UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOSÉ MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES

# CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA UMA MUDANÇA DE ATUITUDE NA POSTURA DAS ALUNAS DE UM CURSO DE PEDAGOGIA NO MUNICÍPIO DE TEÓFILO OTONI

Vitória da Conquista, BA
2014

M166c Magalhães, José Marcos Nascimento.
Contribuições da metodologia de resolução de problemas para uma mudança de atitude na postura das alunas de um curso de pedagogia no município de Téofilo Otoni / José Marcos Nascimento Magalhães, 2014.
124f.: il.; algumas color.
Orientador (a): Maria Deusa Ferreira da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2014.
Referências: f. 91-94.
1. Matemática – Resolução de probelmas. I Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
– PROFMAT

JOSÉ MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES

# CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA UMA MUDANÇA DE ATUITUDE NA POSTURA DAS ALUNAS DE UM CURSO DE PEDAGOGIA NO MUNICÍPIO DE TEÓFILO OTONI

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva.

Vitória da Conquista, BA
2014

JOSÉ MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES

# CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA UMA MUDANÇA DE ATUITUDE NA POSTURA DAS ALUNAS DE UM CURSO DE PEDAGOGIA NO MUNICÍPIO DE TEÓFILO OTONI

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

---

Prof.ª Dr.ª Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

---

Prof.ª Drª. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista, BA
2014

À **Deus** pela graça, pelo Dom da vida, da sabedoria e do discernimento.

À **minha esposa** Maria Selma, amiga, companheira, incentivadora, guerreira, presente em todos os momentos.

**Aos filhos** Maria Luiza e Marcos Vinícius pelo entusiasmo, pela alegria, pelo semblante angelical dispensado, e que me faz sorrir e ter vontade de continuar cada vez mais mesmo nos momentos de cansaço.

**AGRADECIMENTOS**

À Deus, por iluminar toda a minha existência e por ter colocado ao meu lado durante todos esses anos, pessoas amigas e companheiras, que caminharam, incentivaram e ajudaram, direta ou indiretamente, em toda a trajetória profissional e pessoal e também na concretização de mais esse sonho.

Aos professores do mestrado e aos colegas de turma, em especial, os amigos Alano, José Irmo, pelas tardes e noites de discussões intensas com o objetivo de entender e aprimorar ainda mais o conhecimento.

Aos demais colegas do curso, em especial às amigas Daniela, Adenise, Adriza e Cristiane (Cris), por compartilharem o conhecimento ajudando a tirar as dúvidas em sala de aula.

Ao amigo Toninho, esposo da Daniela, e à amiga Viviane, companheiros em todos os momentos.

À Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva, pela dedicação, apoio e por estar sempre disposta a perder as suas horas de descanso, para nos orientar durante todo o processo, nos recebendo em seu lar ou na universidade. Aprendi e cresci muito no processo de pesquisa e isto se deve ao acompanhamento com compromisso e dedicação ao trabalho desta orientadora. Pessoas assim merecem muito mais que elogios, agradecimento, desejo que sua estrela continue a brilhar ainda mais para que continue iluminando os caminhos de outras pessoas.

Às alunas do 4º Período do Curso de Pedagogia da FUPAC, unidade Teófilo Otoni, pelo empenho, boa vontade, dedicação e entusiasmo durante todo o processo de pesquisa por mim realizado com a Metodologia da Resolução de Problemas. A todas vocês o meu muito obrigado e desejo muito mais que sucesso, perseverança, fé, pois o trabalho é árduo, porém a recompensa é maior.

À Coordenadora do Curso de Pedagogia da FUPAC-TO, Marilda Souza Lima, profissional comprometida com a educação por ter entendido o objetivo e aprovado a proposta a ser desenvolvida com as alunas.

Aos meus pais, José Ferreira Magalhães e Jovelina do Nascimento Magalhães, pessoas sérias, comprometidas, com pouco estudo, mas que souberam educar toda a família no caminho do bem, com muito amor, dedicação e carinho.

Ao tio Petrônio, o "Tipepê", sempre disponível para ajudar e à tia Aparecida, pelas incansáveis orações rogando a Deus por mim, pelo meu sucesso, desde a fase de classificação quando da realização do processo de seleção para o mestrado até a defesa da presente dissertação.

Aos demais membros da família, sobrinhos, irmãos, cunhados pelo incentivo e pela colaboração.

À SBM e à CAPS que por meio das políticas públicas aplicadas à educação, nos ofertou esse Mestrado Profissional.

***"É difícil dizer o que é impossível, pois a fantasia de ontem é a esperança de hoje e a realidade do amanhã".***

Autor desconhecido.

## RESUMO

A dissertação ora apresentada foi desenvolvida no Programa de Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Campus UESB, Vitória da Conquista – Bahia. Ela teve como objeto de estudo investigar e relatar **quais contribuições o uso da metodologia de resolução de problemas trouxe para mudança de atitude na postura das alunas de um Curso de Pedagogia, no Município de Teófilo Otoni – MG e, consequentemente para a aprendizagem da matemática.** As atividades foram desenvolvidas em uma turma de 46 alunas do 4º período do Curso de Pedagogia no Município de Teófilo Otoni, MG, no horário normal das aulas de forma individual e/ou em grupos. Para a realização da pesquisa, fez-se a opção pela metodologia de natureza qualitativa, do tipo Pesquisa-Ação. Inicialmente foi estabelecido um acordo entre a coordenação do curso, o professor da disciplina e o grupo de alunas o que ficou denominado de Contrato Didático. Foram elaboradas listas com problemas matemáticos dos conteúdos presentes na Ementa do Curso de Pedagogia da FUPAC-TO. Todas as atividades foram elaboradas levando-se em conta, a necessidade de serem atraentes, de conter situações do dia-a-dia, vivenciadas pelas alunas, e, que provocassem bastante reflexão por parte das mesmas. Usou-se como Referencial Teórico as pesquisas de Polya, Onuchic e Allevato, Smole e Diniz, Vila e Callejo, Krulik e Reys, Itacarambi, Toledo e Toledo, Nacarato, Ponte, Brousseau, dentre outros. Assim, com a realização das atividades foi possível observar que o trabalho com a Metodologia da Resolução de Problemas se mostrou eficiente visto que as alunas se sentiram motivadas, passando a serem participativas, críticas, solícitas e apresentando espírito de cooperação mútua. Disso concluí-se que, ao trabalhar com a Metodologia da Resolução de Problemas, o professor conduz o aluno à mudança de atitudes, levando-o a ser um sujeito protagonista no processo ensino aprendizagem, desenvolvendo habilidades que serão necessárias para o enfrentamento de situações reais em seu cotidiano. Portanto, é importante frisar que esta metodologia deve fazer parte das atividades docentes dos professores da educação básica, principalmente os de Matemática.



**Palavras-chave:** 1. Resolução de Problemas. 2. Mudança de Atitude. 3. Aprendizagem da Matemática.

**ABSTRACT**

The time presented dissertation was developed in the professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT, Campus UESB, Vitoria da Conquista - Bahia. It had the object of study to investigate and report what contributions the use of problem-solving methodology brought change in attitude in the attitude of the students of a Pedagogy Course in the city of Teofilo Otoni - MG and consequently for learning mathematics using an educational proposal based on the Methodology of Troubleshooting. The activities was developed in a class of 46 students of the 4th Education Course of the period in the city of Teófilo Otoni, MG, in the normal class schedule individually and / or in groups. For the research, there was the option for qualitative methodology, the type Action Research. Initially an agreement was reached between the course coordinator, the subject teacher and the group of students, what was called the Didactic Contract. Then It was prepared lists with mathematical problems of the contents in the Summary of the Pedagogy Course of FUPAC -TO. All activities have been prepared taking into account also the need to be attractive, to contain everyday situations, experienced by the students , and that caused quite reflection by them. The activities were carried out individually and in groups. It was used as the Theoretical research: Polya, Onuchic and Allevato, Smole and Diniz, Vila and Callejo, Krulik and Reyes, Itacarambi, Toledo and Toledo, Nacarato, Bridge, Brousseau, among others. Thus, with the accomplishment of activities it was possible to notice that the work with the Methodology of Troubleshooting proved to be efficient in the teaching – learning process, as the students felt themselves motivated, they became participatory, critical, solicitous and presenting spirit of mutual cooperation. It is concluded that, to work with the Methodology of Troubleshooting, the teacher leads students to change of attitude, leading them to be a main subject in the learning process, developing skills that will be needed to face real situations in their daily lives. Therefore, it is important to note that this methodology should be part of teachers' teaching activities of basic education, especially math.

Keywords: 1. Troubleshooting. 2. Change of Attitude. 3. Learning of Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CBC – Currículo Básico Comum

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

CRV – Centro de Referência Virtual do Professor.

DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

FENORD – Fundação Educacional Nordeste Mineiro.

FUPAC – Fundação Presidente Antônio Carlos.

GDP – Grupo de Desenvolvimento Profissional.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

IES – Instituições de Ensino Superior.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PEAS – Programa Educacional sobre Afetividade e sexualidade.

PUC/MG – Pontifícia Universidade Católica, Minas Gerais.

SEE – Secretaria Estadual de Educação.

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

UFLA – Universidade Federal de Lavras.

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais.

UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Mucuri e Jequitinhonha.

UNEC – Universidade Estadual de Caratinga.

UNIPAC-TO – Universidade Presidente Antônio Carlos, Unidade Teófilo Otoni.

UNOPAR – Universidade Norte do Paraná.

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Trajetória profissional e motivações

Desde o início de minha trajetória estudantil sempre tive[1] um fascínio pela matemática e essa facilidade com a matéria fez com que eu estivesse sempre auxiliando os colegas e isto, com certeza, influenciou a decisão de me tornar professor de matemática como primeira opção de curso. Sou professor, graduado em matemática há vinte e cinco anos. Trabalho nas redes Municipal, Estadual e Particular de Ensino, no Município de Teófilo Otoni, MG. Venho durante todo esse tempo trabalhando na Educação Básica, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. E, sempre estive preocupado em melhorar a formação docente, para tanto, procurei participar dos cursos de formação oferecidos nestas Redes.

Além da preocupação com a formação profissional, preocupei também com a formação integral do aluno, para torná-lo um cidadão crítico no seu campo de atuação. Para isto participei de cursos de capacitação profissional voltados para a formação cidadã e me engajar nos grupos de atuação política, Movimentos Sociais, Conselhos Municipais, com o objetivo de buscar uma capacitação que propiciasse uma formação cidadã.

Em 1987, comecei a cursar Licenciatura em Matemática na Fundação Educacional Nordeste Mineiro – FENORD. Ainda no 2º ano de faculdade comecei a trabalhar em escolas públicas da cidade de Poté – MG e, no ano seguinte estava trabalhando já no Município de Teófilo Otoni, onde trabalho até os dias atuais. Essa experiência profissional, paralela à graduação, foi essencial para minha formação, pois, ao permanecer inserido no ambiente escolar, tive a oportunidade de participar de debates relacionados à Educação Matemática, proporcionando-me novas reflexões sobre a Matemática e articular a formação específica com a pedagógica.

Em 1988, participei do Curso de Formação para professores Docentes do Magistério oferecido pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, na Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, cujo objetivo foi propiciar estratégias para elaboração de materiais concretos – kit laboratório – esse material visava melhorar o ensino da matemática e da física.

No ano de 1996 participei do Curso de Capacitação sobre Resolução de Problemas, o qual foi desmembrado em pólos e foram construídos laboratórios de informática

[1] Neste capítulo escrevo na primeira pessoa, pois falo de minha trajetória até o ingresso no Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT e as motivações para o estudo do tema em pesquisa ora apresentado.

e tive a oportunidade de ser o Coordenador do pólo da Superintendência Regional de Ensino de Teófilo Otoni, instalado na Cidade de Teófilo Otoni. Este foi o primeiro contato com a Metodologia de Resolução de Problemas.

Em 2004, participei do Projeto de Desenvolvimento Profissional de Educadores – PDP, oferecido pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, cujo objetivo foi a elaboração das Propostas Curriculares para o Currículo Básico Comum. Antes de elaborarmos as propostas ocorreram vários encontros com debates e discussões relacionados à Matemática nos quais foi possível perceber um grupo heterogêneo de professores de Matemática, alguns abertos às propostas outros tradicionais e conservadores. Nesses debates, era possível perceber o fracasso do ensino da Matemática e a necessidade de a maioria dos professores adotarem uma nova proposta educacional, com o objetivo de buscar alternativas que viesse dar um novo sentido ao já desgastado ensino tradicional da Matemática por novas metodologias, entre elas a Resolução de Problemas.

Assim, sempre estive preocupado com essas questões e, por meio desses processos de formação, buscava mudar minha postura como professor e educador. Além disso, durante todos esses anos de docência tive a oportunidade de estar em contato com alunos de diversas idades, classes sociais e níveis de ensino, o que me fez perceber que, independentemente da idade, nível ou classe social, os alunos, geralmente, apresentam sempre dificuldades de aprendizagem da matemática. É comum chegarem a uma determinada série sem os pré-requisitos necessários para aquela etapa do ensino, tendo dificuldades até mesmo em realizar as operações fundamentais da matemática, não conseguindo fazer associações e inferências sobre conteúdos já trabalhados e, como reflexo, não conseguem resolver problemas que lhes são apresentados em sala de aula. Assim, a maioria dos alunos acabam ficando desmotivados e com baixa autoestima em relação à Matemática. Essa situação sempre me incomodou e motivou-me a buscar processos formativos visando melhorar o ensino de matemática.

