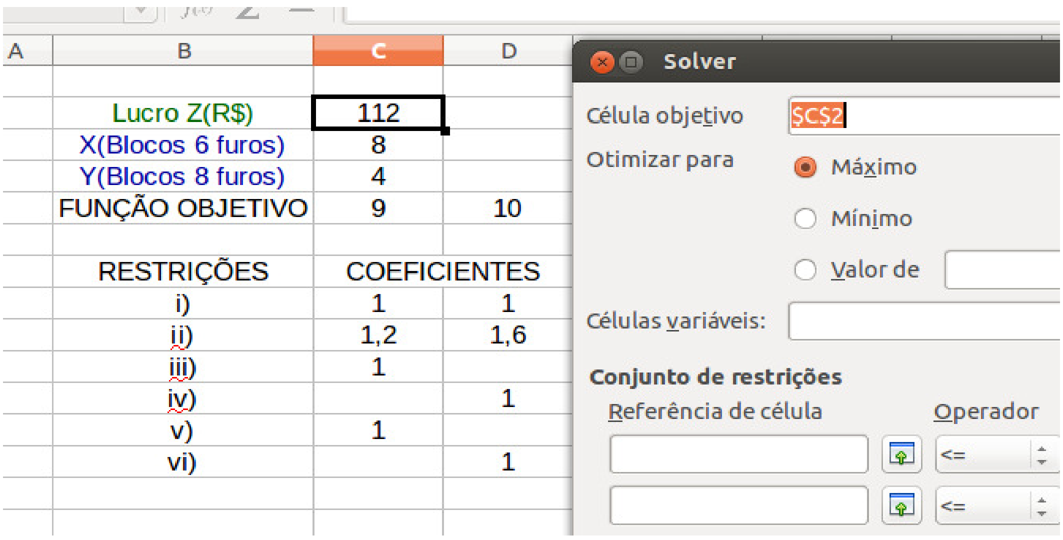


Figura 3.23: Seleção da célula da função objetivo

b) Em *Otimizar para*, marcamos Máximo pois o nosso problema tem como objetivo maximizar o lucro. Aqui, as nossas opções serão sempre de Máximo ou de Mínimo.

c) Em *Células variáveis*, clicamos no espaço reservado para tal e, em seguida clicamos nas células de destino das mesmas alternadamente, ou se forem adjacentes, basta selecioná-las e pronto. Veja figura 3.24.

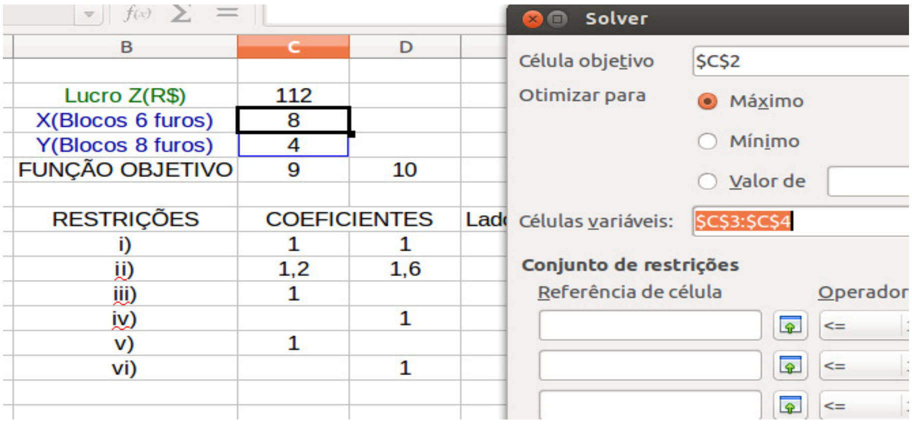


Figura 3.24: Seleção das células das variáveis de decisão

d) Em *Conjunto de restrições*, colocamos todas as restrições. Na *Referência de célula* colocamos a fórmula da restrição que fica do lado esquerdo, clicando na célula correspondente. Veja figura 3.25.

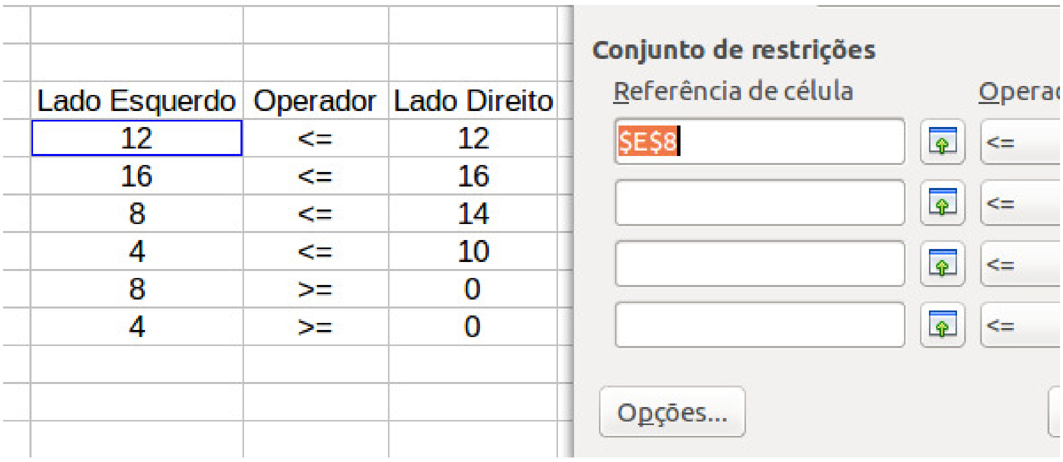


Figura 3.25: Seleção da célula E8 da fórmula da 1ª restrição

Em *Operador*, basta clicar no mesmo e selecionar <= para o nosso exemplo. Veja figura 3.26.

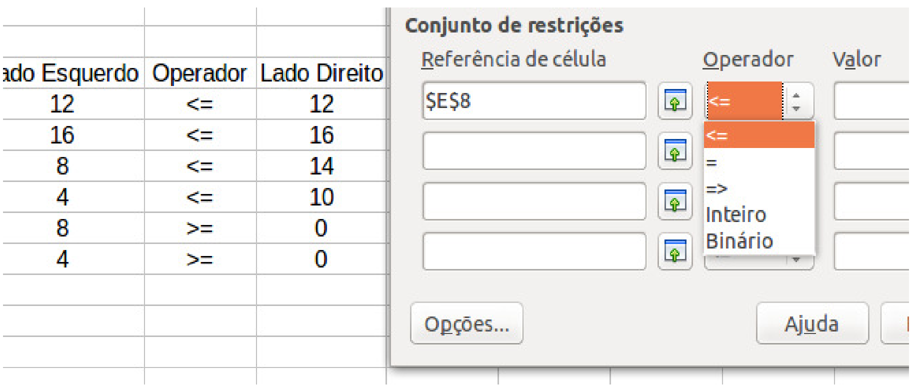


Figura 3.26: Seleção do operador <= da 1ª restrição

Em *Valor*, clicamos no espaço destinado ao mesmo e, em seguida, na célula corresponde no lado direito, no caso G8. Veja figura 3.27.

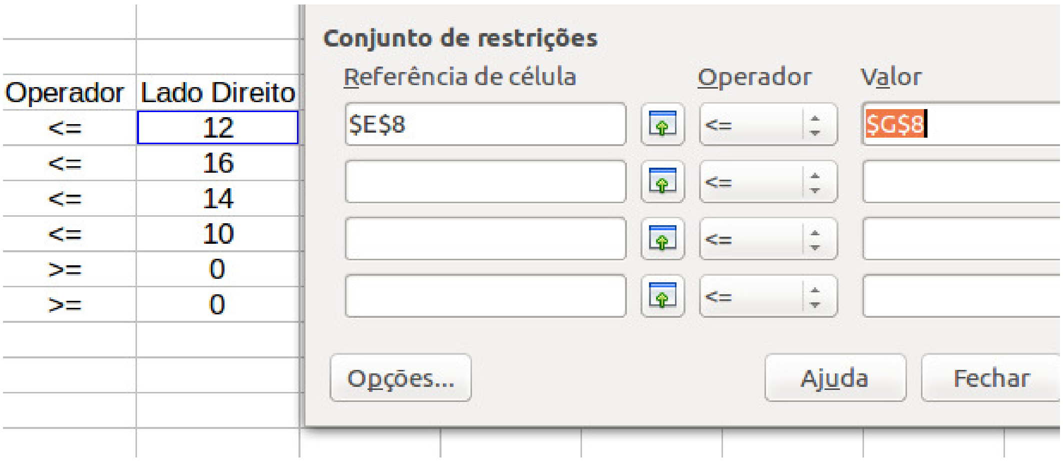


Figura 3.27: Seleção da célula G8 do lado direito em Valor

Assim devemos proceder para cada uma das restrições do problema. Convém lembrar que no nosso exemplo, colocamos as restrições de não negatividade e já podemos pedir diretamente ao Solver para resolver. Caso não queira colocar as restrições de não negatividade na planilha é necessário ir em *Opções* e selecionar o item *Assumir variáveis como não negativas*, para só depois clicar em *Resolver*. Veja figura 3.28.

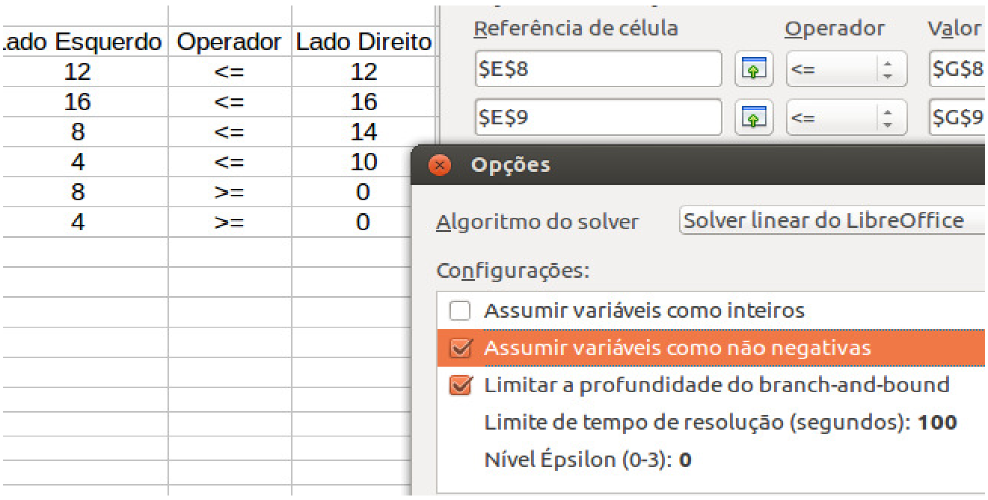


Figura 3.28: Em Opções selecionar restrições de não negatividade

e)Finalmente, é só clicar em *Resolver* e na sequência, em *Manter o resultado*. Está resolvido. Veja figura 3.29.

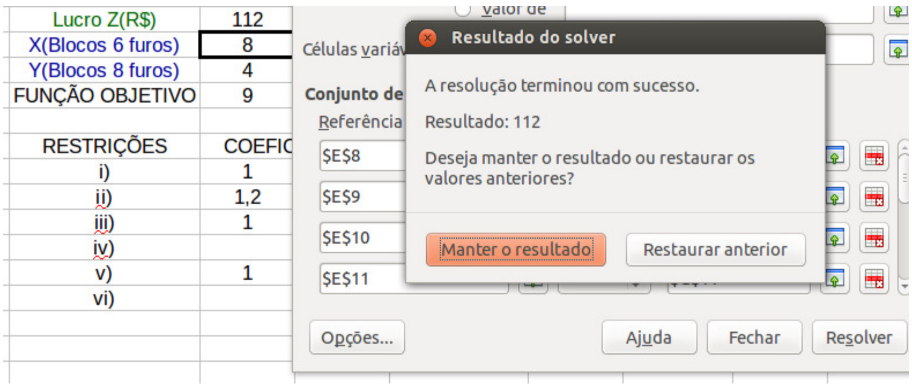


Figura 3.29: Resultado apresentado pelo Solver.

