UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FLÁVIO ANTÔNIO NOLÊTO FERNANDES

ALGUMAS ANIMAÇÕES USANDO O SOFTWARE MAXIMA E OPERAÇÕES MATRICIAIS PARA O ENSINO MÉDIO

PALMAS – TO

2014

FLÁVIO ANTÔNIO NOLÊTO FERNANDES

ALGUMAS ANIMAÇÕES USANDO O SOFTWARE MAXIMA E OPERAÇÕES MATRICIAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre – Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz

PALMAS

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

N798a Nolêto, Flávio Antônio Fernandes

Algumas animações usando o software Maxima e operações matriciais para o ensino médio. – Palmas, 2014.

84.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2014.

Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

1. Matrizes. 2. Mudanças geométricas. 3. Animação. I. De La Cruz, Andrés. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 512.943

Bibliotecária: Atilena Oliveira
CRB² 932

Dedico essa produção a minha amada mãe Eurides Virgínia Nolêto, que me deu uma educação baseada no caráter e respeito ao próximo. Dedico também ao meu querido avô Olegário Francisco Nolêto, que muito me inspirou, sempre com interessantes histórias, que contribuíram bastante para a minha formação, que guardarei na lembrança por toda a vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio e incentivo fundamentais para que eu conseguisse finalizar esse trabalho. Sempre torcendo pelo meu progresso e desenvolvimento.

A CAPES pela bolsa concedida durante o programa. Esta de fundamental importância para a realização desse trabalho, pois possibilitou que eu tivesse o tempo necessário para me dedicar às aulas e a pesquisa.

Ao professor Andrés Lázaro pela orientação e contribuição para a realização desse trabalho.

Aos colegas de Profmat, em especial Francisco Cláudio, Thiago Beirigo, Leniedson Guedes, Ivanilson Ferreira, Delfim Dias e Wellington Pereira, que até mesmo nas diversas resenhas que tivemos após as aulas, conversávamos e refletíamos bastante sobre a matemática e suas aplicações em diversas áreas.

Aos professores da UFT que contribuíram muito para meu aprendizado, em especial Pedro Alexandre, Andrés Lázaro e Gilmar.

Aos membros da sociedade absoluto, pela torcida pelo meu sucesso e principalmente pela paciência.

Ao amigo e colega Reginaldo Naves pelas dicas e conversas enriquecedoras sobre produção intelectual nos corredores e na sala dos professores do IFTO.

“Já podeis, da Pátria filhos,
Ver contente a mãe gentil;
Já raiou a liberdade
No horizonte do Brasil.

Brava gente brasileira!
Longe vá... temor servil:
Ou ficar a pátria livre
Ou morrer pelo Brasil.

Os grilhões que nos forjava
Da perfídia astuto ardil...
Houve mão mais poderosa:
Zombou deles o Brasil.

Brava gente brasileira!
Longe vá... temor servil:
Ou ficar a pátria livre
Ou morrer pelo Brasil.

Não temais ímpias falanges,
Que apresentam face hostil;
Vossos peitos, vossos braços
São muralhas do Brasil.

Brava gente brasileira!
Longe vá... temor servil:
Ou ficar a pátria livre
Ou morrer pelo Brasil.

Parabéns, ó brasileiro,
Já, com garbo varonil,
Do universo entre as nações
Resplandece a do Brasil.

Brava gente brasileira!
Longe vá... temor servil:
Ou ficar a pátria livre
Ou morrer pelo Brasil.”

Evaristo da Veiga

RESUMO

O conteúdo de matrizes atrai pouco interesse aos alunos do ensino médio, devido à extensão dos cálculos como, por exemplo, multiplicação de matrizes, determinantes de ordem maior do que três, cálculo da inversa de uma matriz, equações matriciais e sistemas lineares. Pensando numa alternativa para ensinar esse conteúdo de uma forma mais prática e interessante, esse trabalho propõe a utilização de alguns recursos do software Maxima para diminuir a quantidade de trabalho manual, cansativo e muitas vezes desestimulador, proporcionando o desenvolvimento intelectual de uma forma mais atrativa e dinâmica. Desta forma, este trabalho relaciona algumas operações matriciais com a translação, escala e rotação de figuras geométricas, possibilitando assim, realizar animações com figuras formadas por pontos.

Palavras-chave: matrizes, mudanças geométricas, animação.

ABSTRACT

High school students have showed very little interest in the matrix content due to the extension of calculations such as matrix multiplication, higher than three determiners, inverse calculation of a matrix, matrix equations and linear systems. Upon thinking about an alternative to teach that content in a more practical and interesting way, this work proposes the use of some Maxima software features to reduce the amount of manual work, tiring and often deterrent, while providing the intellectual development of a more attractive and dynamical way. Thus, this paper relates some matrix operations with translation, scaling and rotation of geometric figures, enabling animations with figures formed by dots.

Keywords: matrices, geometric changes, animation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As matrizes podem ser usadas para representar pontos no sistema de eixos coordenados x, y e z e, após serem realizadas algumas operações entre essas matrizes, as figuras compostas por esses pontos podem ser novamente representadas graficamente. No trabalho são associadas as operações matriciais: adição, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes com as transformações geométricas translação, escala (ampliação ou redução) e a rotação de figuras, respectivamente.

Os conteúdos matrizes, determinantes e sistemas lineares geralmente não possuem boa aceitação por parte dos alunos do ensino médio. Em geral os alunos reclamam sobre a extensão dos cálculos como, por exemplo, calcular a inversa de uma matriz, calcular determinantes de ordem maior ou igual a quatro usando o teorema de Laplace, resolver sistemas de equações lineares utilizando a regra de Cramer ou o escalonamento e até mesmo multiplicar matrizes.

Por outro lado os mesmos alunos têm interesse em tecnologia e redes sociais, onde buscam principalmente conteúdos extremamente visuais, como fotos, vídeos, charges, enfim, imagens em geral. Isto pôde ser verificado pelo entusiasmo de desenvolverem trabalhos no laboratório.

Para incentivar o estudo das matrizes pelos alunos do ensino médio, esse trabalho propõe a associação de matrizes à figuras formadas por pontos no plano cartesiano. Objetivando visualizar de maneira mais rápida essas figuras associadas as matrizes, esse trabalho também propõe o uso de alguns recursos computacionais, para realizar animações.

Os principais recursos computacionais usados no trabalho foram do software Maxima, derivado do sistema Macsyma, desenvolvido no MIT nos anos de 1968 a 1982. O software Maxima permite resolver cálculos matemáticos em diferentes áreas como, por exemplo, equações, sistemas, matrizes, derivadas, integrais, estatística, funções, trigonometria, análise combinatória, etc. E sua versão atual, pode ser baixada gratuitamente através do link http://maxima.sourceforge.net/download.html.

O comando with_slider do software Maxima, que muito contribuiu para a qualidade visual deste trabalho, foi utilizado anteriormente no trabalho: *Uma introdução do cálculo variacional no ensino da física*. (MÁRCIO, Magno 2013). Neste o autor não o usa para representar graficamente figuras associadas às matrizes, e sim para aproximar a área total de uma figura abaixo de uma curva descrita por uma função num intervalo. Processo conhecido como a soma de Riemann.

Para propor a associação de figuras à matrizes através do Maxima, esse trabalho será desenvolvido em seis capítulos distribuídos da seguinte maneira. O primeiro capítulo é dedicado à introdução. No segundo capítulo são apresentados alguns fatos históricos e avanços no estudo das matrizes. No terceiro capítulo serão abordados a definição de matrizes, algumas operações envolvendo matrizes e algumas aplicações como: resolução de sistemas lineares, translação, escala e rotação de figuras. No capítulo quatro usaremos os recursos do Maxima para essas aplicações e também para a animação de figuras. No quinto capítulo serão feitas as considerações finais a respeito dos objetivos do trabalho. No sexto capítulo as referências.

Espera-se com esse trabalho que, os professores que ministram aulas no ensino médio, realmente possam usar o software Maxima para enriquecer ainda mais suas aulas, através de animações associando figuras às matrizes, pois acredita-se que isso fará com que os alunos passem a ter mais interesse em aprender as operações matriciais. Após esse interesse por parte dos alunos, o professor pode sugerir atividades cujo foco central seria a criação, onde os alunos criem suas próprias animações com figuras produzidas por eles mesmos.

Para isso os alunos teriam que aprender as operações matriciais, e fazendo as animações cada vez mais complexas, estes estariam praticando esse conteúdo importante que é matrizes, de maneira séria e ao mesmo tempo prazerosa.

Acredita-se que o professor que conseguir tornar, na visão do aluno, algo árduo e desinteressante em algo prazeroso e interessante, sem deixar de mostrar e definir rigorosamente as propriedades e os teoremas de um conteúdo qualquer, esse pode se dar por satisfeito, pois conseguiu cumprir um dos objetivos do educador.

Espera-se que os educadores que conseguirem realizar tal feito, ouvirão de seus alunos menos frases do tipo: “... ah não, aula de matemática de novo...” e “... chega de exercícios professor” e ouvirão mais frases do tipo: “... que legal professor(a)!”, “... agora eu entendi.” e “... passa mais.”.

2 HISTÓRIA DAS MATRIZES

No trabalho é feito um levantamento histórico do surgimento das matrizes através dos sistemas de equações lineares e dos determinantes, apontando algumas intervenções e descobertas de alguns matemáticos desde o inicio do uso desses conteúdos até chegarem à forma como os estudamos hoje.

O estudo e as pesquisas feitas sobre o surgimento das matrizes levaram à conclusão de que o mesmo seria encontrado num livro chinês intitulado “Nove Capítulos”. Este livro trás vários ensinamentos e comandos que podem ser encaixados em ramos da matemática como a Álgebra e a Geometria. Não se sabe ao certo quem foi o autor desse livro, acredita-se que sua escrita foi possível graças à colaboração de vários autores, sendo um deles Liu Hui. O livro é sem dúvida, de muita importância para o desenvolvimento da matemática chinesa, inclusive foi usado por séculos em escolas da China, e é composto por nove capítulos. E no penúltimo deles, chamado Fangsheng, contêm problemas associados com sistemas lineares.

> Fangsheng: Apresenta a solução de sistemas lineares utilizando os números dispostos em linhas e colunas (algo semelhante a matrizes), inclusive admitindo números negativos durante os cálculos. Uma das soluções apontadas é o Método de Gauss, que apesar de apresentado em um caso particular, é dito ser geral. (BERTOLINI, M. V. 2012, p. 2)

O livro Nove Capítulos propõe um problema, dentre outros, que dizia o seguinte:

> Existem 3 tipos de milho, dos quais três feixes é do primeiro, dois do segundo e um do terceiro fazem trinta e nove medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem trinta e quatro medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem vinte e seis medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um feixe de cada tipo?

No mesmo livro o autor propõe uma representação para essas equações. Onde os coeficientes de cada equação são organizados em colunas e o termo independente é colocado logo abaixo dessas colunas. Observe:

Figura 1 – Prévia de um sistema linear

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Fonte: Disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html> Acesso em outubro 2014

Esta representação se assemelha a usada atualmente. Sejam x, y e z as quantidades de milho contidas nos feixes do primeiro, segundo e terceiro tipo, respectivamente. Sendo assim pode-se equacionar o problema da seguinte forma:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser representado por meio de três matrizes, onde uma é chamada de matriz dos coeficientes, a outra de matriz das variáveis e a do lado direito da igualdade é chamada de matriz dos termos independentes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

A proposta de solução do(s) autor(es), dada logo após o problema, é realizar multiplicações em uma coluna e subtraí-la quantas vezes for possível uma outra coluna até um dos coeficientes das outras colunas zerar. O que resultaria em:

Figura 2 – Processo de escalonamento

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Fonte: Disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html> Acesso em outubro 2014

Depois repetindo o processo até zerar outro coeficiente em uma das duas colunas que tiveram um número zerado. Chegando a:

Figura 3 – Processo de escalonamento 2

0 0 3
0 5 2
36 1 1
99 24 39

Fonte: Disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/uma-breve-historia-das-matrizes-e.html> Acesso em outubro 2014

Esse método é semelhante ao usado atualmente, conhecido como eliminação de Jordan-Gauss. Em linguagem atual uma possível solução, usando o processo de eliminação seria:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{bmatrix}$$

O método proposto pelo (s) autor (es) sugere a organização dos dados das equações (coeficientes) em colunas, mas o mesmo pode ser feito em linhas como é feito atualmente.

Apenas no século XVI é que Gerolamo Cardano (1501 – 1576) propõe uma regra para solução de um sistema linear com duas equações. Esta recebe o nome de regulamentação de Modo, que seria o mesmo, atualmente, que aplicar a regra de Cramer num sistema linear de segunda ordem.

As matrizes como se estuda atualmente surgiram posteriormente aos determinantes. Esses surgiram em 1683 no Japão com Seki Kowa (1642 – 1708) e na Alemanha com Leibniz (1649 – 1716). Sucedendo Kowa e Leibniz, um matemático escocês chamado Maclaurin (1698 – 1746) escreveu em 1730 o livro *Treatise of Algebra* que fora publicado apenas em 1748, apresentado um método geral para eliminar incógnitas de sistemas lineares. Demonstrando esse método para matrizes de segunda e terceira ordem e explicando como proceder para uma matriz de ordem 4. Esse método é conhecido atualmente como regra de Cramer, por ter sido ele a provar a validade do teorema para matrizes de ordem superior a quatro. (Seduc-PE, Matemática, 2º Ano do Ensino Médio)

Gauss foi o primeiro matemático a usar o termo determinante em 1801. Antes usava-se o termo resultante, como nos trabalhos de Leibniz e Laplace (1749 – 1827). E finalmente Cauchy (1789 – 1857) em 1812 que simplificou e melhorou a notação dos determinantes como conhecemos até os dias atuais.

3 MATRIZES

Matrizes é um conteúdo que faz parte da álgebra e é ensinado no segundo ano do ensino médio. A definição de matriz é bem complexa e de difícil compreensão para os alunos, pois em geral os alunos ao serem perguntados sobre o que é uma matriz, dão diferentes respostas: a maioria dá exemplos, falam o conceito que têm, dizem que são números dispostos em tabelas organizados por linhas e colunas e outras respostas bem vagas sobre o que é realmente uma matriz.

3.1 DEFINIÇÃO

Neste trabalho foi adotada a seguinte definição:

> Dados dois números *m* e *n* naturais e não nulos, chama-se *matriz m por n* (indica-se *m* x *n*) toda tabela *M* formada por números reais distribuídos em *m* linhas e *n* colunas.
>
> Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice *i* indica a linha e o índice *j* a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de *1* até *m*) e as colunas, da esquerda para a direita (de *1* até *n*), uma matriz *m* x *n* é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\ a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\ a_{mn} \end{Vmatrix}$$

(IEZZI, 2012, p.44)

As matrizes podem ser definidas de uma maneira mais formal, como uma função. Segundo Hoffman (1971, p. 6), "Uma matriz m x n com elementos em ℝ é uma função A dos pares de números naturais (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, em ℝ tal que $A(i, j) = a_{ij}$".

De acordo com o número de linhas e colunas podemos definir a ordem ou o tipo da matriz. Por exemplo, uma matriz que possua duas linhas e três colunas será do tipo dois por três (indica-se 2 x 3) e pode ser representada da seguinte maneira:

$$M = (a_{ij})_{2x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas é denominada matriz quadrada. Como o número de linhas e colunas é o mesmo, ou seja, m = n, para facilitar a representação dessas matrizes dizemos que elas são matrizes quadradas de ordem n e podem ser representadas por:

$$M = (a_{ij})_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \; a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos de uma matriz quadrada podem ser subdivididos em três partes. Uma delas é a diagonal principal, que é composta pelos elementos onde i = j, as outras duas são compostas pelos elementos que estão abaixo e acima da diagonal principal. Em resumo a posição dos elementos a_{ij} de uma matriz quadrada pode ser definida como:

- Diagonal principal; para i = j
- Abaixo da diagonal principal; para i > j
- Acima da diagonal principal; para i < j

Uma matriz que possua duas linhas e duas colunas será do tipo dois por dois (indica-se 2 x 2) ou simplesmente matriz quadrada de ordem 2 e pode ser representada da seguinte maneira:

$$A = (a_{ij})_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada onde os elementos $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ é definida como matriz diagonal. As matrizes A e B abaixo são exemplos de matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada de ordem n onde

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \; se \; i \neq j \\ a_{ij} = 1 \; se \; i = j \end{cases} \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

é definida como matriz identidade. Observe que as matrizes identidades são também diagonais.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz que possui apenas uma linha é denominada matriz linha, assim como a matriz que possui apenas uma coluna é denominada matriz coluna. Abaixo a matriz L é um exemplo de matriz linha e a matriz C de matriz coluna.

$$L = \left(a_{ij}\right)_{1x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \left(a_{ij}\right)_{4x1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$$

Uma matriz que possui todos os elementos iguais a zero é denominada matriz nula. A matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ será considerada nula se, e somente se $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

> Duas matrizes, A e B, são iguais se, e somente se, têm o mesmo tipo e seus elementos correspondentes (elementos com índices iguais) são iguais. Dadas as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{mxn}$, temos simbolicamente:
>
> $$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}. com \; 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$
>
> (DANTE, 2014, p. 80)

3.2 OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Conhecido o que é uma matriz e como representá-la de forma geral, veja como são definidas algumas operações envolvendo matrizes.

3.2.1 ADIÇÃO DE MATRIZES

> Dadas duas matrizes, A e B, do mesmo tipo, *m* x *n*, denomina-se soma da matriz *A* com a matriz *B*, que representamos por *A* + *B*, a matriz *C* do tipo *m* x *n* na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de *A* e *B*.
>
> Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo *m* x *n*, a soma *A* + *B* é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo *m* x *n* tal que:
>
> $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$
>
> (DANTE, 2014, p. 82)

Quanto a operação da adição, o conjunto das matrizes possui as mesmas propriedades do conjunto dos números reais. Essas são associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto. Onde o elemento neutro será dado pela matriz nula (matriz com todos os elementos iguais a zero) e o elemento oposto pela matriz oposta.

> Denomina-se a **matriz oposta** de uma matriz A (representa - se por –A) a matriz que somada com A resulta em uma matriz nula.
>
> (DANTE, 2014, p. 82)

Por exemplo, a matriz oposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ será dada por $-A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ e a adição entre elas será dada por:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & -5 + 5 \\ -2 + 2 & 4 + (-4) \\ 0 + 0 & \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.2 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ POR ESCALAR

> Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{mxn}$ tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$ para todo i e todo j. Isto

> significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.
>
> (IEZZI, 2012, p. 47)

Por exemplo, seja a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3x2}$ tal que $a_{ij} = i^2 - 3j$ com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$ e o número real k = 3. O produto k.A será dado pela matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{3x2}$ tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$

Veja como calcular esse produto 3.A = B:

Primeiramente deve-se saber quais são os elementos da matriz A que precisam ser calculados. Para isso observa-se o tipo da matriz, que é 3 x 2, assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ao calcular esses elementos segundo a lei de formação $a_{ij} = i^2 - 3j$ obtem-se:

$a_{11} = 1^2 - 3.1 = -2$ $\qquad$ $a_{12} = 1^2 - 3.2 = -5$

$a_{21} = 2^2 - 3.1 = 1$ $\qquad$ $a_{22} = 2^2 - 3.2 = -2$

$a_{31} = 3^2 - 3.1 = 6$ $\qquad$ $a_{32} = 3^2 - 3.2 = 3$

E a matriz A será dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

O produto 3.A será dado por:

$$3.A = 3.\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.(-2) & 3.(-5) \\ 3.1 & 3.(-2) \\ 3.6 & 3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -15 \\ 3 & -6 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} = B$$

Observe que pode-se calcular esse produto de maneira mais prática, calculando os elementos da matriz B usando a lei de formação $b_{ij} = k.a_{ij} = 3.(i^2 - 3j)$

$b_{11} = 3.(1^2 - 3.1) = -6$ $\qquad$ $b_{12} = 3.(1^2 - 3.2) = -15$

$b_{21} = 3.(2^2 - 3.1) = 3$ $\qquad$ $b_{22} = 3.(2^2 - 3.2) = -6$

$b_{31} = 3.(3^2 - 3.1) = 18$ $\qquad$ $b_{32} = 3.(3^2 - 3.2) = 9$

Obtendo assim a matriz $B = 3.A = \begin{bmatrix} -6 & -15 \\ 3 & -6 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$

3.2.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Para multiplicar duas matrizes é preciso obedecer uma ordem, pois o produto de matrizes não é comutativo. Onde o número de colunas da matriz a esquerda deve ser igual ao número de linhas da matriz que se encontra a direita. Observe que, na definição a seguir, o produto AB só existe, pois a matriz A possui *n* colunas e a matriz B *n* linhas:

> Das duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxp}$ chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{mxp}$ tal que
>
> $$c_{ij} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \cdots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$$
>
> Para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq p$
>
> (IEZZI, 2012, p. 51)

Por exemplo, sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$ com $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq 3$ e $B = (b_{jk})_{3x4}$ tal que $b_{jk} = j^2 - 3k$ com $1 \leq j \leq 3$ e $1 \leq k \leq 4$.

Veja como calcular esse produto A.B:

Primeiramente deve-se saber quais são os elementos das matrizes A e B que precisam ser calculados. Para isso observa-se o tipo da matriz A, que é 2 x 3, e o tipo da matriz B, que é 3 x 4, assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

Ao calcular esses elementos segundo a lei de formação $a_{ij} = i + 2j$ e $b_{jk} = j^2 - 3k$ obtem-se:

$a_{11} = 1 + 2.1 = 3$ $\quad$ $a_{12} = 1 + 2.2 = 5$ $\quad$ $a_{13} = 1 + 2.3 = 7$

$a_{21} = 2 + 2.1 = 4$ $\quad$ $a_{22} = 2 + 2.2 = 6$ $\quad$ $a_{23} = 2 + 2.3 = 8$

O que resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

$b_{11} = 1^2 + 3.1 = 4$ $\quad$ $b_{21} = 2^2 + 3.1 = 7$ $\quad$ $b_{31} = 3^2 + 3.1 = 12$

$b_{12} = 1^2 + 3.2 = 7$ $\quad$ $b_{22} = 2^2 + 3.2 = 10$ $\quad$ $b_{32} = 3^2 + 3.2 = 15$

$b_{13} = 1^2 + 3.3 = 10$ $\quad$ $b_{23} = 2^2 + 3.3 = 13$ $\quad$ $b_{33} = 3^2 + 3.3 = 18$

$b_{14} = 1^2 + 3.4 = 13$ $\quad$ $b_{24} = 2^2 + 3.4 = 16$ $\quad$ $b_{34} = 3^2 + 3.4 = 21$

O que resulta na matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & 13 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 12 & 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$

O produto A.B será dado pela matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 3.4 + 5.7 + 7.12 & 3.7 + 5.10 + 7.15 & 3.10 + 5.13 + 7.18 & 3.13 + 5.16 + 7.21 \\ 4.4 + 6.7 + 8.12 & 4.7 + 6.10 + 8.15 & 4.10 + 6.13 + 8.18 & 4.13 + 6.16 + 8.21 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 + 35 + 84 & 21 + 50 + 105 & 30 + 65 + 126 & 39 + 80 + 147 \\ 16 + 42 + 96 & 28 + 60 + 120 & 40 + 78 + 144 & 52 + 96 + 168 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 131 & 176 & 221 & 266 \\ 154 & 208 & 262 & 316 \end{bmatrix}$$

3.2.4 INVERSA DE UMA MATRIZES

A inversa de uma matriz não é uma operação tão simples como a operação com números reais, pois não existe a divisão de matrizes. Sabe-se também que nem todas as matrizes possuem inversa.

> Dada uma matriz quadrada *A*, de ordem *n*, se *X* é uma matriz tal que $AX = I_n$ e $XA = I_n$, então *X* é denominada **matriz inversa** de *A* e é indicada por A^{-1}. (DANTE, 2014, p. 96)

Quando uma matriz quadrada de ordem *n* admite inversa, dizemos que ela é invertível.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ admite inversa e esta é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, pois:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1 & 1/2 - 1/2 \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

3.3 ASSOCIANDO PONTOS COORDENADOS À MATRIZES

Nesse tópico o objetivo é mostrar que toda figura geométrica, de qualquer dimensão, por ser composta por pontos, os quais podem ser associados à uma matriz, onde o(s) elemento(s) dessa será(ão) dado(s) pela(s) coordenada(s) do(s) ponto(s).