Em 2008 iniciei a docência no Ensino Superior, na FUPAC-TO – Fundação Presidente Antônio Carlos, unidade Teófilo Otoni. Inicialmente nos Cursos de Matemática e Ciências da Computação, depois nos Cursos de Engenharia Civil, Sistemas de Informação e Pedagogia.

Em 2012 ao iniciar o trabalho com a turma do 4º período de curso de pedagogia, deparei-me com uma situação bastante interessante e que, com frequência, nos deparamos nos cursos que não são da área das ciências exatas. Logo nas primeiras aulas algumas alunas reclamavam que haviam escolhido o curso considerando que não queriam estudar matérias como matemática, física e química, pois tiveram dificuldades no ensino fundamental e médio. Outro fato ainda que me chamou bastante a atenção foi uma fala da coordenadora, pois devido ao fato de eu ser da área das exatas, a preocupação primeira dela foi de como seria trabalhado o conteúdo, considerando que aquelas alunas estavam ali sendo preparados para serem pedagogos e/ou serem professores que atuarão no Ensino Fundamental nos anos iniciais.

__ *vê lá como vai tratar os alunos, você não está na engenharia.*

Lembro-me muito bem que foram estas as palavras da coordenadora quando fui convidado para trabalhar no Curso de Pedagogia. Diante da situação ali apresentada pensei de que maneira desenvolver um trabalho que despertasse o interesse dos alunos do curso de pedagogia para que os mesmos pudessem perceber que a matemática não seria o empecilho no curso? De que maneira mostrar para a coordenação do curso de que a matemática poderia ser trabalhada com um enfoque diferenciado sem o rigor da análise matemática empregada nos cursos de licenciatura em matemática? Como mudar a postura das alunas do Curso de Pedagogia quanto à matemática? Como usar o potencial existente em cada aluna para mostrar a facilidade na aprendizagem da matemática e sua, consequente, aplicação em sala de aula? Procurei relacionar o trabalho já desenvolvido nas escolas, embora estivesse no ensino superior, a metodologia da resolução de problemas encaixaria perfeitamente para um trabalho proveitoso.

Em meio a todas essas inquietações, no ano de 2012 ao ingressar no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, comecei delinear a proposta do Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, a Dissertação de Mestrado, lembrei-me do trabalho que venho realizando na disciplina Matemática, no Curso de Pedagogia - UNIPAC-TO, em que utilizei como metodologia a resolução de problemas. Assim, ao discutir com a orientadora e com colegas do grupo e também com a coordenadora do referido Curso de Mestrado, definimos como tema a ser trabalhado no TCC relatar o trabalho que vem sendo desenvolvido com as alunas do 4º Período do Curso de Pedagogia da FUPAC o que me levou a pergunta diretriz: **quais contribuições o uso da metodologia de resolução de problemas trouxe para mudança de atitude na postura das alunas de um Curso de Pedagogia, no Município de Teófilo Otoni – MG e, consequentemente para a aprendizagem da matemática?**

A partir da pergunta diretriz traçamos como objetivos do trabalho:

- Mostrar a importância da Resolução de Problemas como uma metodologia propícia à aprendizagem da matemática para professores das séries iniciais;
- verificar como a utilização da Resolução de Problemas contribuiu para

melhorar a motivação dos futuros professores das séries iniciais para o ensino da matemática; e consequentemente sua aplicação quando os mesmos estiverem atuando em suas escolas de trabalho ou salas de aula;

- verificar se a Resolução de Problemas estimulou o trabalho em equipe e desenvolveu nas alunas a capacidade de interpretação, desenvolvimento de estratégias, argumentação e expressão de suas ideias de modo objetivo e claro.

Portanto, diante do até aqui exposto, para melhor desenvolvimento do trabalho foi necessário realizar um aprofundamento teórico sobre a metodologia da resolução de problemas e formação matemática de professores das séries iniciais, buscando conhecer as pesquisas já realizadas sobre essa temática e, nessas, leituras melhor situar o trabalho de pesquisa. Desse modo, no próximo capítulo apresento esse aprofundamento teórico.

# 2 A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

## 2.1 Desenvolvimento histórico e reflexões teóricas

A Metodologia da Resolução de Problemas se constitui como uma das tendências da educação matemática e vem sendo tratada em diversas pesquisas da área. Segundo Onuchic e Allevato (2004), nas décadas de 60 e 70 o ensino da matemática foi influenciado pelo movimento da matemática moderna. Esse movimento apresentava uma matemática fortemente estruturada e apoiada na lógica, na algébrica e na topologia enfatizando a teoria dos conjuntos. Esse modelo, excessivamente formal, "distanciando-se das questões práticas" (p. 215), não logrou êxito, uma vez que alguns questionamentos ainda permaneciam:

> Estariam essas reformas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia? Buscavam elas ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático? (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 215).

Desse modo, no bojo das discussões sobre o fracasso do movimento da matemática moderna, ainda na década de 70, deu-se início às pesquisas sobre Resolução de Problemas e seu impacto no currículo (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004). Assim, a Metodologia da Resolução de Problemas passou a ser considerada relevante para os educadores matemáticos que passaram a ver essa metodologia como importante para a aprendizagem matemática. Sendo assim, "no fim dos anos 70 a Resolução de Problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro" (ONUCHIC e OLEVATTO, 2004, p. 215).

Na década de 80, as pesquisas sobre Resolução de Problemas avançaram bastante e muitos recursos foram desenvolvidos focando o trabalho de sala de aula, tais como: Coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades, avaliação de desempenho com o uso da Resolução de Problemas. Tudo isso com o intuito de auxiliar os professores a fazer uso da Metodologia da Resolução de Problemas em seu trabalho docente. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004).

Ainda segundo Onuchic e Allevato (2004), devido a uma falta de consenso sobre as diferentes concepções entre os educadores sobre "o significado de Resolução de Problemas ser o foco da matemática escolar" (p. 216), não foi possível chegar a um ponto comum. Com relação a esse fato, devido a essas diferentes concepções, Schroeder e Lester *apud* Onuchic e Allevato, (2004), "apresentaram três caminhos diferentes para abordar Resolução de Problemas":

a) Teorizar sobre Resolução de Problemas: O professor irá tratar o assunto como um novo conteúdo. Nessa perspectiva a Metodologia de Resolução de Problemas se transforma em uma nova teoria, trabalhando desta forma o professor irá destacar o modelo de Resolução de Problemas proposto por Polya ou até mesmo alguma variação deste.
b) Ensinar a resolver problemas: ao trabalhar desta forma, o professor estará dando ênfase na parte do conteúdo matemático, a maneira como estes serão ensinados. Assim, a resolução de problemas se torna uma mera aplicação de conceitos nos exercícios a serem resolvidos pelos alunos. Sobre isso, Nunes (2010, p. 83) afirma que: "o professor que ensina *para* resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros".
c) Ensinar matemática através de Resolução de Problemas: nessa perspectiva o ensino se dá por meio da Resolução de Problemas, permeando todo o processo, o que segundo Nunes (2010, p. 84), "a expressão *"através de"* significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema [...]". Com a Resolução de Problemas o professor irá apresentar situações que irão gerar novos conceitos ou conteúdos e o aluno tornar-se-á construtor do seu próprio conhecimento. O professor tem a responsabilidade de criar um ambiente que motive e estimule a participação dos alunos nas aulas.

Portanto, para Onuchic e Allevato (2004, p. 222) "na sala de aula, onde os professores têm adotado essa abordagem, o entusiasmo de professor e alunos é alto e ninguém quer voltar a trabalhar com a forma de ensino tradicional". As pesquisadoras ressaltam que "embora na teoria essas três concepções de trabalhar Resolução de Problemas possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequências" (p. 216).

A concepção de Carvalho (1990), sobre a Resolução de Problemas, dentro do processo da aprendizagem de Matemática, é de que "não se aprende Matemática para resolver problemas e, sim, se aprende Matemática resolvendo problemas" (p. 82). A ideia de Carvalho é de que a Matemática se torna mais agradável e de fácil compreensão através de situações problemas apresentados pelos professores que irão gerar no aluno a expectativa da pesquisa, da busca pela solução que emergirá em sala de aula, para a construção do conhecimento matemático. Corroborando com o pensamento de Carvalho, este pesquisador também acredita na melhoria da qualidade de ensino e da aprendizagem por parte do educando quando o professor investe no ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas.

Em seus trabalhos desenvolvidos com crianças do Ensino Fundamental anos iniciais, as pesquisadoras Smole e Diniz (2001) ressaltam que na década de 80 a resolução de problemas era abordada dentro de três concepções: *como meta, processo ou habilidade básica.* (...) mais recentemente, já nos anos 90, a de Resolução de Problemas ganha uma outra dimensão, sendo apresentada como uma Metodologia para o Ensino de Matemática e, como tal, passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem da Matemática.

Ainda na década de 80, conforme os PCNs (1987), a Metodologia da Resolução de Problemas é posto com um recurso para ser discutido e debatido ao longo dos anos, destacando que sua origem está na necessidade de resolver situações diárias nos diversos campos como a economia, as ciências e situações inerentes à própria matemática. Ainda segundo o documento, "tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos" (p. 32).

O documento propõe que seja colocado o foco na metodologia para facilitar a aprendizagem da Matemática.

> Ao colocar o foco na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que poderia ser resumida nos seguintes princípios:
> • o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> • o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> • aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
> • o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
> • a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCNs, 32-33).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2008), ficou estabelecido que o ensino e a aprendizagem oferecidos nas escolas devem agregar valores que desenvolvam o raciocínio e, consequentemente, vai propiciar ao educando a apropriação do conhecimento através da investigação. Nesse sentido o professor deve fazer escolhas corretas de problemas e conteúdos a serem trabalhados priorizando a qualidade em detrimento da quantidade.

> Toda situação de aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação do conhecimento. (BRASIL, 2008, p. 70).

Ainda, no referido documento, os conteúdos estão organizados em quatro eixos: *Números e operações, Funções, Geometria, Análise de dados e Probabilidade,* conforme orientações do PCNEM. A orientação é de que deve haver uma articulação entre os quatro eixos e para isto, é necessário que o professor intencionalmente, escolha problemas que promovam essa articulação, buscando inclusive a retomada de conteúdos já estudados em anos anteriores e no ensino fundamental, promovendo a consolidação de ideias e conceitos já estudados.

> Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade. (BRASIL, 2008, p. 70).

Na Proposta Curricular contida no CBC – Currículo Básico Comum – do Estado de Minas Gerais, elaborado pela S.E.E. (Secretaria de Estado da Educação) (2006), em consonância com as DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, está contemplado o trabalho do professor através da *resolução de problemas* propondo que, "problemas interessantes despertam a curiosidade dos estudantes", estabelecendo ainda que:

> a solução de uma ampla variedade de problemas desenvolve a capacidade de abstração do aluno, bem como a habilidade de atribuir significado aos conceitos abstratos estudados. Ao contrário do que ocorre em vários livros-textos atuais, deve-se privilegiar a diversidade em oposição à repetição e à quantidade. (CRV, PROPOSTAS CIRRICULARES, 2006).

Para House (1997, p.218), "a resolução de problemas é matemática em elaboração".

De todo o exposto, ressaltamos que o educador que decide trabalhar com a Metodologia de Resolução de Problemas deve ter clara sua proposta, consciente de que o objetivo é que o aluno adquira habilidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico favorecendo a aprendizagem dos conteúdos ensinados. Logo, a qualidade ou diversidade de problemas deve se sobrepor à quantidade repetitiva que, por muitas vezes, torna cansativa a tarefa, inviabilizando a proposta. (VILA e CALLEJO, 2009; ITACARAMBI; DANTE, 2010).

## 2. 2 Algumas pesquisas realizadas sobre o tema resolução de problemas

Com o avanço das discussões teóricas em torno da Metodologia da Resolução de Problemas, a partir dos anos 80, vários trabalhos foram realizados utilizando essa metodologia. A seguir destacamos alguns desses trabalhos.

Milani (2011) fez um estudo com quarenta e seis alunos do primeiro ano do Ensino Médio em uma escola pública na cidade de Ponte Nova MG, destacando que antes da aplicação da metodologia, apenas 5 alunos da turma apresentavam notas superiores a 80 % e 15 alunos apresentavam notas inferiores a 60 %. Ainda, segundo o pesquisador a turma era bastante heterogênea e sem muito interesse ou facilidade em relação à aprendizagem da matemática e aqueles que tinham aproveitamento suficiente não eram participativos nas atividades propostas na sala de aula. O pesquisador contou com o apoio da direção e da comunidade escolar. Após a aplicação da metodologia, pôde perceber uma evolução dos alunos bem como uma mudança de postura dos pesquisados com relação à participação no desenvolvimento das atividades na sala de aula. Assim, Milani ao fim do trabalho apontou mais pontos positivos do que negativos e indica essa metodologia a outros pesquisadores.