2º exemplo: Problema da cerâmica com 3 variáveis.
A cerâmica União produz entre outros produtos, blocos de 6 furos, blocos de 8 furos e a lajota. Cada um dos 4 fornos que possui comporta uma quantidade de 12 mil blocos e lajotas. O lucro é de R$ 9,00 por cada mil blocos de 6 furos, R$ 10,00 por cada mil blocos de 8 furos e R$ 15,00 por cada mil lajotas. Por questões ambientais ela só dispunha de 18 m^3 de argila por forno, e gasta-se 1,2 dm^3, 1,6 dm^3 e 1,8 dm^3 para produzir, respectivamente, um bloco de 6 furos, um bloco de 8 furos e uma lajota. O mercado local tem uma demanda de no máximo 2 mil lajotas, pois o isopor tem tido prioridades nos forros com lages. Com essas condições impostas, qual a quantidade em milhares de cada tipo de bloco e de lajota a empresa deve produzir em cada forno para que tenha um lucro máximo?
O modelo: Sendo,
x = quantidade em milhares de blocos de 6 furos,
y = quantidade em milhares de blocos de 8 furos e
z = quantidade em milhares de lajotas, temos o seguinte modelo:

$$Maximizar\ L = f(x,y,z) = 9x + 10y + 15z$$

$$Sujeito\ a: \begin{cases} x+y+z \leq 12 \\ 1,2x+1,6y+1,8z \leq 18 \\ z \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Vamos abrir uma planilha no Calc e dispor na mesma os dados do modelo acima, sem contudo, inserir as restrições de não negatividade diferentemente do que fizemos no exemplo 1. A disposição dos dados será diferente, veja a figura 3.30.
Nas células A5, B5, C5 e D5 ficarão, respectivamente, as soluções das variáveis lucro L em reais, x em milhares de blocos de 6 furos, y em milhares de blocos de 8 furos e z em milhares de lajotas. Observe que na célula A5 é obrigatório escrever a fórmula da função objetivo da

	A	B	C	D	E	F	G
1	PROBLEMA DA CERÂMICA COM 3 VARIÁVEIS						
2							
3	Solução das variáveis do problema pelo Solver						
4	Lucro L	X	Y	Z			
5	0						
6		Coeficientes das Variáveis					
7	F.O.	9	10	15			
8	Restrições				Lado esquerdo(LHS)	Operador	Lado direito(RHS)
9	i)	1	1	1	0	<=	12
10	ii)	1,2	1,6	1,8	0	<=	18
11	iii)	0	0	1	0	<=	2
12							

Figura 3.30: Disposição dos dados do modelo com 3 variáveis na planilha

seguinte forma: = B7*B5 + C7*C5 + D7*D5. Da mesma forma, devemos escrever as fórmulas das restrições i, ii e iii, respectivamente, nas células E9, E10 e E11, correspondentes ao lado esquerdo de cada restrição. Veja como ficou cada fórmula no quadro abaixo:

Tabela 3.14: Fórmulas no Solver para 3 variáveis

RESTRIÇÃO	CÉLULA	FÓRMULA
i	E9	=B9*B5 + C9*C5 +D9*D5
ii	E10	=B10*B5 + C10*C5 + D10*D5
iii	E11	=B11*B5 + C11*C5 + D11*D5

Feito o acima exposto, é só ir em ferramentas e clicar no item *Solver* e preencher o que se pede na caixa como descrito abaixo.

a) Na *célula objetivo*, clique na mesma posicionando ali o cursor e, em seguida, na célula A5 onde o Solver colocará a solução ótima.

b) Em *Otimizar para*, marque a opção *Máximo* pois o nosso problema tem como objetivo maximizar o lucro L.

c) Em *células variáveis*, posicione ali o cursor e, em seguida clique nas células B5, C5 e D5. Se preferir, pode-se selecionar as 3 células das variáveis simultaneamente e as mesmas aparecerão no campo designado, como na figura 3.31.

d)No *Conjunto de restrições*, para cada restrição deve ser preenchidos os campos *Referência de célula* que corresponde ao lado esquerdo (LHS) da restrição, *Operador* e *Valor* que corresponde ao lado direito (RHS) da restrição. Veja o exemplo para a restrição ii) na figura 3.32. Clique no campo Referência de célula e, em seguida, na célula E10; clique em Operador e selecione <=; clique em Valor e, em seguida, na célula G10.

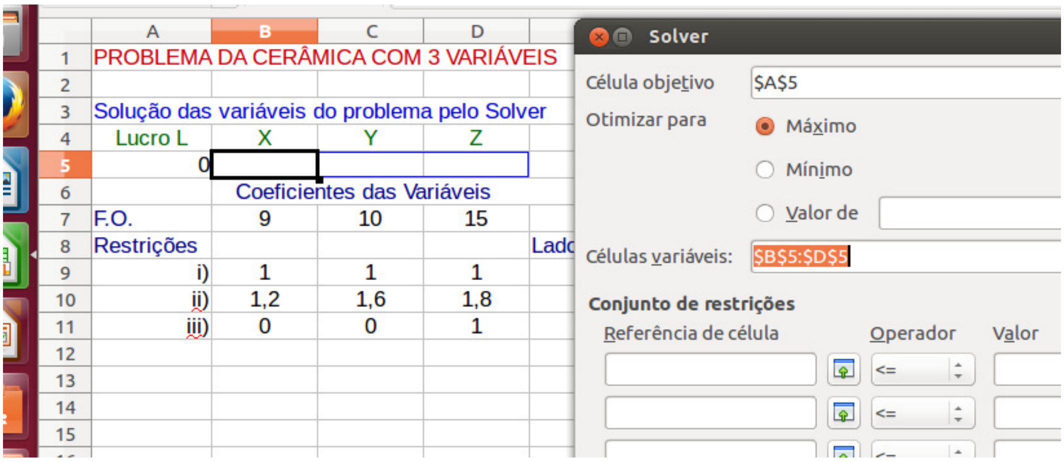


Figura 3.31: Seleção das células das variáveis de decisão no Solver

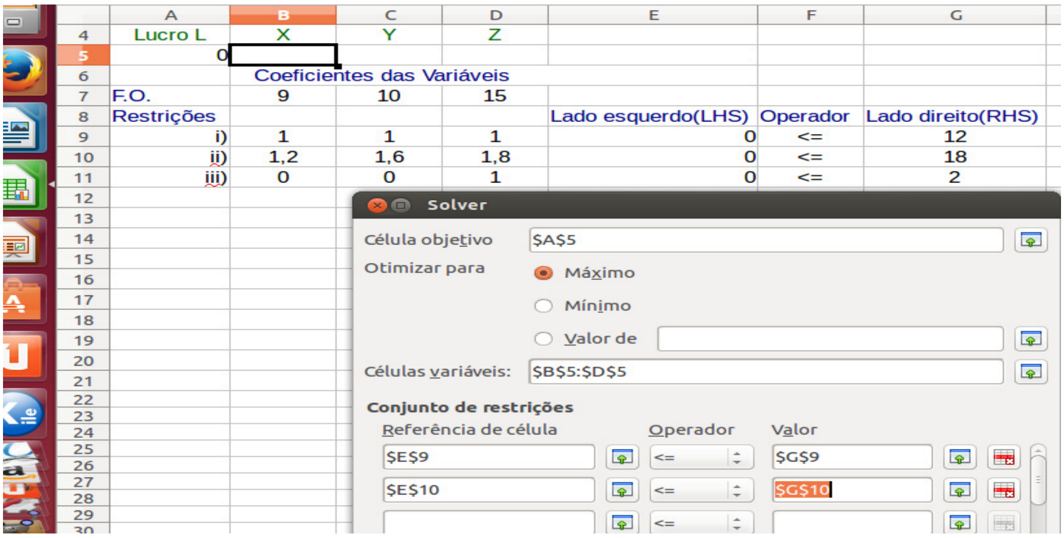


Figura 3.32: Lançamento da restrição ii) no Conjunto de restrições do Solver

e) Como não colocamos na planilha as restrições de não negatividade, faz-se necessário ir em *Opções* e selecionar em *Configurações* a opção *Assumir variáveis como não negativas*. Veja exemplo na figura 3.33.

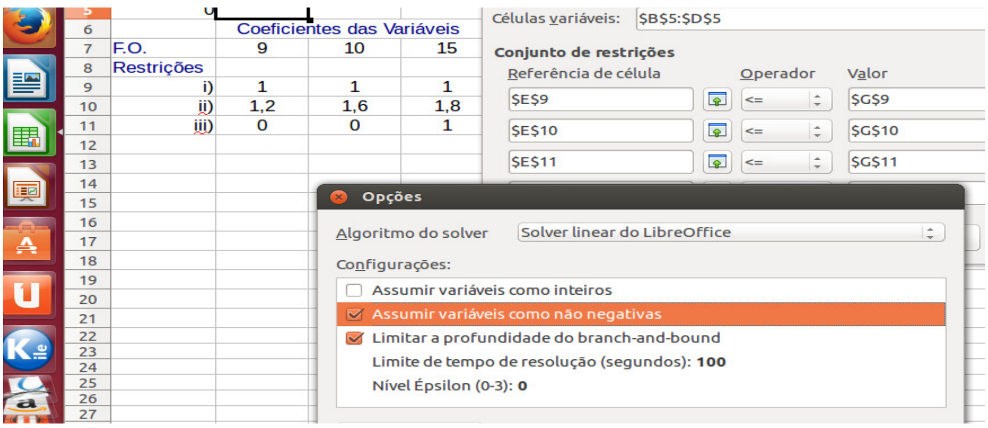


Figura 3.33: Seleção da opção Assumir variáveis como não negativas

f) Finalmente, clicamos em Resolver, e em seguida, em Manter o resultado. Veja o resultado na janela completa do Solver na figura 3.34.

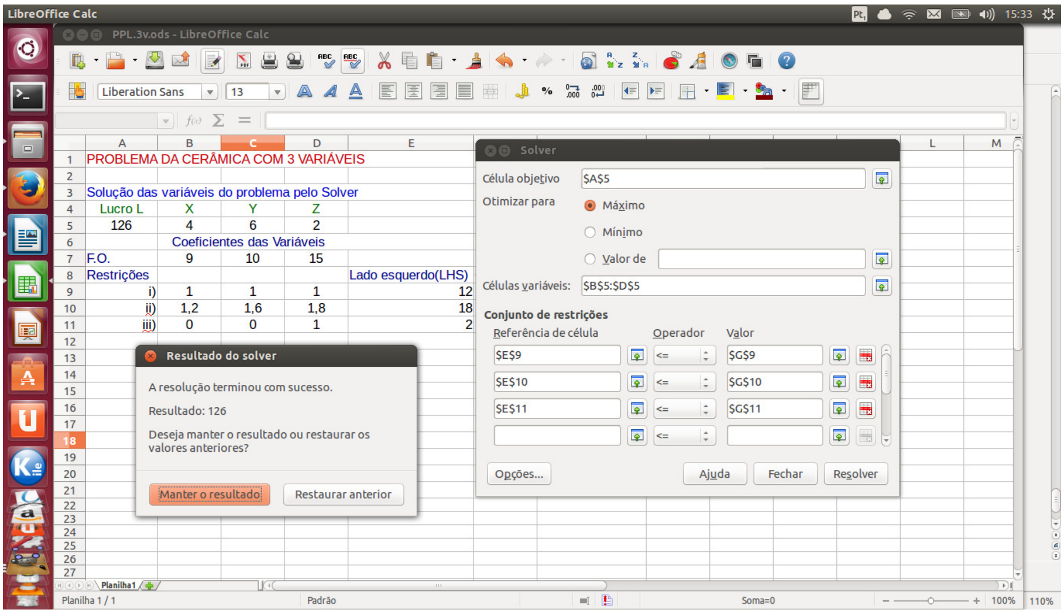


Figura 3.34: Resultado final apresentado pelo Solver

Temos portanto, um lucro L = R$ 126,00 por cada forno, $x = 4$ mil blocos de 6 furos, $y = 6$ mil blocos de 8 furos e $z = 2$ mil lajotas, que é o resultado gráfico e do Simplex.

Caso queira trabalhar com o Solver no Excel, siga o mesmo procedimento lembrando que nem sempre a ferramenta Solver vem instalada no Excel. Neste caso, vá no menu *arquivo*, selecione *opções do Excel*, depois clique em *Suplementos* e procure *Solver*. Na sequência, em *Gerenciar* clique em *Ir*. Por último selecione *Solver* e dê OK. A ferramenta Solver aparecerá em *Dados* na tela principal do Excel.