3.3.1 PONTOS SOBRE O EIXO REAL E MATRIZES

O eixo real tem origem no número zero, é formado pelos números reais onde cada número é representado por um ponto. Esses pontos são igualmente espaçados obedecendo ao sentido de crescimento, que é para direita, ou seja, quanto mais a direita o número estiver, maior ele será. Os números negativos localizam-se à esquerda e os números positivos à direita do número zero.

Figura 4 – eixo real

Fonte: Disponível em <http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensmedio/matematica/mod-val-absoluto001.gif> Acesso em setembro 2014

No eixo real os pontos são representados por um único número que indica duas informações, ambas em relação à origem. Uma é o valor absoluto, que é a distância que o ponto se encontra, tomando como unidade de medida o espaço entre dois números consecutivos quaisquer. A outra é a posição em que esse se encontra (direita ou esquerda).

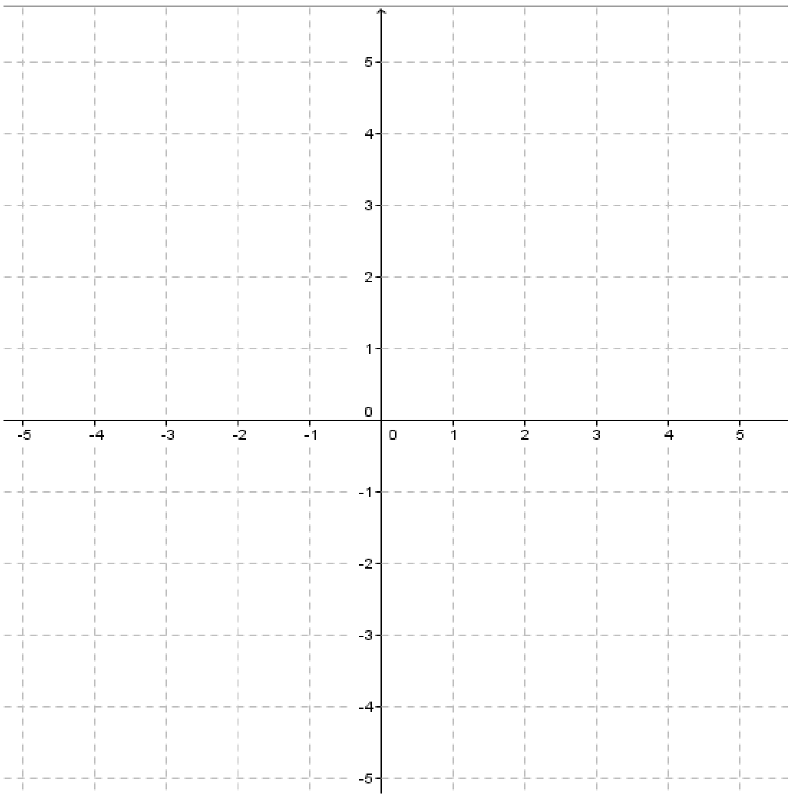
O número real 5 é representado por um ponto que está a 5 unidades de distância, e à direita da origem (número zero). Enquanto o número real – 3 é representado por um ponto que está a 3 unidades de distância e à esquerda da origem (número zero).

Esses números no eixo real podem ser associados à matrizes de ordem 1 x 1, com uma linha e uma coluna. O número real 5 é associado à matriz $P_1 = [5]$. Enquanto o número – 3 é associado à matriz $P_1 = [-3]$.

3.3.2 PONTOS SOBRE O PLANO CARTESIANO E MATRIZES

O plano cartesiano será representado por $\mathbb{R}^2$ com origem no ponto (0, 0). Esse plano é formado por dois eixos que se interceptam perpendicularmente na origem (um é denominado eixo das abscissas ou eixo OX e outro denominado eixo das ordenadas ou eixo OY).

Figura 5 – plano cartesiano



Nesse plano cada ponto é representado por um par ordenado, composto por dois números reais. O primeiro número indica a distância e a posição da origem no eixo das abscissas. E o segundo indica a distância e a posição da origem no eixo das ordenadas, tomando como unidade de medida o espaço entre dois números consecutivos quaisquer. O par ordenado P (figura 6) indica que o ponto está posicionado duas unidades de medida à direita e cinco unidades de medida acima da origem. O par ordenado Q (figura 7) indica que o ponto está posicionado três unidades de medida à esquerda e quatro unidades de medida acima da origem.

Figura 6 – ponto P(2, 5)

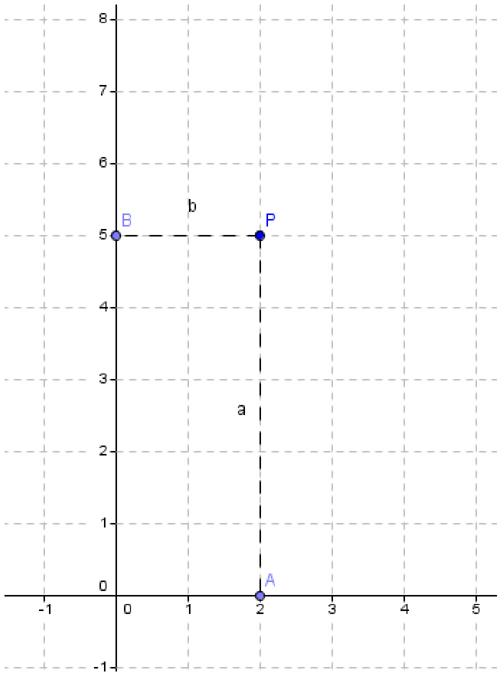
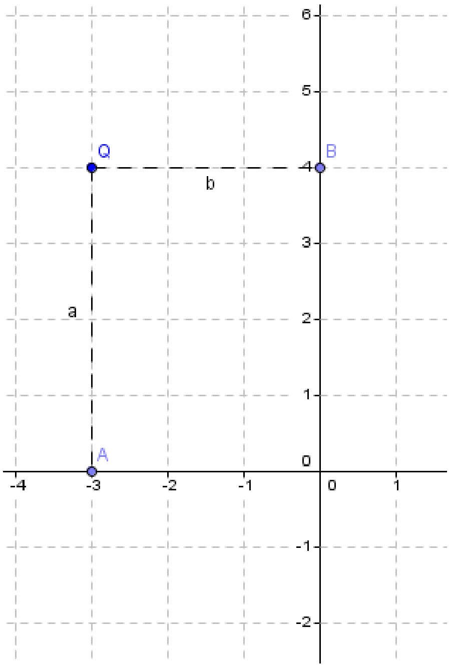


Figura 7 – ponto Q(– 3, 4)

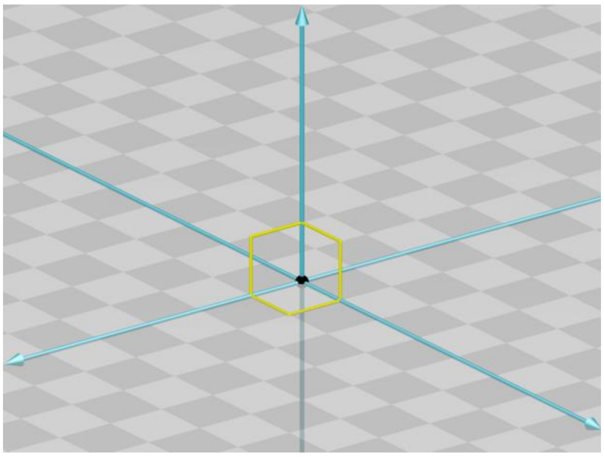


Esses pontos do plano cartesiano podem ser associados à matrizes de ordem 2 x 1, com duas linhas e uma coluna. O ponto de coordenadas P(2, 5) é associado à matriz $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Enquanto o ponto de coordenadas Q(– 3, 4) é associado à matriz $Q_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3.3.3 PONTOS SOBRE O ESPAÇO TRIDIMENSIONAL E MATRIZES

O espaço tridimensional será representado por $\mathbb{R}^3$com origem no ponto (0, 0, 0). Esse espaço é formado por três eixos, eixo OX, eixo OY e eixo OZ, que se interceptam perpendicularmente.

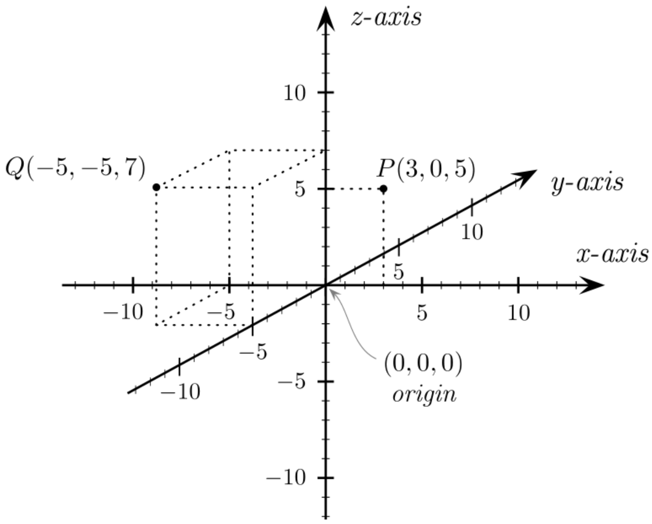
Figura 8 – Espaço tridimensional



Fonte: PROFMAT, MA23 geometria analítica, unidade 13

No espaço tridimensional cada ponto é representado por uma terna ordenada, composto por três números reais. O primeiro número indica a distância e a posição da origem no eixo OX. O segundo indica a distância e a posição da origem no eixo OY. O terceiro indica a distância e a posição da origem no eixo OZ. Todos estes tomando como unidade de medida o espaço entre dois números consecutivos quaisquer em qualquer um dos eixos. A terna ordenada Q(– 5, – 5, 7) indica que o ponto está posicionado cinco unidades de medida em relação à origem no sentido do eixo OX, cinco unidades de medida em relação à origem no sentido do eixo OY e 7 unidades de medida em relação à origem no sentido do eixo OZ.

Figura 9 – Pontos no espaço



Fonte: Disponivel em <http://wikipedia/commons/thumb/1/15/Cartesian_coordinates_3D.svg/800px-Cartesian_coordinates_3D.svg.png> Acesso agosto 2014

Esses pontos do espaço tridimensional podem ser associados à matrizes de ordem 3 x 1, com três linhas e uma coluna. O ponto de coordenadas Q(– 5, – 5, 7) pode ser associado à matriz $Q_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

3.3.4 PONTOS SOBRE O ESPAÇO DE N DIMENSÕES E MATRIZES

Observa-se nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e em 3.3.3 que os pontos com uma, duas ou três coordenadas representadas por números reais podem ser associados à matrizes colunas, onde o número de linhas é dado pelo número de coordenadas do pontos. De maneira análoga, podemos generalizar tal associação a um espaço com n dimensões. Dessa forma a matriz associada ao ponto com n coordenadas reais seria uma matriz com n linhas e uma coluna.

Seja o ponto P representado num espaço de n dimensões. Desta forma o mesmo terá n coordenadas e será dado por:

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ com } x_i \in \mathbb{R};\ \forall\, i, n \in \mathbb{N}\ e\ 1 \leq i \leq n$$

Esse ponto P pode ser associado à matriz coluna $M_{nx1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ com $a_{i1} \in \mathbb{R};\ \forall\, i, n \in \mathbb{N}\ e\ 1 \leq i \leq n$ de tal forma que $x_i = a_{i1}$.

3.3.5 POLÍGONOS NO $\mathbb{R}^2$ E MATRIZES

Como é possível associar pontos coordenados à matrizes, torna-se imediata a possibilidade de associar figuras compostas por pontos à matrizes.

Seja um triângulo de vértices A, B e C. O ponto de coordenadas A(x_A, y_A) é associado à matriz $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$, o ponto de coordenadas B(x_B, y_B) é associado à matriz $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ e o ponto C(x_C, y_C) à matriz $C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix};\ \forall\, x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C \in \mathbb{R}$.

Para associar esse triângulo à uma única matriz, pode-se usar a matriz:

$$P_{2x3} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}$$

Como o triângulo possui três vértices, a matriz associada à ele foi do tipo 2 x 3. Um polígono de n vértices no $\mathbb{R}^2$, será associado à uma matriz do tipo 2 x n, $\forall\, n \in \mathbb{N};\ n \geq 3$.

$$P_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

Onde, o número de linhas é dois, pois cada vértice possui duas coordenadas, e o número de colunas será dado pelo número de vértices (n) do polígono.

3.4 TRANSLAÇÃO, ROTAÇÃO E ESCALA DE FIGURAS USANDO OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

A sociedade atual cada vez mais valoriza o tratamento e a qualidade de imagens de diversas formas com diferentes meios de saídas (recursos multimídias) como, fotografias digitais, imagens em aparelhos televisores, telas de computadores, em aparelhos de celular e outros. Sabe-se que um ponto pode ser associado à uma matriz coluna, e que toda e qualquer figura é composta por pontos.

Podem-se mudar essas figuras usando operações entre matrizes. As possibilidades de mudança de uma figura qualquer são diversas. Algumas dessas mudanças são possíveis aplicando operações entre matrizes como multiplicação por escalar, adição e multiplicação entre matrizes. As mudanças que serão tratadas nesse trabalho são: translação, escala (ampliação e redução) e rotação.

3.4.1 A TRANSLAÇÃO DE UM PONTO NA RETA REAL

A translação de um ponto sobre a reta real é uma mudança bem simples e de fácil compreensão. Porém deve-se observar como se procede para generalizar tal mudança em um espaço de n dimensões. Como a reta real é unidimensional e um ponto qualquer sobre ela é representado por um único número, então para transladar um ponto basta fazer uma adição simples. Tem-se nesse caso duas possíveis mudanças, onde deve-se adicionar um número real positivo, se o objetivo for transladar o ponto para a direita de sua posição inicial ou somar um número real negativo se o objetivo for transladar o mesmo para a esquerda de sua posição inicial. Isso se deve ao fato de que nesse eixo têm-se duas possibilidades de deslocamento (sentido positivo ou negativo).

Seja um ponto P de coordenada x sobre a reta real, ou seja, o ponto P é denotado por:

$$P = (x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

A matriz associada ao ponto P será dada por:

$$P_1 = [x]$$

Seja T_1 a matriz de translação de um ponto qualquer sobre a reta real. Essa matriz T_1 será do tipo 1 x 1 e denotada por:

$$T_1 = [k];\ \forall\ k \in \mathbb{R}_+^*$$

Para transladar o ponto P, sobre a reta real, k unidades para a direita, a partir da posição inicialmente ocupada, deve-se adicionar à matriz P_1, a matriz T_1, obtendo:

$$P_1 + T_1 = [x] + [k] = [x + k] = P_1{}'$$

Para transladar o ponto P, sobre a reta real, k unidades para a esquerda, a partir da posição inicialmente ocupada, deve-se adicionar à matriz P_1, a matriz oposta de T_1, representada por $-T_1$, obtendo:

$$P_1 + (-T_1) = [x] + [-k] = [x + (-k)] = [x - k] = P_1{}''$$

Onde as matrizes $P_1{}'$ e $P_1{}''$ representam as novas posições do ponto após as translações.

3.4.2 A TRANSLAÇÃO DE UM PONTO NO PLANO CARTESIANO

Para transladar um ponto sobre o plano cartesiano, deve-se proceder de maneira análoga ao eixo real. Um ponto P qualquer pode ser transladado de quatro maneiras distintas, pois o plano cartesiano por ser bidimensional é subdividido em quatro quadrantes. Isso se deve ao fato de que são dois eixos e sobre cada um deles temos duas possibilidades de deslocamento (sentido positivo ou negativo).

Seja um ponto P de coordenadas reais x e y sobre o plano cartesiano, ou seja, o ponto P é denotado por:

$$P = (x, y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

A matriz associada ao ponto P será dada por:

$$P_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Seja T_2 a matriz de translação de um ponto qualquer sobre o plano cartesiano. Essa matriz T_2 será do tipo 2 x 1 e denotada por:

$$T_2 = \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix};\ \forall\ k, p \in \mathbb{R}^*$$

Onde k indica o translado/deslocamento no sentido do eixo das abscissas (eixo OX) e p indica o translado/deslocamento no sentido do eixo das ordenadas (eixo OY). Se $k > 0$ o deslocamento será para a direita e se $k < 0$ o deslocamento será para a esquerda. Se $p > 0$ o deslocamento será para cima e se $p < 0$ o deslocamento será para baixo.

Para transladar o ponto P, sobre o plano cartesiano, k unidades no sentido do eixo das abscissas (eixo OX) para a direita, e p unidades no sentido do eixo das ordenadas (eixo OY) para cima, ambos a partir da posição inicialmente ocupada, deve-se adicionar à matriz P_2, a matriz T_2, tomando k e p reais positivos, obtendo:

$$P_2 + T_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + k \\ y + p \end{bmatrix} = P_2{'}$$

Onde a matriz $P_2{'}$ representa a nova posição (primeiro quadrante) do ponto após a translação. Para obter um deslocamento na direção de outro quadrante, basta efetuar o cálculo de maneira análoga ao exposto acima, tomando $k < 0$ e/ou $p < 0$.

3.4.3 A TRANSLAÇÃO DE UM PONTO NO $\mathbb{R}^3$

Um ponto P qualquer no $\mathbb{R}^3$ pode ser transladado de oito maneiras distintas, pois o espaço tridimensional é subdividido em oito octantes. Isso se deve ao fato de que são três eixos e sobre cada um deles temos duas possibilidades de deslocamento (sentido positivo ou negativo).

Seja um ponto P de coordenadas reais x, y e z sobre o espaço, ou seja, o ponto P é denotado por:

$$P = (x, y, z)\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$$

A matriz associada ao ponto P será dada por:

$$P_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Seja T_3 a matriz de translação de um ponto qualquer sobre o espaço. Essa matriz T_3 será do tipo 3 x 1 e denotada por:

$$T_3 = \begin{bmatrix} k \\ p \\ r \end{bmatrix};\ \forall\ k, p, r \in \mathbb{R}^*$$

Onde k indica o translado/deslocamento no sentido do eixo OX, p indica o translado/deslocamento no sentido do eixo OY e r indica o translado/deslocamento no sentido do eixo OZ.

Para transladar o ponto P, sobre o espaço, k unidades no sentido do eixo OX, p unidades no sentido do eixo OY e r unidades no sentido do eixo OZ, ambos a partir da posição inicialmente ocupada, deve-se adicionar à matriz P, a matriz T_3, tomando k, p e r reais, obtendo:

$$P_3 + T_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + k \\ y + p \\ z + r \end{bmatrix} = P_3{}'$$

Onde a matriz $P_3{}'$ representa a nova posição do ponto após a translação.

3.4.4 A TRANSLAÇÃO DE UM POLÍGONO NO PLANO CARTESIANO

Para transladar um polígono no $\mathbb{R}^2$, sem alterar a forma original, é necessário que as matrizes associadas aos vértices sejam adicionadas à matriz $T_2 = \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix}$ para os mesmos $k, p \in \mathbb{R}^*$.

Seja P o polígono de n vértices A, B, ..., N. O ponto de coordenadas $A(x_A,\ y_A)$ é associado à matriz $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$, o ponto $B(x_B,\ y_B)$ é associado à matriz $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$, ... e o ponto $N(x_N,\ y_N)$ à matriz $N = \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \end{bmatrix}$; $\forall\, x_A, x_B, \dots, x_N, y_A, y_B, \dots, y_N \in \mathbb{R}$. Esse polígono pode ser transladado de duas maneiras distintas:

- Transladar cada ponto separadamente somando as n matrizes à matriz T_2:

$$A + T_2 = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + k \\ y_A + p \end{bmatrix} = A'$$

$$B + T_2 = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B + k \\ y_B + p \end{bmatrix} = B'$$

$$\vdots$$

$$N + T_2 = \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N + k \\ y_N + p \end{bmatrix} = N'$$

Onde as matrizes A´, B´, ..., C´ representam as novas posições dos vértices A, B, ..., N após a translação e o polígono formado por esses pontos a nova posição do polígono P.

- Transladar todo o polígono somando a matriz $P_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix}$ associada a ele com a matriz de translação $T_{2xn} = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ p & p & \cdots & p \end{bmatrix}$:

$$P_{2xn} + T_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ p & p & \cdots & p \end{bmatrix}$$

$$P_{2xn} + T_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A + k & x_B + k & \cdots & x_N + k \\ y_A + p & y_B + p & \cdots & y_N + p \end{bmatrix} = P_{2xn}'$$

Onde a matrizes P_{2xn}´ representa a nova posição do polígono P após a translação.

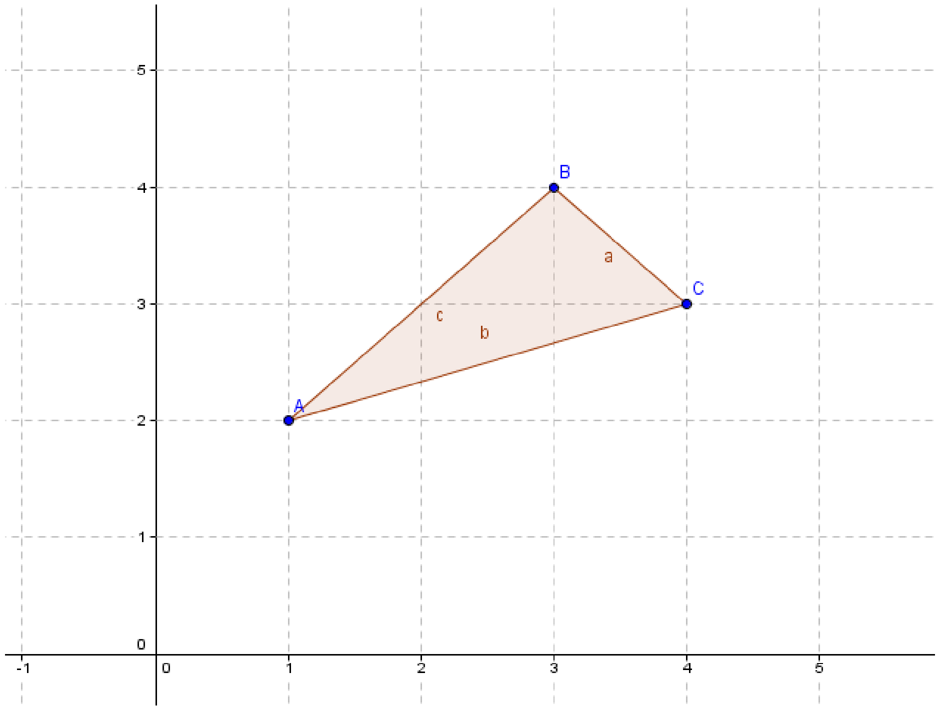
Seja um triângulo de vértices A, B e C associado à matriz $P_{2x3} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix}$. Para transladar o triângulo ABC, sobre o plano cartesiano, k unidades no sentido do eixo das abscissas (eixo OX), e p unidades no sentido do eixo das ordenadas (eixo OY), deve-se adicionar à matriz P_{2x3}, a matriz T_{2x3}, tomando k e p reais, obtendo:

$$P_{2x3} + T_{2x3} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & k & k \\ p & p & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + k & x_B + k & x_C + k \\ y_A + p & y_B + p & y_C + p \end{bmatrix} = P_{2x3}{'}$$

Onde a matriz $P_{2x3}{'}$ representa a nova posição do triângulo após a translação.