Poffo (2010) realizou um trabalho com alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental na Escola Estadual de Educação Básica Domingos Sávio, no Município de Ascurra, no Estado de Santa Catarina, durante o ano letivo de 2010. O trabalho foi desenvolvido através de problemas geradores, com situações problemas contextualizados. O trabalho foi desenvolvido em grupos de três ou quatro alunos e a professora/pesquisadora teve o papel de observadora, esclarecer dúvidas e incentivadora dos alunos durante a aplicação das atividades. Ao final de todas as etapas de trabalho propostas, eram realizadas plenárias onde a professora/pesquisadora analisava todas as soluções encontradas, sanava dúvidas, buscava o consenso junto à turma para a solução do problema e fazia a formalização do conceito ou do conteúdo matemático. Utilizando a Metodologia proposta por Onuchic. Ao final a pesquisadora concluiu o trabalho afirmando que a Metodologia da Resolução de Problemas exige do professor uma maior dedicação e o mesmo deve fazer a avaliação contínua do seu trabalho, e um planejamento adequado com uma seleção ideal das situações problemas a serem desenvolvidas com os alunos. Afirma ainda que a Metodologia da Resolução de Problemas possibilita aos alunos aplicarem os conhecimentos já adquiridos e desenvolve nos mesmos a capacidade de administrar as informações obtidas ao seu redor. Possibilita ainda aos alunos a aprimorarem a capacidade investigativa e a perseverarem na busca pelos resultados para a solução das situações problema. Conclui ainda a pesquisadora que o mesmo acontece com o professor que adota a Metodologia da Resolução de Problemas, pois trabalhando com a referida metodologia, as aulas se tornam mais atraentes e motivadoras.

Hubner (2009) desenvolveu uma pesquisa com 26 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Privada de Ensino na Cidade de Erechin, no Estado do Rio Grande do Sul. Dentre as atividades desenvolvidas, foram selecionadas cinco para análise, considerando que estas evidenciariam aspectos relevantes ao foco da pesquisa, bem como favoreceriam potencializar o aprendizado e desenvolvimento dos estudantes com a Metodologia de Resolução de Problemas. A pesquisadora concluiu que as análises evidenciaram que, quando os estudantes compreendem a estrutura do problema, identifica o que é solicitado, assim como seus dados e variáveis, facilita (viabiliza) aos mesmos, além da esquematização do problema, o estabelecimento de hipóteses de solução.

Ferreira (2007) realizou um trabalho com alunos da primeira série do Ensino Médio de dois colégios na Cidade de Terra Roxa, no Estado do Paraná. Inicialmente foi sugerido aos alunos que criassem suas estratégias de resolução procurando compreender os caminhos propostos pela pesquisadora. Os problemas foram apresentados de forma gradativa de dificuldades, para que os alunos fizessem a aplicação de diferentes estratégias de resolução de problemas. Com este trabalho, a pesquisadora comprovou que através da Metodologia da Resolução de Problemas o professor se situa na condição de incentivador, facilitador, interventor das ideias apresentadas pelos alunos, de modo que estas fossem produtivas e levassem os alunos a pensar e gerar ideias de resolução. Constatou ainda que a Metodologia de Resolução de Problemas propiciou um ambiente de cooperação entre os pesquisados e que a referida metodologia é muito rica para o estudo nas diversas áreas do conhecimento. A pesquisadora destacou ainda que embora a Metodologia de Resolução de Problemas seja viável para o professor, este não deve ficar preso a ela devido alguns inconvenientes no processo, dentre eles a falta de tempo.

Souza (2013) desenvolveu uma pesquisa com estudantes de duas turmas de 1º ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio do IFNMG *campus* Januária, cidade situada no Norte de Minas Gerais. Cada turma era composta de aproximadamente 30 alunos. O objetivo da pesquisa era investigar quais problemas matemáticos estão presentes nas disciplinas técnicas do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, e verificar a possibilidade de integração do ensino da Matemática com o ensino das disciplinas técnicas do Curso Técnico em Agropecuária utilizando uma proposta de ensino baseada na Metodologia da Resolução de Problemas.

A pesquisa realizada através da pesquisa de natureza qualitativa, do tipo pesquisa-ação foi desenvolvida em quatro fases. Na primeira fase foi aplicado um questionário para 20 professores das disciplinas técnicas com o objetivo de obter informações sobre quais problemas específicos dessas disciplinas necessitam de conteúdos matemáticos e quais conteúdos eram requeridos para resolvê-los. Na segunda fase a pesquisadora observou os cadernos dos alunos e observou aulas de professores das disciplinas técnicas para perceber a presença da matemática nessas disciplinas e, como isso, elaborar problemas.

Ainda, visando obter informação sobre a natureza das disciplinas técnicas, a pesquisadora fez buscas em sites de empresas como EMBRAPA – Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária e EMATER – Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural, com o objetivo de encontrar informações e orientações relacionadas à agropecuária. Com base nessas informações, e também em sites dos outros Institutos Federais, que oferecem o curso Técnico em Agropecuária, foi possível observar situações que envolviam a aplicação da matemática nas disciplinas técnicas. A terceira fase da pesquisa consistiu na elaboração de atividades com problemas criados pela professora pesquisadora.

A quarta fase da pesquisa consistiu na aplicação das atividades com os problemas sendo resolvidos de forma individual e/ou em grupos de quatro ou cinco alunos. A pesquisadora atuou nos grupos apenas como interventora e incentivadora na resolução das atividades propostas. Ao final do trabalho a pesquisadora concluiu que é possível promover um ensino integrado entre a matemática e as disciplinas técnicas do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio. Todavia ressalta a necessidade de se discutir melhor o currículo desses cursos para melhor viabilizar a integração. Também foi constatado pela pesquisadora que os alunos se tornaram mais críticos e participativos nas aulas após o trabalho realizado com a Metodologia de Resolução de Problemas.

Todos esses trabalhos nos mostram a importância da Metodologia de Resolução de Problemas o que nos levou a realização de nosso trabalho com alunas de um curso de Pedagogia na disciplina matemática.

## 2.3 O ensino da matemática através da resolução de problemas: aspectos didáticos e metodológicos

Há uma desmotivação por parte do aluno quanto à resolução de problemas, pois, muitas vezes o problema é tratado com uma certa rigidez ou tem que usar determinadas fórmulas para conseguir as respostas e estes só tem uma maneira de ser resolvido. Para a maioria dos alunos, problemas em matemática são sinônimos de armadilhas nas quais os alunos não veem possibilidade de solucionar ou encontrar a resposta procurada. Cabe ao professor criar um ambiente favorável onde os alunos não tenham medo de expressar suas opiniões sem a preocupação primeira de acertar ou errar. (TOLEDO e TOLEDO, 2009).

Segundo Cagliari apud Itacarambi (2010), “O aluno muitas vezes não resolve um problema de matemática, não porque não sabe matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema” [...](p. 13). Ainda para o pesquisador, “Não basta ensinar só as relações matemáticas: é preciso também o português que a matemática usa” [...] (p. 14).

É tarefa do professor gerir todo o processo de aprendizagem e mostrar que existem diferentes formas de resolução para um problema proposto e consequentemente, incentivá-los à busca de diferentes soluções para o problema, deixando que os alunos discutam em grupos as várias maneiras ou métodos para resolução dos mesmos. Ademais, os problemas devem conter aspectos que vão além de meros cálculos envolvendo operações, pois, como é sabido, um dos objetivos no novo processo ensino-aprendizagem, é a formação integral do educando, tornando-o um cidadão crítico diante da realidade que o cerca.

O professor deve permitir que os alunos expressem suas ideias, discutam com os colegas, pois, isto permite uma maior troca de experiências e amplia o vocabulário matemático e linguístico inserindo-os no universo matemático. Deve permitir ainda que a criatividade seja utilizada e os alunos podem resolver um problema através de desenhos, expressar a resposta através de um texto registrando o pensamento e os passos utilizados para a obtenção da resposta desejada. (TOLEDO e TOLEDO, 2009; CAGLIARI, 2003; SMOLE e DINIZ, 2001).

Polya (2006) foi um dos primeiros matemáticos a escrever sobre o que é resolver um problema tendo dedicado boa parte de suas pesquisas em descobrir estratégias de como resolver problemas e como ensinar essas estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolvê-los. Em seu livro, A arte de resolver problemas, escrito pela primeira vez em 1945 – cujo título original é: How To Tolve It: A New Aspect of Mathematical Method – ressalta que “resolver problemas é uma habilidade prática”, (p. 4) como nadar, esquiar ou tocar piano:

você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. Para Polya somente através da imitação e prática é que se consegue êxito na atividade. Ainda segundo o pesquisador, "o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas, deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e propiciar-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar" (p. 4). Ainda segundo esse autor o indivíduo que quiser nadar tem que ir até a água, ou seja, tem de ir a um lago, rio, piscina, etc., se o indivíduo quer se tornar um bom resolvedor de problemas tem que resolver problemas, ou seja, têm que ir a livros, fontes de pesquisa que tenham os problemas como algo instigador à descoberta e ao incentivo à pesquisa. Na mesma obra, apresentou um esquema para resolução de problemas, composto de quatro etapas.

Para Polya para resolver um problema, o aluno deve:

1º) compreender o problema: verificar quais são os dados, qual é a incógnita, ou seja o que se pretende;

2º) elaborar um plano para resolver o problema: verificar se já foi resolvido um problema correlato, se é possível utilizá-lo na resolução, verificar se é possível reformulá-lo;

3º) executar o plano de ação: verificar cada passo do processo, se tais passos estão corretos;

4º) fazer o retrospecto ou verificação: verificar o resultado, os argumentos utilizados, se é possível chegar aos resultados por caminhos diferentes e se é possível utilizar tais procedimentos em outro problema.

Para Polya (2006), é possível que um aluno tenha uma idéia genial e chegue à resposta sem observar tais passos, porém, "alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter *compreendido* o problema" (p. 5). Será em vão executar detalhes, sem ter estabelecido o plano de execução da atividade.

Todavia, como já vimos, a Metodologia da Resolução de Problemas avançou bastante na pesquisa em ensino de matemática. Segundo Itacarambi (2010), a Metodologia da Resolução de Problemas é uma atividade de investigação, cujo ponto de partida é a análise qualitativa, ou seja, ter ideia da situação, delimitá-la, ter claro o objetivo, isto é, o que se busca. Dentro desta proposta, é imprescindível ao professor, criar um ambiente de motivação e de desafio para envolver o aluno na atividade, pois trabalhando com entusiasmo a tarefa difícil pode se tornar mais fácil.

Para Dante (2010, p. 58) e Krulik e Reys (1997, p.189), é importante apresentar aos alunos várias estratégias de resolução de problemas mostrando-lhes que não existe uma estratégia única, "ideal, infalível". Que "cada problema exige uma estratégia diferente" para chegar à sua solução. Em seguida propõem cinco *estratégias* para a resolução de problemas que são variações das estratégias baseadas no modelo proposto por Polya:

**1ª estratégia:** tentativa e erro organizados;

**2ª estratégia:** procurar padrões ou regularidades para poder generalizar;

**3ª estratégia:** resolver primeiro um problema mais simples;

**4ª estratégia:** Reduzir à unidade;

**5ª estratégia:** fazer o caminho inverso e também simulações.

Onuchic e Allevato (2008), juntamente com o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP – ao discutir sobre a melhor forma de trabalhar com a Metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula, considerando as dificuldades em leitura e interpretação de textos, apresentados pelos alunos, nos trabalhos realizados durante as suas pesquisas, propõem o seguinte roteiro a ser seguido pelo professor em sala de aula:

1º) Formar grupos e entregar a atividade (o problema): inicialmente o professor apresenta o problema aos alunos que, distribuídos em pequenos grupos, deverão ler, interpretar e compreender o problema. As pesquisadoras lembram ainda que nesta etapa do trabalho o conteúdo necessário ou mais indiciado para a resolução do problema ainda não foi trabalho pelo professor, e o problema apresentado é denominado de **problema gerador**, e este é que conduzirá ao conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

2º) Observar e incentivar: nesta etapa, o professor não mais terá o papel de transmissor do conhecimento, este deverá apenas se ater ao papel de observador, irá analisar o comportamento dos alunos estimulando-os e deve fazer a intermediação levando os alunos a pensar e fazer troca de ideias, enquanto tentam resolver o problema.

3º) Auxiliar nos problemas secundários: neste momento o professor deverá incentivar "os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolver o problema"; deverá estimulá-los a escolher métodos diferenciados a partir dos recursos que dispuserem. Ressalta-se, no entanto a necessidade do atendimento aos alunos em suas dificuldades, e deverá se colocar como um interventor e questionador, acompanhar as explorações feitas pelos alunos e deverá ajudá-los, quando necessário, a resolver problemas secundários.

Segundo Nunes (2010), esse trabalho deverá ser feito, considerando que, muitas vezes as dificuldades,

> Trata-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuidade do trabalho. (NUNES, 2010, p. 92).

4º) Registrar as resoluções na lousa: cada grupo deverá eleger um representante e estes deverão registrar as resoluções discutidas pelo grupo na lousa, estando as resoluções certas ou erradas assim como também aquelas feitas por diferentes processos deverão ser apresentadas para que todos os alunos possam analisá-las.

5º) Realizar uma plenária: aqui o professor convida todos os alunos para discutirem suas resoluções e soluções de seus colegas, nesse momento os alunos terão a oportunidade de defender seus pontos de vista e esclarecer possíveis dúvidas ainda existentes. O professor deverá se colocar "como guia e mediador nas discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois este é um momento bastante rico para a aprendizagem" (p. 84).