4 *PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEARES*

Muitos são os problemas de otimização envolvendo os vários conteúdos matemáticos do ensino médio, como funções, trigonometria, geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, médias, matrizes, determinantes e sistemas lineares, sendo portanto, aliados do professor no processo ensino aprendizagem na sala de aula, garantindo uma boa ferramenta motivacional para introduzir novos temas e aplicar temas estudados, relacionando-os com diversas áreas do conhecimento. Mais uma vez utilizamos problemas de otimização para mostrar que é possível trabalhar seguindo as orientações dos PCNEM, bem como os CBCs, sem contudo termos que mexer na sua estrutura já que os problemas constituem e são o fim principal do ensino de matemática. Também não teremos que acrescentar carga horária para trabalhar com estes problemas, como se constituíssem um tema novo. Os alunos poderão ter uma visão horizontal maior dos vários campos de aplicação da matemática, também poderemos trazê-los mais para perto da matemática, despertando o desejo de se exporem aos debates, desinibindo-os para os questionamentos em sala. Nessa proposta, especificamente neste capítulo, citaremos e resolveremos passo a passo alguns problemas de otimização não lineares, dentro de algumas unidades temáticas, mostrando como através dos mesmos podemos desencadear o ensino de novos temas, bem como aplicando de forma prática e contextual temas já estudados.

4.1 FUNÇÕES

Sobre o tema funções os PCNEM [1] p.121 nos orienta que "*Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas*". Então, veremos o problema da cerca e o problema da calha de chuva não para aplicar um tema estudado, mas para introduzir um tema novo, a função quadrática.

O problema da cerca: *Com 35 metros de tela um fazendeiro deseja cercar uma região retangular junto a um muro para confinar e criar galinhas. O lado da região retangular junto ao muro não é cercado. Quanto deve ser x, a medida em metros da largura da região retangular,* *para que a área cercada A seja a maior possível e que possa criar uma quantidade maior de galinhas?*

Há de se admitir que a priori um ou outro aluno irá diretamente fazer um esboço da região do problema, e trabalhar algebricamente o problema. Comigo isso não aconteceu em nenhuma das vezes que propus esse problema na 1ª série, antes todos começam a dar valores para o x do problema achando as dimensões do retângulo e a área do mesmo. Devido a esse fato, para evitar que a resposta seja encontrada aleatoriamente, eu não coloco uma quantidade par de metros de tela. Pois se fossem, por exemplo 40 metros de tela, os alunos rapidamente diriam que x = 10 m e que o retângulo seria de 10 m $\times$ 20 m com área máxima de 200 m^2, chegando à solução ainda que não possam provar que essa é a área máxima. Com um número ímpar para a quantidade de tela esse cálculo se torna mais difícil, por exemplo achar que o retângulo tem dimensões de 8,75 m $\times$ 17,5 m e que a área máxima é 153,125 m^2. A partir daí, para cada área dita pelos alunos apresentamos uma área maior e os conduzimos à necessidade de modelarem o problema algebricamente através de um simples esboço do retângulo enunciado sem tela na dimensão do muro. Isso chama a atenção de todos para o problema sem se sequer saberem que iremos estudar a função quadrática. Veja o esboço do problema na figura 4.1 abaixo.

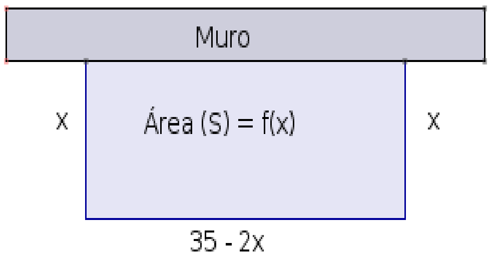


Figura 4.1: Esboço do retângulo e suas dimensões

No esboço, x é a largura em metros e $35-2x$ é o comprimento em metros do retângulo enunciado no problema. Na sequência fica claro que a área do retângulo depende de x, ou seja, na linguagem já conhecida pelos alunos a área é uma função de x, e a simbologia ganha seu espaço naturalmente nos dando Área $= f(x)$. Conclui-se daí que

$$f(x) = x(35-2x) = 35x-2x^2 = -2x^2+35x$$

A área depende de x e x é uma variável de um polinômio do 2º grau do tipo ax^2+bx+c. Fica fácil identificar os coeficientes **a**, **b** e **c**, definir a **função quadrática** com a, b e c reais e $a \neq 0$, e fazer cálculos numéricos da área atribuindo valores para x. Para que os alunos vejam e compreendam que existe uma área máxima para um x específico, é só construir o gráfico da função em questão, construindo com os alunos outros gráficos de função quadrática definindo nome, concavidade, vértice, zeros da função, fenômenos ocorridos na parábola com a variação dos coeficientes a, b e c, etc. Para encontrar o x que nos dá a área máxima, basta a priori mostrar que esse x do vértice é a média aritmética das raízes (zeros) da função, x' e x'', por causa do eixo de simetria da parábola. Veja a figura 4.2 e observe que $x' = 0$ e $x'' = 17,5$ e, portanto, por propriedade do eixo de simetria a distância do x ótimo às raízes é a mesma, seguindo daí que x_v (x ótimo) é a média aritmética de x' e x'', nos dando

$$x_v = \frac{0 + 17,5}{2} = 8,75$$

Daí para frente é só continuar o estudo com a função quadrática.

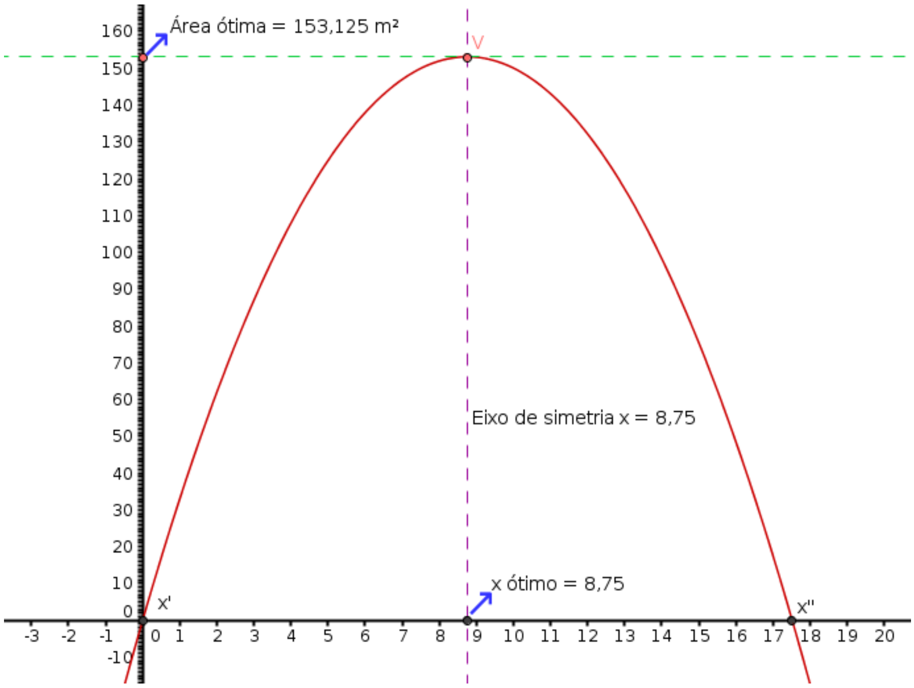


Figura 4.2: Solução ótima do problema da cerca

Problema da calha de chuva: *De uma longa folha de zinco de 30 cm de largura e 10m de comprimento deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima ?*

Este problema diferencia do anterior pelo fato de poder trabalhar com volume, abrindo espaço para o aluno descobrir no formato da calha o modelo de prisma quadrangular desprovido de uma das faces, como se fosse uma caixa sem tampa. Aqui, necessariamente, tem-se que construir um esboço da calha para em seguida, expressar o volume da calha em função da medida x das dobras. Em se calculando o volume teremos uma função quadrática com $V = f(x)$. Veja na figura 4.3 o esboço da calha.

Caso os alunos tenham dificuldade de enxergar a calha como um prisma quadrangular com base retangular de dimensões x m e $(30-2x)$ m e altura 10 m, desenhe o prisma na vertical para melhorar a visualização conforme figura 4.4. Agora fica mais fácil aplicar a fórmula do volume

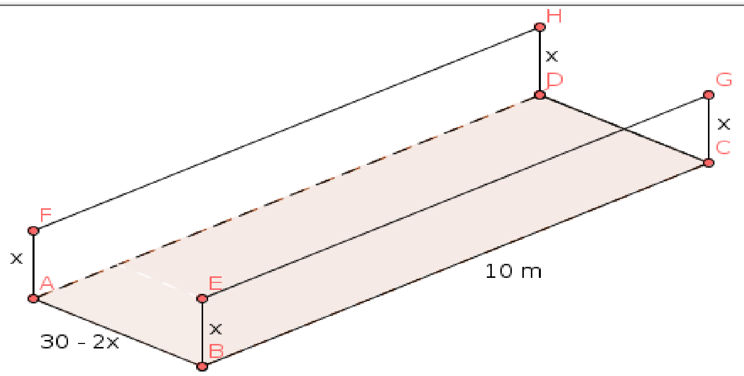


Figura 4.3: Esboço da calha com os seus elementos

área da base(S) $\times$ altura(h), ou seja, $V = Sh$. Daqui para frente é só desenvolver o mesmo processo do problema da cerca e chegaremos a

$$V = f(x) = x(30-2x)10 = 300x - 20x^2 \Rightarrow V(x) = -20x^2 + 300x$$

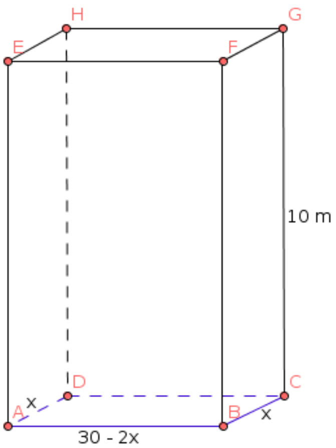


Figura 4.4: Esboço da calha na vertical

Na sequência, define-se a função quadrática, estuda os seus elementos e, no gráfico, veremos que o vértice nos dará o x ótimo, bem como o volume máximo. Como o aluno já sabe que a soma das raízes de uma equação do 2º grau é $s = x^{'} + x^{''} = \frac{-b}{a}$, e que por causa do eixo de simetria e suas propriedades o x_v é igual à média aritmética das raízes (zeros), podemos juntos com os alunos dizer que

$$x_v = \frac{x^{'} + x^{''}}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Olhando diretamente para a parábola ou aplicando a fórmula descobre-se que o x ótimo é 7,5 cm. Vale a pena discutir com os alunos que o x ótimo independe do comprimento da calha, dependendo apenas da área da secção da calha que é exatamente a área da base do prisma quadrangular. Continua o estudo da função quadrática que surgiu de um problema de otimização, motivando os alunos para o processo de ensino aprendizagem do tema.

4.2 TRIGONOMETRIA

No ensino médio este é um dos temas mal trabalhados com os alunos e, muitas vezes deixado à revelia. Também, a distância que existe entre a matemática e o aluno faz com que muitos profissionais escolham os temas que pensam serem mais fáceis de ministrar em sala. É hora de enfrentarmos a realidade do ensino médio e cumprirmos aquilo que é parâmetro nacional curricular (PCN). Sobre trigonometria os PCNEM [1] p.122 nos diz: *O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.* Assim, trago um problema de Patore [21] sobre otimização. Primeiro vamos deixar registrado a história que envolve este problema para servir de leitura e exploração do tema pelos alunos e professores.
Segundo Pastore [21] p.152, em matéria com o título **Regiomontanus e a trigonometria**, a cidade de Köningsberg, na Prússia (atual Rússia), é conhecida na Matemática devido ao famoso problema das pontes, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Outro acontecimento importante que marca a vida da cidade, cujo nome significa Montanha do Rei, é o fato de ela ter sido o local de nascimento de Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como Regiomontanus, uma latinização do nome de sua cidade natal. Regiomontanus realizou diversos estudos nas áreas de Astronomia, Geometria e Trigonometria. Em seu livro mais famoso, De Triangulus Omnimodes, escrito em 1464 e impresso apenas em 1533, Regiomontanus apresenta uma visão moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas. É curioso notar que, mesmo tendo sido escrito antes do conceito de notação decimal, as tabelas trigonométricas contidas no livro não apresentam frações devido à utilização de um círculo e raio 100 000 000 de unidades, o que produzia apenas valores inteiros para as aproximações utilizadas.