Por exemplo, seja o triângulo ABC cujos vértices serão dados pelos pontos A(1, 2), B(3, 4) e C(4, 3) conforme mostra a figura 10 abaixo:

Figura 10 – Triângulo ABC



A matriz associada ao triângulo ABC será dada por $P_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Para transladar esse triângulo duas unidades no sentido positivo do eixo OX e três unidades no sentido positivo do eixo OY, deve-se adicionar à matriz associada ao triângulo a matriz de translação dada por:

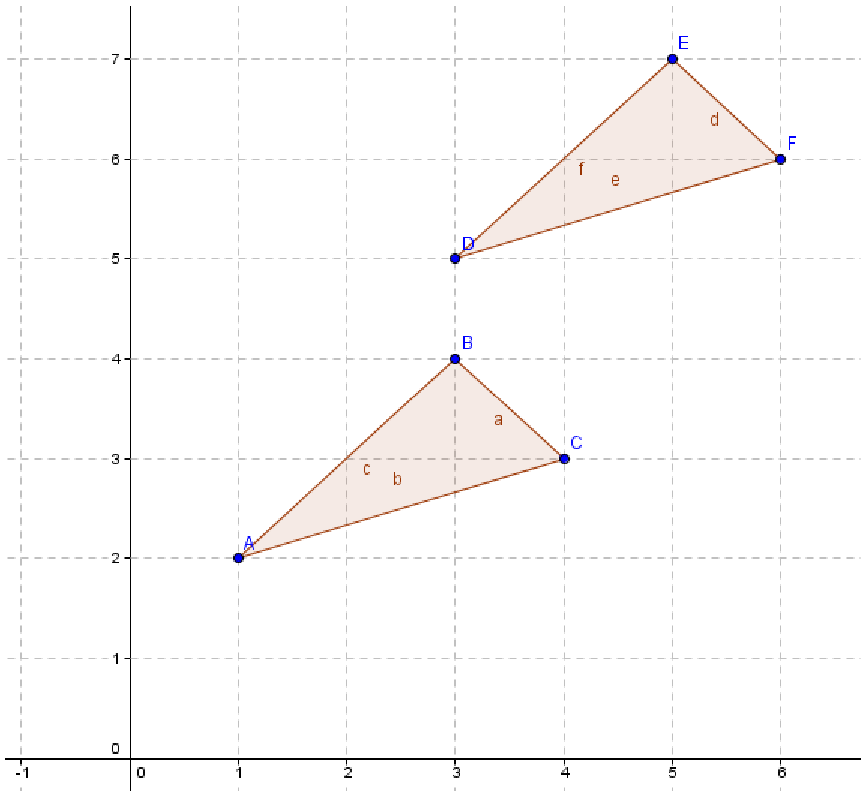
$$T_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

obtendo:

$$P_{2x3} + T_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$P_{2x3} + T_{2x3} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+2 & 4+2 \\ 2+3 & 4+3 & 3+3 \end{bmatrix}$$
$$P_{2x3} + T_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} = P_{2x3}'$$

Onde a matriz P_{2x3}' representa a nova posição do triângulo após a translação. Sendo seus vértices representados pelos pontos D, E e F conforme a figura 5.2

Figura 11 – Triângulo ABC transladado



3.4.5 A ESCALA (AMPLIAÇÃO E REDUÇÃO) DE UM POLÍGONO NO PLANO CARTESIANO

Ao se realizar uma ampliação ou uma redução de um polígono qualquer em um plano cartesiano, deve-se aumentar ou reduzir os lados desse polígono na mesma proporção. Desta forma o novo polígono será considerado semelhante ao polígono original. É importante lembrar que polígonos semelhantes possuem os mesmos ângulos internos e as medidas dos lados proporcionais ao polígono inicial. Se dobrar a medida de um lado, deve-se também dobrar todas as medidas dos outros lados. Se reduzir a terça parte a medida de um lado, deve-se também reduzir a terça parte todos os outros lados desse polígono.

Para obter uma escala de um polígono qualquer no plano cartesiano, deve-se multiplicar a matriz $P_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix}$, associada à ele pelo escalar $k \in \mathbb{R}_+^*$

$$k.P_{2xn} = k.\begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$
$$k.P_{2xn} = \begin{bmatrix} k.x_A & k.x_B & \cdots & k.x_N \\ k.y_A & k.y_B & \cdots & k.y_N \end{bmatrix} = P_{2xn}{}'$$

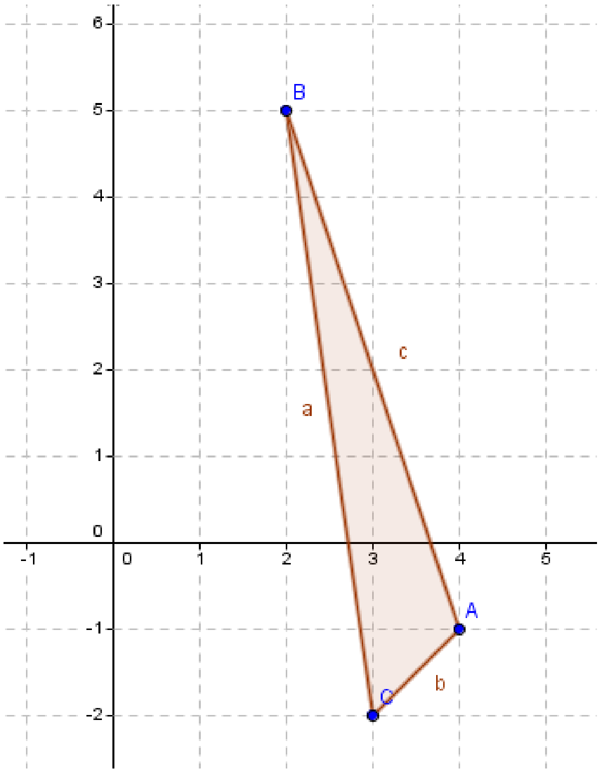
De tal forma que:

- para uma ampliação, deve-se tomar k > 1;
- para uma redução deve-se ter 0 < k < 1.

Onde a matrizes $P_{2xn}{}'$ representa o polígono após a ampliação ou redução.

Seja um triângulo de vértices sobre os pontos A(4, – 1), B(2, 5) e C(3, – 2) ilustrado na figura 12 abaixo:

Figura 12 – Triângulo ABC



Para ampliar o triângulo ABC em 100%, ou seja, dobrar todas as medidas de seus lados, deve-se inicialmente analisar a matriz associada à esse triângulo. A mesma será dada por:

$$P_{2x3} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para dobrar as medidas dos lados do triângulo ABC deve-se tomar k = 2 e em seguida multiplicá-lo pela matriz associada P_{2x3}.

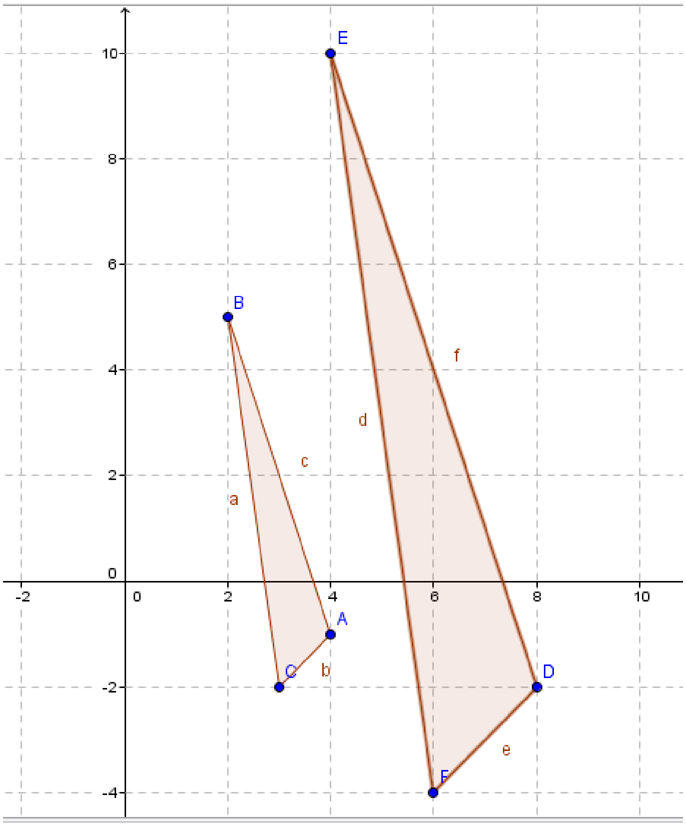
$$2.P_{2x3} = 2.\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 2.2 & 2.3 \\ 2.(-1) & 2.5 & 2.(-2) \end{bmatrix}$$

$$2.P_{2x3} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & -4 \end{bmatrix} = P_{2x3}'$$

Onde P_{2x3}' representa a matriz associada ao triângulo após a ampliação de 100%

O novo triângulo será constituído pelos vértices D(8, – 2), E(4, 10) e F(6, – 4) conforme a figura 13 a seguir:

Figura 13 – Triângulo ABC ampliado

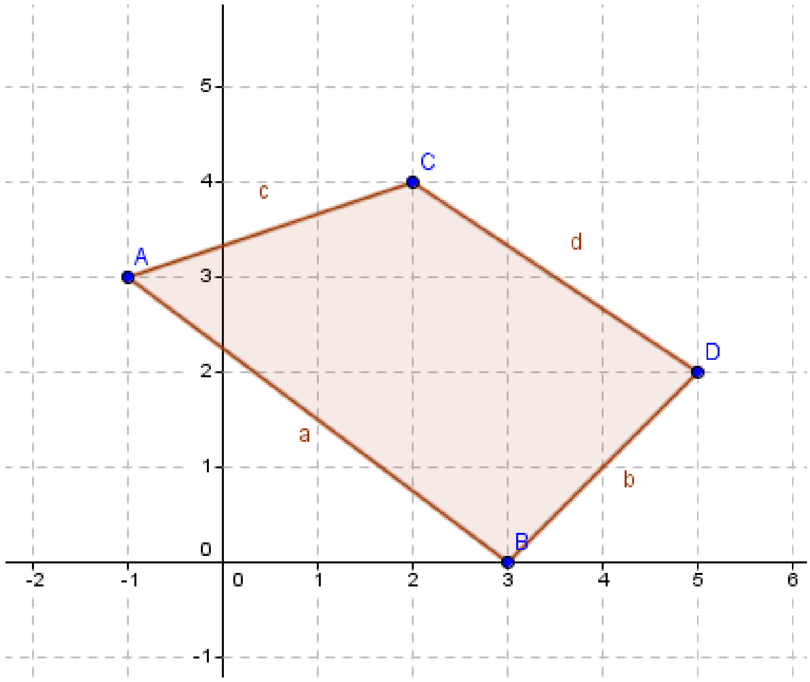


No triângulo DEF pode-se observar que DE = 2.AB, EF = 2.BC e DF = 2. AC e consequentemente o triângulo DEF representa uma ampliação do triângulo ABC em 100%.

Para reduzir um polígono, deve-se reduzir todas as medidas dos lados desse polígono na mesma proporção, multiplicando a matriz associada a este polígono por um número $k \in \mathbb{R};\ 0 < k < 1$.

Seja o quadrilátero limitado pelos vértices A(– 1, 3), B(3, 0), C(2, 4) e D(5, 2) conforme mostra a figura 14 abaixo:

Figura 14 – Quadrilátero ABCD



Para reduzir o quadrilátero ABCD em 75%, ou seja, reduzir todas as medidas de seus lados à quarta parte, deve-se inicialmente analisar a matriz associada à esse quadrilátero. A mesma será dada por:

$$P_{2x4} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Para reduzir as medidas dos lados do quadrilátero ABCD deve-se tomar k = 1/4 e em seguida multiplicá-lo pela matriz P_4.

$$\frac{1}{4}.P_{2x4} = \frac{1}{4}.\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}.(-1) & \frac{1}{4}.3 & \frac{1}{4}.2 & \frac{1}{4}.5 \\ \frac{1}{4}.3 & \frac{1}{4}.0 & \frac{1}{4}.4 & \frac{1}{4}.2 \end{bmatrix}$$

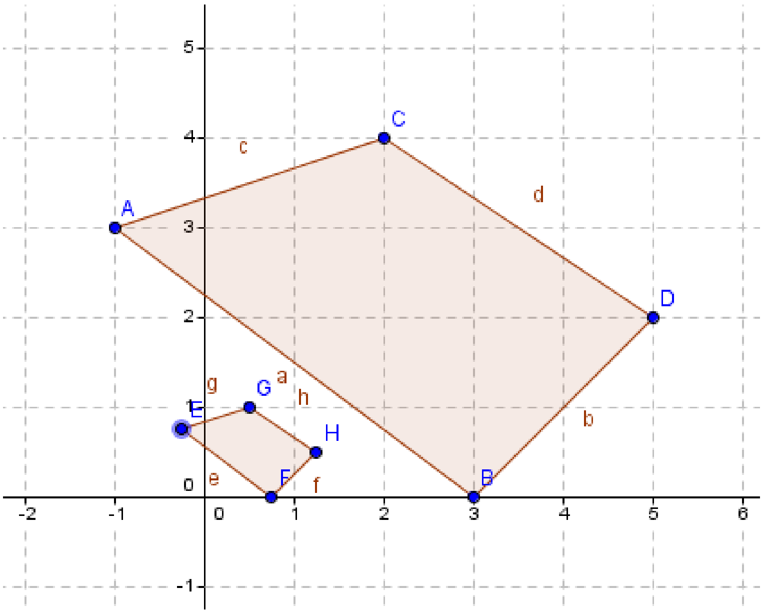
$$\frac{1}{4}.P_{2x4} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P_{2x4}'$$

Onde P_{2x4}' representa a matriz associada ao quadrilátero após a redução de 75%

O novo quadrilátero será constituído pelos vértices

$E\left(\frac{-1}{4},\frac{3}{4}\right), F\left(\frac{3}{4},0\right), G\left(\frac{1}{2},1\right)\ e\ H\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right)$ conforme a figura 15 a seguir:

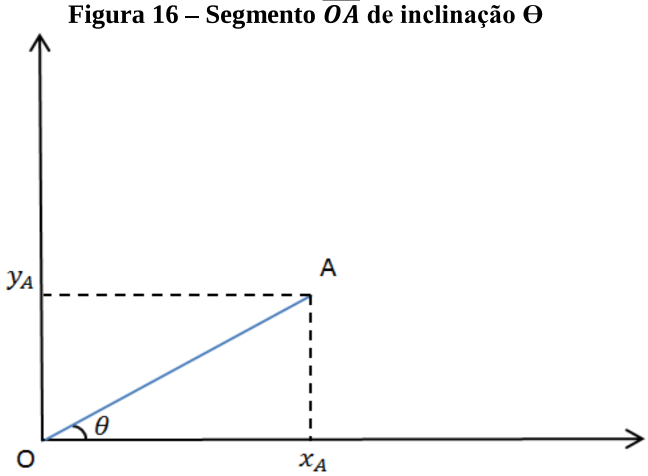
Figura 15 – Quadrilátero ABCD reduzido



3.4.6 ROTAÇÃO DE UM PONTO NO PLANO CARTESIANO

Um ponto A(x_A, y_A) no plano cartesiano encontra-se à uma distância da origem $O(0,0)$ dada pelo segmento $\overline{OA}$, esse forma com o eixo horizontal (eixo das abscissas) um ângulo de medida θ conforme a figura:

Figura 16 – Segmento $\overline{OA}$ de inclinação Θ



Onde:

$$\overline{OA} = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}$$

Das relações trigonométricas no triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OA}$, obtém-se:

$$cos\theta = \frac{x_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}} \quad => \quad x_A = cos\theta.\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2} \qquad \text{e}$$

$$sen\theta = \frac{y_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}} \quad => \quad y_A = sen\theta.\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}$$

Ao realizar a rotação no sentido anti-horário do segmento $\overline{OA}$ sob um ângulo de medida α em relação à origem, esse passa a ocupar a posição A´(x´$_A$, y´$_A$), de tal forma que o segmento $\overline{OA'}$ forma um ângulo de medida $\theta + \alpha$ com o eixo horizontal (figura 17).

A distância do ponto A´ à origem é dada por:

$$\overline{OA'} = \sqrt{(x'_A - x_O)^2 + (y'_A - y_O)^2} = \sqrt{{x'_A}^2 + {y'_A}^2}$$

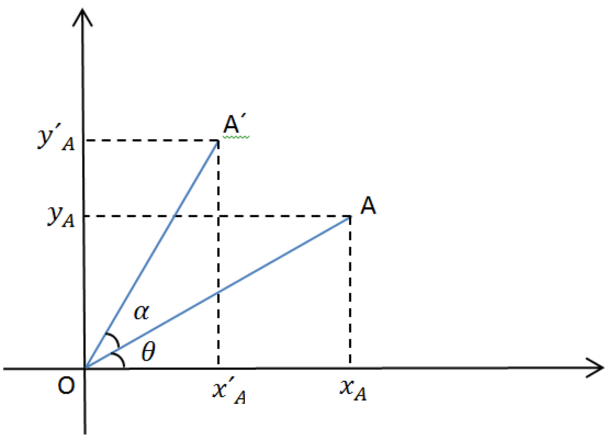
Mesmo que as coordenadas dos pontos A e A´ sejam diferentes, tem-se que suas distâncias à origem são iguais, ou seja, os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ são congruentes:

$$\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$$

Ou ainda:

$$\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2} = \sqrt{{x'_A}^2 + {y'_A}^2}$$

Figura 17 – Ponto A rotacionado um ângulo α



Das relações trigonométricas no triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OA'}$, obtém-se:

$$cos(\theta+\alpha)=\frac{x'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$cos\theta.cos\alpha-sen\theta.sen\alpha=\frac{x'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$\frac{x_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}.cos\alpha-\frac{y_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}.sen\alpha=\frac{x'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$\frac{x_A.cos\alpha-y_A.sen\alpha}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}=\frac{x'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$x'_A=x_A.cos\alpha-y_A.sen\alpha \qquad (1)$$

$$sen(\theta+\alpha)=\frac{y'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$sen\theta.cos\alpha+sen\alpha.cos\theta=\frac{y'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$\frac{y_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}.cos\alpha+sen\alpha.\frac{x_A}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}=\frac{y'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$\frac{y_A.cos\alpha+x_A.sen\alpha}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}}=\frac{y'_A}{\sqrt{{x'_A}^2+{y'_A}^2}}$$

$$y'_A=x_A.sen\alpha+y_A.cos\alpha \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos que as coordenadas do ponto $A'(x'_A, y'_A)$ serão dadas por:

$$A'(x_A.cos\alpha-y_A.sen\alpha\ ,x_A.sen\alpha+y_A.cos\alpha)$$

É possível obter a nova posição de um ponto A no plano cartesiano, após a rotação de um ângulo de medida α, usando a multiplicação de matrizes.

Seja a matriz associada ao ponto A dada por:

$$A_{2x1} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

Seja a matriz associada ao ponto A´ após a rotação de um ângulo de medida α, dada por:

$$A´_{2x1} = \begin{bmatrix} x´_A \\ y´_A \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação (R) que deve ser multiplicada à esquerda pela matriz A_{2x1}, para obter a matriz $A´_{2x1}$ deve ser quadrada de ordem 2, pois:

$$R_{2x2}.A_{2x1} = A´_{2x1}$$

Seja a matriz de rotação de um ângulo α definida por:

$$R_{2x2} = \left(a_{ij}\right)_{2x2}\ \forall\ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ onde } 1 \leq i \leq 2 \text{ e } 1 \leq j \leq 2$$

Para encontrar os elementos da matriz de rotação em função de α, deve-se ter:

$$R.A = A´$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x´_A \\ y´_A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}.x_A + a_{12}.y_A \\ a_{21}.x_A + a_{22}.y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha \\ x_A.sen\alpha + y_A.cos\alpha \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, pode-se concluir que:

$$\begin{cases} a_{11}.x_A + a_{12}.y_A = x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha \\ a_{21}.x_A + a_{22}.y_A = x_A.sen\alpha + y_A.cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - cos\alpha).x_A + (a_{12} + sen\alpha).y_A = 0 \\ (a_{21} - sen\alpha).x_A + (a_{22} - cos\alpha).y_A = 0 \end{cases}$$

Supondo que $x_A \neq 0$ ou $y_A \neq 0$, deve-se ter:

$$a_{11} - cos\alpha = 0 \quad => \quad a_{11} = cos\alpha$$
$$a_{12} + sen\alpha = 0 \quad => \quad a_{12} = -sen\alpha$$
$$a_{21} - sen\alpha = 0 \quad => \quad a_{21} = sen\alpha$$
$$a_{22} - cos\alpha = 0 \quad => \quad a_{22} = cos\alpha$$

Donde se conclui que a matriz de rotação de um ponto A no plano cartesiano sob um ângulo de medida α, é definida por:

$$R_{2x2} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

Para realizar a rotação de $\frac{\pi}{3}\ rad$ no sentido anti-horário do ponto A(6, 2), deve-se tomar $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Obtendo:

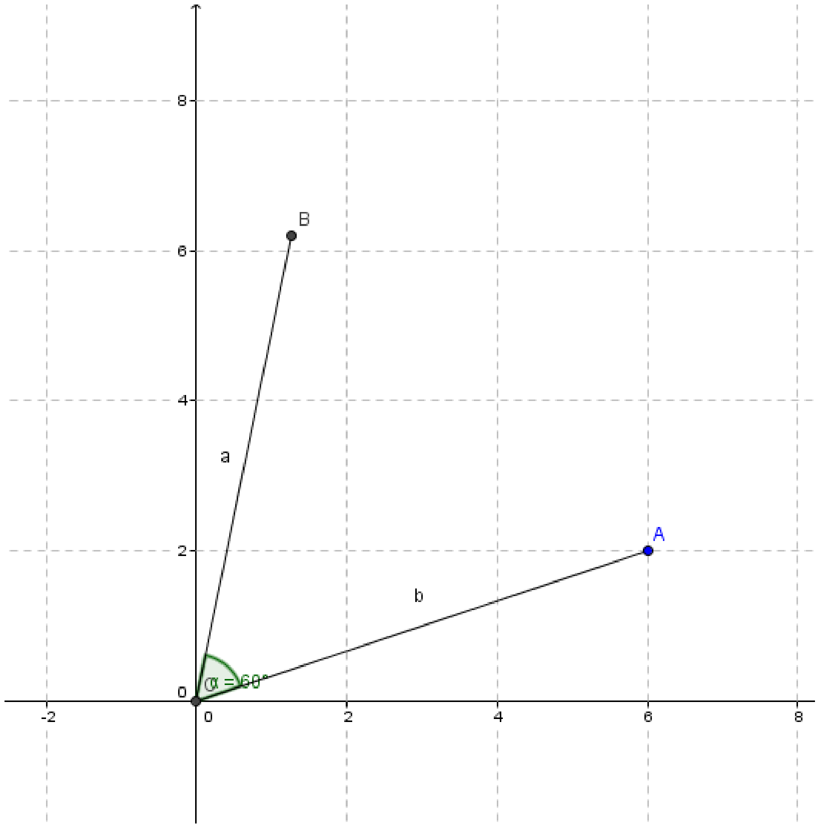
$$\begin{bmatrix} cos(\pi/3) & -sen(\pi/3) \\ sen(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

A figura a seguir mostra a posição do ponto A(6, 2) e do ponto B($3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{3} + 1$), obtido após a rotação, num mesmo plano cartesiano. Observe que o ângulo $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$

Figura 18 – Ponto A rotacionado 60°



3.4.7 ROTAÇÃO DE UM POLÍGONO NO PLANO CARTESIANO

Para realizar a rotação de um ângulo de medida α no sentido anti-horário de um polígono no $\mathbb{R}^2$ deve-se multiplicar a matriz de rotação $R_{2x2} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ pela matriz $P_{2xn} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix}$:

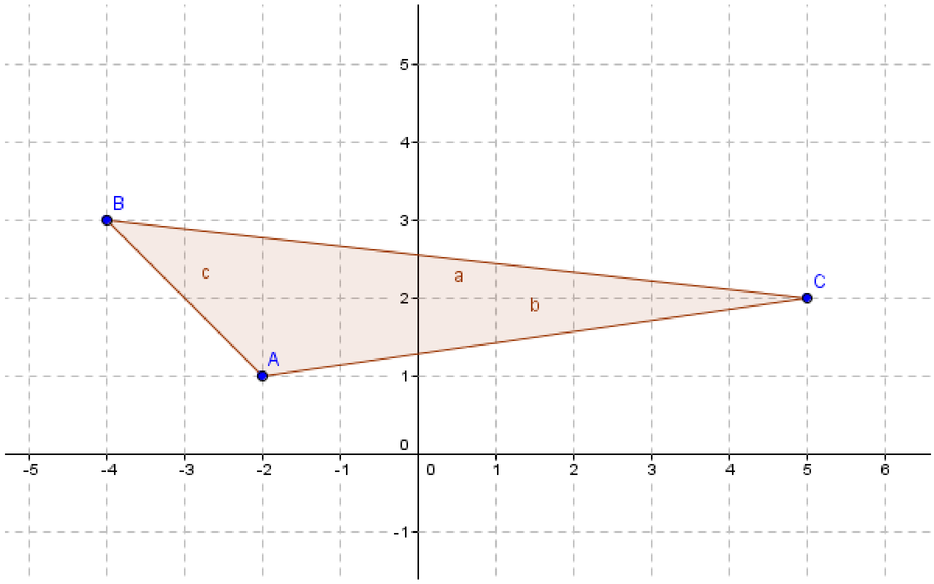
$$R_{2x2}.P_{2xn} = P_{2xn}{}'$$

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_A & x_B & \cdots & x_N \\ y_A & y_B & \cdots & y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A{}' & x_B{}' & \cdots & x_N{}' \\ y_A{}' & y_B{}' & \cdots & y_N{}' \end{bmatrix}$$

Onde $P_{2xn}{}'$ representa a nova posição do polígono após a rotação.