6º) Buscar um consenso: nesta etapa, "após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto" (p. 84)..

7º) Formalizar o conteúdo: depois de esgotadas todas as discussões e sanadas todas as dúvidas existentes, o professor irá finalizar e formalizar o conteúdo. Para Onuchic, este trabalho é "exclusivo do professor". Neste momento o professor fará uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, "destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto" (p. 85). Este momento é definido pela pesquisadora como "formalização".

Segundo Onuchic e Alevatto *apud* Nunes (2010, p. 92), "nessa metodologia, os problemas deverão ser apresentados aos alunos antes mesmo de ter sido apresentado aos mesmos o conteúdo matemático próprio ou necessário para a resolução do problema proposto".

Ainda para as pesquisadoras,

> na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o *problema* é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUCHIC E ALEVATTO, 2011, p. 81).

Assim, analisando o trabalho de Polya e de Onuchic e Allevato, percebe-se concepções distintas sobre essa metodologia. Então: **O que é resolver um problema?**

São vários os significados para a palavra problema que encontramos no dia a dia. Segundo Van de Walle (2001) *apud* Onuchic (2009), "muitas vezes se fala em trabalhar com problemas para ensinar Matemática sem que haja clareza do que é um problema". Há muitas concepções diferentes de problema. Ao consultar o minidicionário da língua portuguesa, Ruth Rocha (2010) apresenta duas definições para problema: "Questão para ser resolvida por processos científicos ou racionais" e "Tudo que é difícil de resolver ou explicar" (p. 565). Já no dicionário de Aurélio (2000), tem-se a seguinte definição: "Questão matemática proposta para que lhe dê a solução" e "Questão não resolvida, ou de solução difícil" (p. 558). Porém entende-se que o significado da palavra problema vai muito além disso. Os autores definem problemas como algo inatingível, distante. Este pesquisador não corrobora com o pensamento dos autores na definição de problema apresentada nos dicionários, pois, para nós, resolver problemas é tão salutar quanto praticar qualquer atividade prazerosa do dia a dia.

Intuitivamente falando, problema é uma situação em que um indivíduo se encontra imerso e a partir do qual este indivíduo vai pensar em situações ou estratégias para que possa ser resolvido, exigindo de imediato um pensamento mais crítico e aperfeiçoado para a resolução. Muitas vezes o que é problema para um nem sempre o é para outros, pois dentro da vivência de cada um talvez haja situações em que o indivíduo não interessa ou não tem o interesse de resolver. Dependendo do grau de envolvimento de cada um, de questões socioculturais, da experiência e do conhecimento relacionado a uma determinada situação, esta pode ser considerada como um problema para uma pessoa e para outra não. (DANTE, 2010; TOLEDO e TOLEDO, 2009).

Para Lester *apud* Dante (2010, p. 12), em seu livro "Formulação e resolução de problemas de matemática": "Problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução".

Para Carvalho (1990, p. 82), "um problema é uma situação onde ocorre um desequilíbrio, ou seja, que exige uma solução não imediata, mas para a qual dispomos de meios intelectuais de resolução".

Krulik e Reys (1997, p. 270), entendem por problema, "uma situação que se enfrenta sem contar com um algoritmo que garanta uma solução".

Para Itacarambi (2010, p. 12), "em geral considera-se problema como uma situação que apresenta dificuldades para as quais não há uma solução evidente". Já para Villa e Callejo (2006, p. 29), é "uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la...".

Analisando os PCNs (Brasil, 2008, p.33), tem-se a definição de problema em matemática como sendo "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la".

Vila e Callejo definem problema como sendo:

> a situação em que apresenta uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao sujeito que tenta respondê-la porque não dispõe de um algoritmo que relacione os dados e a incógnita ou os dados e a conclusão e deve, portanto, buscar, investigar, relacionar, implicar seus afetos, etc., para fazer frente a uma situação nova. (VILA e CALLEJO, 2006, p. 71-72).

Ainda segundo os pesquisadores, "é, pois, um conceito relativo ao sujeito que tenta resolvê-lo e ao contexto em que a questão é apresentada".

Van de Walle (2001) *apud* Onuchic (2008, p.10), define problema como sendo "qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta". Para Onuchic (2008, p.10), problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Para nós, problema é toda atividade a ser desenvolvida pelo aluno, na qual não se tem uma resposta de imediato e exige do mesmo raciocínio e estratégias para chegar à solução.

Dentro do modelo pedagógico atual, o professor pega um problema previamente elaborado, já conhecendo as respostas previamente elaboradas por outros, e repetem as fórmulas já prontas com os alunos, não trabalha o pensamento intuitivo com o aluno para que este busque soluções para resolvê-los, este método revela-se inadequado para o ensino, pois não permite ao professor a oportunidade de desenvolver um trabalho intelectual mais profundo com o aluno em sala de aula. Para nós, isso não é resolver problemas é apenas exercitar, colocar em prática conhecimentos prévios ou uma mera aplicação de fórmulas ou técnicas de resolução e ainda memorização de regras, onde o aluno irá mostrar o que conseguiu aprender no processo apresentado pelo professor.

É verdade que o professor tem um cronograma, um Planejamento a cumprir, uma Ementa a ser esgotada, e, sob este pretexto, utiliza de artifícios já previamente elaborados para resolver problemas. Com isto o aluno passa a repetir fórmulas, previamente elaboradas, sem muitas vezes entender o que está fazendo.

Ainda vigora na sala de aula o ensino tradicional com repetição de exercícios previamente elaborados, e muitos professores são adeptos a este modelo. Destaca-se que este modelo, privilegia aqueles alunos que são capazes de memorizar regras e resolver tais exercícios no menor tempo possível. Estes professores muitas vezes não aceitam ou sequer trabalham problemas contextualizados com os alunos. Em contrapartida, do outro lado deste contexto, tem aqueles profissionais um pouco mais abertos à produção do conhecimento, onde a discussão é o ponto central do processo e que trabalham situações problemas em sala de aula, mas necessitam que estes já estejam previamente elaborados e com respostas prontas para apenas aplicá-los em sala de aula.

É necessária a produção do conhecimento com qualidade, e para que essa qualidade seja atingida não basta ao aluno conhecer truques e fórmulas previamente prontas para memorizá-las, é necessário compreender todo o processo, pois, quando há a compreensão do processo pelo aluno, o aprendizado se torna mais eficaz, mais *gostoso.* (SADOVSKY, 2010; TOLEDO e TOLEDO, 2009).

Quanto à classificação de problemas a serem trabalhados com os alunos, Stancanelli (2001) destaca dois tipos: problemas convencionais e não convencionais. Para a autora, as características dos problemas convencionais são:

> de estar ligado a um conteúdo específico ou técnica; sempre ter solução e resposta única que, em geral, é numérica; apresentar todos os dados de que o resolvedor necessita para sua solução e não possuir dados supérfluos. (STANCANELLI, 2001, p.106-107).

Os problemas não convencionais são problemas “que rompem com uma das características dos problemas convencionais” (STANCANELLI, 2001, p.107).

Ainda para Stancanelli,

> ao trabalhar com problemas não convencionais, os alunos têm contatos com diferentes tipos de textos e desenvolvem sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolver a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto a fim de lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando aqueles supérfluos. Planejando o que fazer, como fazer, encontrando uma resposta e testando para verificar se ela faz sentido, o aluno compreende melhor o texto. (STANCANELLI, 2006, p.107).

A autora apresenta ainda outras definições de tipos de problemas, observando não ter o intuito de classificar, mas tão simplesmente auxiliar o trabalho do professor em sala de aula para que estes possam identificar dificuldades ou evitar que estas existam com seus alunos:

1) Problemas *sem solução:* segundo a autora, esse tipo de problema mostra que

nem sempre os dados que aparecem no problema serão usados e que nem todo problema tem solução.

2) Problemas com mais de uma solução: existem problemas que admitem mais de uma solução e que existem várias maneiras para resolvê-lo, mesmo havendo várias soluções, uma delas é a correta.

3) Problemas com excesso de dados: com esse tipo de problema, nem todos os dados que aparecem no texto são utilizados para sua resolução. Segundo a autora, trabalhar com esse tipo de problema, "rompe com a crença de que um problema não pode permitir dúvidas e de que todos os dados do texto são necessários para a sua resolução" (p. 110). Ademais obriga o aluno a fazer a leitura do problema, forçando-o a selecionar as informações necessárias para a resolução do problema.

4) Problemas de Lógica: a solução desse tipo de problema não é numérica e exige do aluno o uso do raciocínio dedutivo, propiciando ao mesmo uma experiência bastante proveitosa para o desenvolvimento de pensamentos como "previsão de checagem, levantamento de hipóteses, busca de suposições, análise e classificação" (p. 114). O uso de estratégias para a resolução como tabelas, construção de listas e diagramas, tentativa de erro, são importantes para a resolução dos problemas de lógica.

Toledo e Toledo (2009) classificam os problemas em: tradicionais e não convencionais. Para os autores, problemas tradicionais são aqueles que não levam o aluno a pensar e raciocinar para traçar caminhos que os conduzam à solução, sendo assim, não oferece nenhuma contribuição para formação crítica e para a autonomia dos alunos ao resolver uma situação problema do cotidiano. Polya (2006) classifica esse tipo de problema como rotineiro. São exemplos de problemas tradicionais os chamados:

1) Problemas do tipo arme e efetue: são problemas que exigem apenas técnicas operatórias e memorização das operações básicas na matemática. Para Toledo (2009, p. 85), "o arme e efetue nem pode ser classificado como problema, pois em geral não estimula o aluno a se empenhar na busca da solução".

2) Problemas de enredo: são problemas que envolvem operações que estão sendo estudadas pelos alunos no momento em que o professor está trabalhando determinado conteúdo. Os problemas de enredo desenvolvem no aluno a capacidade de expressar linguagem simbólica as situações descritas na linguagem comum.

3) Problemas de aplicação: são problemas contextualizados, elaborados a partir de situações que envolvam o cotidiano do aluno, a fim de que o mesmo perceba que a matemática está muita mais próxima do que ele imagina, e se conscientize da necessidade da

mesma no seu dia a dia. Esse tipo de problema requer o uso de conceitos, técnicas e processos matemáticos para encontrar a solução desejada.

Os problemas não convencionais são os problemas que o aluno não necessita efetuar cálculos ou “contas” para a obtenção da resposta desejada. Ainda segundo Toledo e Toledo (2009, p. 85), esse tipo de problema “desenvolve no aluno a capacidade de planejar, elaborar estratégias gerais de compreensão do problema, tentar soluções e avaliar a adequação do raciocínio desenvolvido e os resultados encontrados”. E ressaltam ainda, que esse tipo de problema aguça mais a curiosidade, pois o aluno não está obrigado a fazer contas e encontrar respostas exatas e com isto ficam mais à vontade para tentar adivinhar a solução, verificar regras ou tentar definir um padrão para encontrar a solução desejada.

Dante (2010, p. 24-28) classifica os problemas como:

1) Exercícios de reconhecimento: cujo objetivo é fazer com que o aluno, relembre conceitos, propriedades e definições dos conteúdos já estudados.

2) Exercícios de algoritmo: são exercícios que são resolvidos apenas executando as operações básicas. O objetivo é fazer com que o aluno, relembre os conteúdos já estudados.

3) Problemas padrão: são problemas cuja resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos aprendidos e não exige a aplicação de nenhuma estratégia. Tem como objetivo recordar e fixar os fatos básicos por meio de algoritmos envolvendo quatro operações fundamentais. De modo geral não aguça a curiosidade do aluno nem o desafia. Eles se subdividem em: problemas-padrão simples resolvidos com uma única operação e problemas-padrão compostos resolvidos com duas ou mais operações.

4) Problemas-processo ou heurísticos: esse tipo de problema aguça a curiosidade dos alunos e permite que os mesmos desenvolvam a criatividade, a iniciativa e o espírito criador. São problemas que na sua resolução, envolve operações que não estão contidas de forma explícita em seu enunciado. Uma das características é que não são traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação direta de algoritmos.

5) Problemas de aplicação: são aqueles que contemplam situações reais do cotidiano do aluno e exigem o uso da matemática em sua resolução. São também denominados de situações-problema contextualizados. Em via de regra, exigem pesquisa e levantamento de dados e podem ser utilizados em outras áreas do conhecimento.

6) Problemas de quebra-cabeça: são problemas que desafiam os alunos, envolvendo-os de forma dinâmica. Esse tipo de problema constitui a chamada matemática recreativa, e segundo (Dante, 2010), “sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade de perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da

solução” (p. 28).

Independentemente da definição, percebe-se que para os autores e pesquisadores, defendem que é importante que os professores trabalhem com situações problemas em sala de aula, considerando que os problemas estimulam a criatividade e aguçam a curiosidade dos estudantes. Para Dante (2010, p.50-52), um problema será considerado um bom problema, se apresentar as seguintes características: “Ser desafiador, real do interesse do aluno”; ainda “Ser o elemento desconhecido de um problema desconhecido; Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas” e, por fim, “ter um nível adequado de dificuldades”.

## 2.4 Diferenças entre exercícios e problemas

Dante (2010, p. 48) ressalta que “é preciso fazer uma distinção entre o que é exercício e o que é um problema”: exercício “serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento”, enquanto problema “é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução”. Vila e Callejo (2006, p. 72) classificam os problemas definidos por Toledo como tradicionais de exercícios rotineiros, pois apresentam “baixo nível de demanda cognitiva”, enquanto problemas no entender da pesquisadora “são as atividades mais abertas a investigações, com alta demanda cognitiva e afetiva”, pois, exigem selecionar, combinar e adaptar conhecimentos.