A importância dos conhecimentos em Astronomia de Regiomontanus fez com que ele fosse convidado pelo Papa Sixto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais acurado do que o que vinha sendo usado pela Igreja. Após a realização do trabalho a gratidão do Papa foi tal, que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, Regiomontanus faleceu, tendo sido anunciada como causa de sua morte o flagelo de uma peste. Existem especulações de que ele tenha sido envenenado por alguma pessoa descontente com a alta influência de um "não-italiano" sobre o Papa e a Igreja romana. Alguns historiadores especulam ainda que, se não tivesse falecido tão cedo, talvez tivesse condições de realizar uma moderna compreensão do sistema solar, como a feita por Copérnico 100 anos depois.Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, destacamos um de 1471, como o primeiro problema de extremos encontrado na história da Matemática desde a antiguidade. O problema (NR) é o seguinte:

Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p. Um homem de altura $m(m < p)$ enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α, que varia de acordo com a distância d entre o homem e a base do pedestal. Determinar d para que o ângulo de visão α seja o maior possível.

Uma aplicação: *Em outubro de 1931, após cinco anos de construção, foi inaugurado no alto do morro do Corcovado o cartão de visitas do Rio de Janeiro, a estátua do Cristo Redentor. A altura total da estátua é 30 m, seu pedestal mede 8 m, e admitiremos um observador com 1,70 m de altura. A que distância esse observador deve ficar da base do pedestal do Cristo Redentor para que o seu ângulo de visão seja o maior possível?*

Conquanto tenha sido desenvolvido o problema original e chegado à fórmula

$$d = \sqrt{p(p+h)}$$

não a usaremos diretamente, antes, desenvolveremos o problema com os alunos passo a passo, trazendo à memória conceitos já estudados e revendo aquilo que jaz na memória do esquecimento. Este problema servirá também como revisão da geometria estudada até o momento, além de abrir espaço para aquele tema que se planeja ensinar. Não é um problema simples, mas vale a pena trabalhá-lo com os alunos.

Passo a passo

Inicialmente montemos um esboço do problema na figura 4.5.

Marcamos na figura 4.5 os pontos H, C e F representando, respectivamente, o topo da estátua do Cristo, o pé da estátua no pedestal e o olho do observador. Temos ainda a reta r tangente à circunferência λ em T, a circunferência λ que passa por H, C e T com centro O na mediatriz do segmento CH que é a altura h da estátua, a altura p do pedestal, a distância d do pedestal ao observador e o ângulo visual α sobre o qual o observador enxerga a altura h da estátua do Cristo completamente. Vários conceitos serão trazidos à tona tais como reta secante e tangente

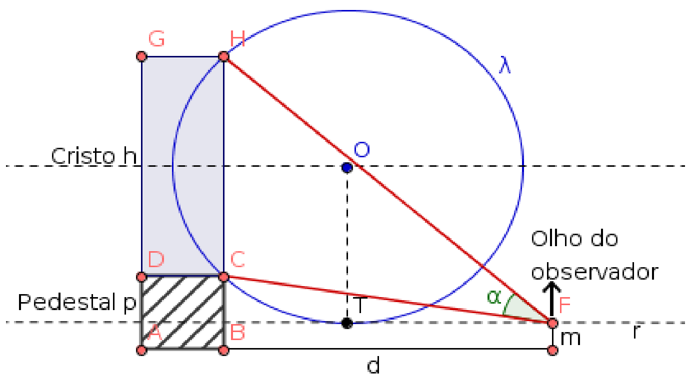


Figura 4.5: Esboço do problema de trigonometria

a uma circunferência, ângulo inscrito, potência de um ponto externo à circunferência, teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, teorema do ângulo externo, etc. Fique atento, este é um bom momento para revisarmos geometria.

Fazendo o ponto F percorrer livremente a reta r, teremos que qualquer possibilidade para o ângulo α será dada por uma certa localização de F em r. Devemos então provar que α assume o maior valor possível (otimização) quando F coincidir com T. Par tanto, devemos mostrar que a medida de α quando F coincide com T é maior que qualquer outra medida de α quando F está em uma posição diferente de T. Vejamos isso na figura 4.6.

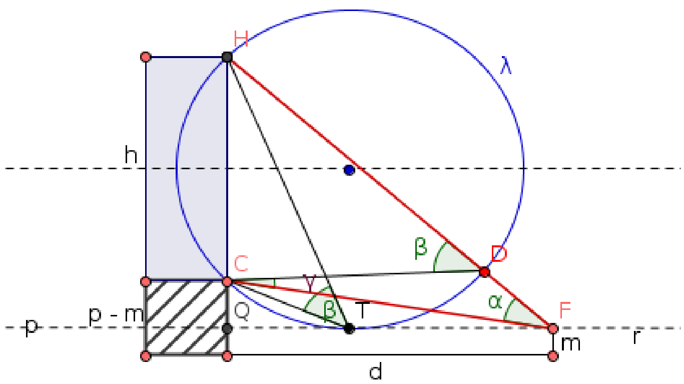


Figura 4.6: Demonstrando que β é maior que α

Sendo D o ponto de intersecção entre a circunferência λ e o segmento HF, segue que os ângulos inscritos no mesmo arco HC são iguais, ou seja, $\angle HDC = \angle HTC = \beta$. Como β é externo ao triângulo CDF, temos que

$$\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta > \alpha$$

Provado que $\angle HTC = \beta$ é o ângulo de máximo campo visual, calcularemos agora a distância d entre o observador e a base do pedestal para que esse ângulo seja atingido. Na figura 4.6, Q é o ponto de intersecção entre a reta r e a reta HC, sendo r a reta tangente à circunferência λ e a reta HC secante à circunferência λ. Isso nos leva a aplicar a potência do ponto Q para encontrarmos a distância d desejada, ficando assim:

$$(\overline{QF})^2 = \overline{QC} \times \overline{QH} = d^2 = (p-m)(p-m+h)$$

Como p = 8 metros, m = 1,70 metros e h = 30 metros, segue-se que

$$d^2 = (8-1,7) \times (8-1,7+30) \Rightarrow d^2 = 6,3 \times 36,3 = 228,69 \Rightarrow d = 15,12 metros.$$

Concluindo, o observador deverá estar a aproximadamente 15 metros de distância da base do pedestal da estátua do Cristo para que a visualize com ângulo visual máximo.

4.3 GEOMETRIA

Sobre geometria os PCNEM [1] p.124 nos diz: *A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema. A composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas ou espaciais. Assim, os problemas que envolvem figuras inscritas ou circunscritas podem ser propostos aos alunos no sentido de aplicação do que aprenderam sobre as diversas medidas*. Sendo assim, citaremos alguns problemas de otimização envolvendo situações problemas sobre áreas, volumes e perímetros, bem como problemas de inscrição e circunscrição que podem ser aplicados durante o tempo em que se estiver trabalhando com a geometria plana e espacial, especialmente na 2ª série. Devemos levar em consideração que estes problemas de geometria estão intrinsecamente relacionados com funções, de forma que este tema estará sempre presente no decorrer do ensino médio.

Problema 1: Perímetro, área e função

Um fio de barbante de 10 metros de comprimento pode ser usado ou para construir um quadrado, ou para construir um triângulo equilátero ou ele pode ser cortado em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços é usado para construir um quadrado e o outro pedaço é usado para construir um triângulo equilátero. Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a maior possível? Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a menor possível?

Inicialmente trabalharemos este problema usando função, e em seguida, com programação não linear resolvendo no Solver do Excel. Vamos fazer um esboço do problema na figura 4.7, mostrando os dois pedaços do barbante e as duas figuras pedidas no problema, com as medidas dos seus lados já explicitadas no esboço.

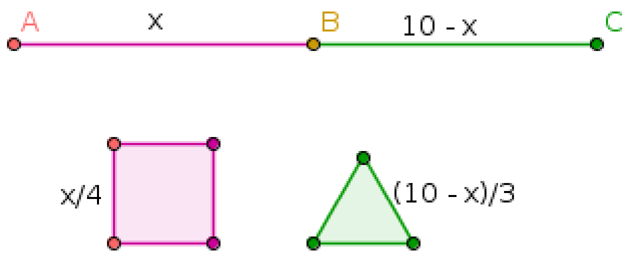


Figura 4.7: Esboço do barbante, do quadrado e do triângulo equilátero

Obviamente, o domínio de x é D =] 0, 10 [. Agora, expressando a soma das áreas do quadrado(A_q) e do triângulo(A_t) em função do lado(l) e, em seguida, de x, temos:

$$A_q = l^2, A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow S = A_q + A_t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S(x) = (\frac{x}{4})^2 + \frac{(\frac{10-x}{3})^2\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\frac{100-20x+x^2}{9}\cdot\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{25\sqrt{3}}{9} - \frac{5x\sqrt{3}}{9} \Longrightarrow S(x) = (\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36})\cdot x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot x + \frac{25\sqrt{3}}{9}$$

Como a função $S(x)$ é quadrática com $a > 0$, não tem ponto máximo; mas tem um ponto mínimo pois a concavidade da parábola é voltada para cima. Conclui-se que não tem como descobrir x para que tenha uma área S máxima, no entanto, existe x real tal que se tenha S mínimo. Esse valor de x é a abscissa do vértice:

Como $a = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}$, $b = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$ e $c = \frac{25\sqrt{3}}{9}$ temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{9}}{2(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36})} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{9}}{\frac{9+4\sqrt{3}}{72}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot 72}{9+4\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \cong 4,35$$

Portanto, o valor de x que torna a soma S das áreas do quadrado e do triângulo equilátero mínima é $x = 4,35$ metros aproximadamente.

Esse mesmo problema pode ser resolvido no modelo de programação não linear e ser resolvido pelo Solver do Excel. O Solver do Calc só resolve problemas de programação linear já vistos no capítulo 3. Neste caso, devemos chamar de x e y as medidas dos dois pedaços do barbante. Veja figura 4.8.
As variáveis de decisão são:
x = medida em metros do pedaço do barbante perímetro do quadrado;
y = medida em metros do pedaço do barbante perímetro do triângulo equilátero.

Devemos minimizar a soma S das áreas do quadrado e do triângulo que será a função objetivo.

Temos portanto o seguinte modelo:

Minimizar $S = f(x,y) = (\frac{x}{4})^2 + \frac{(\frac{y}{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0 < x < 10 \\ 0 < y < 10 \end{cases}$$

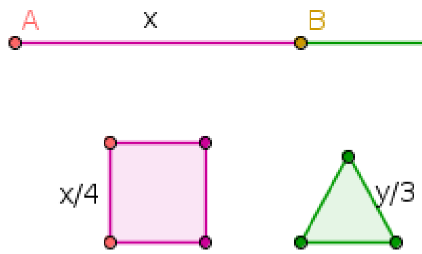


Figura 4.8: Esboço do problema do barbante para programação não linear

Dispondo esse modelo na planilha do Excel e pedindo o Solver para resolver, teremos o resultado mostrado na figura 4.9, $x = 4,349645$ metros, $y = 5,650355$ metros e FO = $S = 2,718m^2$.

Problema 2: Área, perímetro e funções

Uma janela normanda tem o formato da justaposição de um semicírculo sobre um retângulo. Considerando as janelas normandas com perímetro igual a 9 m, quanto deve ser x, a medida em metros da base do retângulo que compõe a janela, para que a área A da janela seja a maior possível?

Este problema é pertinente por envolver comprimento de uma circunferência. Pode-se resolvê-lo através de função ou pelo Solver do Excel. Primeiramente, resolveremos por função quadrática e precisaremos esboçar junto com os alunos o desenho da janela normanda com os seus dados. Veja figura 4.10.