Seja o triângulo limitado pelos vértices A(– 2, 1), B(– 4, 3) e C(5 , 2), representado na figura 19 a seguir:

Figura 19 – Triângulo ABC



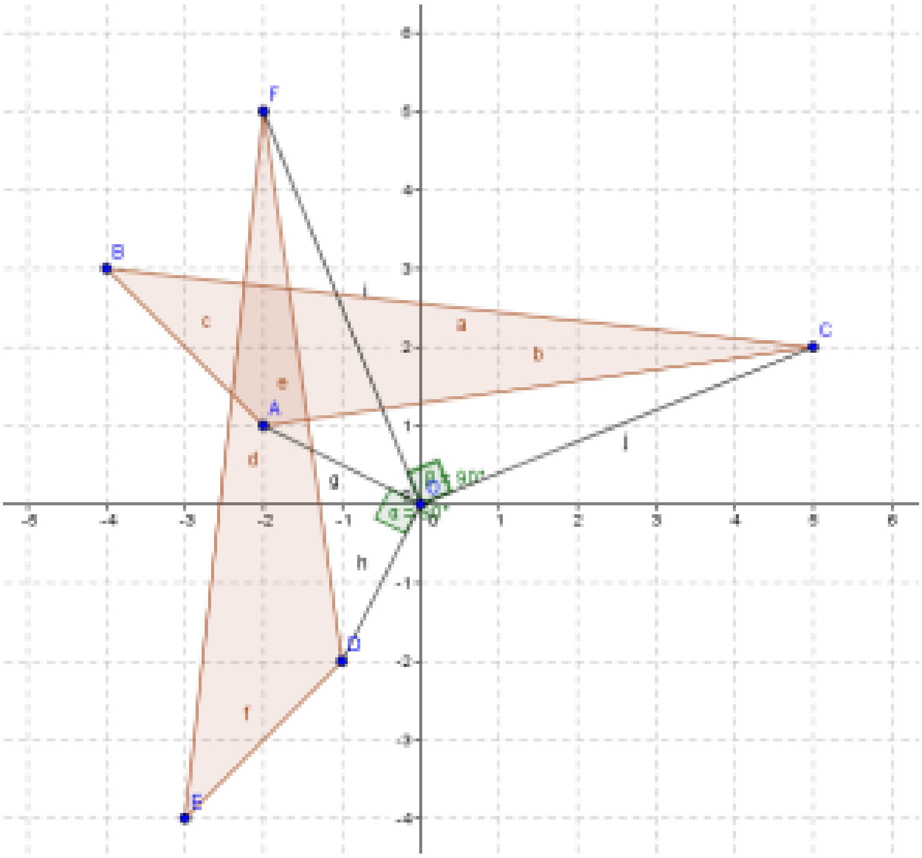
Para realizar a rotação de $\frac{\pi}{2}\ rad$ no sentido anti-horário do triângulo ABC deve-se tomar $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Obtendo:

$$\begin{bmatrix} cos(\pi/2) & -sen(\pi/2) \\ sen(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D & x_E & x_F \\ y_D & y_E & y_F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D & x_E & x_F \\ y_D & y_E & y_F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D & x_E & x_F \\ y_D & y_E & y_F \end{bmatrix}$$

Figura 20 – Triângulo ABC rotacionado 90°



3.5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES

Um sistema de equações lineares é composto por um número finito de equações lineares. O que é uma equação linear?

> De modo geral, denomina-se **equação linear** toda equação que pode ser escrita na forma geral:
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$
>
> na qual:
>
> - $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas;
> - $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados **coeficientes das incógnitas;**
> - **b** é o termo independente. (DANTE, 2014, p. 109)

No ensino médio geralmente as incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ são substituídas por *x*, *y*, *z*, ... Toda equação linear de n incógnitas, com $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, possui infinitas soluções em $\mathbb{R}$. Essas são formadas por uma sequência de n números reais, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, de tal forma que ao serem substituídos pelas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ obtém-se o valor b, ou seja, satisfazem a igualdade proposta pela equação.

Uma equação linear composta apenas por duas incógnitas terá soluções do tipo (α_1, α_2), assim como uma equação linear composta por três incógnitas terá soluções do tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e assim sucessivamente.

> Generalizando, dada a equação linear:
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$
>
> dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação se, e somente se:
>
> $$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$ (DANTE, 2014, p. 110)

Duas equações serão consideradas equivalentes quando tiverem a mesma solução, ou ainda uma for obtida ao multiplicar a outra por um número real $k \neq 0$.

Sejam as equações

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

e

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n = d \qquad (2)$$

(1) e (2) serão equivalentes se, e somente se $c_i = k.a_i$ e $d = k.b$; $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

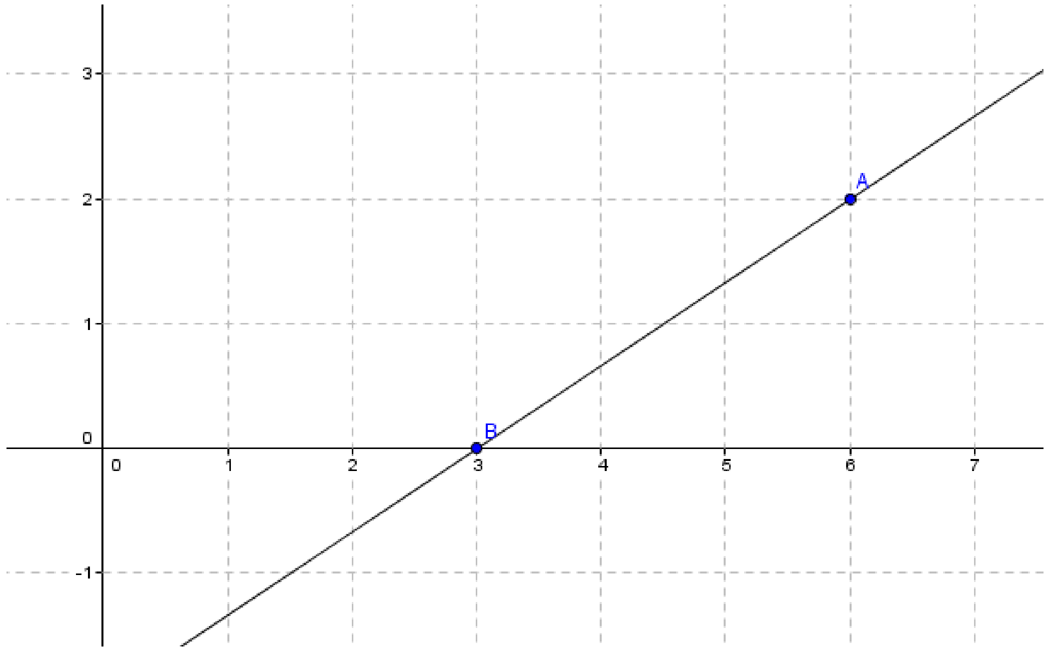
Como todas as equações lineares são do primeiro grau, podem ser representadas por retas e suas soluções por pontos coordenados. Uma equação linear de duas incógnitas por exemplo, pode ser representada por uma reta no plano cartesiano enquanto suas soluções serão associadas a pares ordenados. Sabendo que uma reta contém infinitos pontos, é fácil compreender que a equação linear possui infinitas soluções.

Seja a equação linear de duas incógnitas dada por $2x - 3y = 6$. Uma de suas soluções é dada pelo par ordenado A(6, 2), pois para $x = 6$ e $y = 2$ tem-se:

$$2x - 3y = 2.\mathbf{6} - 3.\mathbf{2} = 12 - 6 = 6$$

Na figura abaixo a reta associada à equação passa pelos pontos A(6, 2) e B(3, 0), ambas são soluções da equação.

Figura 21 – Equação linear no plano

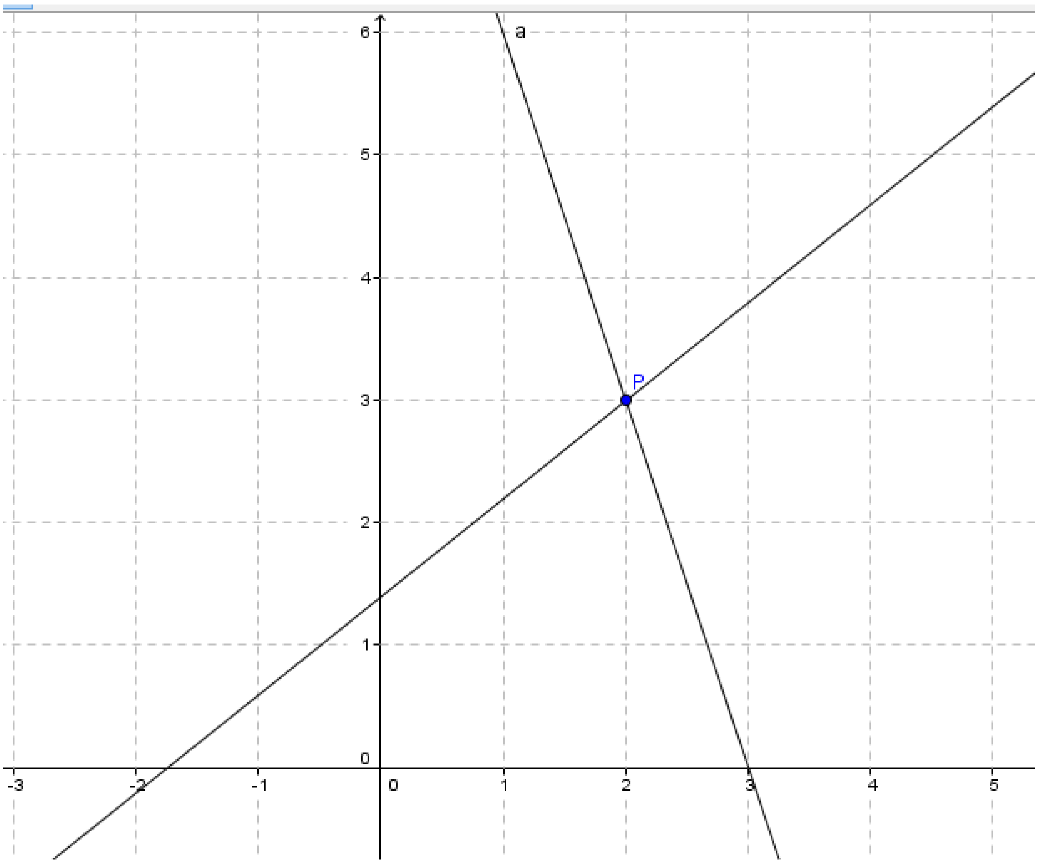


A solução comum entre duas ou mais equações lineares é dada pelo ponto de intersecção das retas associadas a elas. Como por um único ponto passam infinitas retas, um ponto pode ser a solução de infinitas equações lineares. Sejam as equações lineares:

$$3x + y = 9 \qquad \text{e} \qquad -4x + 5y = 7$$

As duas podem ser representadas por retas concorrentes no plano cartesiano. Onde o ponto de intersecção P(2, 3) denota a solução comum das duas equações. Observe a figura 22:

Figura 22 – Intersecção de duas retas



A solução comum entre duas ou mais equações lineares é a solução de um sistema de equações lineares. O que é um sistema de equações lineares?

> Denomina-se **sistema linear** *m* x *n* o conjunto de *m* equações lineares em *n* incógnitas, que pode ser representado assim:
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
>
> Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema. (DANTE, 2014, p. 111)

3.5.1 SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

> Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. (DANTE, 2014, p. 117)

O sistema linear

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -x - 3y = -16 \end{cases} \qquad (1)$$

possui solução (1, 5), pois:

4.**1** – 2.**5** = 4 – 10 = 6 e – **1** – 3.**5** = – 1 – 15 = – 16

Enquanto o sistema linear

$$\begin{cases} 7x + 5y = 32 \\ x + 9y = 46 \end{cases} \qquad (2)$$

também possui solução (1, 5), observe:

7.**1** + 5.**5** = 7 + 25 = 32 e **1** + 9.**5** = 1 + 45 = 46

Assim pode-se concluir que os sistemas lineares (1) e (2) são equivalentes, pois ambos possuem o mesmo conjunto solução dado por (1, 5).

3.5.2 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para classificar um sistema linear é preciso saber o número de soluções. Se um sistema linear tiver uma única solução, o mesmo será classificado como **possível e determinado** (SPD), caso o número de soluções seja infinito, o mesmo será classificado como **possível e indeterminado** (SPI) e caso o sistema não possuir solução alguma, o mesmo será classificado como **impossível** (SI).

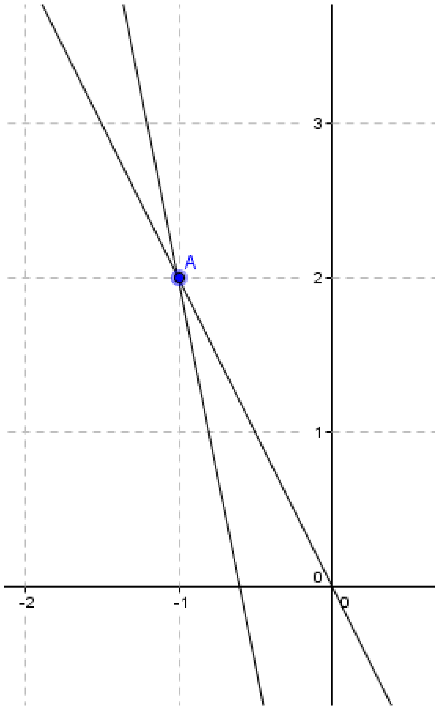
Para determinar a quantidade de soluções é possível escalonar um sistema linear. Porém o objetivo desse trabalho não é mostrar as diferentes maneiras de se resolver um sistema linear. Por isso observe uma maneira prática de classificar um sistema linear observando as retas associadas as equações do sistema num mesmo gráfico. Essa proposta é possível para sistemas lineares com qualquer quantidade de incógnitas, mas para simplificar os exemplos e a representação gráfica, veja como seria para sistemas de duas incógnitas no plano cartesiano.

O sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 0 & (1) \\ 5x + y = -3 & (2) \end{cases}$$

é classificado como SPD, pois as retas associadas as equações (1) e (2) se interceptam num único ponto, conforme a figura 23, mostrando que a solução é única.

Figura 23 – Intersecção de duas retas



O sistema linear

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 & (1) \\ 9x - 6y = 3 & (2) \end{cases}$$

é classificado como SPI, pois as retas associadas as equações (1) e (2) são coincidentes, conforme as figuras 24 e 25. Observe que a equação (2) pode ser obtida fazendo 3.(1), mostrando que essas equações são equivalentes.

Figura 24 – Equação 3x – 2y = 1

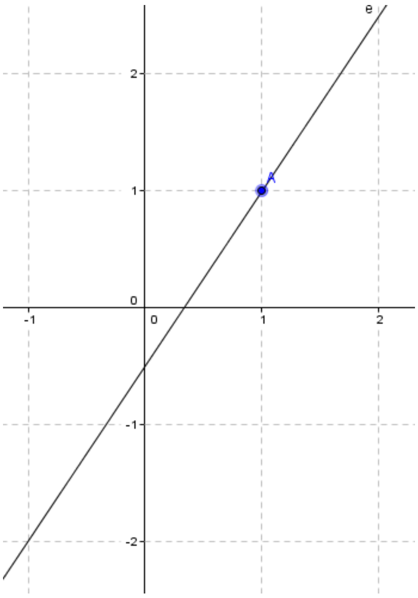
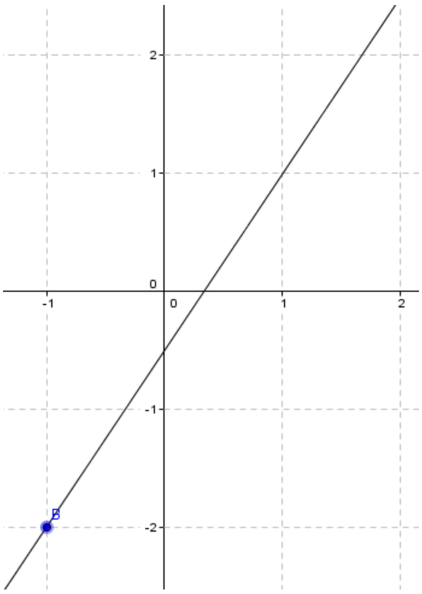


Figura 25 – Equação 9x – 6y = 3

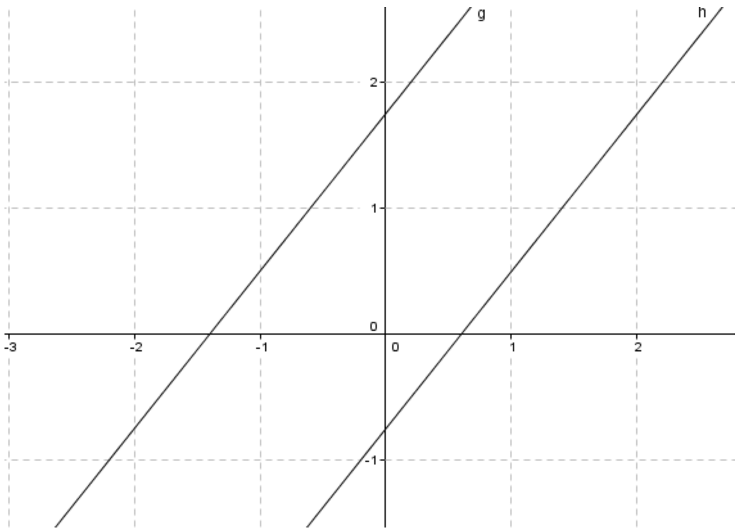


O sistema linear

$$\begin{cases} -5x + 4y = 7 & (1) \\ -5x + 4y = -3 & (2) \end{cases}$$

é classificado como SI, pois as retas associadas as equações (1) e (2) são paralelas, conforme a figura 26, mostrando que não existe solução para esse sistema.

Figura 26 – Retas paralelas



3.5.3 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Um sistema de equações lineares onde os termos independentes de todas as equações lineares são iguais a zero, é classificado como um sistema homogêneo, representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo é classificado como possível, pois este sempre terá no mínimo uma solução, dada por $(0,0,0,\dots,0)$ chamada solução trivial. Se essa for a única solução, o sistema será possível determinado e caso exista outra solução diferente da trivial o sistema será classificado como possível indeterminado.

3.5.4 ASSOCIANDO SISTEMAS LINEARES A MATRIZES

As teorias e os teoremas usados para resolver sistemas lineares estão diretamente ligados às teorias e aos teoremas das matrizes. De fato o estudo desses dois conteúdos não pode ser visto separadamente um do outro.

> Qualquer sistema linear *n* x *n* pode ser escrito como um produto de matrizes. (DANTE, 2014, p. 114)

O sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode ser escrito na forma $A.X = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Quando se escreve um sistema linear do tipo n x n como um produto de matrizes, pode-se resolver esse sistema linear usando a inversa de A.

$$A.X = B \qquad (1)$$

Multiplicando os dois lados de (1) por A^{-1} pela esquerda, obtém-se:

$$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$$

Usando a propriedade associativa do produto de matrizes, segue:

$$(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$$

Sabe-se que o produto de uma matriz A por sua inversa resulta na identidade, logo substituindo o produto $A^{-1}.A$ por I_n, tem-se:

$$I_n.X = A^{-1}.B$$

Como a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, segue:

$$X = A^{-1}.B$$

Onde a matriz X representa a solução do sistema linear.

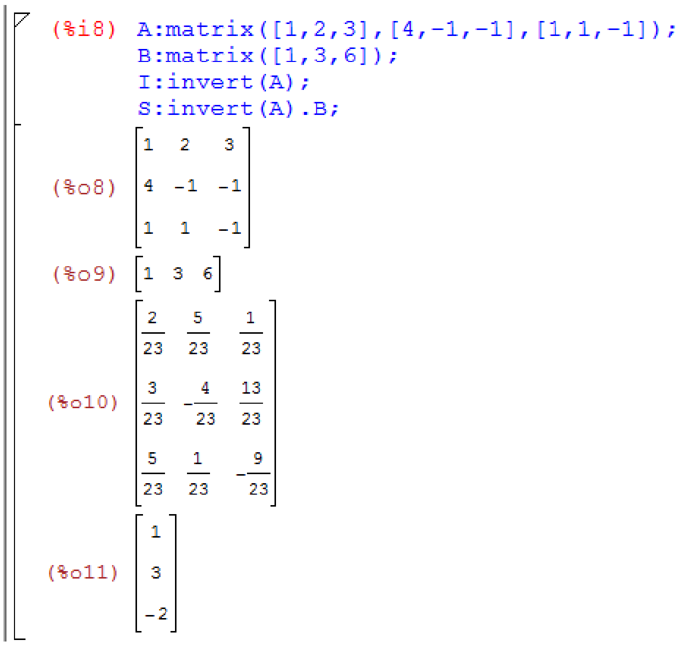
Seja o sistema linear de três incógnitas dado por:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \text{ onde:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para calcular a inversa de A e o produto $X = A^{-1}.B$ pode-se usar o recurso computacional dado pelo software Maxima, que será definido no capítulo seguinte.

Figura 27 – Comando do Maxima



A inversa da matriz A é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{13}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{1}{23} & \frac{-9}{23} \end{bmatrix}$ e o produto $X = A^{-1}.B$ será dado por $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ que é a solução do sistema linear.