Para Itacarambi (2001, p. 12), qualquer atividade procedimental que seja realizada dentro ou fora da sala de aula é considerada problema, não havendo diferença entre exercícios e problemas. Para Onuchic e Allevato (2009), todos são considerados como problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 23), “um problema é uma questão para a qual não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido”. Ainda para os autores, problemas e exercícios têm sempre uma coisa em comum: “em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido”. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013, p. 23).

Vila e Callejo (2006, p. 154) classificam as atividades como: exercícios, questões práticas, problemas não-contextualizados, situações-problema e problemas de estratégia. Para os autores a classificação desta forma se dá em "função da finalidade e das características operacionais".

Os exercícios "são propostos com a finalidade de mecanizar/automatizar determinados procedimentos apresentados em aula", bem como "ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de repetição ou de execução de algoritmos". São caracterizados por que seus enunciados contêm indícios suficientemente claros dos procedimentos que se espera que sejam utilizados, são precisos e concisos, propõem a obtenção de um único nível de resposta e não são propostos de forma isolada, mas em uma lista repetitiva ou hierarquizada.

As questões práticas*,* "são propostas estreitamente relacionadas com conhecimentos matemáticos e tem por finalidade fixar tais conhecimentos mediante uma conexão com a vida real ou com uma pseudo-aplicação da matemática. Podem ser caracterizados porque os enunciados: costumam ser verbais, tem indícios claros dos procedimentos que se espera que sejam utilizados e referenciais facilmente identificáveis. Ademais as questões práticas *s*ão propostas durante o desenvolvimento da unidade didática em que foram apresentados os procedimentos necessários para a resolução e, em geral, imediatamente depois dessas apresentações (contextualização matemática). Costumam fazer parte de lista ou de relações.

Os problemas não-contextualizados "são propostos aos alunos com a finalidade de capacitá-los a utilizar os conhecimentos matemáticos apresentados em aula e também a desenvolver a capacidade de resolver problemas" (p. 155). A diferença é que as *questões práticas* implicam a aplicação de procedimentos matemáticos e os *problemas* implicam o uso de um saber matemático geral.

Algumas características dos problemas não-contextualizados: geralmente há mais de um procedimento de resolução, são propostos fora da unidade didática que desenvolve os procedimentos matemáticos que estão implicados em sua resolução ou dentro dela, mas necessitam de vários procedimentos, ou as estratégias gerais são mais importantes no processo de resolução do que os próprios conhecimentos envolvidos. Ademais, os problemas exigem uma argumentação do processo seguido, costumam ser únicos e não aparecem em listas de atividades ou caso faça parte de alguma lista, não há nenhum tipo de relação entre esta, "nem em contexto, nem em conteúdo" (p. 156). Na sua resolução, o processo e as estratégias de tipo intelectual desempenham um papel transcendental.

Quanto às situações-problema, os professores utilizam com o objetivo de que os "alunos construam conhecimentos, modelos ou processos matemáticos necessários para resolvê-las” (p. 156). Nesse caso, o problema constitui um instrumento para um novo campo de conhecimento ou para aprofundar algum já conhecido. As características das situações-problema são: “nunca fazem parte de uma lista, a singularidade é essencial, os seus enunciados costumam ser imprecisos, abertos e são propostos antes das apresentações/formulações/construções dos conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução” (p. 156).

Os trabalhos com problemas de estratégia têm como objetivo, a elaboração de estratégias e processos que possam ser úteis em várias situações apresentadas para os alunos. As características dos problemas de estratégia são: a riqueza da solução recai na explicitação e na argumentação do procedimento da resolução, não costumam fazer parte de listas, os enunciados apresentam uma proposta de desafio para o resolvedor e os alunos têm acesso fácil aos conteúdos matemáticos necessários para a resolução dos problemas. Com os problemas de estratégia, a elaboração da estratégia seguida é mais importante que a construção do saber. (VILA E CALLEJO, 2006).

## 2. 5 Por que formular problemas?

Muitas vezes somos surpreendidos com uma pergunta dos alunos: “pra que estudar isso? Isso será útil na minha vida?” Quando o aluno faz uma pergunta desse tipo, significa que o sentido de aprendizagem ou da busca pelo conhecimento ainda não está inculturado nele. O professor procura dar respostas diversas e sempre com o intuito de mostrar ao aluno a necessidade para o estudo: “Você precisará deste conteúdo para a prova”, ou ainda “você precisa aprender porque um dia vai fazer vestibular ou um concurso e isso cai nas provas”. O aluno não vê sentido naquilo que está sendo apresentado, não vê nenhuma aplicação prática de acordo com sua vivência.

A matemática é uma área do conhecimento voltada para o raciocínio lógico e tem uma ligação direta com o cotidiano do educando, a metodologia empregada no ensino da matemática deve valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos, através da expressão de suas ideias.

Segundo Dante (2010),

> a formulação e a resolução de problemas trazem essa possibilidade em vários aspectos: as situações-problema desenvolvem o poder de comunicação da criança, quando trabalhadas oralmente, e valorizam o conhecimento prévio do aluno, uma vez que dão a oportunidade de ele mesmo explorar, organizar expor seus pensamentos, (...). (DANTE, 2010, 18).

Nos PCNs (Brasil, 1988), temos as finalidades do ensino da matemática no Ensino Fundamental, dentre elas destacamos que o objetivo geral é fazer com que os alunos sejam capazes de resolver situações problemas, saber validar estratégias e resultados, bem como desenvolver formas de raciocínio e processos, tais como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilização de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.

Para Toledo e Toledo, (2009, p. 6),

> a matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, etc". A Matemática desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" (TOLEDO e TOLEDO, 2009).

Para Chica (2001),

> Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que pretende. Nesse processo aproxima-se a língua materna e a matemática, as quais se complementam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica. O aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e a ideias matemáticas. (CHICA, 2001, p. 151).

Diante das afirmativas, percebe-se que o objetivo com o ensino através da formulação e resolução de problemas é que o aluno desenvolva o seu raciocínio, consiga pensar produtivamente e ao mesmo tempo ter a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática. O Ensino da Matemática através da Metodologia da Resolução de Problemas libera a criatividade do aluno, além de tornar as aulas mais criativas e desafiadoras.

De acordo com Broetto (2004) *apud* Silva e Filho (2011, p.16),

> [...] é preciso integrar a Resolução de Problemas ao dia a dia da sala de aula, permitindo que os alunos construam e desconstruam conceitos, que façam conjecturas, trabalhem em equipe, questionem, duvidem, ganhem autoconfiança, conheçam suas virtudes, reconheçam suas fraquezas, mas principalmente, permitindo que eles encantem com a matemática.

Para Silva e Filho (2011, p. 16),

> Sendo assim, cabe ao professor, que optou em trabalhar com a metodologia da Resolução de Problemas, procurar erradicar antigas crenças e colocar o conhecimento matemático como uma atividade possível e ao alcance daqueles que com ele desejarem se encantar. (SILVA e FILHO, 2011, p. 16).

## 2.6 Das vantagens do uso da metodologia de resolução de problemas

Uma das vantagens do uso da Metodologia de Resolução de problemas em sala de aula é que os alunos saiam de uma situação de inertes, de desinteresse para uma situação de sujeitos participantes tornando-se protagonista dentro do processo ensino aprendizagem. Assim, quando os alunos entendem a metodologia, além de aplicar as técnicas de resolução, estes são capazes de resolver qualquer situação problema advinda em seu dia a dia, tornando-se cidadãos críticos, participativos e com isso poderão tomar decisões adequadas/acertadas com mais inteligência.

Embora seja trabalhoso para um professor que ao invés de dar fórmulas prontas para o aluno, cria oportunidades para que os mesmos procurem respostas, é muito importante a metodologia do estudo através da resolução de problemas, pois o aluno tem uma participação efetiva nas atividades e um melhor aproveitamento na aprendizagem. Dá trabalho, mas o resultado é bastante proveitoso. Para muitos professores é bem mais fácil colocar a teoria no quadro, deixar que os mais capazes resolvam exercícios propostos, com isso o professor vai manter a “disciplina” da sala.

O professor que propõe um trabalho diferenciado terá dificuldades, pois,

> esse professor, como é de esperar, estará mais exposto, pois numa sala em que há troca de ideias dificilmente há silêncio. A capacidade de criticar não pode ser limitada aos exercícios pedagógicos, por isso talvez seja tentador voltar aos métodos tradicionais. (TOLEDO e TOLEDO, 2009, p. 5).

Para Toledo e Toledo (2009), o professor que faz tal experiência é capaz de perceber o quanto cresce a turma, o quão proveitoso é o trabalho, “no entanto quem já teve a oportunidade de experimentar essa relação de criação na sala de aula sabe como é instigante, como alimenta o espírito e estimula a ir mais longe, criar mais, ouvir mais, aprender mais”. (TOLEDO e TOLEDO, 2009, p. 5).

Uma das desvantagens do uso da Metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula é o fato de os alunos ainda não possuir os pré-requisitos básicos para esta etapa do conhecimento e/ou não possuir habilidades de leitura e de interpretação de texto. Esse fato no momento da resolução de um problema faz com que o aluno se sinta desmotivado a resolver o problema e o professor não sinta atraído a utilizar essa metodologia de ensino, optando, desta forma, por uma aula tradicional, e, em alguns casos temos um professor despreparado para o uso e aplicação da metodologia.

Outro fator que dificulta a aplicação da metodologia, tornando uma desvantagem é a falta de tempo necessário para um bom planejamento e execução das atividades, considerando a carga horária e o número de aulas semanais trabalhadas pelo professor, bem como o planejamento extenso para a série o qual, muitas vezes, é priorizado pelo professor.

Segundo Dante, (2010); Toledo e Toledo, (2009); Vila e Callejo, (2009), embora existam todas essas dificuldades, há ainda os profissionais que optam por trabalhar com esta metodologia, e ao final dos trabalhos, têm-se alunos mais críticos, inseridos e fica criado um ambiente de cooperação e motivação entre os estudantes, e este ambiente se torna propício à aprendizagem e a matemática se apresenta mais prazerosa e agradável.

# 3 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

## 3.1 Da realidade encontrada

Ainda predomina nas IES um modelo educacional no qual o professor faz a exposição do conteúdo matemático, resolve alguns problemas para explicar como resolvê-los, para em seguida colocar uma série de exercícios ou uma lista nos quais o aluno colocará em prática as técnicas ou passos aprendidos. Desta forma, o aluno estará apenas imitando a técnica apresentada pelo professor, havendo aí uma predominância da técnica da memória e repetição, mantendo uma prática "de aulas expositiva e livresca" quando faz o uso de resolução de problemas é feito apenas para ilustrar uma aula ou para confirmar teorias (Marandino, 1997; D`Ambrósio, 1993). Segundo D`Ambrósio (1993, p. 38), "dificilmente um professor de Matemática formado em um programa tradicional estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares".

Segundo Ludwig e Groenwald (2006), o professor de Matemática deve ser mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, e ainda organizador da aprendizagem. Não se admite, portanto que este apenas exponha os conteúdos em sala, mas que forneça condições necessárias para resolver situações problema que o aluno não tem condições de realizar sozinho. O professor deve ser incentivador da aprendizagem, estimular a cooperação e deve ser avaliador de todo o processo. Deve ser um profissional que seja capaz de avaliar e compreender as mudanças psicológicas pelas quais os alunos estão passando.

Tem-se uma realidade distante do ideal, daquilo que é pensado e proposto na educação. Uma realidade que é de tirar o sono de qualquer profissional. Violência nas escolas falta de respeito para com os profissionais da educação, Alunos acusados de não saber nada, profissionais insatisfeitos com a proposta educacional e a falta de valorização profissional principalmente na questão salarial, cansados de estar diante de adolescentes e jovens que parecem desprezar o que a escola tem a lhes oferecer. (SADOVSKY, 2010).

Segundo Pimenta e Libâneo (1990, p. 10),

> sabemos que as múltiplas dificuldades que incidem nas atividades do magistério – por exemplo, os baixos salários, as más condições de trabalho e as deficiências da formação profissional – advêm fundamentalmente de condicionantes estruturais da sociedade e do sistema de ensino. É inquestionável que as transformações no ensino são inseparáveis das transformações sociais mais amplas.

Para Nacarato *apud* Torrente (2014, p.1), o ofício do Magistério “sempre foi sofrível e desgastante para os que nele atuam”. Ainda para a pesquisadora, esta profissão sempre foi marcada por conflitos e tensões que se variaram em momentos históricos diferentes ao longo destes séculos e as dificuldades encontradas pelos profissionais desde a década de 30 são as mesmas encontradas pelos profissionais em tempos atuais.

Nóvoa *apud* Torrente (2014), afirma que somente após o século XVIII, é que a profissão de professor se consolida no cenário nacional com a tutela do estado quando este assume a educação o que antes era de responsabilidade da igreja, caracterizando o que o autor chama de “autonomia profissional”. Em contrapartida, porém, fica estabelecida uma nova ideologia no trabalho profissional. Aos professores ficou a exigência de uma licença profissional para o exercício da profissão, representando um marco dentro do processo de profissionalização da atividade docente. Os profissionais ganharam um Estatuto próprio, porém o ofício docente ficou subordinado às propostas dos sistemas de governo.