Como a base do retângulo mede x metros, segue que o diâmetro do semicírculo é $2x$ e, portanto, o raio é $r = \frac{x}{2}$. O comprimento do semicírculo é $c = \pi r = \frac{\pi x}{2}$, então a altura h do retângulo é

$$h = \frac{9 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} \Longrightarrow h = \frac{18 - 2x - \pi x}{4}$$

Agora, é só calcular a área da janela em função de x sabendo que devemos somar a área do

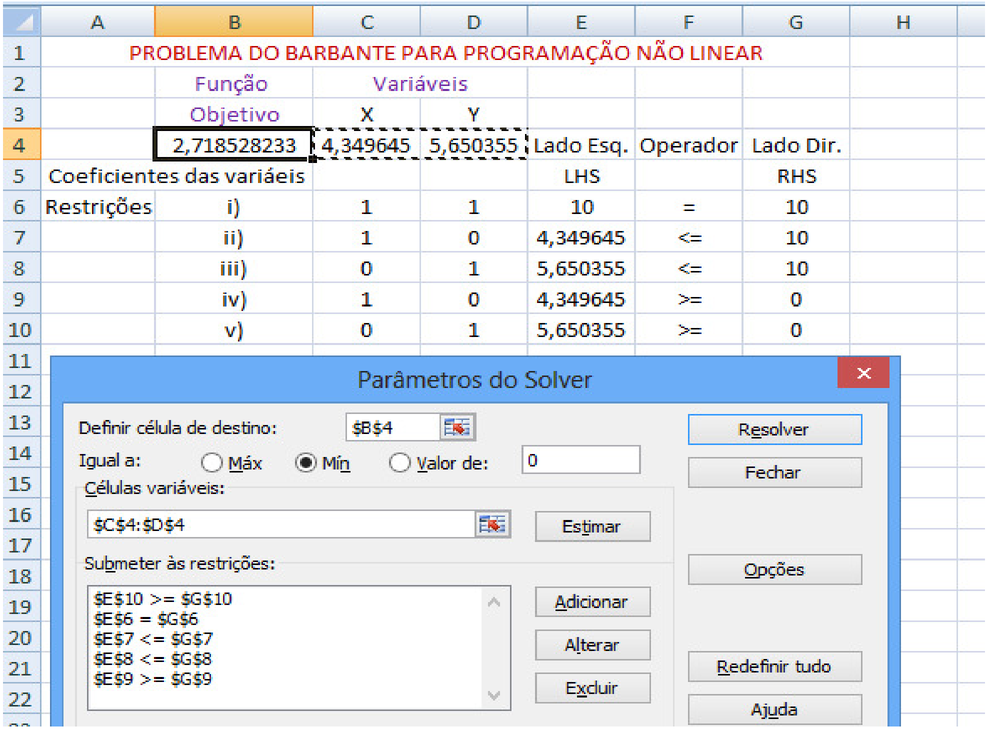


Figura 4.9: Disposição do modelo e resultado pelo Solver do Excel

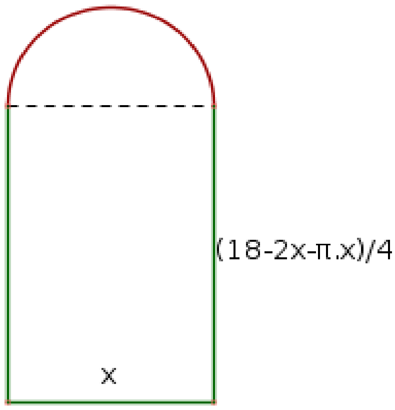


Figura 4.10: Esboço da janela normanda

retângulo(S_R) com a área do semicírculo(S_{sc}). Expressando a área S em função de x temos:

$$S(x) = S_R + S_{sc} \Longrightarrow S(x) = xh + \frac{\pi r^2}{2} \Longrightarrow S(x) = \frac{x(18-2x-\pi x)}{4} + \frac{\pi(\frac{x}{2})^2}{2} \Longrightarrow$$

$$S(x) = \frac{18x-2x^2-\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow S(x) = \frac{36x-4x^2-2\pi x^2+\pi x^2}{8} \Rightarrow S(x) = (\frac{-\pi-4}{8})x^2 + \frac{9}{2}x$$

Neste momento, temos uma função quadrática com $a < 0$, nos garantindo uma parábola com concavidade para baixo com o vértice como ponto máximo. Isso significa que existe uma área

S máxima para um certo x real, que descobriremos em seguida.

$$X_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow X_v = -\frac{\frac{9}{2}}{2\frac{(-\pi-4)}{8}} \Rightarrow X_v = -\frac{9}{2}(\frac{4}{-\pi-4}) \Rightarrow X_v = \frac{18}{\pi+4} \Rightarrow X_v \cong 2,52 metros$$

Modelando este mesmo problema para resolvê-lo pelo Solver do Exel, teremos um modelo de programação não linear com x e y sendo as variáveis de decisão.
x = medida em metros da base do retângulo; y = medida em metros da altura h do retângulo. Veja a figura 4.11.

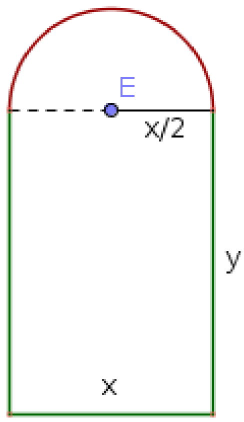


Figura 4.11: Esboço da janela normanda para programação não linear

A função objetivo consiste em maximizar a área da janela que é resultado da soma do retângulo e do semicírculo. A restrição do perímetro é que a soma da base do retângulo(x), com as duas alturas($2y$) e com o comprimento do semicírculo($\pi\frac{x}{2}$) deverá ser igual a 9. O modelo fica assim:

Maximizar $S = f(x,y) = xy + \frac{\pi x^2}{8}$

Sujeito a:

$$\begin{cases} (\frac{2+\pi}{2})x + 2y = 9 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

Dispondo os dados do modelo na planilha do Excel e pedindo o Solver para resolver, teremos o resultado apresentado na figura 4.12.
Observe que, obviamente, a solução para x é a mesma que obtivemos através do X_v da parábola na função quadrática obtida anteriormente, ou seja, $x \cong 2,52$ metros.
Problema 3: Volume de cone, comprimento de arco, ângulo central, análise de gráfico de funções

Um copo no formato cônico é feito com um disco circular de papel, de centro O, do qual foi retirado um setor circular $\widehat{AOM}$ *e os lados* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OM}$ *foram unidos. Os lados* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OM}$

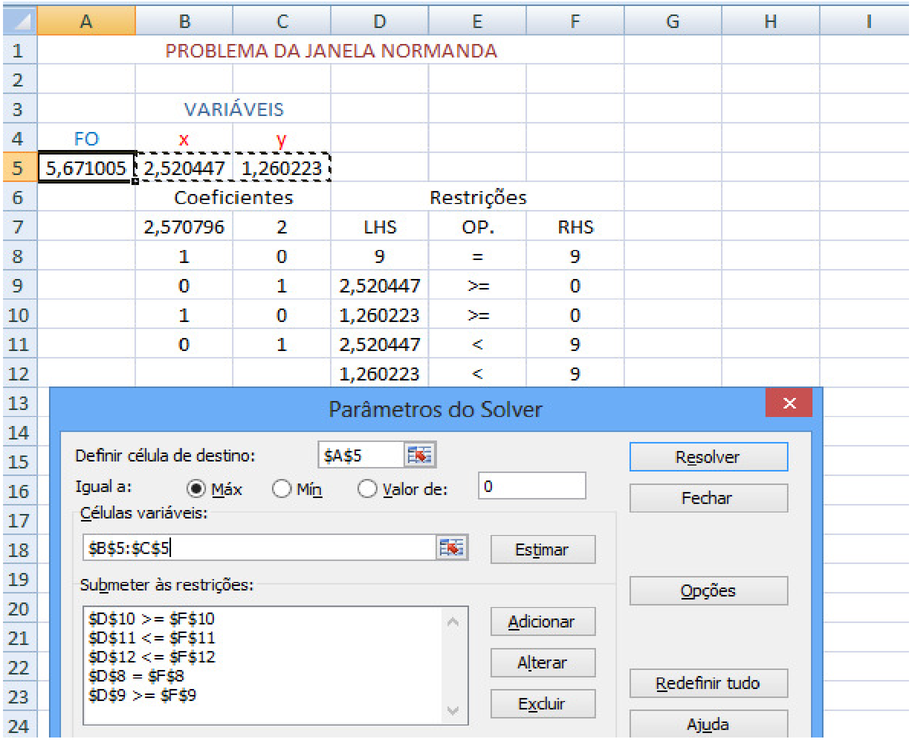


Figura 4.12: Disposição dos dados e solução pelo Solver do problema da Janela Normanda

têm medida 7 cm. Quanto deve ser α, a medida em radianos do ângulo $\angle AOM$, para que o volume V do copo seja o maior possível?

O desenvolvimento desse problema permite chegar em uma função não comumente usada, estando um pouco além das funções estudadas no ensino médio. No entanto, a construção do modelo até acharmos a fórmula da função que expressa o volume do copo em função do ângulo máximo a ser encontrado, requer o conhecimento de vários conceitos geométricos já estudados (ou não), e isso é importante na abordagem da geometria e da trigonometria. Também é viável resolvermos pelo Solver com um modelo não linear, pois como veremos temos o volume em função de duas variáveis no problema, r e h. No entanto, o acrescentamos nesta proposta por causa da construção e da análise de gráficos associados a um software gratuito como o Geogebra, usado para encontrar a solução ótima de α aproximada, podendo fazer comparação com o resultado do Solver.

Comecemos com um esboço do problema na figura 4.13. Antes vale lembrar que o comprimento de um arco de circunferência (l) é igual ao produto do ângulo central(α) pelo raio(R), isto é, $l = \alpha$ R, sendo R, o raio do setor circular que vale 7 cm.

Agora, expressemos o raio r e a altura h do cone em função de α, explorando os conhecimentos geométricos exigindo atenção dos alunos nesse momento. Usaremos o fato de que o comprimento da circunferência da base do cone é C = $7\alpha = 2\pi r$ e o teorema de Pitágoras.

$$7\alpha = 2\pi r \Longrightarrow r = \frac{7\alpha}{2\pi} \quad e \quad h^2 = 7^2 - r^2 \Longrightarrow h^2 = 49 - (\frac{7\alpha}{2\pi})^2 \Longrightarrow$$

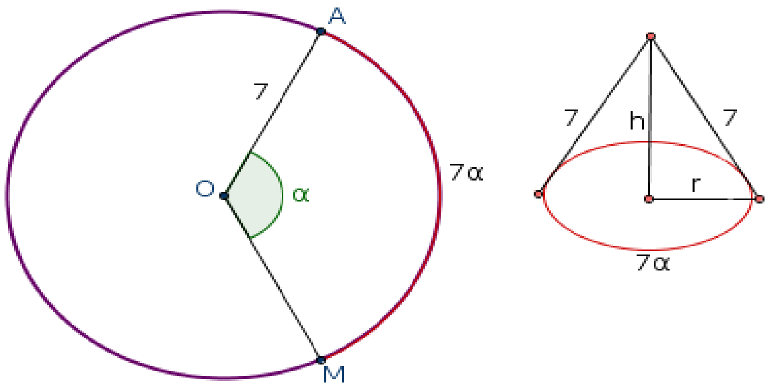


Figura 4.13: Esboço do problema do cone

$$h = \sqrt{49 - \frac{49\alpha^2}{4\pi^2}} \Longrightarrow h = \frac{7\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi}$$

Calculados r e h em função de α, segue-se que:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{7\alpha}{2\pi})^2 (\frac{7\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi}) \Rightarrow V(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 49\alpha^2 \cdot 7\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{4\pi^2 \cdot 2\pi} \Rightarrow$$

$$V(\alpha) = \frac{343\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{24\pi^2}, \quad com \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad e \quad -2\pi rad \leq \alpha \leq 2\pi rad$$

Finalmente, usaremos o Geogebra para construirmos o gráfico da função acima, analisando os dois pontos máximos para encontrarmos aproximadamente o valor de α que nos dá o volume máximo do cone. Não construiremos o passo a passo, pois julgamos que praticamente todos os professores sabem fazer isso. Veja na figura 4.14 a solução aproximada para α através dos pontos máximos. Não deixemos de observar com os alunos que o gráfico nos dá domínio de $V(\alpha)$.
Na figura 4.14 vê-se que $\alpha = x \cong 5,13$ radianos.