4 ALGUNS RECURSOS E COMANDOS DO SOFTWARE MAXIMA

> Maxima é um sistema de álgebra computacional, implementado em Lisp.
>
> Máxima é derivado do sistema Macsyma, desenvolvido no MIT nos anos de 1968 a 1982 como parte do Projeto MAC. MIT remanejou uma cópia do código fonte do Macsyma para o Departamento de Energia em 1982; aquela versão é agora conhecida como Macsyma DOE. Uma cópia do Macsyma DOE foi mantida pelo Professor William F. Chelter da Universidade do Texas de 1982 até sua morte em 2001. Em 1998, Schelter obteve permissão do Departamento de Energia para liberar o código fonte do Macsyma DOE sob Licença Pública GNU, e em 2000 ele iniciou o projeto Maxima no SourceForge *(Repositório de código fonte baseado em Web. Atua como um centro para desenvolvedores gerenciarem projetos livres e de código aberto colaborativamente)* para manter e desenvolver o Macsyma DOE, agora chamado Maxima. (Manual do Maxima, introdução)

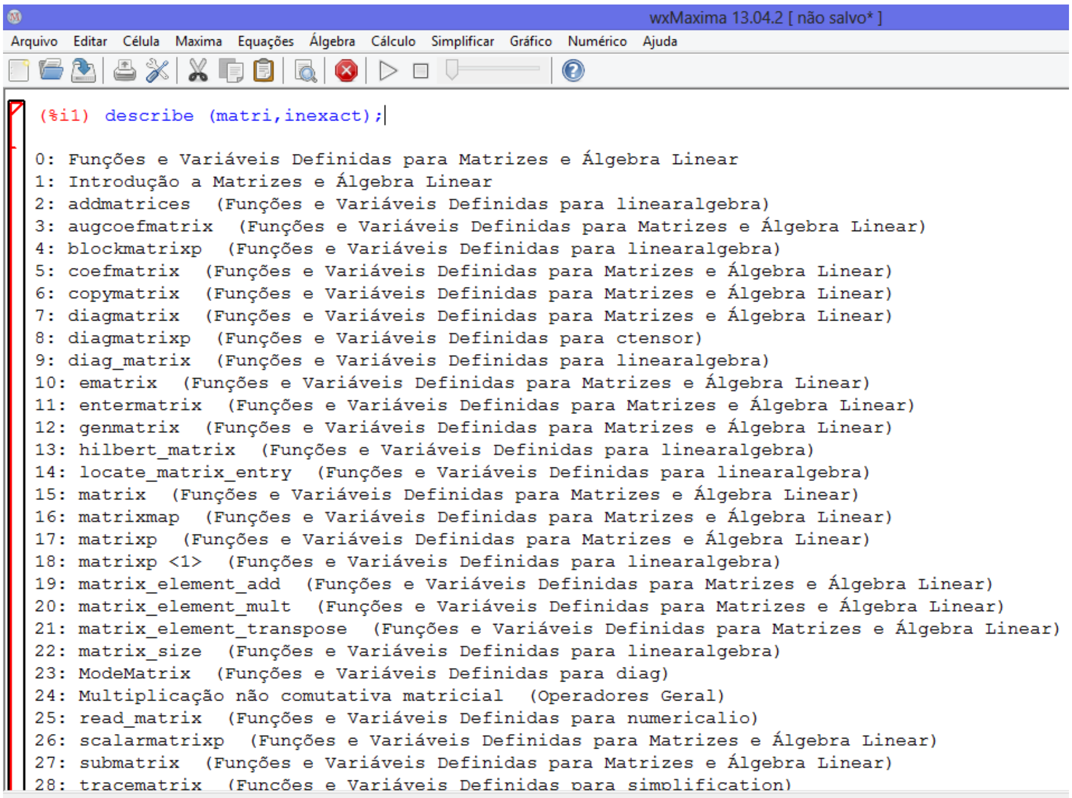
O software é de imensa importância e contribui para o desenvolvimento do conhecimento em diferentes áreas e beneficia o aperfeiçoamento de acadêmicos na área de exatas como ciência da computação, física e principalmente a matemática.

Cada trabalho que é realizado no Maxima, seja ele do mais simples, com um único comando, ou do mais complexo, composto por vários comandos é chamado de sessão. Para começar uma sessão basta digitar no campo de entrada o comando que deseja. Caso queira o resultado em um formato específico, como o Tex por exemplo, pode-se iniciar a sessão digitando o comando que determina o tipo de saída que terá os comandos seguintes daquela sessão. Toda sessão do software deve terminar com a expressão “quit ()” e cada comando (linha) deve terminar com ponto e vírgula. Caso não queira que o resultado de um comando apareça logo em seguida, basta termina-lo com o símbolo $. Esse recurso é usado quando se deseja, posteriormente, o resultado num outro comando.

Através da ferramenta *describe*, abreviada por *?*, que mostra quais os comandos e variáveis que possuem alguma relação com o texto, ou uma parte dele, que você digita, é possível pesquisar quais comandos, na versão que você estiver usando do Maxima, estão disponíveis. Essa é a maneira mais prática para se começar uma sessão.

Por exemplo, se o objetivo é realizar um trabalho, e para isso deve-se usar o conteúdo MATRIZES, deve-se começar o trabalho com o comando *describe* , em seguida escrevendo MATRIZ. Assim o software listará uma sequências com 31 tópicos e comandos que contém a palavra MATRIZ, ou parte dela, em sua escrita.

Figura 28 – Comando describe

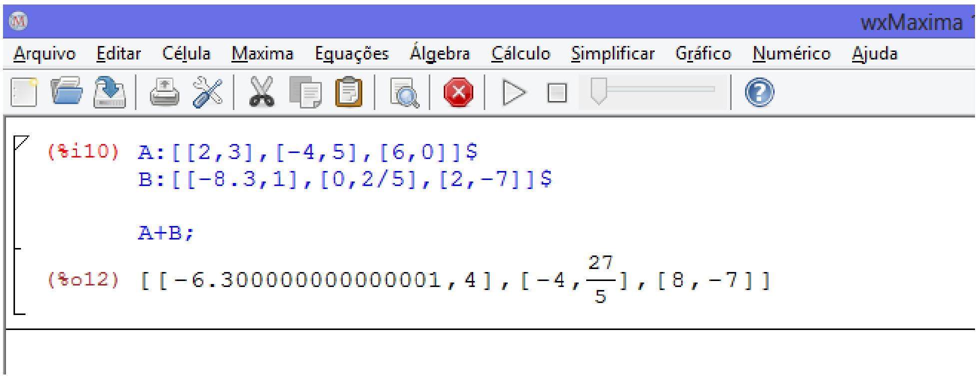


4.1 REPRESENTANDO PONTOS COORDENADOS NO MAXIMA

Para representar uma lista de pontos ou uma lista de grupos de pontos coordenados no software Maxima pode-se digitar a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) dentro de colchetes separando-as por vírgula(s). Para somar duas ou mais listas de pontos é necessário que essas tenham o mesmo número de pontos e esses tenham o mesmo número de coordenadas.

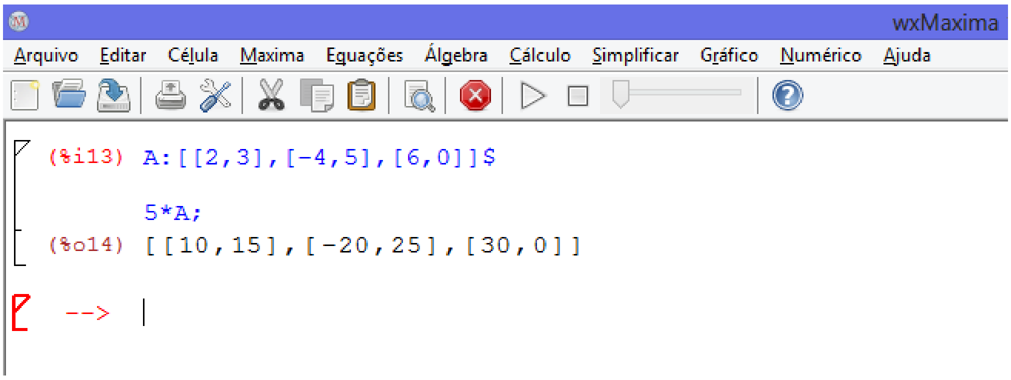
Sejam as listas A e B representadas por três pontos de duas coordenadas cada um.

Figura 29 – Adição de listas no Maxima



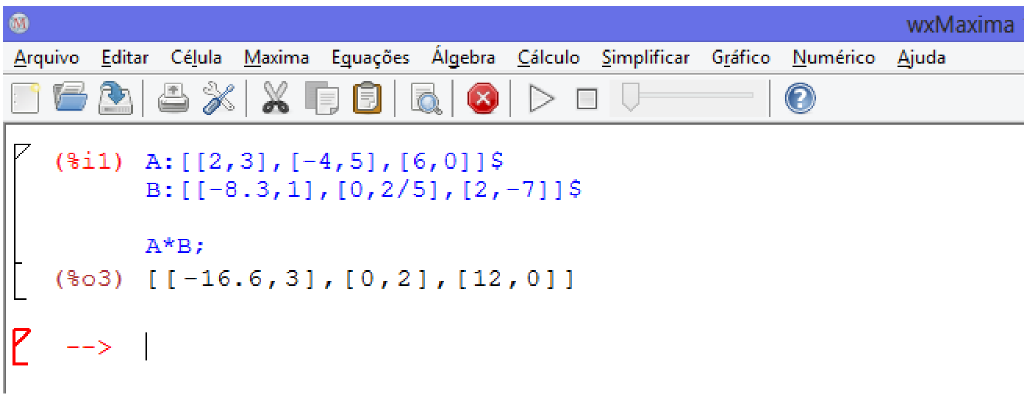
Para multiplicar uma lista por um número escalar deve-se usar o comando / símbolo * e esse será multiplicado por todos os elementos da lista.

Figura 30 – Multiplicação de lista por escalar



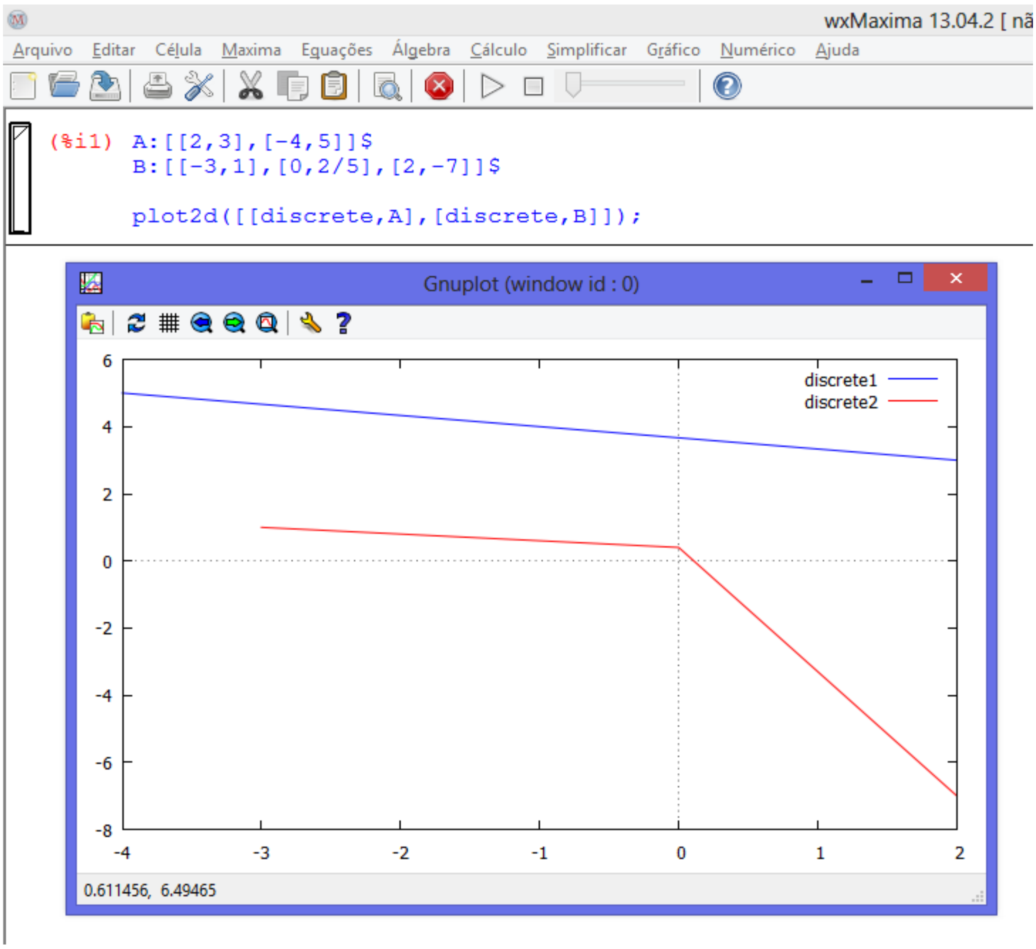
Para realizar a multiplicação de listas também usa-se o comando *, e é feita de maneira que o primeiro elemento de uma lista é multiplicado pelo primeiro elemento da outra, o segundo é multiplicado pelo segundo e assim sucessivamente.

Figura 31 – Multiplicação de listas no Maxima



Uma lista formada por dois pontos pode ser associada a um segmento, onde cada ponto representa uma de suas extremidades. Se uma lista tiver mais de dois pontos essa poderá ser associada à uma poligonal. O comando *plot2d* pode ser usado para representar esse segmento ou poligonal no plano cartesiano.

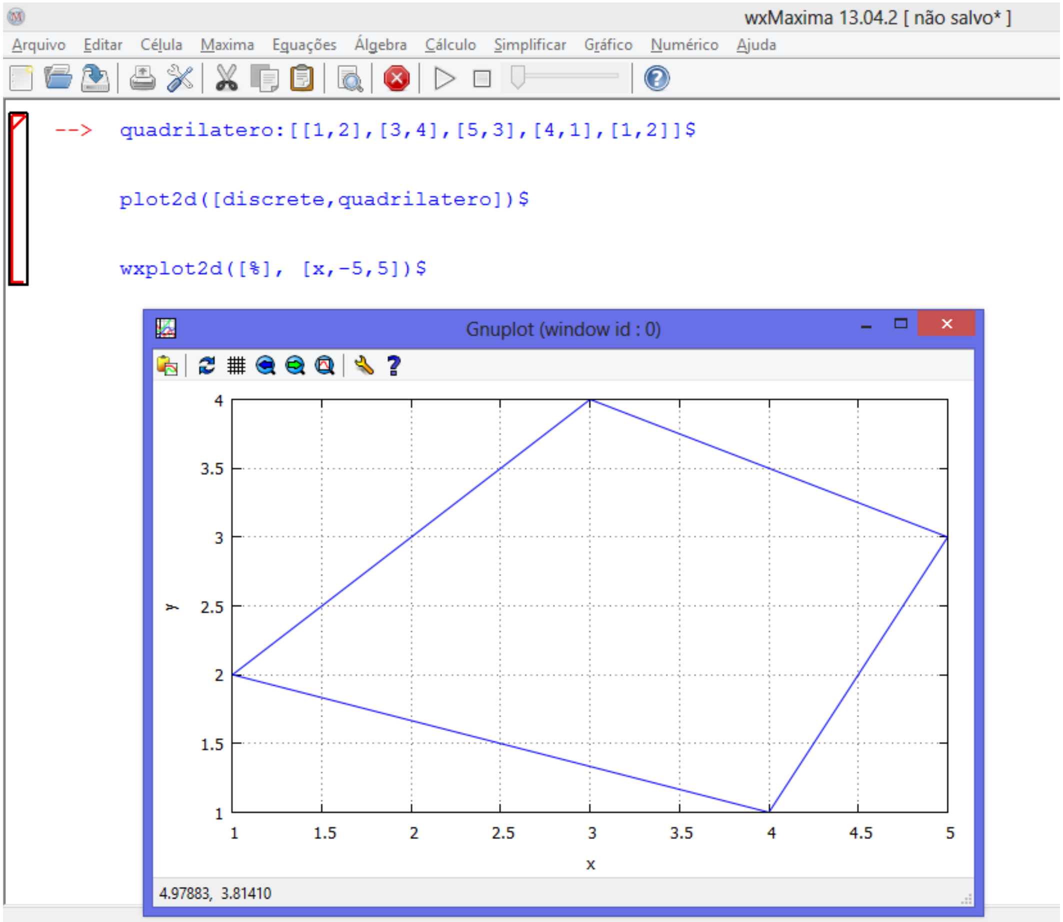
Figura 32 – Comando plot2d



O comando *discrete* “faz a leitura” dos pontos na ordem em que eles aparecem. Se o objetivo for representar um polígono (poligonal fechada) basta repetir ao final as coordenadas do primeiro ponto da lista.

Para representar um quadrilátero de vértices (1,2), (3,4), (5,3) e (4,1) pode-se usar os seguintes comandos:

Figura 33 – Polígono no Maxima



4.2 TRANSLADANDO UM POLÍGONO NO PLANO CARTESIANO USANDO O MAXIMA

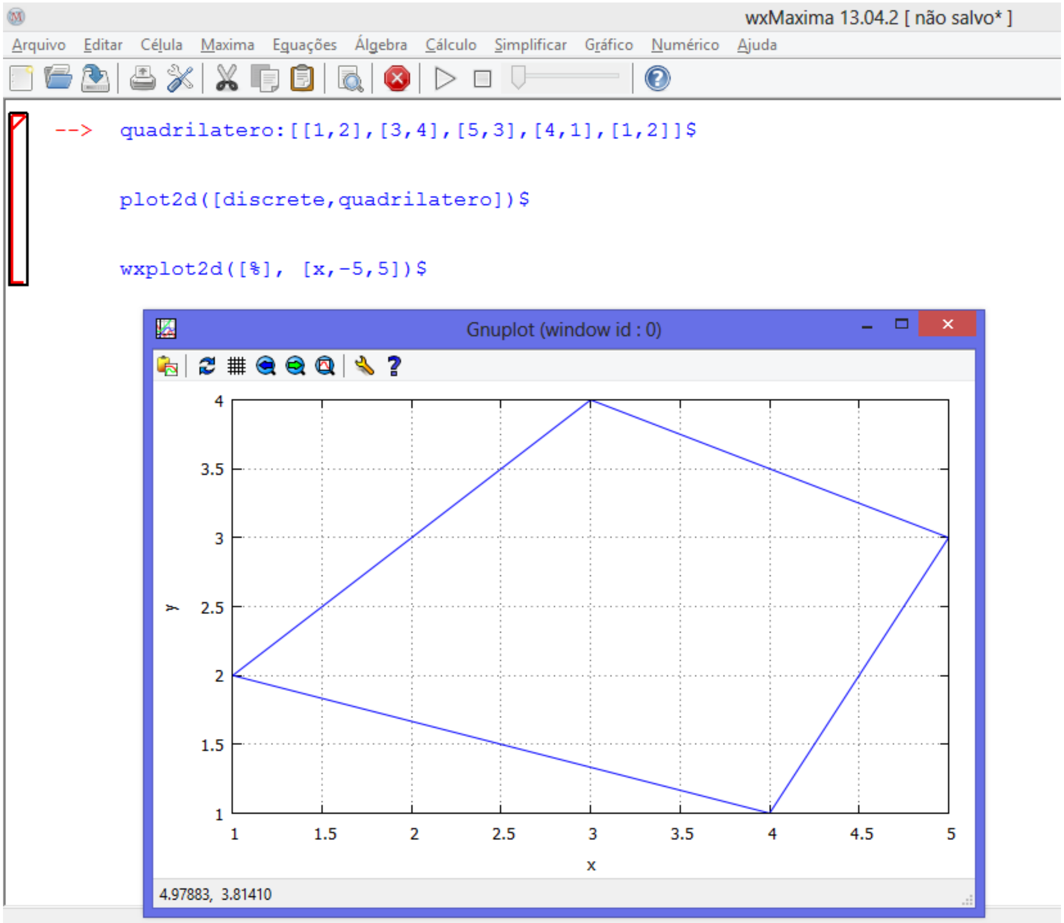
Seja um polígono de n lados, onde seus vértices no plano cartesiano são dados por (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Esse mesmo polígono representado no Maxima será denotado por *nome do polígono:* $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]]$. Para transladar esse polígono k unidades no sentido horizontal (eixo das abscissas) e p unidades no sentido vertical (eixo das ordenadas) deve-se adicionar a lista de coordenadas desse polígono pela lista de coordenadas com n pontos, cada um deles com as coordenadas (k, p) para todo $k, p \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Obtendo assim uma nova lista com as coordenadas dos vértices que representam a nova posição ocupada pelo polígono após a translação:

$$[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]] + [[k, p], [k, p], \dots, [k, p]] =$$
$$[[x_1 + k, y_1 + p], [x_2 + k, y_2 + p], \dots, [x_n + k, y_n + p]]$$

Para transladar um quadrilátero de vértices (1,2), (3,4), (5,3) e (4,1) três unidades para a direita e duas unidades para baixo. Observe os comandos, passo a passo, necessários para a translação desse quadrilátero usando o software Maxima:

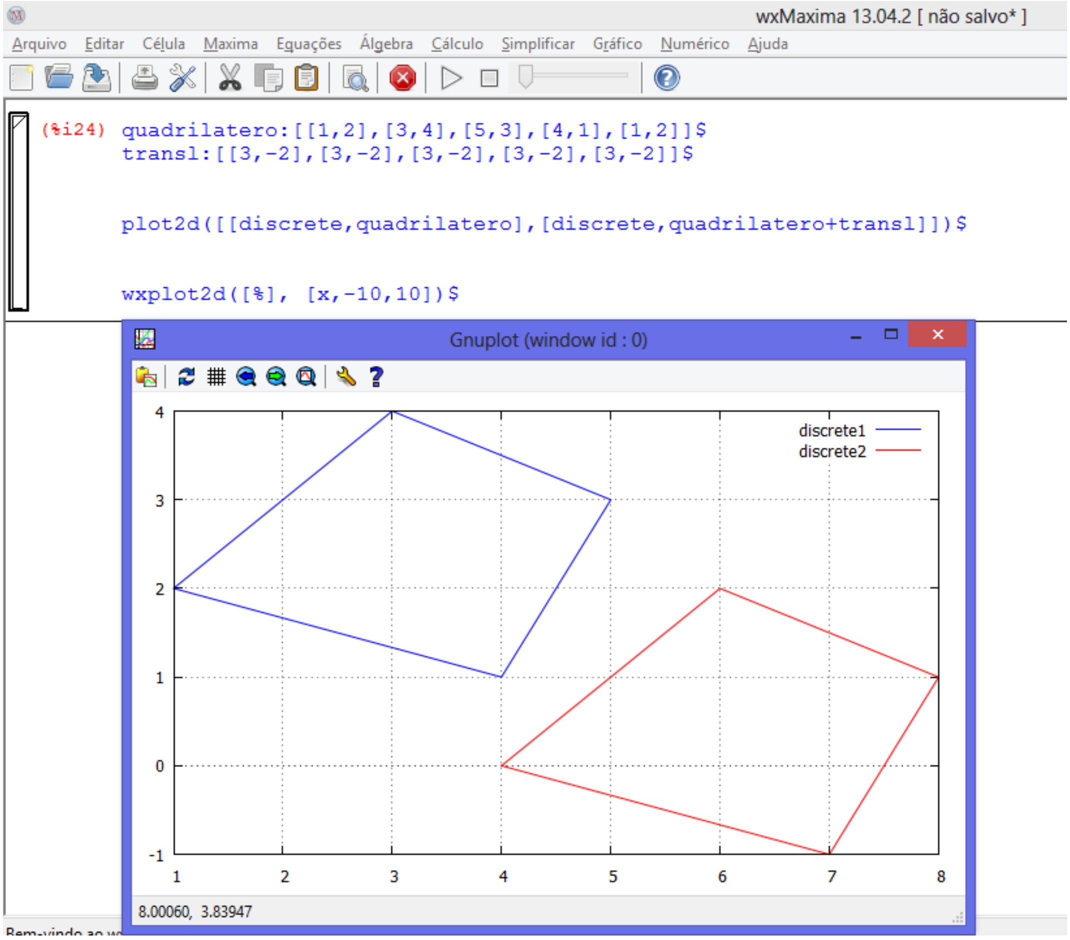
1º: Informar as coordenadas dos vértices através de uma lista.

Figura 34 – Polígono no Maxima



2º: Somar a lista de coordenadas do quadrilátero com a lista de translação.