Embora existissem todos esses contratempos, o professor era visto com muito respeito, como peça fundamental dentro da sociedade, gozava de um status social, o que não existe nos dias atuais. Os profissionais não têm autonomia, não são respeitados e nem valorizados pela sociedade e ainda vivem “à mercê dos mandos e desmandos dos gestores”

## 3.2 A Formação do professor que atua nos anos iniciais

Segundo Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 23), “a formação profissional docente inicia-se desde os primeiros anos de escolarização”. Ainda segundo as pesquisadoras, para muitos autores, alguns profissionais são influenciados por modelos de docentes com os quais conviveram durante todo período escolar, principalmente nos cursos de magistério. Até a década de 90, a formação de professores para atuar no Ensino Fundamental anos iniciais se dava em nível médio e nestes cursos muitas vezes não tinha educadores matemáticos para trabalhar a disciplina de forma voltada para a metodologia da matemática, o que fazia com que os “Cursos de Magistério”, assim eram denominados, oferecesse uma formação voltada para os processos metodológicos e com isso ficava um vazio muito grande na área do conhecimento matemático.

> Se os cursos de habilitação em magistério pouco contribuíram com a formação matemática das futuras professoras, os cursos de pedagogia, na maioria das instituições superiores, mostravam-se ainda mais deficitários. (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2011, p. 18).

Ainda segundo as pesquisadoras, diante dessa colocação, é possível conjecturar que "as professoras naquele período, pouco compreendiam das novas abordagens apresentadas para o ensino de matemática nos documentos curriculares" (p. 18). Atualmente "a formação docente para a atuação nas séries iniciais do ensino fundamental vem ocorrendo nos cursos de Pedagogia e Normal Superior" (p. 21). Ainda segundo as pesquisadoras, a maioria dos cursos de pedagogia dá prioridade às questões metodológicas na formação docente, porém as disciplinas que contemplam os temas possuem uma carga horária bastante reduzida.

Para as pesquisadoras, nos últimos 30 anos no Brasil, muitas reformas curriculares foram realizadas, e considerando estas reformas, seria bastante natural encontrar docentes com práticas inovadoras em sala de aula, vez que estes foram expostos às novas práticas de ensino da Matemática. Contudo, esta não é uma realidade que se encontra atualmente nos cursos de pedagogia, há um distanciamento entre a formação acadêmica dos docentes, e as atuais tendências curriculares. Como consequência desse distanciamento entre a prática docente escolar e os princípios estabelecidos nos documentos curriculares, existem ainda hoje na maioria das escolas, educadores que trazem arraigados consigo crenças sobre o que seja a matemática, bem como seu ensino e aprendizagem, e que por muitas vezes essas crenças acabam por contribuir na formação e prática desses profissionais. Historicamente, todas as crenças são construídas, portanto, necessário se faz que nos cursos de graduação e formação profissional, toda a trajetória do formando e dos profissionais seja acompanhada, identificando as crenças e em seguida serem trabalhadas para que sejam rompidas e ou transformadas. A maneira como o docente ensina, traduz de sobremaneira a concepção do que este tem de matemática, de ensino e de aprendizagem. (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2011).

> (...) qualquer formador(a) que atue num curso de pedagogia sabe que isso não é real. Por um lado, a formação matemática dessas alunas está distante das atuais tendências curriculares; por outro lado, elas também trazem marcas profundas de sentimentos negativos em relação a essa disciplina, as quais implicam, muitas vezes, bloqueios para aprender e para ensinar. (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2011, p. 23)

Segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 261), é necessário buscar uma formação inicial e continuada "em que o professor incorpore a reflexão sobre a sua prática" e ao mesmo tempo, possibilite ao educando a busca pelo conhecimento e pelo gosto da aprendizagem.

Essa formação não deve consistir apenas em treinamentos de técnicas ou métodos a serem aplicados em sala de aula, mas, sim para ajudar aos futuros professores no desenvolvimento profissional e concomitantemente a este, provocar a autonomia intelectual em si próprio e nos alunos. (NACARATO, MENGALI e PASSOS, 2011; SMOLE e DINIZ, 2006; ONUCHIC e ALLEVATO, 2004).

Nos estudos realizados, destacamos os trabalhos de Sadovsky (2009), Toledo & Toledo (2010) e Fiorentini e Lorenzato (2009), uma vez que esses autores colocam a necessidade do professor se sentir desafiado e desafiar o aluno para a descoberta e ainda definem os profissionais da educação que atuam na disciplina de Matemática como matemáticos e educadores matemáticos. Para os pesquisadores, há uma diferença entre o ser professor(a) e ser educador(a). O professor(a) é aquele(a) profissional que se preocupa apenas em (re)passar o conteúdo, cumprir uma ementa ou currículo, enquanto *o educador* se preocupa com a formação integral do indivíduo tornando-o um cidadão crítico diante da situação encontrada, do contexto no qual está inserido. Na maioria das vezes isso não acontece com os professores de matemática.

Para Fiorentini e Lorenzato (2009), o matemático coloca a educação a serviço da matemática enquanto o educador matemático *faz* o caminho inverso, coloca a matemática a serviço da educação.

> O *matemático,* por exemplo*,* tende a conceber a matemática como um fim em si mesma, e, quando requerido a atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação *para* a matemática, priorizando os conteúdos formais e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em matemática. O *educador matemático*, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social das crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação *pela* matemática. Ou seja, o educador matemático, na relação entre educação e matemática, tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas. (FIORENTINI e LORENZATO, 2009, p. 3).

Diante desse contexto, faz-se necessário uma formação docente voltada para o processo pedagógico e não apenas a formação específica da matemática. É necessário que o educador esteja sempre provocando o aluno ao desafio promovendo a aprendizagem do mesmo, levando-o ao desafio.

> Desafiar o aluno significa propor situações que ele considere complexas, mas não impossíveis. Trata-se de gerar nele uma certa tensão, que o anime a ousar, que o convide a pensar, a explorar, a usar conhecimentos adquiridos e a testar sua capacidade para a tarefa que tem em mãos. Trata-se, ainda, de motivá-lo a interagir com seus colegas, a fazer perguntas que lhe permita avançar ... (SADOVSKY, 2009, p. 14).

Ainda segundo Sadovsky, antes de lançar o desafio é fundamental que os educadores acreditem no potencial de aprendizagem dos alunos. É condição *sine qua non.*

> Ao lançar o desafio, é necessário, sem dúvida, *acreditar* no potencial dos alunos, mas essa crença não pode ser inventada. Tem de estar respaldada em conhecimentos que possibilitem refletir sobre qual será o ponto de partida para a atuação. (SADOVSKY, 2009, p. 14).

Esta tarefa fica mais difícil para os profissionais da educação, considerando que os alunos sentem que não podem, ou não mostram interesse pelos estudos, ou simplesmente não querem. Porém cabe ao educador tornar interessante e dinâmico o processo ensino aprendizagem. É preciso pensar em um processo educativo, onde o educador possa refletir os seus atos, que este se sinta estimulado a trabalhar e consequentemente possa incentivar os alunos a se interessarem mais pelos conteúdos e consequentemente produzir conhecimento. Somente através de uma formação voltada para o desenvolvimento pedagógico é possível obter o êxito almejado.

Segundo Moreira e David (2010, p. 14), a partir da década 90, foram desenvolvidos vários trabalhos sobre a formação docente, inclusive dissertações e teses. “Entretanto, raramente são focalizadas de forma específica as relações entre os conhecimentos matemáticos veiculados no processo de formação e os conhecimentos matemáticos associados à prática escolar docente”

Para Mediano (1997, p. 94-98), a escola é o local ideal para trabalhar a formação do professor, pois, ali todos participam do processo e “discutem as mesmas questões e se capacitam coletivamente para as transformações necessárias”. No ambiente escolar é possível fazer um trabalho coletivo, bem como promover a articulação entre a teoria e prática profissional, estimula “o diálogo da escola com a comunidade” e possibilita “uma avaliação” contínua do fazer possibilitando a reformulação e adequação às necessidades do grupo ao longo do trabalho.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira, (2013), o professor dever ser investigador e promover a investigação em sala de aula. Deve *desafiar os seus alunos*, garantindo que os mesmos se sintam motivados a realizar as atividades propostas e que estas atividades sejam verdadeiros desafios para os alunos criando nestes “um espírito interrogativo perante as idéias matemáticas” (p. 48). Deve *avaliar o progresso de seus alunos*, acompanhar o modo de como os mesmos vão se desenvolvendo, procurar compreender os seus pensamentos, questionando, pedindo explicações das ações realizadas. Deve *raciocinar matematicamente,* tal situação segundo os pesquisadores ocorre no momento em que o aluno formula um pergunta na qual o professor não havia imaginado ou mesmo quando os alunos apresentam uma conjectura em que o professor não havia pensado e esta não era muito evidente, situação por várias vezes já vivida por este pesquisador. Ainda segundo os pesquisadores, o professor muitas vezes tem dificuldades de compreender a idéia dos alunos na questão matemática apresentada, e tem de reformular a sua própria, considerando os elementos apresentados naquele instante. “É uma ocasião privilegiada para o professor evidenciar como se aborda a tese de conjecturas, pensando em voz alta com os alunos” (p. 50).

O professor deve ainda *apoiar o trabalho dos alunos,* para os pesquisadores, no desenvolvimento de uma investigação promovida pelo professor investigador, “essa sua ação incide sobre duas áreas principais: a exploração matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos na aula” (p. 51). O professor deve promover a reflexão de seus alunos sobre o trabalho que está sendo desenvolvido e para que a investigação matemática ocorra com sucesso, é necessário que o professor conheça muito bem os seus alunos e, estabeleça com estes um ambiente de cooperação para a aprendizagem e ainda deve ter uma flexibilidade para lidar com situações novas que poderão surgir durante todo o desenvolvimento do processo. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013).

# 4 A METODOLOGIA DE PESQUISA

## 4.1 Da metodologia do trabalho

Foi visto que na pesquisa é de fundamental importância a participação do pesquisador na condição de observador e investigador, pois é através das observações que poderá fazer as intervenções necessárias no momento do processo de aprendizagem. A nossa postura durante toda a pesquisa foi de observador e investigador e as intervenções foram realizadas no momento oportuno, quando foi solicitado na carteira individualmente ou nos grupos. A presente pesquisa foi realizada em quatro etapas. Na primeira etapa foi apresentada a proposta para a Coordenadora do Curso expondo o objetivo da pesquisa e o trabalho a ser desenvolvido com as alunas. Após aprovação da coordenação, partiu-se para a segunda etapa da pesquisa que foi apresentar às alunas a proposta de trabalho a ser desenvolvida durante todo o semestre letivo. Após o diálogo com as alunas, apresentação da proposta, aceitação e aprovação da mesma, partiu-se então para a elaboração de um plano de trabalho e os compromissos a serem assumidos por cada um comumente chamado de Contrato Didático.

Formalizou-se o contrato didático, conforme estudos de Reis e Zuffi (2007); Fiorentini e Lorenzato (2009), sendo que não foi elaborado um contrato formal, registrado, por escrito, apenas verbalmente com as alunas, determinando as regras do jogo na sala de aula. Ficou estabelecido que não haveria um jeito único para resolver os problemas, poderia ficar livres para resolver da forma que fosse conveniente para o entendimento. Que as atividades poderiam ser resolvidas de forma individual ou em grupos, sem estabelecer limite para o número de integrantes nos grupos, mas ao final de cada atividade seria realizada uma plenária e os resultados seriam discutidos e apresentados com todos os registros com o máximo de detalhes bem como todo o processo desenvolvido na resolução da atividade. Ficou estabelecido ainda que as notas do período seriam compostas pela avaliação de todo o trabalho desenvolvido, além das notas das provas e trabalhos individuais a serem aplicadas conforme Regimento da Instituição.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009) e Reis e Zuffi (2007), o termo Contrato didático, foi introduzido pelo pesquisador francês Guy Brousseau (1988), para explicar as relações existentes na sala de aula entre professor e aluno. Ainda segundo os pesquisadores,

> Contrato didático significa as atitudes, comportamentos, posturas e ações dos alunos, que são esperadas pelo professor, e aquelas do professor, que são esperadas pelos alunos. Esse contrato pode ser *implícito ou explícito,* podendo ser negociado

entre professor e aluno. (FIORENTINI e LORENZATO, 2009, p. 47).

Após a discussão e elaboração do contrato didático, partiu-se para a terceira etapa do trabalho que foi a elaboração das listas de atividades a serem aplicadas em sala de aula e as listas de atividades auxiliares a serem resolvidas pelas alunas, como tarefa extraclasse. A quarta etapa do trabalho constitui-se da aplicação das atividades para as alunas em sala. O processo foi desenvolvido durante todo o semestre letivo.

A presente pesquisa foi realizada no Curso de Pedagogia da UNIPAC-TO, tendo como seu público alvo alunas do 4º período, sendo o trabalho desenvolvido através da Metodologia da Pesquisa Qualitativa, na modalidade de pesquisa-ação.