Vejamos a solução pelo Solver. Nossas variáveis de decisão serão
$x = \alpha$ (o ângulo) e
$y = h$(a altura),
mostrados no esboço na figura 4.13. Como já vimos que $r = \frac{7\alpha}{2\pi}$ e $h = \frac{7\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{2\pi}$, segue-se que a função objetivo é maximizar

$$V(x,y) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{7x}{2\pi})^2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = \frac{49x^2y}{12\pi}.$$

A parte mais delicada é que precisamos de uma relação entre x e y para entrar como restrição do problema, e isso se torna simples usando a fórmula da altura, pois $y = h$ e $x = \alpha$. Assim,

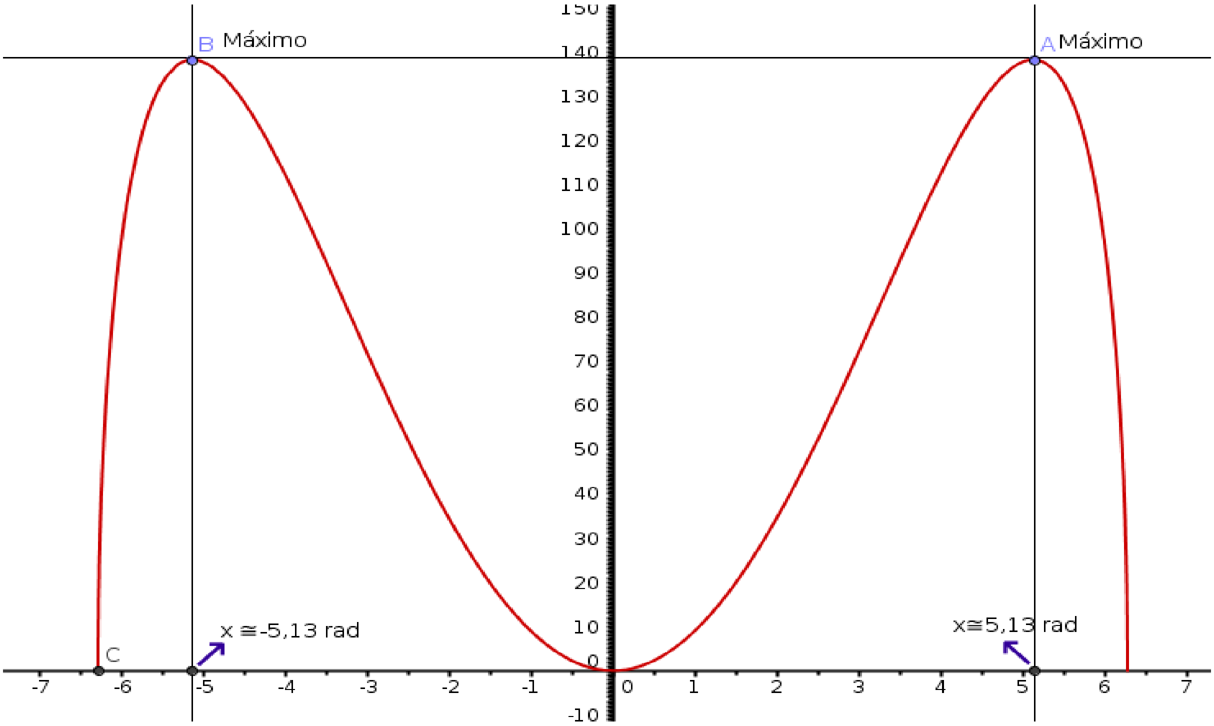


Figura 4.14: Solução gráfica do problema do cone pelo Geogebra

teremos:

$$y = \frac{7\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{49(4\pi^2 - x^2)}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad 4\pi^2 y^2 + 49x^2 = 196\pi^2$$

que é uma das restrições. As demais restrições são $0 \leq x \leq 2\pi$ (o Solver não admite variável negativa) e $0 \leq y \leq 7$, pois substituindo $x = 0$ rad e $x = 2\pi$ rad na fórmula de y teremos $y = 7$ cm e $y = 0$ cm, respectivamente. Assim, o modelo do problema será:

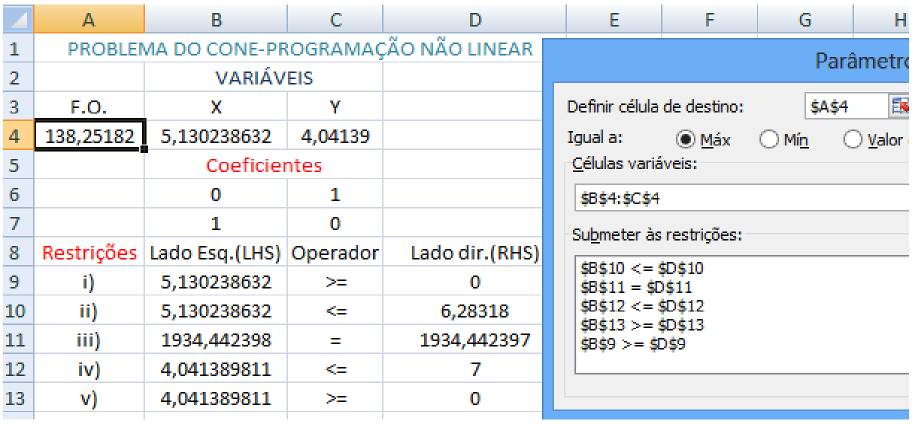
Maximizar $V = f(x,y) = \frac{49x^2y}{12\pi}$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 4\pi^2 y^2 + 49x^2 = 196\pi^2 \\ x \leq 2\pi rad \\ y \leq 7 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Dispondo esses dados na planilha do Excel e invocando o Solver para resolver teremos o resultado apresentado na figura 4.15.

O aluno se sentirá alegre em perceber que $x = 5,13$ rad e $y = 138,25cm^2$ são exatamente as coordenadas do ponto máximo do gráfico da função desenhado pelo Geogebra. É óbvio que aqui cabe muitas outras ricas análises, mas deixamos a cargo de cada um que resolver trabalhar dentro do perfil dessa proposta.



	A	B	C	D
1	PROBLEMA DO CONE-PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR			
2		VARIÁVEIS		
3	F.O.	X	Y	
4	138,25182	5,130238632	4,04139	
5		Coeficientes		
6		0	1	
7		1	0	
8	Restrições	Lado Esq.(LHS)	Operador	Lado dir.(RHS)
9	i)	5,130238632	>=	0
10	ii)	5,130238632	<=	6,28318
11	iii)	1934,442398	=	1934,442397
12	iv)	4,041389811	<=	7
13	v)	4,041389811	>=	0

Figura 4.15: Disposição dos dados e solução pelo Solver do problema do Cone

Problema 4: Funções, Volume de pirâmide, Teorema de Pitágoras

Um fabricante quer construir uma embalagem no formato de uma pirâmide regular de base quadrada a partir de uma folha de papelão quadrada medindo 2 m por 2 m. Para construir a embalagem, triângulos isósceles são removidos das laterais da folha de papelão. As pontas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma pirâmide regular de base quadrada. Quanto deve ser x, a metade da medida em metros da diagonal da base quadrada da pirâmide, para que o volume V da embalagem seja o maior possível?

Primeiramente vamos esboçar o desenho do problema na figura 4.16 e, de imediato definir o domínio da função como $0 \leq x \leq 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

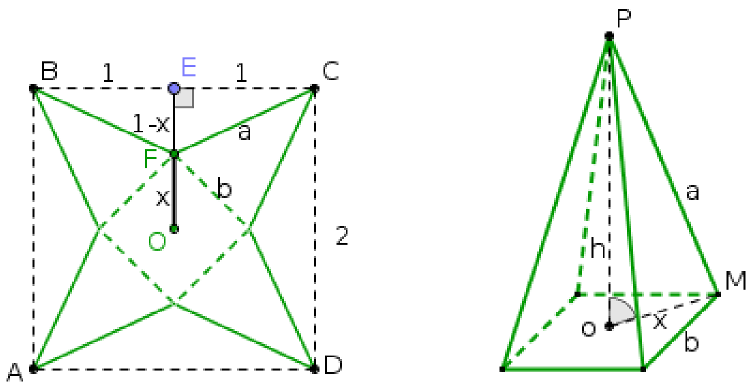


Figura 4.16: Esboço do problema da embalagem piramidal

Vamos explorar todos os conhecimentos geométricos para expressarmos o volume V da pirâmide em função de x. Chamaremos de **b**, a medida em metros da aresta da base da pirâmide e de **a**, a medida em metros da aresta lateral da pirâmide. Segue daí que, como $2x$ e b são as medidas respectivas da diagonal(d) e do lado(l) do quadrado da base da pirâmide, teremos

$$l\sqrt{2} = d \quad \Rightarrow \quad b\sqrt{2} = 2x \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2x}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad b = x\sqrt{2}.$$

Temos ainda que o ΔCEF é retângulo em E, e aplicando Pitágoras temos

$$a^2 = 1^2 + (1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 + 1 - 2x + x^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2 - 2x + x^2},$$

e na pirâmide, o ΔPOM é retângulo em O nos dando

$$a^2 = x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \sqrt{2-2x+x^2} - x^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 2 - 2x \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{2-2x}$$

Tendo b e h em função de x, já podemos escrever o volume V em função de x sabendo que o volume é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Segue daí que substituindo b e h temos

$$V = \frac{1}{3}b^2h \;\Rightarrow\; V(x) = \frac{1}{3}(x\sqrt{2})^2\sqrt{2-2x} \;\Rightarrow\; V(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt{2-2x},\ com\ 2-2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 1$$

com $D(V) = [0,1]$, como dito e observado no esboço do problema. O conjunto imagem também fica definido após encontrarmos o volume máximo (V_{mx}) como sendo $Im(V) = [0, V_{mx}]$. Como a função não é característica do ensino médio usaremos o Geogebra para encontrarmos o gráfico de V, e achar aproximadamente o x ótimo. Basta abrir o Geogebra, digitar a função (y = (2/3)*x^2*sqrt(2-2x)) no campo de entrada e dá enter que aparecerá o gráfico na janela de visualização. Veja figura 4.17. O nosso conjunto de soluções viáveis corresponde à parte do gráfico situado no 1º quadrante, uma vez que temos $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Ainda fica difícil encontrar o ponto máximo visualmente, mas nos dá uma aproximação muito boa do x ótimo. Para se ter esse x ótimo basta pedir os alunos que selecionem "novo ponto" e, em seguida, cliquem no lugar onde acham que está o ponto máximo. Todos encontrarão um valor real próximo de 0.8 metros.

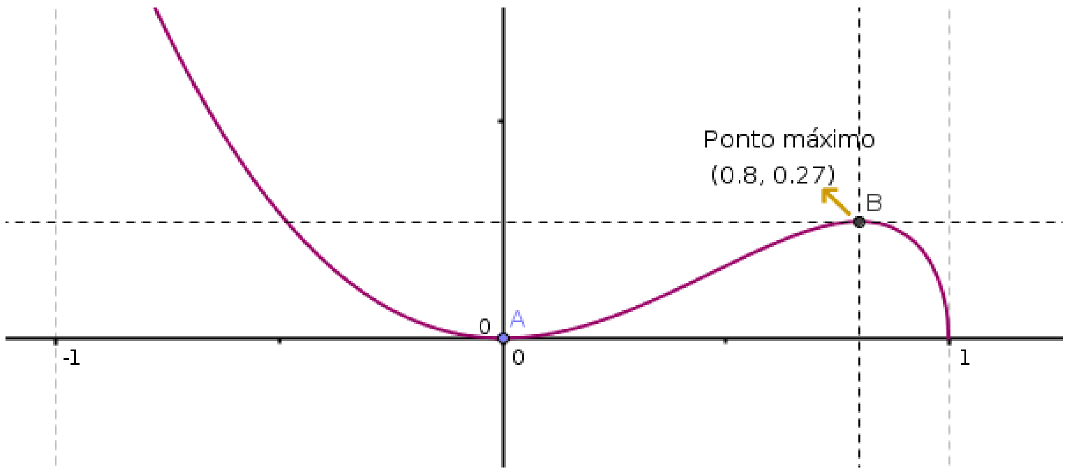


Figura 4.17: Gráfico da função $V(x)$ do problema da embalagem piramidal pelo Geogebra

Talvez surja por parte dos alunos a pergunta: "E qual é exatamente o x ótimo?". Finalmente, é hora de apresentarmos a solução exata uando o Solver do Excel que resolve problemas de otimização não lineares.

As nossas variáves de decisão serão:
x = medida em metros da metade da diagonal do quadrado da base da pirâmide e
y = altura em metros da altura da pirâmide.
Como $b = x\sqrt{2}$, a função objetivo fica sendo

$$V = \frac{1}{3}b^2y \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}(x\sqrt{2})^2y \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = \frac{2}{3}x^2y$$

e as restrições são

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2} \quad e \quad y = \sqrt{2-2x} \Rightarrow y^2 = 2-2x \Rightarrow 2x+y^2 = 2$$

Portanto, o modelo fica sendo:

Maximizar $V = f(x,y) = \frac{2}{3}x^2y$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 2x+y^2 = 2 \\ x \leq 1 \\ y < \sqrt{2} \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Dispondo os dados do modelo acima na planilha do Excel e invocando o Solver para resolver, teremos o resultado exposto na figura 4.18 abaixo com o resultado preciso de x, diferentemente do que obtivemos no gráfico do Geogebra onde ficou a dúvida sobre o valor ótimo de x. Agora, temos como resultado com duas casas decimais $x = 0,80$ m = 80 cm e $V = 0,27m^3 = 270dm^3 =$ 270 litros.