Figura 35 – Polígono transladado



4.3 AMPLIANDO E REDUZINDO UM POLÍGONO USANDO O MAXIMA

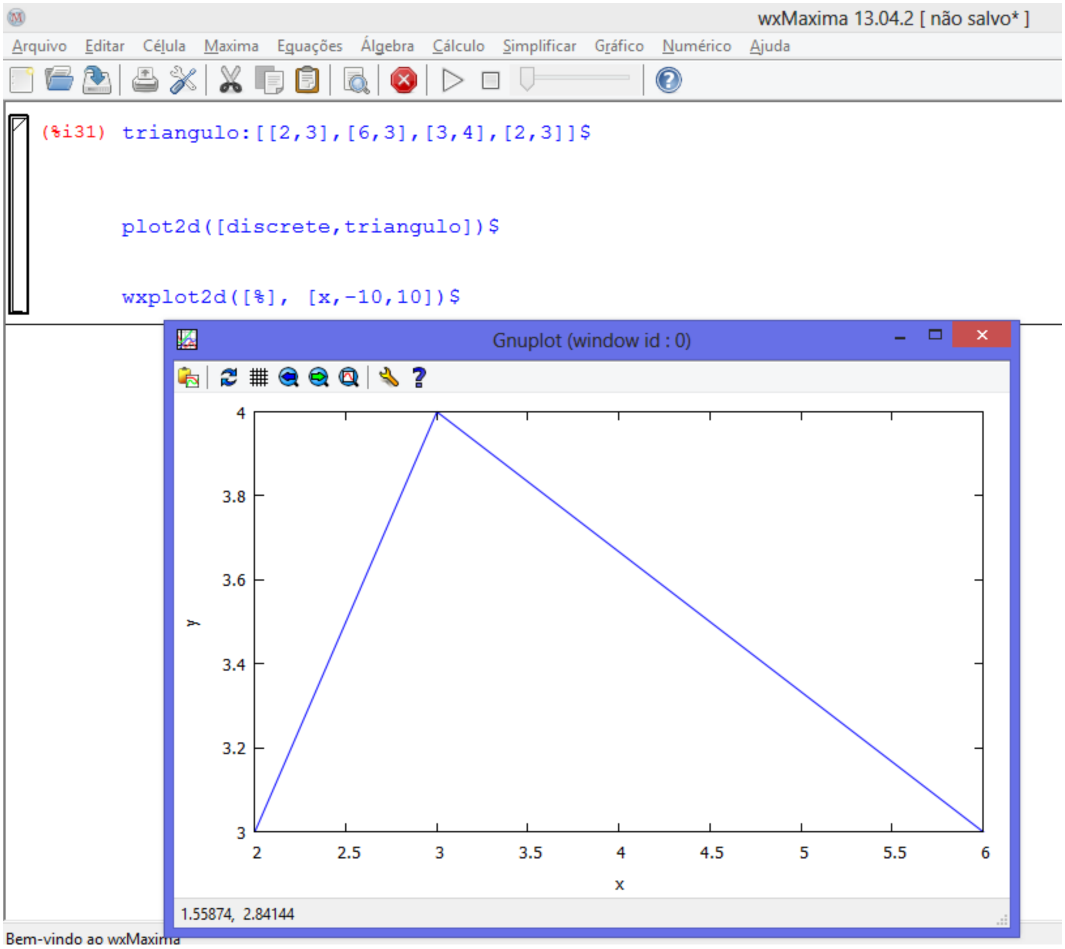
Seja um polígono de n lados, onde seus vértices no plano cartesiano são dados por (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Esse mesmo polígono representado no Maxima será denotado por *nome do polígono:* $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]]$. Para ampliar ou reduzir esse polígono, deve-se multiplicar a lista de coordenadas do polígono por um número $k \in \mathbb{R}_+^*$. Onde deve-se tomar um $k > 1$ ou $0 < k < 1$ para ampliar ou reduzir, respectivamente. Obtendo assim uma nova lista com as coordenadas dos vértices que representam o novo polígono após a ampliação ou redução:

$$k * [[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]] =$$
$$[[kx_1, ky_1], [kx_2, ky_2], \dots, [kx_n, ky_n]]$$

Para ampliar um triângulo de vértices (2,3), (6,3) e (4,4) em 300% (k = 3). Observe os comandos, passo a passo, necessários para a ampliação desse triângulo usando o software Maxima:

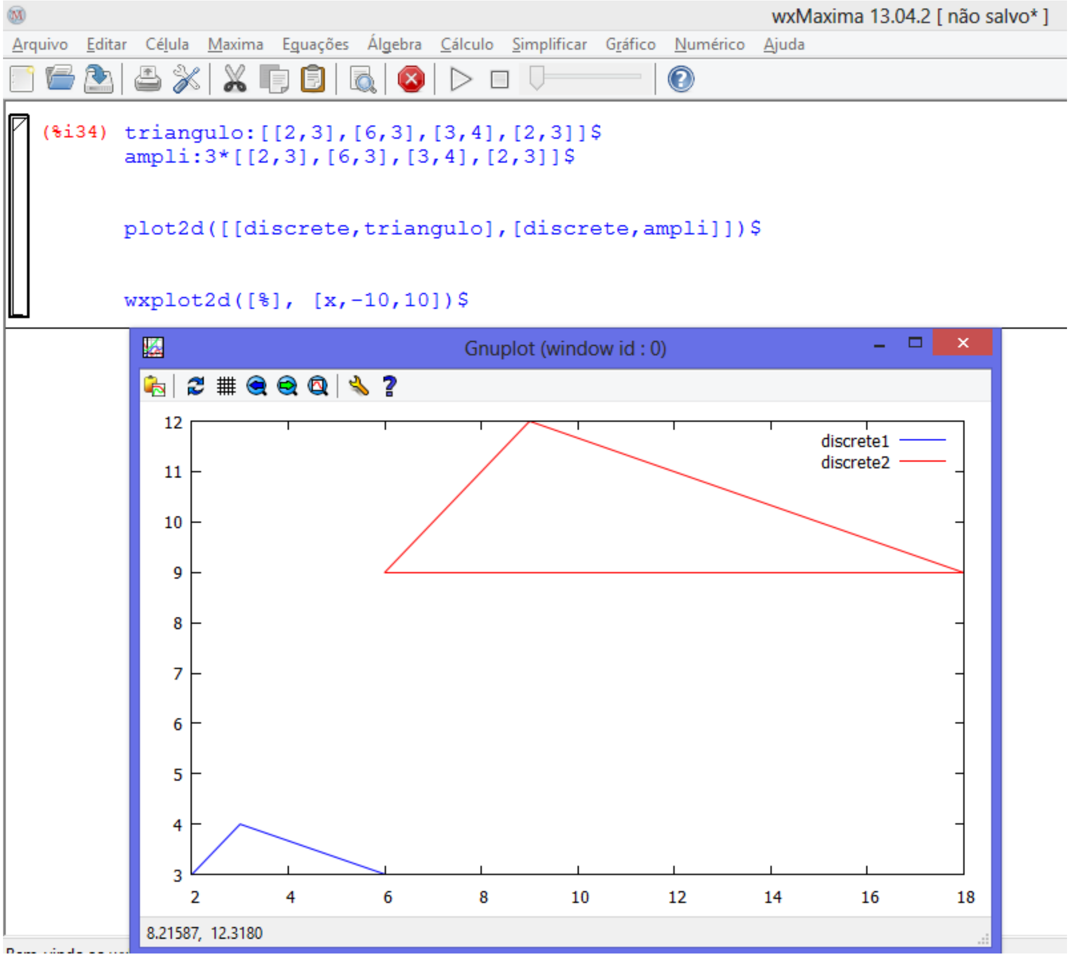
1º: Informar as coordenadas dos vértices através de uma lista.

Figura 36 – Polígono no Maxima



2º: Multiplicar a lista de coordenadas do triângulo pelo número real 3.

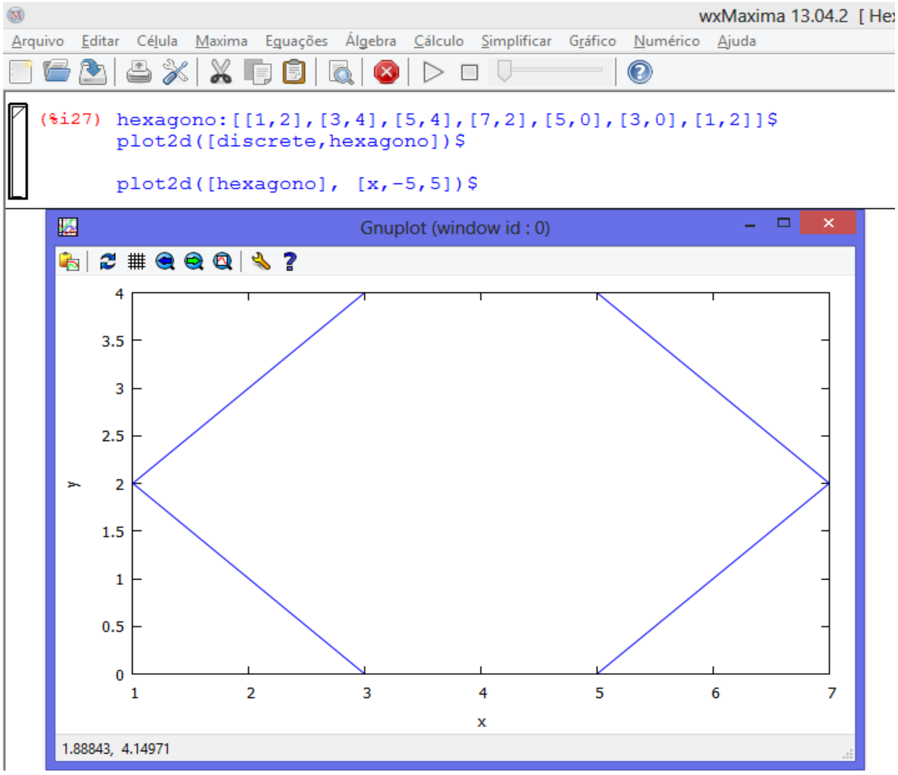
Figura 37 – Polígono ampliado



Para reduzir um hexágono de vértices (1,2), (3,4), (5,4), (7,2), (5,0) e (3,0) em 50% (k = 0,5). Observe os comandos, passo a passo, necessários para a redução desse hexágono usando o software Maxima:

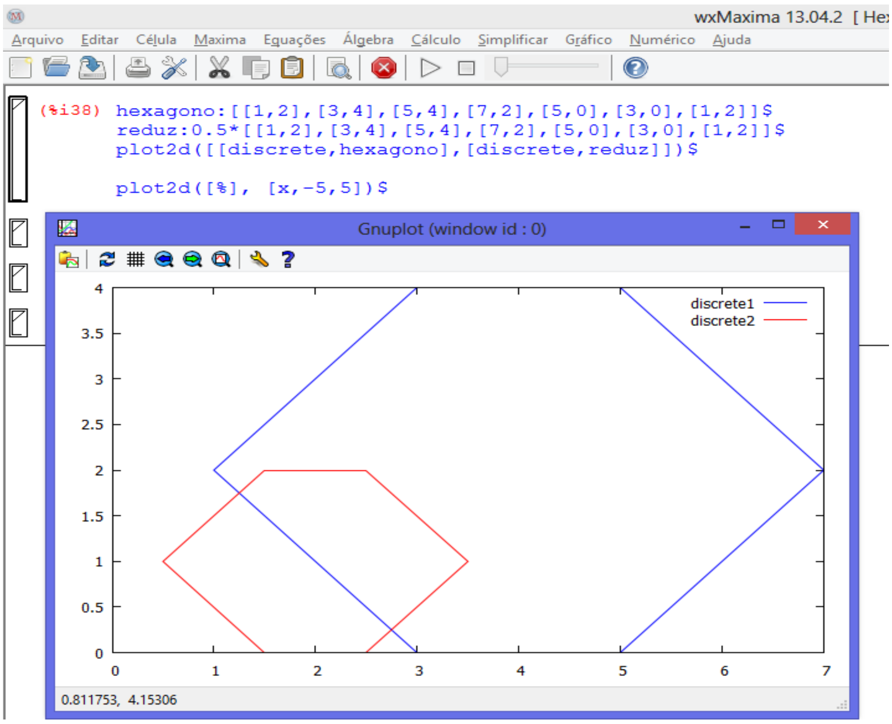
1º: Informar as coordenadas dos vértices através de uma lista.

Figura 38 – Polígono no Maxima



2º: Multiplicar a lista de coordenadas do hexágono pelo número real 0,5.

Figura 39 – Polígono reduzido



4.4 ROTACIONANDO UM POLÍGONO USANDO O MAXIMA

A rotação é a mais complexa das mudanças a realizar-se com um polígono através do software Maxima.

Primeiramente deve-se lembrar qual é a matriz de rotação que deve ser multiplicada à matriz associada ao polígono que se queira rotacionar. Esta é dada por:

$$R_{2x2} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

Seja $A = (x_A, y_A)$ um ponto qualquer no plano cartesiano. Para encontrar a nova posição desse ponto, denotada por A´, após a rotação de um ângulo α, deve-se multiplicar a matriz R_{2x2} pela esquerda. Observe:

$$R_{2x2}.A_{2x1} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

$$R_{2x2}.A_{2x1} = \begin{bmatrix} x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha \\ x_A.sen\alpha + y_A.cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{2x2}.A_{2x1} = \begin{bmatrix} x_A´ \\ y_A´ \end{bmatrix} = A´$$

No software Maxima a multiplicação entre duas listas só é possível se as mesmas tiverem o mesmo número de coordenadas. Sejam as listas $a: [a_1, a_2, \dots, a_n]$ e $b: [b_1, b_2, \dots, b_n]$ o produto entre a e b, denotado por $a * b$ é definido por:

$$a * b = [a_1, a_2, \dots, a_n] * [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

$$a * b = [a_1.b_1, a_2.b_2, \dots, a_n.b_n]$$

Seja $A´ = \begin{bmatrix} x_A´ \\ y_A´ \end{bmatrix}$ o novo ponto após a rotação, onde $x_A´ = x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha$ e $y_A´ = x_A.sen\alpha + y_A.cos\alpha$. No software Maxima o mesmo é representado por $A´ = [x_A´, y_A´]$, logo:

$$A´ = [x_A´, y_A´]$$

$$A´ = [x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha\ , x_A.sen\alpha + y_A.cos\alpha]$$

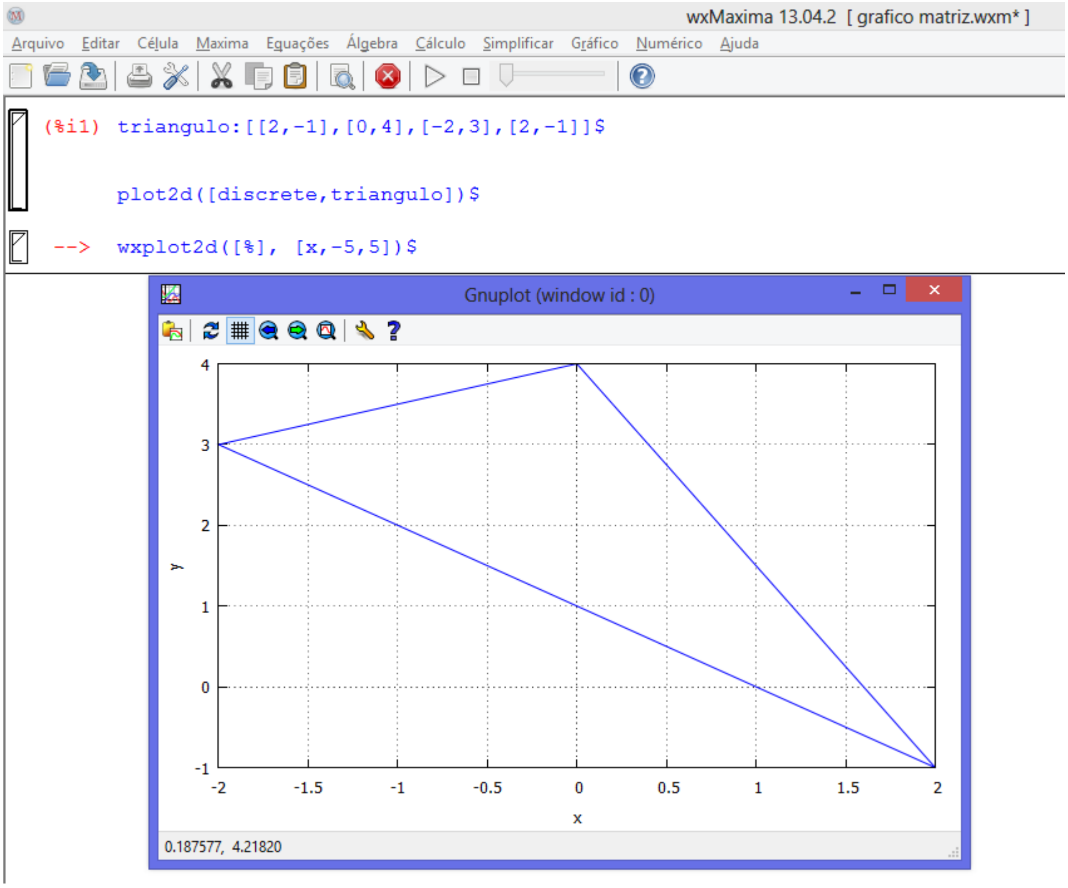
$$A´ = [x_A.cos\alpha - y_A.sen\alpha\ , y_A.cos\alpha + x_A.sen\alpha]$$

$$A' = [x_A.cos\alpha\ ,y_A.cos\alpha] + [-y_A.sen\alpha\ ,x_A.sen\alpha]$$
$$A' = [x_A, y_A] * [cos\alpha, cos\alpha] + [y_A, x_A] * [-sen\alpha, sen\alpha]$$

Para rotacionar $\frac{\pi}{3}\ rad$ o triângulo de vértices (2,–1), (0,4) e (–2,3).

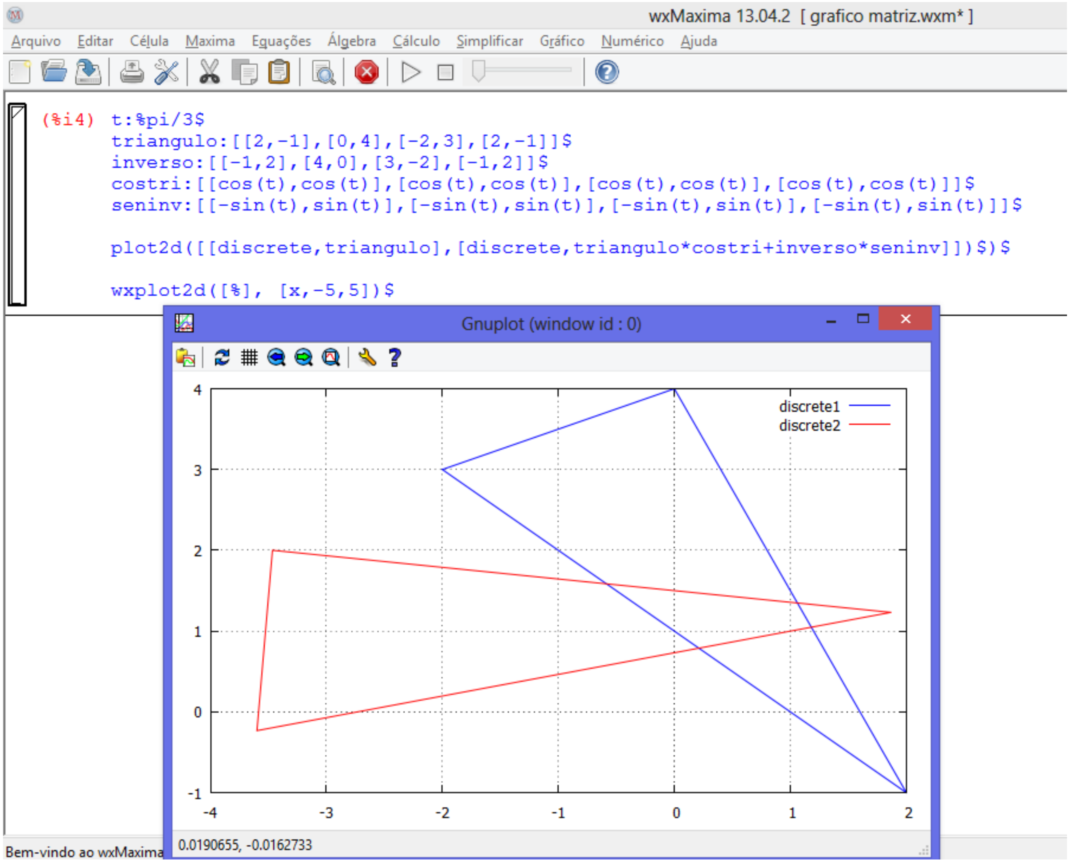
1º: Informar as coordenadas dos vértices através de uma lista.

Figura 40 – Polígono no Maxima



2º: Multiplicar a lista de coordenadas do triângulo pela lista de rotação usando $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Figura 41 – Polígono rotacionado

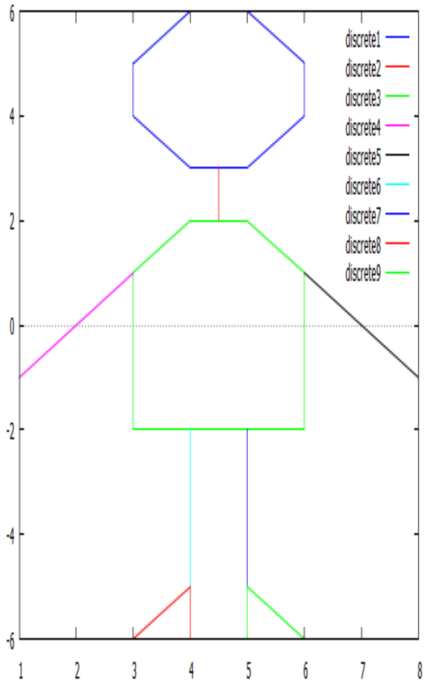


4.5 ROTACIONANDO UMA FIGURA QUALQUER FORMADA POR PONTOS USANDO O MAXIMA

A rotação é sem dúvida para os alunos do ensino médio, a mudança mais interessante. Porém os objetos que se rotacionam, não são nada atrativos aos alunos. Pensando nisso, com o objetivo de tornar mais interessante ao aluno do ensino médio, esse capítulo se dedica a rotação de figuras mais complexas formada por pontos.