A instituição, o curso e a turma foram escolhidos, por ser este um local de trabalho do pesquisador com o conteúdo de matemática. A turma era composta por 46 estudantes alunas e o foco do trabalho se concentrou na apresentação de atividades com problemas geradores para em seguida fazer a formalização do conteúdo. Para tanto, procurou-se apresentar situações problemas que se mostrassem interessantes e desafiadoras para as alunas, baseadas na Metodologia da Resolução de Problemas.

Outro fato a destacar foi a graduação no nível de dificuldade das atividades. Buscou-se alternar atividades com grau de complexidade diferente em determinadas ocasiões, com graduação crescente de dificuldade nas atividades, pois era importante manter a motivação e o interesse das alunas.

## 4.2 O processo da pesquisa

Todo o trabalho foi desenvolvido baseado na Metodologia de Resolução de Problemas. As atividades foram realizadas individualmente, em duplas ou em grupos sem um limite no número de componentes dos grupos, pois, o objetivo de agrupá-los foi proporcionar-lhes a oportunidade de discutir as questões entre si, para que assim desenvolvessem a habilidade de argumentação e socialização do raciocínio empregado durante a realização das atividades.

A pesquisa foi realizada em horário normal da aula de matemática e o tema da pesquisa não provocou alteração no programa da disciplina, pois os problemas foram elaborados com os conteúdos pertinentes à Ementa do curso, os quais são: *Conjuntos numéricos, Operações fundamentais, Números inteiros e decimais, Frações, Expressões numéricas e algébricas, Produtos notáveis, Fatoração, Sistemas de medidas, Matemática* *comercial e Geometria.* As atividades elaboradas foram conduzidas no sentido de abarcar estes conteúdos, embora tenham aparecido conteúdos que não estavam previstos e que precisavam ser trabalhados com as alunas.

Cada situação problema era sempre colocada antes da introdução dos conteúdos propostos ou de qualquer assunto referente ou necessário para a resolução da atividade. Todo o trabalho foi desenvolvido sem falar em métodos para a resolução, passos a serem seguidos ou observados para a obtenção do resultado, seguindo a metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2008).

Ao final de cada atividade, era solicitado que um representante de cada grupo expusesse o resultado encontrado, a forma de resolução do problema, se foram encontradas outras maneiras para resolver os problemas propostos. Em seguida, havia discussão dos resultados sob a coordenação do professor pesquisador e ao final de cada aula, após a formalização do conteúdo foi solicitado das alunas que falassem sobre a produção daquele dia, o sentimento, as dificuldades encontradas.

Houve problemas em que algumas alunas usaram do raciocínio indutivo para dar a resposta, outras usaram a regra de três simples e houve também o uso da proporção para a resolução dos problemas.

Ao final da última atividade elaborada para a pesquisa, foi solicitado das alunas que elaborassem problemas a partir de dados fornecidos, ou mesmo diferentes dos dados fornecidos, com resolução dos exercícios elaborados. O processo de criação de problemas foi tão somente para verificação da capacidade criativa das alunas e não será objeto de estudo. Após a elaboração da atividade os resultados eram discutidos com as alunas, sendo solicitado que cada uma ou o grupo caso fosse desenvolvido pelo grupo fosse até à lousa apresentar os problemas criados. Qual foi a surpresa do pesquisador ao observar em alguns casos o grau de complexidade na elaboração do problema pelas alunas, embora nem elas, conforme depoimentos das mesmas percebessem tal complexidade no momento da elaboração do problema. Embora algumas alunas tenham se destacado na elaboração dos problemas, a maioria apresentou dificuldades para elaborarem as atividades a partir dos dados apresentados, bem como a partir de outros dados. Ao final das atividades todas entenderam a necessidade de praticar a criação de atividades a serem desenvolvidas com os alunos para não ficarem tão somente à procura de atividades em livros didáticos.

Ao final dos trabalhos foi aplicado um questionário para verificar o que aprenderam; se o trabalho desenvolvido melhorou a aprendizagem; se seria possível aplicar a metodologia ou os problemas estudados em sala de aula. Foram recolhidos os questionários e analisadas as respostas dadas pelas alunas.

Cada aluna será identificada por aluna 1, aluna 2, aluna 3, assim por diante para preservar a sua identidade. E os grupos serão denominados de grupo 1, grupo 2, etc. No texto, ao se referir aluna 1, aluna 2, etc., se refere sempre à mesma pessoa. Quanto aos grupos, não foi possível estabelecer o mesmo critério, considerando que em cada dia os membros dos grupos variavam.

Os problemas trabalhados em sala de aula com as alunas serão classificados conforme as teorias utilizadas.

1 – Problemas tradicionais ou exercícios rotineiros e de algoritmos:

- Arme e efetue: Os problemas 1 e 4 da lista 1 e o problema 1 da lista 2.
- Problemas de enredo ou problemas-processo ou Problemas de estratégias: O problema 4, da lista 3 e os problemas 3 e 4 da lista 4.
- Problemas de aplicação ou situações problemas: Os problemas 2, 4 e 5 da lista 1, os problemas 2, 3 e 5 da lista 2, os problemas 1, 2, 3, 5 e 6 da lista 3 e os problemas 1 e 2 da lista 4.
- Problemas padrão: As atividades 3 e 4 da lista auxiliar 1, apêndice D, 2 e 3 da lista auxiliar 2, apêndice E e 4 e 5 da lista auxiliar 3, apêndice F.

2 – Problemas não convencionais ou questões práticas:

- São os problemas de número 4 das listas 2 e 4.

# 5 DOS RESULTADOS E DAS DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Nesse capítulo serão apresentados os problemas desenvolvidos em sala de aula bem como os resultados, questionamentos e discussões feitas pelas alunas e professor/pesquisador no momento da aplicação. Foram resolvidos problemas referentes aos conteúdos a serem estudados no curso e também problemas para os anos do Ensino Fundamental e Médio. A escolha se deu em virtude da Ementa do Curso, bem como para uma melhor preparação das alunas para o enfrentamento em sala de aula. Ademais a preparação para as séries iniciais, as mesmas terão no 5º período no conteúdo Metodologia da Matemática. Serão apresentadas também algumas respostas dadas no questionário aplicado pelo professor/pesquisador e alguns problemas elaborados pelas alunas. Foram desenvolvidas várias atividades em classe e extraclasse, porém apenas doze, foram escolhidas para apresentação da pesquisa.

Sempre após as discussões e sanadas as dúvidas, individualmente e nos grupos, as alunas iam até a lousa, apresentavam os resultados e, após a exposição dos mesmos e sanadas as dúvidas, era feita a formalização do conteúdo, seguindo as orientações de Onuchic e Allevato (2004) abordado no capítulo dois deste trabalho.

## 5.1 O desenvolvimento das atividades em sala de aula

Inicialmente foi entregue para as alunas uma lista de problemas envolvendo conteúdos diversos a serem resolvidas pelas mesmas, conforme a metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2008). Algumas reclamaram pelo fato de nunca terem visto os conteúdos ou nunca terem realizado tarefa semelhante, sempre tinham um pontapé dado pelo professor para então resolverem exercícios semelhantes. Houve situações em que ao propor às alunas que pensassem um pouco para buscar soluções aos problemas apresentados, algumas davam respostas do tipo: *"você está sendo pago para ensinar",* logo teria que primeiro ensinar como fazer para que depois elas pudessem resolver os demais exercícios. Estavam acostumadas com um trabalho do tipo: siga o modelo. Para nós muito mais do que estarem passivas aguardando o início por parte do professor, isso também evidencia a falta do pré-requisito que as mesmas não possuíam no início do trabalho. Muitas vezes foi necessário lembrá-las do Contrato didático e sugerir que tentassem resolver os exercícios individualmente, buscando estratégias de resolução, que verificassem se era possível resolver o exercício de várias maneiras, e em seguida discutissem o resultado com outros colegas. Caso não conseguissem resolvê-los poderiam formar grupos para discutir estratégias de resolução, conforme fora explicado antes do início dos trabalhos. Não foi exigido pelo pesquisador o limite no número de integrantes em cada grupo, contudo foi observado que as alunas se agruparam de forma que em cada grupo o número de componentes variassem entre três a cinco alunas. O trabalho em grupo favorece o atendimento aos alunos, desperta no aluno a vontade de fazer e acertar, bem como desperta as motivações internas em cada um.

A turma era bastante heterogênea. Algumas alunas se destacaram na resolução dos problemas propostos e apresentaram várias maneiras para resolvê-los. Foi possível observar a situação oposta em que algumas delas apresentavam dificuldades para a resolução dos problemas, sendo que o professor posicionou-se na função de professor pesquisador, porém de forma participante incentivando a discussão e a investigação acompanhando de perto, dando o suporte necessário, conforme proposta de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013).

Inicialmente para as alunas com maior facilidade foi solicitado que auxiliassem os grupos com dificuldades. Nas aulas seguintes sempre era apresentado uma lista alternativa para que as mesmas não interferissem diretamente no processo e assim evitar que aquelas alunas com maiores dificuldades na execução da proposta, ficassem apenas à espera destas para auxiliá-las na resolução dos problemas.

Foram observadas ainda reações diversas: irritação, nervosismo, desestímulo devido ao fato de não conseguir sequer montar o problema. Nesse momento o professor pesquisador interferiu como mediador da aprendizagem, no sentido de encorajá-las e incentivá-las acompanhando o desenvolvimento das mesmas e ao final do processo, foi possível verificar o quão gratificante foi o trabalho realizado quando aquelas que inicialmente não conseguiam resolver os exercícios porque não sabiam ou desconheciam as maneiras de resolver um problema ou não tinham conhecimentos dos conteúdos ali envolvidos, todas estavam alegres, sorridentes e cobrando mais atividades para que pudessem aprender cada vez mais. Para nós, o mediador é aquele que aponta caminhos para a descoberta, incentiva, motiva promovendo o confronto das idéias e respostas.

Estimuladas a entender que muito mais do que aprender os conteúdos da matemática, as mesmas deveriam se preparar, pois seriam futuras professoras no ensino fundamental anos iniciais e finais, e para tal deveriam ter uma formação para atuar de forma dinâmica na sala de aula. Houve uma situação em que algumas alunas disseram até ter coragem para fazer o Curso de Matemática e uma delas manifestou o desejo no questionário.

No início dos trabalhos, devido à dificuldade de expressão de suas ideias ou por comodismo, algumas alunas não se envolverem ou esperavam a solução das atividades pelo professor pesquisador, porém, ao final do trabalho todas as alunas estavam empolgadas e resolvendo todas as atividades. Para tanto, foi necessário buscar efetivamente a participação de todas as alunas, acompanhando de perto o trabalho que era feito individualmente ou em grupos, fazendo intervenções através de indagações sempre direcionadas ao grupo de alunas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), as investigações são realizadas em pequenos grupos e o professor deve chegar a estes, acompanhá-los o máximo possível, colher as informações sobre o desenvolvimento da investigação que está sendo realizada, procurar compreender o pensamento dos alunos, fazer perguntas e solicitar explicações dos passos ou processos que estão sendo desenvolvidos.

Para D`Ambrósio (1993),

> há uma necessidade de os novos professores compreenderem a Matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas. Além disso, é importante que o professor entenda que a Matemática estudada deve de alguma forma, ser útil aos alunos, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar sua realidade. (D`AMBRÓSIO, 1993, p. 35).

Durante a realização das atividades, procurou-se estimular as alunas a trabalharem em equipe, interpretar as questões, criar estratégias, argumentar e expressar suas ideias de modo objetivo e claro. E, ainda incentivar e valorizar as ideias e as várias maneiras de resolução de um problema, como forma de motivá-las e evitar o desânimo frente aos problemas que, por ventura, pudessem aparecer.

Ao final de cada atividade elas apresentavam as respostas encontradas e as diferentes formas de resolução utilizadas, faziam troca de ideias e discussão dos resultados encontrados na forma de plenária. Finalizadas as atividades de cada dia de aula, o professor pesquisador fazia a formalização do conteúdo e em seguida as alunas falavam das dificuldades e/ou facilidades encontradas na resolução das atividades.

Quando a turma já estava familiarizada com a proposta de trabalho, foi solicitado que as mesmas elaborassem seus próprios problemas a partir de alguns dados oferecidos e também podiam ficar livres para criar problemas com outros dados, caso desejassem. Ao final dos trabalhos, foi elaborado um questionário e distribuído às alunas para que as mesmas pudessem avaliar a metodologia empregada, bem como poderiam relatar todo o sentimento após a realização do trabalho com a Metodologia da Resolução de Problemas.

## 5.2 Atividades desenvolvidas em sala de aula utilizando a metodologia da resolução de problemas

➢ ***Atividade 1***

*Cássia comprou 3 Kg de maçã a R$ 1,85 cada, 2 Kg de mamão a R$ 1,75 cada, 5 Kg de banana a R$ 1,79 cada, 8 Kg de melancia a R$ 0,85 cada, 2 kg de uva a R$4.85. Deu R$ 30,00 ao caixa. Qual foi o troco?*

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: trabalhar operações com números racionais na forma decimal.**

Esta atividade foi desenvolvida pelas alunas sem nenhuma reclamação. Porém, pôde-se perceber que algumas alunas somaram simplesmente o valor de cada fruta comprada, sem observar a quantidade, encontrando um resultado totalmente diferente.