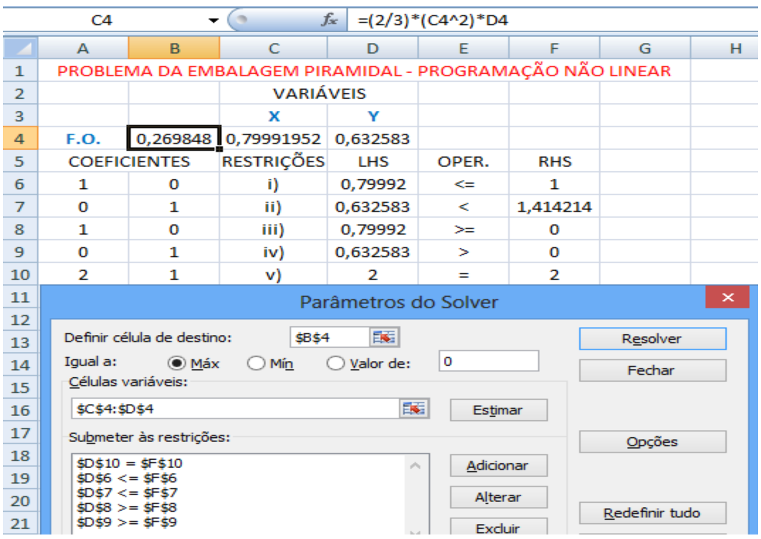


Figura 4.18: Disposição dos dados na planilha do Excel e solução pelo Solver _ Embalagem piramidal

Aqui, encerramos esse capítulo na certeza de que foi possível mostrarmos que, com o uso dos problemas de otimização não lineares, é possível aplicar, revisar e introduzir conteúdos matemáticos do ensino médio, tornando a matemática mais real e mais próxima dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos agora, segundo essa proposta, iniciar na 1ª série os problemas de PL simples com duas variáveis durante o estudo da função polinomial do 1º grau e inequações, abrindo espaço para falar de programação linear de forma contextualizada, articulando visitas com os alunos a empresas públicas ou privadas e o desenvolvimento de projetos interdisciplinares através de temas transversais unindo o currículo num foco comum. Devemos focar a resolução gráfica destes problemas pré-selecionados, sem contudo descartar a resolução pelo Simplex e ou Solver dependendo do nível da turma. Ainda na 1ª série, propomos iniciar o estudo da função polinomial do 2º grau através de um problema de otimização não linear como o problema da cerca ou da calha da chuva, também no estudo de trigonometria podemos fazer aplicações com problemas de otimização não lineares, vistos no capítulo 4.

Na 2ª série, especificamente, no estudo de matrizes, determinantes e sistema lineares, podemos fixar o início do método Simplex e do Solver para resolvermos PPL, ampliando se possível para PPL com 3 variáveis. E os problemas de otimização não lineares poderão ser usados abundantemente nas geometrias plana e espacial, conforme queira o professor.

Tanto na 2ª ou na 3ª séries podemos continuar propondo visitas a empresas de produção, quem sabe de pequenos autônomos conhecidos dos alunos que produzem algum tipo de produto sem sistematização e controle do lucro ótimo, desenvolvendo modelos de PL, fazendo projetos e articulando a interdisciplinaridade. Como na 3ª série do ensino médio temos o estudo da geometria analítica com destaque às equações da reta, paralelismo e perpendicularismo, temos oportunidade de continuar com os PPL. No estudo do tratamento da informação, podemos trabalhar a relação entre as médias fazendo aplicações com problemas de otimização não lineares pois, por exemplo, o prolema de trigonometria desenvolvido no capítulo 4 pode ser resolvido por meio de tangente da diferença de dois ângulos e, na sequência, usando a relação entre as médias aritmética e geométrica para chegar à solução.

Portanto, a proposta dos PCNEM pode ser aplicada em consonância com a realidade de cada escola, em qualquer estado, usando os problemas de otimização lineares e não lineares em praticamente todos os conteúdos matemáticos do ensino médio, seja desencadeando o estudo de temas novos, seja aplicando conteúdos ou revisando aqueles conteúdos sempre cobrados nas avaliações externas. Espera-se ainda, o uso dessa proposta na articulação de um currículo em rede, pois independentemente do tema a ser trabalhado para esse fim, haverá problemas de otimização relativos ao mesmo em qualquer série do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio, 1999, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília.

[2] LIMA, Elon Lages and CARVALHO, Paulo Cezar Pinto and MORGADO, EWA, A matemática no ensino Médio v. 2, 1998, Rio de Janeiro: SBM.

[3] D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática, 1996, Papirus Editora.

[4] POLYA, George. A arte de resolver problemas, Rio de Janeiro: Interciência, vol.2, 1978.

[5] GERAIS, Minas. Currículo Básico Comum-CBC-Matemática, Belo Horizonte: SEE-MG, 2007.

[6] BARROS, Carolina Siminionato. "Fazendas-escolas são mais complicadas do que parecem", Cálculo-Matemática para Todos, volume 25, Fev.13, p.9.

[7] MENEZES, Marco Antonio Figueiredo, Programação Linear, Departamento de Computação: Universidade Católica de Goiás, Cap, volume 1, 2006.

[8] PACCA, Henrique, Goldbarg, and Luna. Otimizaão Combinatória E Programação Linear-2ª Edição volume 2, Elsevier Brasil, 2005.

[9] MARINS, Fernando Augusto Silva. Introdução à Pesquisa Operacional, Editora Cultura Acadêmica, 2011.

[10] SOUSA, Jorge Alberto Mendes. Integração de mercados liberalizados de energia eléctrica com aplicações ao MIBEL, Dissertação de Doutoramento, UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA, LISBOA, cap.1, 2005.

[11] SILVA, Kléber. Modelagem Matemática com Programação Linear: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Tese (Mestrado em Matemática pelo PROFMAT, 2013.

[12] SANTOS, Josias Moreira dos. Programação Linear:Uma aplicação Possível no Ensino Médio, Universidade Federal da Bahia, Mestrado em Matemática-PROFMAT, 2012.

[13] ROCHA, Alan Martins. Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio, Universidade Federal de Goiás, Mestrado em Matemática-PROFMAT, 2013.

[14] RECH,Roberto Rech, Resolvendo Problemas de Otimização no Ensino Médio, 2008.

[15] MELO, Jorge Nazareno Batista. Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Tese (Mestrado em Matemática), 2012.

[16] PINTO, Joaquim António, Programação Linear [no Ensino Secundário], Universidade do Porto, 2004.

[17] SILVA, Ermes Medeiros da. e outros, Pesquisa Operacional, 3 Edição, Atlas, São Paulo, 2008.

[18] JÚNIOR, AC and Souza, Marcone Jamilson Freitas, Softwares de Otimização: Manual de Referência, Departamento de Computação da Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG, 2003.

[19] VIEIRA, Rafael, "Aplicação do Solver no Calc", http://www.youtubhe.com/watch?v=GD_2jnV12wU, 10/2009.

[20] NARCISO, Marcos, "Alternativas livres ao Solver", http://www.condicaoinicial.com/2010/03/alternativas-livres-ao-solver.html, 03/2010.

[21] PASTORE, José Luiz Pastore, Explorando o ensino da Matemática: artigos: volume 1, pág.152 Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

[22] SIMOES, Carlos Artexes e Mônica Ribeiro da Silva, Formação de Professores do Ensino Médio, O currículo do Ensino Médio, CEP, volume 70047, pages 900.

ANEXO-LISTA DE PROBLEMAS

Deixamos aqui uma lista de exercícios colhidos na internet e livros já citados na bibliografia. Esses exercícios servirão como suporte no desenvolvimento com os nossos alunos, tanto dentro como fora da sala de aula. Obviamente, muitos problemas podem ser confeccionados através da observação do contexto dos alunos. Fiquemos atentos, muitos alunos talvez já tenham em suas famílias microempresas informais e poderam contribuir na elaboração de problemas.

- **PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM PL**

1. Uma microempresa tem disponíveis os seguintes tecidos: $16m^2$ de algodão, $11m^2$ de seda e $15m^2$ de lã. Para confeccionar um terno padrão, são necessários $2m^2$ de algodão, $1m^2$ de seda e $1m^2$ de lã. Para um vestido padrão, são necessários $1m^2$ de algodão, $2m^2$ de seda e $3m^2$ de lã. Se o lucro líquido de um terno é de 300 u.m. e de um vestido de 500 u.m., quantas peças de cada tipo a microempresa deve fabricar para ter o maior lucro possível?

2. Problema de Alocação de Recursos: Uma fábrica de computadores produz dois modelos de microcomputadores A e B. O modelo A fornece um lucro de R$ 180,00 e B, de R$ 300,00. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque 60 do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Pergunta-se: Qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

3. Problema de Alocação de Recursos: Um fundo de investimentos tem até R$ 300.000,00 para aplicar em duas ações. A empresa D é diversificada (tem 40% do seu capital aplicado em cerveja e o restante aplicado em refrigerantes) e espera-se que forneça bonificações de 12%. A empresa N não é diversifica (produz apenas cerveja) e espera-se que distribua bonificações de 20%. Para este investimento, considerando a legislação governamental aplicável, o fundo está sujeito às seguintes restrições:

    - O investimento na empresa diversifica pode atingir R$ 270.000,00.
    - O investimento na empresa não-diversificada pode atingir R$ 150.000,00.
    - O investimento em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode atingir R$ 180.000,00.

Pede-se: Qual o esquema de investimento que maximiza o lucro?

4. Problema de Alocação de Recursos: Uma empresa do ramo de madeira produz madeira tipo compensado e madeira serrada comum e seus recursos são $40m^3$ de pinho e $80m^3$ de canela. A madeira serrada dá um lucro de R$ 5,00 por m^3 e a madeira compensada dá um lucro de R$ 0,70 por m^3. Para produzir uma mistura de 1 metro cúbico de madeira serrada são requeridos $1m^3$ de pinho e $3m^3$ de canela. Para produzir $100m^3$ de madeira compensada são requeridos $3m^3$ de pinho e $5m^3$ de canela. Compromissos de venda exigem que sejam produzidos pelo menos $5m^3$ de madeira serrada e $900m^2$ de madeira compensada. Qual é o esquema de produção que maximiza o lucro?

5. Problema de Alocação de Recursos: Uma microempresa produz dois tipos de jogos para adultos e sua capacidade de trabalho é de 50 horas semanais. O jogo A requer 3 horas para ser confeccionado e propicia um lucro de R$ 30,00, enquanto o jogo B requer 5 horas para ser produzido e acarreta um lucro de R$ 40,00. Quantas unidades de cada jogo devem ser produzidas semanalmente a fim de maximizar o lucro?

6. Problema de Alocação de Recursos: Uma pequena fábrica de móveis produz dois modelos de molduras ornamentais, cujos preços de venda são, respectivamente, R$ 110,00 e R$ 65,00. Ela possui 7 peças de madeira e dispõe de 30 horas de trabalho para confeccionar os dois modelos, sendo que o modelo A requer 2 peças de madeira e 5 horas de trabalho, enquanto o modelo B necessita de 1 peça de madeira e 7 horas de trabalho. Quantas molduras de cada modelo a fábrica deve montar se desejar maximizar o rendimento obtido com as vendas?

7. Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M_1 e M_2. M_1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M_2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M_1 e 1 hora em M_2. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade. Determinar a quantidade a ser produzida de A e B a fim de se ter um lucro máximo.

8. Uma empresa fabrica dois produtos A e B. Cada um deste produtos requer uma certa quantidade de tempo na linha de montagem e ainda mais algum para a sua finalização. Cada produto do tipo A necessita de 5 horas na linha de montagem e de 2 horas para a finalização. Cada produto de tipo B necessita de 3 horas na linha de montagem e de 4 horas para a finalização. Numa semana, a empresa dispõe de 108 horas para a linha de montagem e 60 horas para a finalização. Toda a produção é vendida. O lucro de cada produto é de 120 reais para o produto A e de 210 reais para o B. Quantas unidades, por semana, dos produtos A e B se devem produzir, de modo a que o lucro seja máximo?

9. Suponhamos que um comerciante pretende adquirir uma quantidade, não superior a 5 toneladas, de certo produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada, mas não pode fornecer mais de 3 toneladas desse produto. A fábrica B garante apenas um lucro de 3500 escudos por tonelada, mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Investigar a melhor maneira de o comerciante distribuir as encomendas pelas duas fábricas, de modo a obter o máximo lucro.