Veja um exemplo de uma figura que se assemelha a um molequinho:

Figura 42 – Molequinho formado por pontos

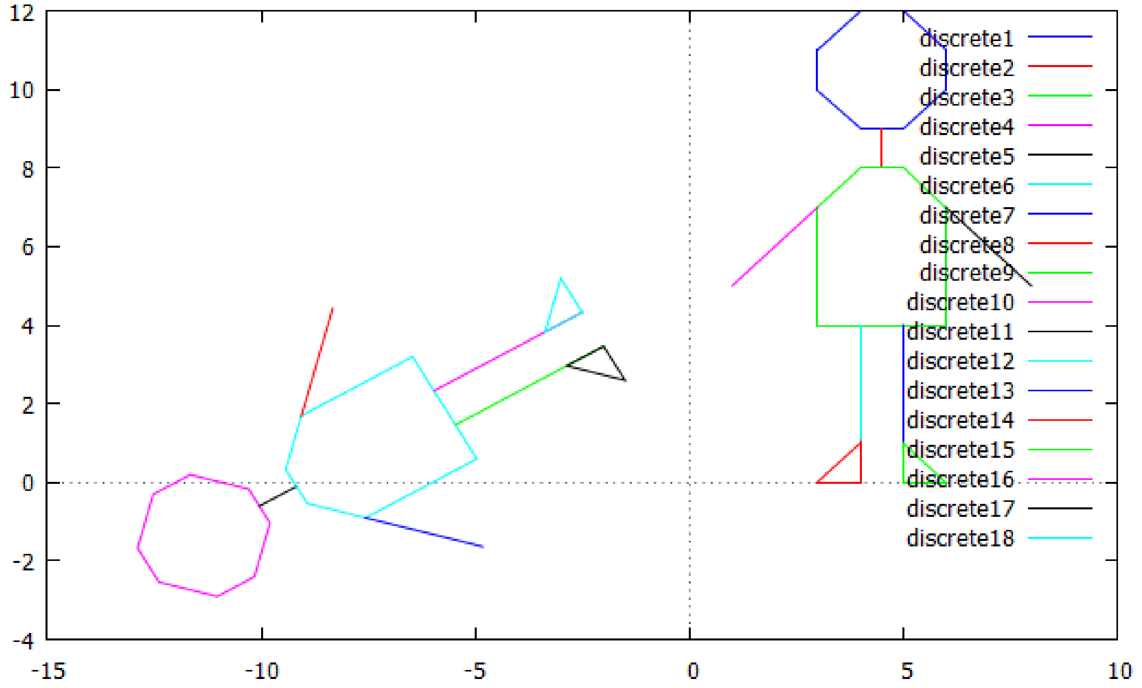


Para ***criar*** esse molequinho utilizando o software foram necessários os seguintes comandos:

```
xy_cabeca:[[3,11],[4,12],[5,12],[6,11],[6,10],[5,9],[4,9],[3,10],[3,11]]$
xy_pescoco:[[9/2,9],[9/2,8]]$
xy_tronco:[[4,8],[3,7],[3,4],[6,4],[6,7],[5,8],[4,8]]$
xy_bracoesq:[[3,7],[1,5]]$
xy_bracodir:[[6,7],[8,5]]$
xy_pernaesq:[[4,4],[4,0]]$
xy_pernadir:[[5,4],[5,0]]$
xy_peesq:[[4,1],[4,0],[3,0],[4,1]]$
xy_pedir:[[5,1],[5,0],[6,0],[5,1]]$

plot2d([[discrete,xy_cabeca],[discrete,xy_pescoco],[discrete,xy_tronco],[discrete,xy_bracoesq],[discrete,xy_bracodir],[discrete,xy_pernaesq],[discrete,xy_pernadir],[discrete,xy_peesq],[discrete,xy_pedir]])$
```

Veja a nova posição ocupada por essa figura, molequinho, após uma rotação de $\frac{2\pi}{3} = 120°$:

Figura 43 – Molequinho rotacionado



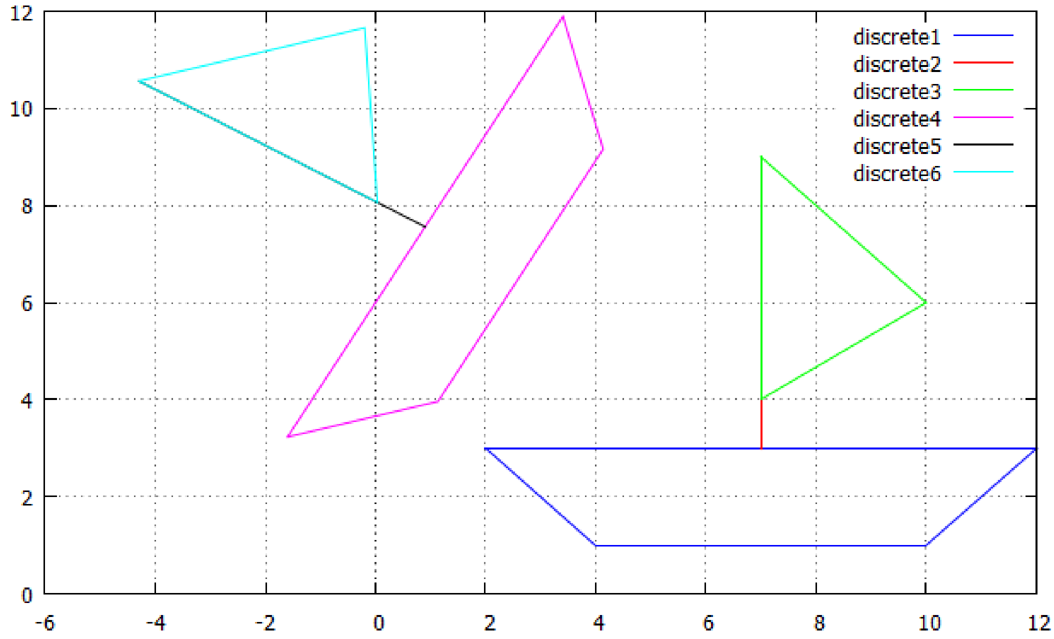
Para ***rotacionar*** esse molequinho utilizando o software Maxima foram necessários os seguintes comandos:

```
t:%pi/(3/2)$
xy_cabeca:[[3,11],[4,12],[5,12],[6,11],[6,10],[5,9],[4,9],[3,10],[3,11]]$
xy_pescoco:[[9/2,9],[9/2,8]]$
xy_tronco:[[4,8],[3,7],[3,4],[6,4],[6,7],[5,8],[4,8]]$
xy_bracoesq:[[3,7],[1,5]]$
xy_bracodir:[[6,7],[8,5]]$
xy_pernaesq:[[4,4],[4,0]]$
xy_pernadir:[[5,4],[5,0]]$
xy_peesq:[[4,1],[4,0],[3,0],[4,1]]$
xy_pedir:[[5,1],[5,0],[6,0],[5,1]]$

yx_cabeca:[[11,3],[12,4],[12,5],[11,6],[10,6],[9,5],[9,4],[10,3],[11,3]]$
yx_pescoco:[[9,9/2],[8,9/2]]$
yx_tronco:[[8,4],[7,3],[4,3],[4,6],[7,6],[8,5],[8,4]]$
yx_bracoesq:[[7,3],[5,1]]$
yx_bracodir:[[7,6],[5,8]]$
yx_pernaesq:[[4,4],[0,4]]$
yx_pernadir:[[4,5],[0,5]]$
yx_peesq:[[1,4],[0,4],[0,3],[1,4]]$
```

```
yx_pedir:[[1,5],[0,5],[0,6],[1,5]]$

cosxy_cabeca:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_cabeca:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_pes_bra_per:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_pes_bra_per:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_tronco:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_tronco:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_peesq:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_peesq:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_pedir:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_pedir:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$


plot2d([[discrete,xy_cabeca],[discrete,xy_pescoco],[discrete,xy_tronco],[discrete,xy_bracoesq],[discrete,xy_bracodir],[discrete,xy_pernaesq],[discrete,xy_pernadir],[discrete,xy_peesq],[discrete,xy_pedir],[discrete,xy_cabeca*cosxy_cabeca+yx_cabeca*sinyx_cabeca],[discrete,xy_pescoco*cosxy_pes_bra_per+yx_pescoco*sinyx_pes_bra_per],[discrete,xy_tronco*cosxy_tronco+yx_tronco*sinyx_tronco],[discrete,xy_bracoesq*cosxy_pes_bra_per+yx_bracoesq*sinyx_pes_bra_per],[discrete,xy_bracodir*cosxy_pes_bra_per+yx_bracodir*sinyx_pes_bra_per],[discrete,xy_pernaesq*cosxy_pes_bra_per+yx_pernaesq*sinyx_pes_bra_per],[discrete,xy_pernadir*cosxy_pes_bra_per+yx_pernadir*sinyx_pes_bra_per],[discrete,xy_peesq*cosxy_peesq+yx_peesq*sinyx_peesq],[discrete,xy_pedir*cosxy_pedir+yx_pedir*sinyx_pedir]])$
```

Veja mais um exemplo de rotação agora com outra figura, um barquinho, também feito por pontos. O ângulo de rotação nesse caso foi de $\frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$

Figura 44 – Barquinho rotacionado



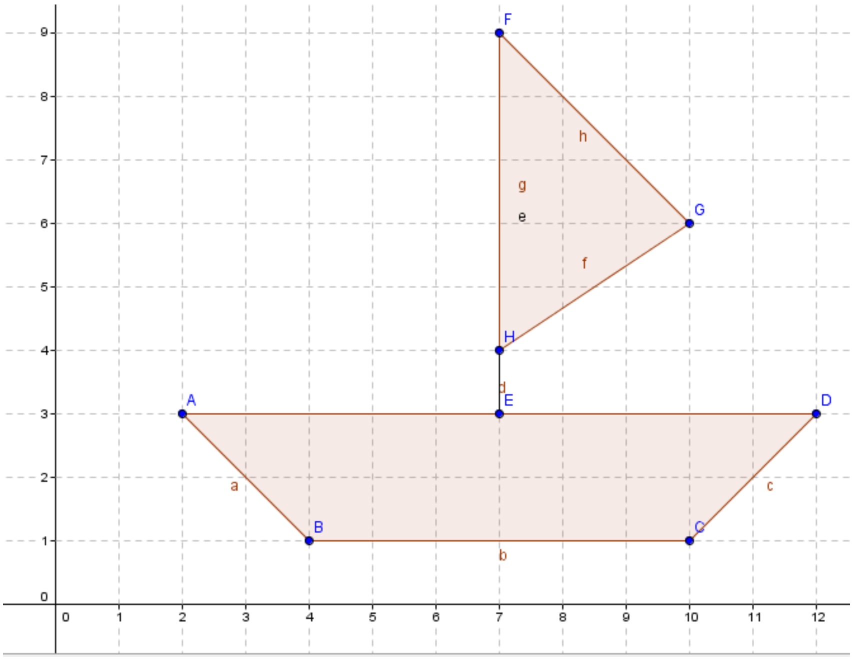

```
t:%pi/3$
xy_casco:[[2,3],[4,1],[10,1],[12,3],[2,3]]$
xy_mastro:[[7,3],[7,9]]$
xy_vela:[[7,9],[10,6],[7,4],[7,9]]$

yx_casco:[[3,2],[1,4],[1,10],[3,12],[3,2]]$
yx_mastro:[[3,7],[9,7]]$
yx_vela:[[9,7],[6,10],[4,7],[9,7]]$

cosxy_casco:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_casco:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_mastro:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_mastro:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

cosxy_vela:[[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)],[cos(t),cos(t)]]$
sinyx_vela:[[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)],[-sin(t),sin(t)]]$

plot2d([[discrete,xy_casco],[discrete,xy_mastro],[discrete,xy_vela],[discrete,xy_casco*cosxy_casco
+yx_casco*sinyx_casco],[discrete,xy_mastro*cosxy_mastro+yx_mastro*sinyx_mastro],[discrete,xy_vela*cos
xy_vela+yx_vela*sinyx_vela]])$
```

4.6 ANIMAÇÕES DE FIGURAS PLANAS USANDO O MAXIMA

Para motivar os alunos do ensino médio a estudarem o conteúdo de matrizes esse trabalho propõe a animação de figuras formadas por pontos. Objetivando também estimular a criação e a criatividade do aluno, o professor pode sugerir atividades para que os próprios alunos criem suas figuras, realizem as mudanças desejadas sobre essas e até criem histórias utilizando uma composição de várias figuras num mesmo plano.

Antes de realizar a translação de uma figura, foi feito um esboço com as coordenadas dos vértices que limitam a figura através do software Geogebra.

Figura 45 – Esboço do barquinho



Em seguida foi feito a construção do barquinho associando suas coordenadas a uma matriz e em seguida a translação animada através do recurso / comando with_slider.

Os comandos abaixo fazem com que o barquinho representado na figura 45 se desloque para a direita.

```
with_slider(t,makelist(i,i,0,20),
[discrete,[[2,3],[4,1],[10,1],[12,3],[2,3],[7,3],[7,9],[10,6],[7,4],[7,9]]+[[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0],[t,0]]],
[x,0,35],[y,0,10]
);
```

Figura 46 – Barquinho na posição inicial

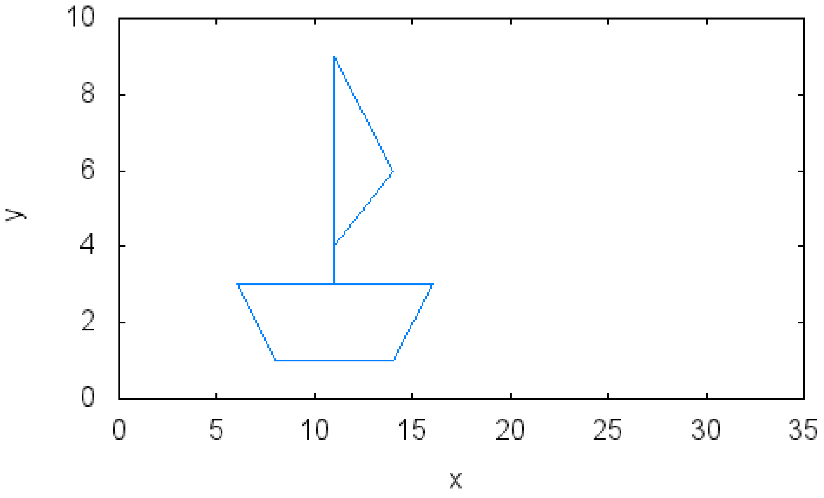


Figura 47 – Barquinho na posição intermediária

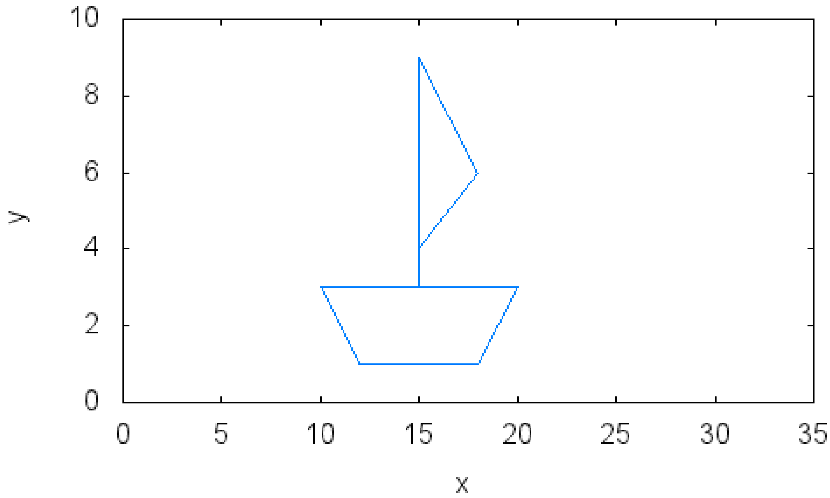
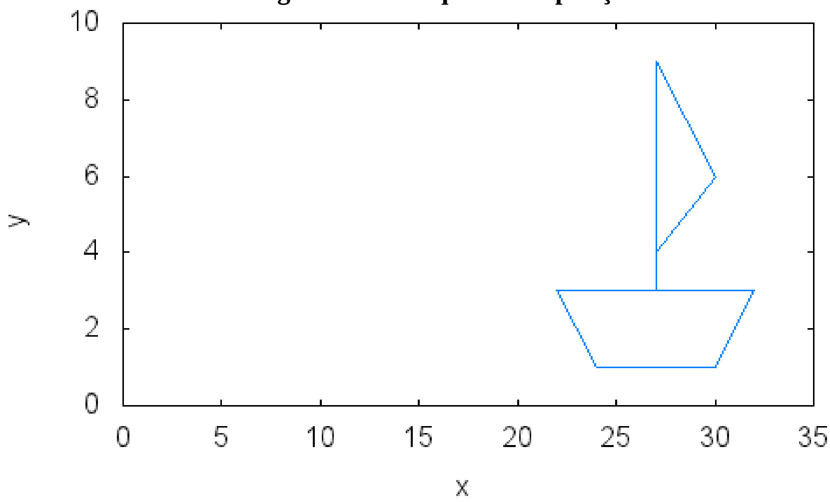
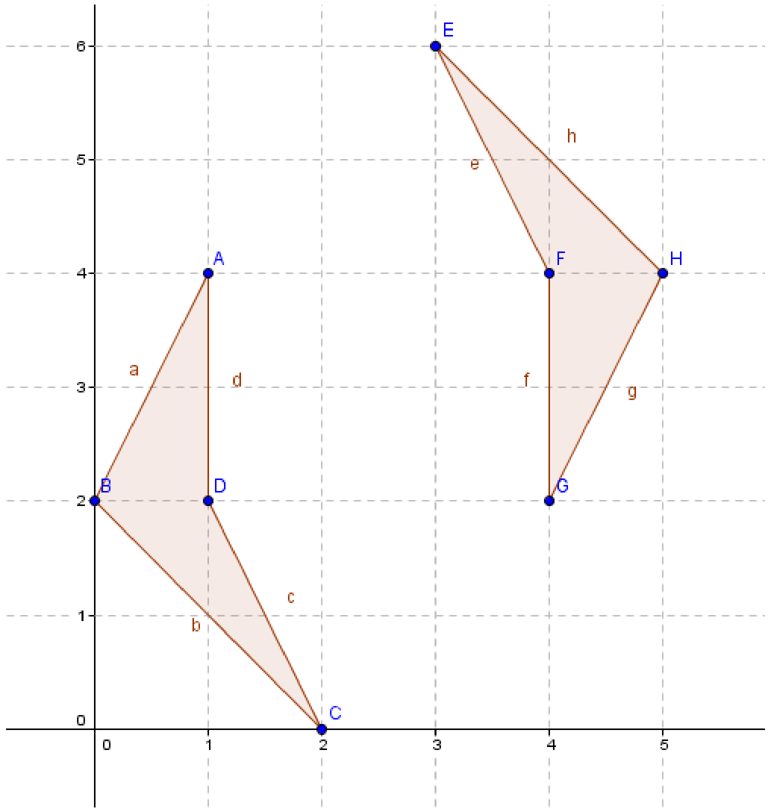


Figura 48 – Barquinho na posição final



Para simular o voo de um pássaro, também foi feito antes um esboço com as coordenadas dos vértices no Geogebra.

Figura 49 – Esboço da rotação e translação de um pássaro



Para essa animação foram necessários mais comandos, pois o quadrilátero ABCD que simula um pássaro de asas abertas precisava ser rotacionado e transladado ao mesmo tempo. Após o esboço feito no Geogebra pode-se observar que o quadrilátero EFGH pode ser obtido após uma rotação de 180° ou π radianos e em seguida transladar-se duas unidades para a direita e duas unidades para cima do quadrilátero ABCD.

Os comandos a seguir fazem com que o "pássaro" se desloque na diagonal ou na bissetriz dos quadrantes ímpares.

```
with_slider(t,makelist(i,i,0,50),
[discrete,[[1,4],[0,2],[2,0],[1,2],[1,4]]*[[cos(%pi*t),cos(%pi*t)],[cos(%pi*t),cos(%pi*t)],[cos(%pi*t),cos(%pi*t)],[cos(%pi*t),cos(%pi*t)],[cos(%pi*t),cos(%pi*t)]]+[[4,1],[2,0],[0,2],[2,1],[4,1]]*[[-sin(%pi*t),sin(%pi*t)],[-sin(%pi*t),sin(%pi*t)],[-sin(%pi*t),sin(%pi*t)],[-sin(%pi*t),sin(%pi*t)],[-sin(%pi*t),sin(%pi*t)]]+[[t+0.2,t+0.2],[t+0.2,t+0.2],[t+0.2,t+0.2],[t+0.2,t+0.2],[t+0.2,t+0.2]]],
[x,0,50],[y,0,50]);
```

Figura 50 – Pássaro na posição inicial

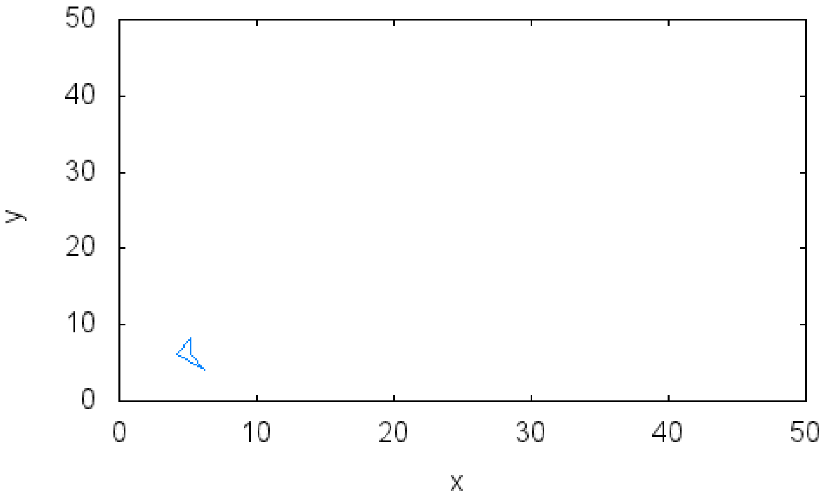


Figura 51 – Pássaro na posição intermediária

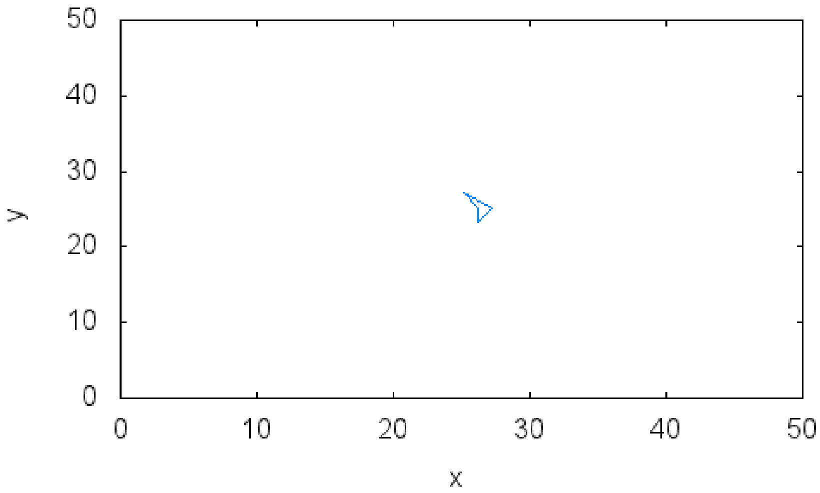
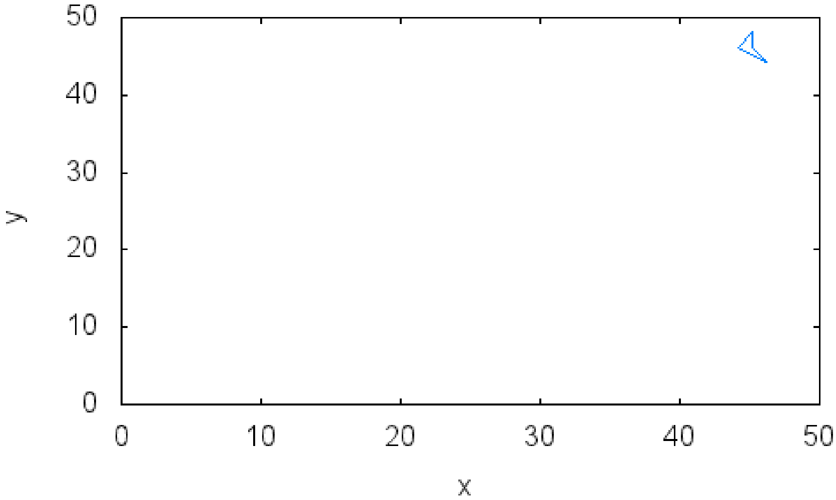


Figura 52 – Pássaro na posição final



Quando se associa uma figura qualquer à uma matriz é possível fazer a translação dessa figura sobre qualquer linha reta ou curva. Estas podem ser representadas por funções de diferentes tipos. Com a translação sobre funções é possível que o professor faça um link com a representação gráfica de funções, possibilitando que o aluno revise assuntos abordados na primeira série do Ensino Médio importantes em processos seletivos como o ENEM.