10. Uma fábrica de confecções produz dois modelos de camisas de luxo. Uma camisa do modelo A necessita de 1 metro de tecido, 4 horas de trabalho e custa R$120,00. Uma camisa do modelo B exige 1,5 metros de tecido, 3 horas de trabalho e custa R$160,00. Sabendo que a fábrica dispõe diariamente de 150 metros de tecido, 360 horas de trabalho e que consegue vender tudo o que fabrica, quantas camisas de cada modelo será preciso fabricar para obter um rendimento máximo?

11. Suponha que para construir uma casa popular por mês uma construtura necessite de 2 pedreiros e 4 serventes. Para construir um apartamento no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros e 8 serventes. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros e 70 serventes contratados. A construtora obtém um lucro de R$3.000,00 na venda de cada casa popular e de R$5.000,00 na venda de cada apartamento e toda "produção" da construtora é vendida. Qual é a quantidade ótima de casas populares e apartamentos que a construtora deve construir para que está obtenha lucro máximo.

12. Uma padaria dispõe de 150 kg de farinha, 22 kg de a çúcar e 27,5 kg de manteiga, produzindo dois tipos de bolo A e B. Para a produção de uma dúzia de bolos do tipo A gasta 3 kg de farinha, 1 kg de açúcar e 1 kg de manteiga e para a produção de uma dúzia de bolos do tipo B gasta 6 kg de farinha, 0,5 kg de açúcar e 1 kg de manteiga. Supondo que o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo A é de 20 reais e o lucro resultante da produção de uma dúzia de bolos do tipo B é de 30 reais, quantas dúzias de bolos do tipo A e bolos do tipo B deve produzir a padaria para maximizar seu lucro?

13. Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada porção de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada porção de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabe-se que cada porção de carne custa 2,5 unidades monetárias e cada porção de ovo custa 3 unidades monetárias.

14. A FARLACT é uma fábrica onde são produzidos dois tipos de farinhas lácteas (A e

B) . Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q. Sabe-se que, em cada semana, a FARLACT não dispõe de mais de 20 Kg e 30 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os donos da FARLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas. Por cada tonelada de farinha A vendida, a FARLACT tem um lucro de 7 unidades monetárias (u.m.), sendo de 10 u.m. o lucro associado à venda de uma tonelada de farinha B. Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da FARLACT ?

15. Devemos fabricar cadeiras e mesas. Cada cadeira necessita de 5 tábuas de madeira e cada mesa 20. Ao todo temos 400 tábuas. Cada cadeira precisa de 10 horas de trabalho e cada mesa 15 horas. Temos 450 horas de trabalho disponíveis. Queremos maximizar o lucro. O lucro por cadeira é R$ 45,00 e por mesa é R$ 80,00.

16. Uma determinada empresa automobilística fabrica carros de luxos e caminhonetes. A empresa acredita que os mais prováveis clientes são homens e mulheres com altos rendimentos. Para abordar estes grupos, a empresa decidiu por uma campanha de propagandas na TV, e comprou 1 minuto do tempo de comercial de 2 tipos de programa: comédia e transmissão de futebol. Cada comercial durante o programa de comédias é visto por 7 milhões de mulheres e 2 milhões de homens com grande poder aquisitivo. Cada comercial durante a transmissão de futebol é visto por 2 milhões de mulheres e 12 milhões de homens com grande poder aquisitivo. Um minuto de comercial durante o programa de comédias custa $50.000, e durante a transmissão de futebol $100.000. A empresa gostaria que pelo menos 28 milhões de mulheres e 24 milhões de homens de grande poder aquisitivo assistissem sua propaganda. Obter a programação matemática que irá permitir a empresa atender as suas necessidades de propaganda a um mínimo custo.

17. O Sr. João, um grande criador de porcos alentejano, pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal, por forma a conseguir uma certa quantidade nutritiva a um custo mínimo. O tipo de ração em granulado tem 20g/kg de hidratos de carbono, 50g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa R$ 10,00/kg. O tipo de ração em farinha tem 50/kg de hidratos de carbono, 10g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa R$ 5,00/kg. As quantidades mínimas diárias requeridas por cada porco são de 200g de hidratos de carbono, 150g de vitaminas e 210g de proteínas.

18. A Esportes Radicais S/A produz pára-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos

requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto que na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa-delta requer 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa, bem como que o lucro pela venda de cada pára-quedas é de R$ 60,00 e o lucro para cada asa-delta vendida é R$ 40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S/A.

19. A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os 3 tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessura fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender os pedidos ao menor custo possível?

- **PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR**

20. Uma escola de dança resolveu promover um baile e para isso, necessita alugar um salão de um clube da comunidade. O espaço a ser alugado consiste de uma área retangular limitada por duas paredes revestidas de espelho e dois painés móveis. A escola precisa de $2m^2$ de espaço por pessoa e espera de 300 a 350 pessoas para o baile. O clube dispõe de 55 metros de painéis móveis e a sala é bastante grande para arranjá-los em qualquer forma retangular pré-determinada. A escola quer garantir espaço suficiente para o evento. Represente por L a largura do espaço a ser alugado.

    - Expresse a área do espaço a ser alugado como uma função de L.
    - Explique porque é necessário resolver a desigualdade $700 \leq 55L - L^2$, para calcular a largura do espaço a ser alugado de modo a satisfazer as necessidades da escola.
    - Resolva a desigualdade e sabendo que o preço do aluguel é diretamente proporcional a área a ser alugada, determine os possíveis arranjos dos painéis de modo a satisfazer as necessidades da escola, pagando-se o menor aluguel possível.

21. **Problema da cerca**
    Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma região retangular junto a

um rio para confinar alguns animais. O lado da região retangular junto a margem do rio não é cercado. Quanto deve ser x, a medida em metros da base da região retangular, para que a área cercada A seja a maior possível?

22. **Problema do barbante para quadrado e círculo**
Um fio de barbante de 10 metros de comprimento pode ser usado ou para construir um quadrado, ou para construir um círculo ou ele pode ser cortado em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços é usado para construir um quadrado e o outro pedaço é usado para construir um círculo. Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a maior possível? Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a menor possível?

23. **Problema do barbante para quadrado e triângulo**
Um fio de barbante de 10 metros de comprimento pode ser usado ou para construir um quadrado, ou para construir um triângulo equilátero ou ele pode ser cortado em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços é usado para construir um quadrado e o outro pedaço é usado para construir um triângulo equilátero. Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a maior possível? Quanto deve ser x, a medida em metros do pedaço do barbante usado para construir o quadrado, para que a soma S das áreas das figuras produzidas seja a menor possível?

24. **Problema da janela normanda**
Uma janela normanda tem o formato da justaposição de um semicírculo sobre um retângulo. Considerando as janelas normandas com perímetro igual a 9 m, quanto deve ser x, a medida em metros da base do retângulo que compõe a janela, para que a área A da janela seja a maior possível?

25. **O problema do triângulo isósceles**
Considerando os triângulos isósceles com dois lados de medidas iguais a 3 m, quanto deve ser x, a medida em metros da base triângulo isósceles, para que a área A do triângulo seja a maior possível?

26. **Um problema geométrico**
Considere pontos A, B, C, H e M no plano. O ponto H pertence ao segmento de extremidades B e C, de modo que a distância entre B e H é igual a 2 m e a distância entre H e C é igual a 3 m. O segmento AH é perpendicular ao segmento BC e ele tem medida igual a 5 m. O ponto M pertence ao segmento de extremidades A e H. Quanto deve ser x, a

medida em metros da distância entre os pontos A e M, para que o comprimento total L de fios ligando M aos pontos A, B e C seja o menor possível?

27. **O problema do caminho para a horta**
Um agricultor está em sua casa C situada a 80 metros da margem retilínea de um rio. Ele quer encher primeiro o seu regador de água em um ponto M na margem deste rio e, depois, se dirigir para sua horta H, situada a 50 metros da margem do rio. A distância entre os pés A e B das perpendiculares traçadas de C e H sobre a margem do rio é igual a 100 metros. Considere um sistema de coordenadas onde A = (0, 0), B = (100, 0), C = (0, 80), H = (100, 50) e M = (x, 0). Quanto deve ser x, a abscissa do ponto M sobre o eixo x, para que o comprimento d do trajeto casa (C), rio (M) e horta (H) seja o menor possível?

28. **O problema da distância entre ponto e reta**
Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser x para que a distância d entre A e M = (x, ?2 x + 4) (um ponto da reta y = ?2 x + 4) seja a menor possível?

29. Dado um ponto A no plano cartesiano, quanto deve ser x para que a distância d entre A e M = (x, x^2) (um ponto da parábola $y = x^2$) seja a menor possível?

30. **O problema do retângulo: Área e perímetro**
Considerando os retângulos de área igual a $3m^2$, quanto deve ser x, a medida em metros da base do retângulo, para que o perímetro y do retângulo seja o menor possível?

31. **O problema do retângulo inscrito num círculo**
Queremos encaixar (inscrever) dentro de um círculo um retângulo com a maior área possível. Se o círculo tem 3 metros de raio, quanto deve ser x, a medida em metros da base do retângulo, para que a área A do retângulo seja a maior possível?

32. **O problema do triângulo inscrito num círculo**
Queremos encaixar (inscrever) dentro de um círculo um triângulo isósceles com a maior área possível. Se o círculo tem 3 metros de raio, quanto deve ser x, a medida em metros da altura do triângulo, para que a área A do triângulo seja a maior possível?

33. **O problema da bobina do transformador**
Na construção de um transformador de corrente alternada, insere-se na bobina circular do transformador um núcleo de ferro cuja seção transversal tem o formato de uma cruz. É importante que esta seção transversal tenha a maior área possível. Se o raio da seção transversal circular da bobina mede 18 milímetros e se x representa a metade da medida, em milímetros, dos lados da cruz cujas extremidades estão sobre a seção circular, quanto deve ser x para que a área A da cruz seja a maior possível?

34. **O problema da caixa**
Quadrados iguais são cortados dos cantos de uma folha de papelão retangular medindo 30

cm por 50 cm. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa sem tampa. Quanto deve ser x, a medida em centímetros dos lados dos quadrados que são retirados da folha de papelão, para que o volume V da caixa seja o maior possível?

35. **O problema da caixa com tampa**
Um fabricante quer construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão retangular medindo 10 cm por 16 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa com tampa. Quanto deve ser x, a medida em centímetros dos lados dos quadrados que são retirados da folha de papelão, para que o volume V da caixa seja o maior possível?

36. **O problema do bebedouro**
Um bebedouro será construído na forma de um prisma reto cuja altura mede 7 m e cujas bases são trapézios. Cada trapézio tem base menor e laterais de medidas sempre iguais a 1 m. Se x representa a medida, em radianos, do ângulo entre uma lateral e uma altura de cada um dos dois trapézios congruentes usados na construção do bebedouro, quanto deve ser x para que a forma do bebedouro correspondente tenha o maior volume V possível?

37. **O problema da embalagem piramidal**
Um fabricante quer construir uma embalagem no formato de uma pirâmide regular de base quadrada a partir de uma folha de papelão quadrada medindo 2 m por 2 m. Para construir a embalagem, triângulos isósceles são removidos das laterais da folha de papelão. As pontas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma pirâmide regular de base quadrada. Quanto deve ser x, a metade da medida em metros da diagonal da base quadrada da pirâmide, para que o volume V da embalagem seja o maior possível?

38. **O problema do cone**
Um copo no formato cônico é feito com um disco circular de papel, de centro O, do qual foi retirado um setor circular AOM e os lados OA e OM foram unidos. Os lados OA e OM têm medida 7 cm. Quanto deve ser x, a medida em radianos do ângulo AOM, para que o volume V do copo seja o maior possível?

39. **O problema do cilindro inscrito numa esfera**
Queremos encaixar (inscrever) dentro de uma esfera um cilindro circular reto com o maior volume possível. Se a esfera tem 3 metros de raio, quanto deve ser x, a medida em metros do raio da base do cilindro, para que o volume V do cilindro seja o maior possível?

40. **O problema do cone inscrito numa esfera**
Queremos encaixar (inscrever) dentro de uma esfera um cone circular reto com o maior volume possível. Se a esfera tem 3 metros de raio, quanto deve ser x, a medida em metros da altura do cone, para que o volume V do cone seja o maior possível?

41. **O problema da pirâmide inscrita numa esfera**
Queremos encaixar (inscrever) dentro de uma esfera uma pirâmide regular de base quadrada com o maior volume possível. Se a esfera tem 3 metros de raio, quanto deve ser x, a medida em metros da altura da pirâmide, para que o volume V da pirâmide seja o maior possível?