Para essa figura também foi feita uma animação sobre uma parábola com a concavidade para baixo de vértice V(25, 50).

```
with_slider(t,makelist(i,i,0,50),
[discrete,makelist((matrix([1,4],[0,2],[2,0],[1,2],[1,4]).matrix([cos(%pi*t),sin(%pi*t)],[-sin(%pi*t),cos(%pi*t)]))[k],k,5)
+makelist((matrix([t,-2/25*t^2+4*t],[t,-2/25*t^2+4*t],[t,-2/25*t^2+4*t],[t,-2/25*t^2+4*t],[t,-2/25*t^2+4*t])*(1))[k],k,5) ],
[x,0,50],[y,0,50] );
```

Figura 53 – Pássaro na posição inicial

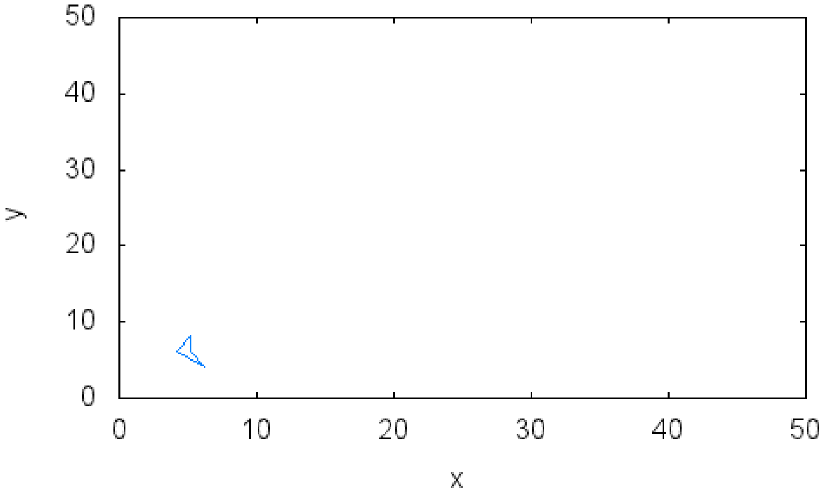


Figura 54 – Pássaro na posição intermediária

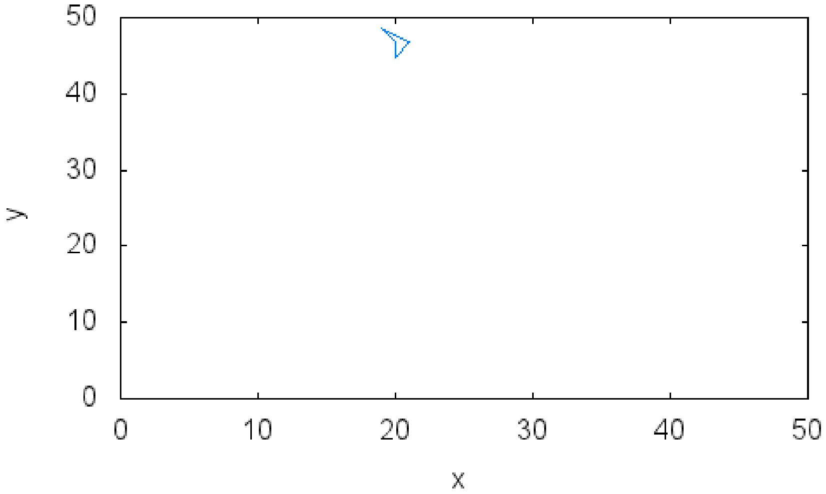
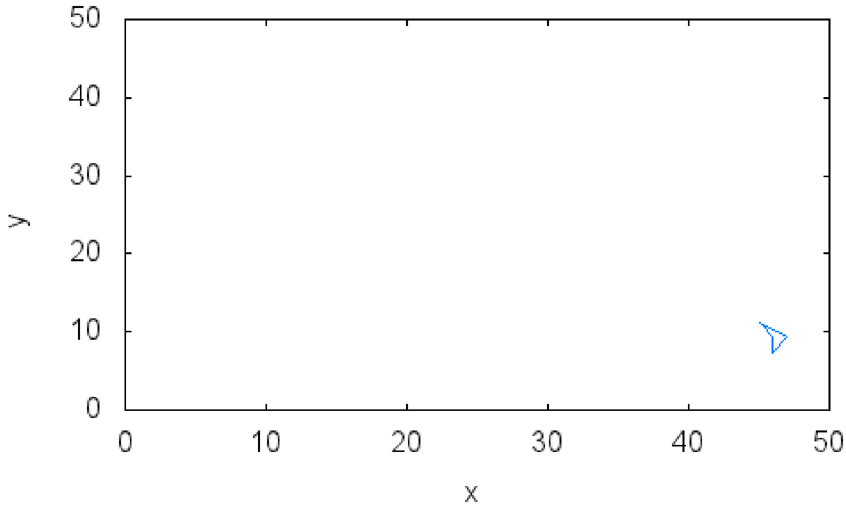
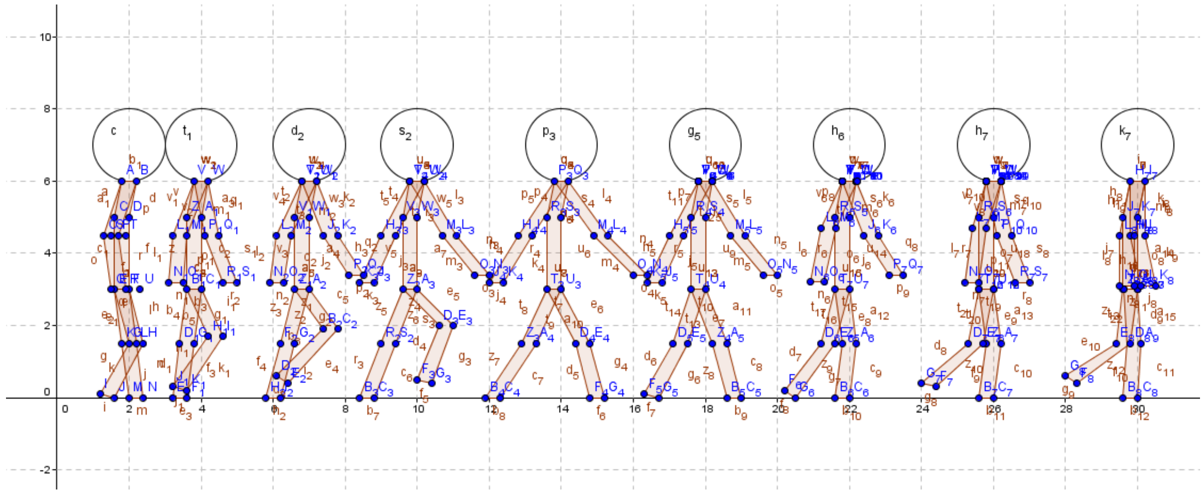


Figura 55 – Pássaro na posição final



A figura a seguir representa as posições de um molequinho caminhando em linha reta, onde o corpo e a cabeça estão sempre fixos, cada uma das pernas possui duas partes que se movimentam diferentemente uma da outra e cada um dos braços também possui duas partes que se movimentam diferentemente. As nove figuras todas diferentes entre si, onde cada uma, a partir da segunda, representam a nova posição após o movimento das pernas, e braços da figura anterior. Se repetir esse ciclo de nove figuras, ou seja, após a nona figura retornar a primeira, obtém-se uma caminhada digamos harmônica.

Figura 56 – Molequinho caminhando



Para descrever os movimentos dessas partes, primeiramente foram encontrados nove pares ordenados para cada extremidade. Por exemplo o antebraço direito é composto por um segmento onde cada uma de suas extremidades tem um comportamento diferente. Logo para analisar o movimento do mesmo foram necessários dois conjuntos de nove pontos cada um, quando x variava de 1 a 9.

Para reproduzir o movimento de cada extremidade dessa, era necessário obter uma função polinomial de grau oito do tipo:

$$f(x) = ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$$

Para encontrar os coeficientes a, b, c, ..., i dessa função foi usado os pares ordenados $\left(1, f(1)\right), \left(2, f(2)\right), \left(3, f(3)\right), \dots, \left(9, f(9)\right)$ e para cada um deles foi obtido uma equação linear com as incógnitas a, b, c, ..., i.

O problemas agora se resumia a resolver um sistema linear de 9 equações com 9 incógnitas cada uma, para cada extremidade das partes que se movimentavam. Isso só se tornou possível ao recurso do software Maxima a seguir:

```
funcao:matrix([1^8,1^7,1^6,1^5,1^4,1^3,1^2,1^1,1],[2^8,2^7,2^6,2^5,2^4,2^3,2^2,2^1,1],[3^8,3^7,3^6,3^5,3^4,3^3,3^2,3^1,1],[4^8,4^7,4^6,4^5,4^4,4^3,4^2,4^1,1],[5^8,5^7,5^6,5^5,5^4,5^3,5^2,5^1,1],[6^8,6^7,6^6,6^5,6^4,6^3,6^2,6^1,1],[7^8,7^7,7^6,7^5,7^4,7^3,7^2,7^1,1],[8^8,8^7,8^6,8^5,8^4,8^3,8^2,8^1,1],[9^8,9^7,9^6,9^5,9^4,9^3,9^2,9^1,1]);

B1x:matrix([0.4],[1.4],[2.2],[4.2],[6],[6.8],[6.8],[7.8],[8.8]);
S:invert(funcao).B1x;

B2x:matrix([1.2],[2.4],[3.6],[4.8],[5.6],[6.4],[7],[8],[9]);
S:invert(funcao).B2x;

B3x:matrix([1.2],[1.4],[2],[2.6],[3.1],[4.5],[5.3],[6.2],[7.2]);
S:invert(funcao).B3x;

B4x:matrix([1],[1.6],[2.4],[3.2],[4.1],[5.3],[6.4],[7.5],[8.6]);
S:invert(funcao).B4x;

B5x:matrix([1.1],[3.2],[4.3],[5.8],[7.2],[7.8],[8.3],[8.8],[9.3]);
S:invert(funcao).B5x;

B6x:matrix([0.7],[2.3],[3.6],[4.9],[6.1],[6.9],[7.6],[8.3],[9.1]);
S:invert(funcao).B6x;

B7x:matrix([0.7],[1.3],[2.1],[2.6],[3.2],[4.6],[6.1],[7.4],[8.7]);
```

S:invert(funcao).B7x;

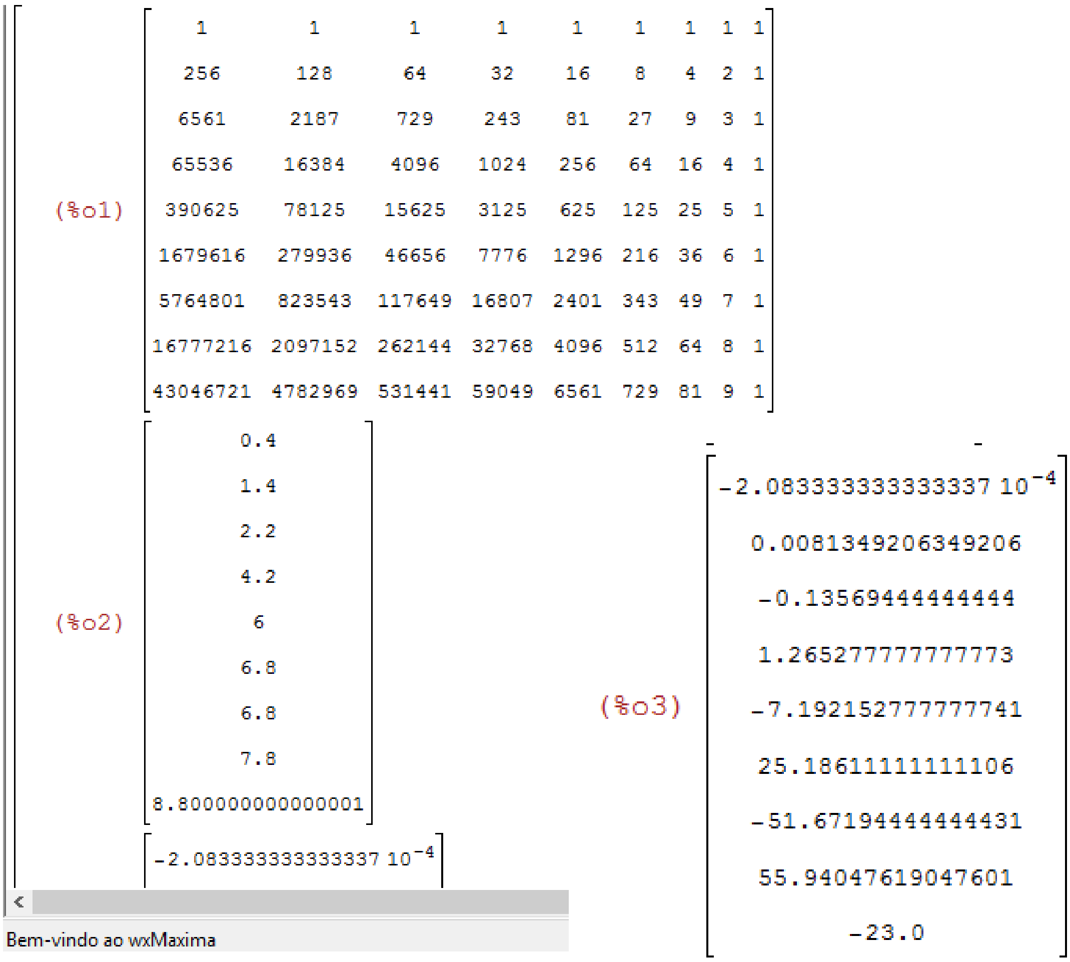
B8x:matrix([0.5],[1.4],[2.3],[3.2],[4],[5.2],[6.4],[7.6],[8.7]);
S:invert(funcao).B8x;

Onde as soluções obtidas dessa lista de comandos eram matrizes do tipo 9 x 1, de tal maneira que:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{91}) = (a, b, c, \dots, i)$$

A figura a seguir mostra uma dessas soluções, onde (%o3) representa os coeficientes.

Figura 57 – Coeficientes de uma das funções



Após o calculo de todas essas funções foi possível movimentar o Molequinho através da sequência de comandos:

```
with_slider(t,makelist(i,i,1,9),
[-sqrt(3/4-(x-(t+1))^2)+7,sqrt(3/4-(x-
(t+1))^2)+7,[discrete,makelist(matrix([0.4,0],[1.2,1.5])[k],k,2)+makelist(matrix([-
0.000208333333333337*t^8+0.0081349206349206*t^7-
0.135694444444444*t^6+1.26527777777773*t^5-7.19215277777741*t^4+25.1861111111106*t^3-
51.6719444444431*t^2+55.94047619047601*t-23,0],[-0.00028273809523809772*t^8+0.01125*t^7-
0.18798611111111*t^6+1.71333333333333*t^5-9.245798611111088*t^4+29.94708333333362*t^3-
56.1659325396829*t^2+56.12833333333353*t-21,0])[k],k,2)],

[discrete,makelist(matrix([1,6],[0.8,5],[0.8,3],[1.2,1.5])[k],k,4)+makelist(matrix([t,0],[t,0],[t,0],[-
0.00028273809523809713*t^8+0.01125*t^7-0.18798611111111*t^6+1.71333333333335*t^5-
9.24579861111141*t^4+29.9470833333349*t^3-56.16593253968273*t^2+56.12833333333363*t-
21,0])[k],k,4)],

[discrete,makelist(matrix([1.2,0],[1,1.5],[0.8,3])[k],k,3)+makelist(matrix([-
0.00070932539682539786*t^8+0.0280555555555556*t^7-
0.463958333333333*t^6+4.16388888888886*t^5-22.0194791666666*t^4+69.6497222222224*t^3-
127.2658531746031*t^2+121.508333333333*t-44.4,0],[-
0.00014384920634920718*t^8+0.0056349206349207*t^7-
0.0920138888888889*t^6+0.812361111111111*t^5-4.207743055555583*t^4+12.97819444444461*t^3-
23.00009920634928*t^2+21.80380952380959*t-7.3,0],[t,0])[k],k,3)],

[discrete,makelist(matrix([1.1,3],[0.7,4.5],[1,6])[k],k,3)+makelist(matrix([0.000238095238095
23791*t^8-0.0092658730158731*t^7+0.149305555555556*t^6-
1.28652777777806*t^5+6.39013888888958*t^4-18.3894444444444*t^3+29.16031746031772*t^2-
20.91476190476228*t+6,0],[0.00011904761904761655*t^8-
0.00472222222222221*t^7+0.0780555555555555*t^6-
0.696388888888888*t^5+3.63222222222218*t^4-11.2188888888885*t^3+19.73960317460323*t^2-
16.32999999999969*t+5.5,0],[t,0])[k],k,3)],

[discrete,makelist(matrix([0.7,3],[0.5,4.5],[1,6])[k],k,3)+makelist(matrix([-
0.00024305555555555568*t^8+0.0096626984126984*t^7-
0.159791666666667*t^6+1.42347222222217*t^5-7.400104166666647*t^4+22.7713888888888*t^3-
40.13986111111105*t^2+37.39547619047604*t-13.2,0],[-
0.00023809523809523915*t^8+0.009563492063492*t^7-
0.160833333333333*t^6+1.46944444444441*t^5-7.915833333333342*t^4+25.51861111111128*t^3-
47.57309523809524*t^2+47.1523809523808*t-18,0],[t,0])[k],k,3)]],


[x,-5,12],[y,0,10]);
```

E assim o molequinho caminhou harmoniosamente:

Figura 58 – Molequinho na posição inicial

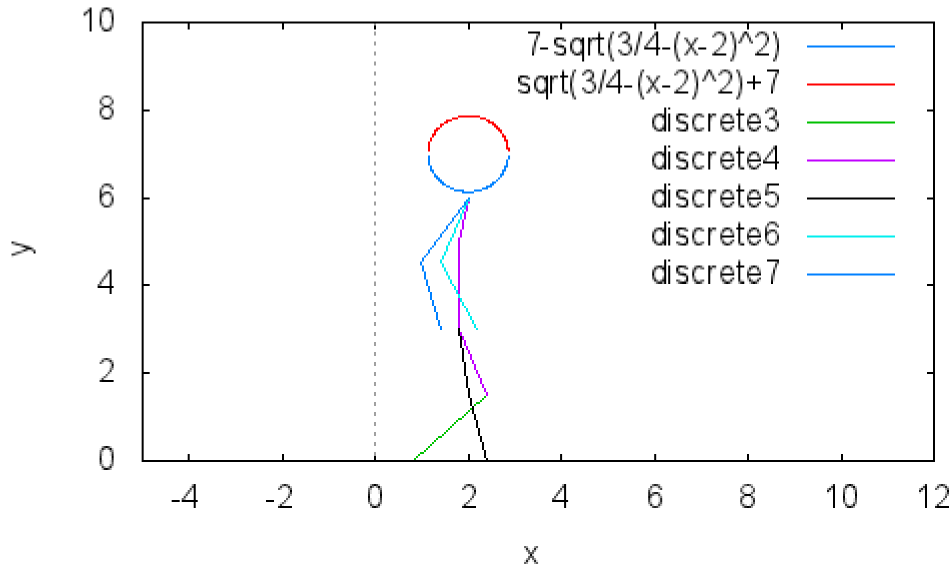


Figura 59 – Molequinho na posição intermediária

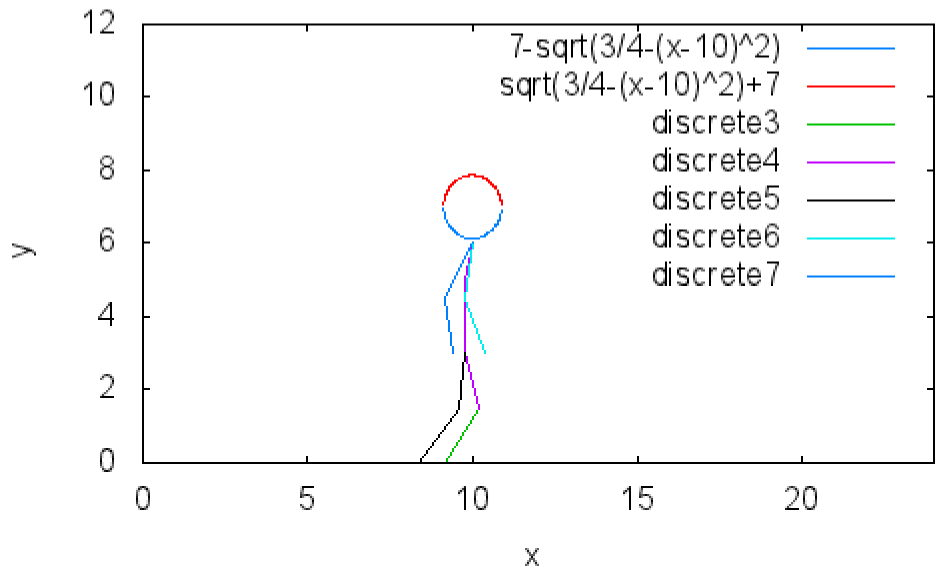
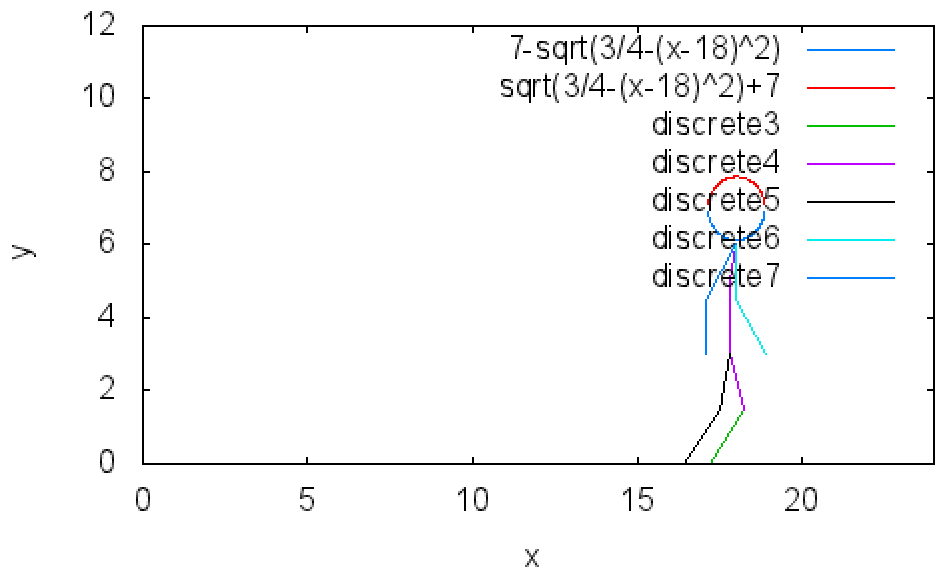


Figura 60 – Molequinho na posição final



5 CONCLUSÃO

Após anos lecionando a disciplina de Matemática para turmas de nível médio pude constatar que a maioria desses alunos não consegue sequer citar uma aplicação do conteúdo de matrizes em qualquer área de conhecimento. Alguns alunos acham que as matrizes não servem pra nada. Mas isso não é uma peculiaridade do conteúdo de matrizes. Teoremas fascinantes e métodos práticos de solução de problemas em diversas áreas da matemática são vistos por alguns alunos sem interesse e motivação, pois esses alunos não veem utilidade para aquilo que estão tendo de aprender “na marra”.

Essa realidade vista em várias escolas pode ser por falta de interesse e motivação por parte dos alunos, por incapacidade de gerar questionamentos de professores ou até pela complexidade do próprio conteúdo. São variáveis que podem gerar um estudo a parte para mapear os últimos desempenhos em matemática dos alunos de nível médio.

Acredita – se que qualquer conteúdo, por mais complexidade envolvendo suas teorias, pode se tornar atrativo quando se conhece a motivação do autor e o trabalho árduo que este teve, após inúmeras pesquisas, para concluir seu projeto / idéia. Partindo desse princípio e por acreditar que um dos papéis do professor mais importante, senão o mais, é gerar o prazer da descoberta no aluno, motivando – o para se aprofundar ainda mais num conteúdo, trazendo – o para o mundo científico ou levando o mundo científico até ele. Assim, esse trabalho propõe aproximar esses mundos, relacionando o conteúdo de matrizes à animações.

Espera-se que este trabalho após a associação dos pontos coordenados à matrizes para realizar animações através do software Maxima com diferentes figuras, motive o estudo do conteúdo de matrizes e sistemas lineares pelos alunos do segundo ano do ensino médio. E ainda possa ser mais explorado para animações de novas figuras construídas pelos próprios alunos.

Esperamos também que os comandos do software Maxima, utilizados nesse trabalho, possa ser usado em diferentes áreas da matemática, com seus recursos que podem ser explorados e respondendo uma velha pergunta dos discentes em diferentes escolas do Brasil: “por que eu tenho que aprender esse negócio? Isso é tão chato!!!!!!”

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria da Educação. **Matemática, 2º Ano do Ensino Médio**: Determinante de ordem 2 ou 3 e suas propriedades. Pernambuco: SEDUC, [2012]. 36 slides, color.

BERTOLINI, Marcel Vinhas. **Investigação Histórica da Matemática Chinesa: um estudo do "Nove capítulos""**. São Paulo: IME-USP, [2012]. 5 p.

CARDANO, Gerolamo, 1545 – **Ars magna ou as regras da álgebra**, Dover (publicado 1993).

CAUCHY, Augustin Louis, 1826 – **Exercices de Mathématiques** – França

DANTE, L. R.; **Contextos & Aplicações**. Ática, São Paulo, v.2, p.77-120, 2014.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray – **Linear Algebra**. Prentice Hall, New Jersey, 2. ed, p. 6, 1971

IEZZI, Gelson, 1939 – **Fundamentos de Matemática elementar**, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas: 43 exercícios resolvidos, 407 exercícios propostos com respostas, 302 testes de vestibular com resposta / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. – 7. ed – São Paulo: Atual, 2004.

JORDAN, Wilhelm, 1888 – ***Handbuch der Vermessungskunde*** (Manual de Geodésia) – 3. ed – Hannover.

LAPLACE, Pierre Simon, 1772 – **Teoria das probabilidades** – França

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm, 1666 – **De Arte Combinatória** – Leipzig

MÁRCIO, Magno. **Uma introdução do cálculo variacional no ensino da física.** Palmas: UFT, 2013. 66 p.

MAXIMA, Software. Disponível em http://maxima.sourceforge.net/download