__ *Professor o troco foi trinta e oito reais e noventa e um centavos, está correto?* Perguntou a aluna 5.

__ *Refaça os seus cálculos, veja o que você fez.* Respondeu o professor.

Depois de alguns segundos a aluna responde:

__ *É verdade, esqueci dos quilos.* Respondeu a aluna 5.

__ *Eu encontrei dezesseis reais e cinquenta centavos.* Falou a aluna 2.

__ *Refaça os cálculos e veja onde você errou.* Disse o professor.

__ *Eu encontrei quinze reais e cinquenta centavos.* Falou a aluna 3.

__ *Correto,* respondeu o professor.

❖ ***Resolução apresentada pela aluna 5***

*1,85 + 1,75 + 1,79 + 0,85 + 4,85 = 11,09 → 50,00 – 11,09 = 38,91.*

❖ ***Resolução apresentada pela aluna 3***

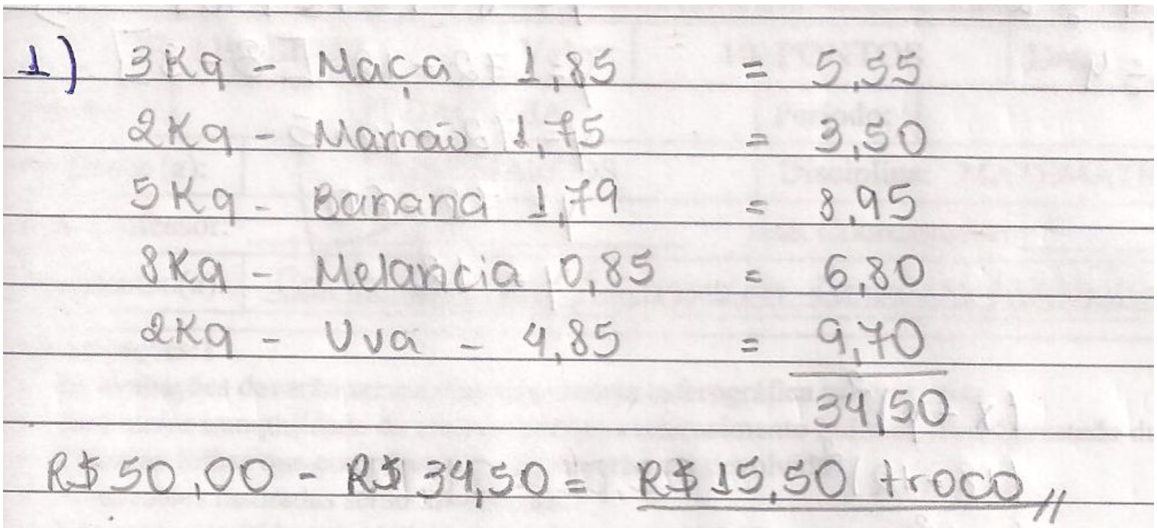

1) 3Kg - Maçã 1,85 = 5,55
2Kg - Mamão 1,75 = 3,50
5Kg - Banana 1,79 = 8,95
8Kg - Melancia 0,85 = 6,80
2Kg - Uva - 4,85 = 9,70
34,50
R$ 50,00 - R$ 34,50 = R$ 15,50 troco

Figura 1: Resolução correta da atividade 1
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Os PCNEM ponderam que ao trabalhar com *Números e Operações,* deve ser oportunizada aos alunos uma série de situações de forma que os mesmos possam resolver problemas do seu cotidiano, operando com números inteiros e decimais. Esta atividade envolveu situações cotidianas conforme orientação dos PCNEM.

➢ ***Atividade 2***

| |
|---|
| *Uma lanchonete vende diariamente 80 jarras de suco. Para fazer uma jarra de suco são usadas cinco laranjas.*<br>*a) Quantas laranjas são usadas diariamente?*<br>*b) "Um cento" equivale a 100 laranjas. Quantos centos de laranja o dono da lanchonete precisa diariamente?*<br>*c) Um cento de laranja custa R$ 12,50. Quanto gasta diariamente?*<br>*d) Uma jarra de suco rende 5 copos, cada copo é vendido a R$ 1,30. Quanto fatura diariamente?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar as operações com números reais.**

Com essa atividade as alunas não tiveram muita dificuldade, a maioria resolveu com naturalidade sendo apenas observadas as resoluções e foram feitas poucas intervenções nos grupos. Foi possível observar ainda que as alunas com maior facilidade de aprendizagem resolveram o exercício e conseguiram explicar às demais colegas do grupo. Alguns grupos resolveram as letras "b" e "c" utilizando a soma de parcelas iguais. Um dos poucos momentos em que o professor foi solicitado a ir até o grupo para verificar a forma de resolução para ver se a solução era válida e se o resultado estava correto, deparou com o seguinte questionamento:

__ *Esse suco vai ficar fraco.* Disse a aluna 4.

__ *Esse dono da lanchonete é muito esperto.* Disse a aluna 6.

__ *Ou então o professor não sabe fazer suco.* Disse a aluna 3. (risos).

__ *Se uma jarra precisa de cinco laranjas, para oitenta jarras é só multiplicar não é isso professor?* Perguntou a aluna 2.

__ *É isso mesmo.* Respondeu o professor.

__ *O raciocínio é o mesmo nas letras "c" e "d"?* Perguntou a aluna 3.

__ *Correto.* Respondeu o professor.

__ *Professor na letra "b" vamos dividir, não é isso?* Perguntou a aluna 10.

__ *Exatamente.* Respondeu o professor.

__ Professor, como calculamos o lucro? Perguntou a aluna 4.

O professor devolveu a pergunta para os grupos, que responderam:

__ *Lucro é o que sobra depois que a gente vê o que sobrou do que a gente ganha e do que gasta, não é isso professor?* Perguntou a aluna 5.

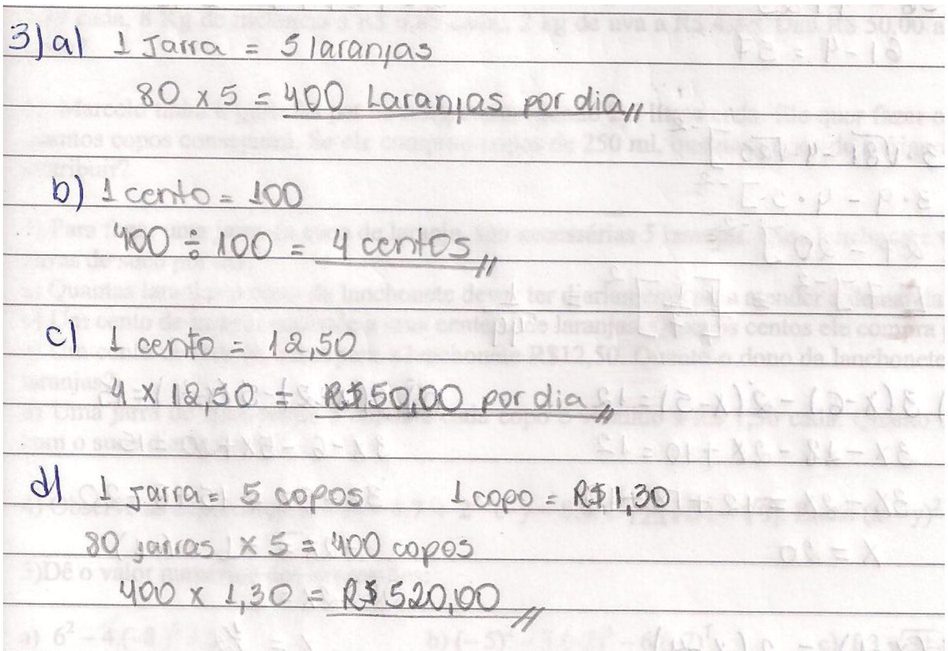
__ *Exatamente.* Respondeu o professor.

__ *Nesse caso então é o que o dono da lanchonete ganha vendendo o suco menos o que gasta com as laranjas?* Perguntou a aluna 7.

__ *Exatamente.* Respondeu a aluna 5.

Esta atividade envolveu também situações cotidianas encontradas pelas alunas, operando com números inteiros e decimais, conforme orientação dos PCNEM.

❖ ***Solução apresentada pelo grupo 1***



3) a) 1 Jarra = 5 laranjas

80 x 5 = 400 Laranjas por dia //

b) 1 cento = 100

400 ÷ 100 = 4 centos //

c) 1 cento = 12,50

4 x 12,50 = R$ 50,00 por dia //

d) 1 jarra = 5 copos     1 copo = R$ 1,30

80 jarras x 5 = 400 copos

400 x 1,30 = R$ 520,00 //

Figura 2: Resolução da atividade 2
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Figura 3: Momento de discussão nos grupos
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

➢ ***Atividade 3***

| |
|---|
| *Eliana foi a uma festa e percebeu que havia 4 mulheres para cada três homens. Se na festa tinha 20 mulheres, quantos eram os homens?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar proporções e regra de três simples. Grandezas diretamente proporcionais.**

A primeira reação de algumas alunas foi no sentido de que não haviam resolvido nenhum exercício daquela forma.

__ *Você tem que resolver um exercício parecido, senão não vamos conseguir fazer*. Disse a aluna 1.

__ *Tentem resolver primeiro, depois faremos juntos.* Respondeu o professor.

__ *Professor posso resolver do meu jeito?* Perguntou a aluna 2.

__ *Vocês estão livres para resolver da forma que acharem melhor, o importante é o resultado.* Respondeu o pesquisador.

O problema foi resolvido de várias maneiras nos grupos. Algumas alunas usaram a regra de três, outras usaram a proporção e teve ainda duas alunas em dois grupos diferentes que chamaram a atenção ao resolver o exercício usando a proporção, porém, fazendo desenhos.

❖ ***Resolução apresentada pelo grupo 2***

Para cada conjunto de quatro meninas temos três meninos. As meninas formam cinco conjuntos de quatro, 5x4 = 20. Os meninos formam cinco conjuntos de três, logo 3x5 = 15. Tinha 15 meninos na festa.

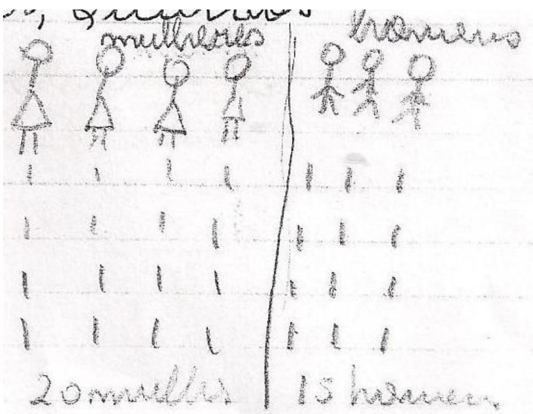



Figura 4: Resolução da atividade 3 utilizando proporções através de desenhos
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

❖ ***Resolução apresentada pelo grupo 4***

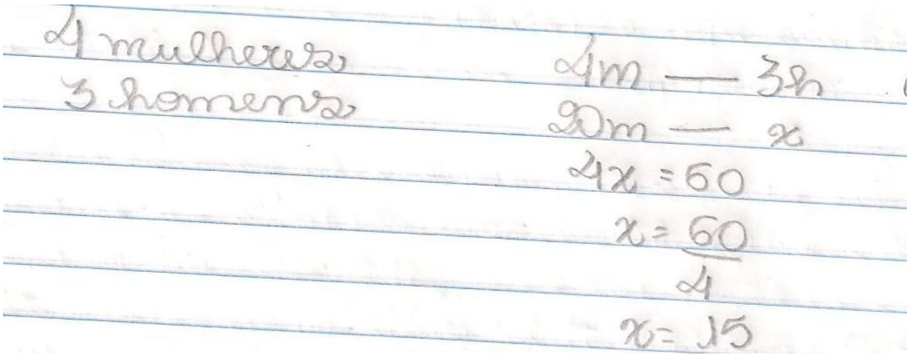



Figura 5: Resolução da atividade 3 utilizando regra de três simples
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Durante o trabalho nos grupos ou individuais apenas observou-se o trabalho das alunas não dando respostas diretas quando era chamado no grupo ou na carteira. Foi possível perceber a dificuldade de algumas alunas no processo, porém ao final foi possível perceber que as mesmas assimilaram o processo e algumas resolviam apenas utilizando a proporção com os desenhos. Conforme Vila e Callejo (2006), Triviños (2007), Ludke e André (986), já citados no capítulo 2 e 3 desse trabalho, o processo é mais importante que o produto.

Com relação a esse fato, ainda segundo Smole Diniz (2001, p. 95), quando o professor assume que a Metodologia da Resolução de Problemas está diretamente relacionada com a aprendizagem dos conteúdos, "o recurso à comunicação é essencial, pois é o aluno falando, escrevendo ou desenhando que mostra ou fornece indícios de que habilidades ou atitudes ele está desenvolvendo e que conceitos ou fatos ele domina, apresenta dificuldades ou incompreensões".

Figura 6: Momento de plenária
Fonte: Arquivo do professor pesquisador.

➢ ***Atividade 4***

| |
|---|
| *Três ônibus partem simultaneamente do terminal rodoviário às 7h. O ônibus da linha A, sai de 20 em 20 minutos, o ônibus da linha B sai de 30 em 30 minutos e o ônibus da linha C sai de 40 em 40 minutos. A que horas os três partirão juntos novamente do terminal?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar Mínimo Múltiplo Comum, (MMC).**

__ P*rofessor o que é simultaneamente.* Perguntou a aluna 5.

O professor devolve a pergunta aos grupos que respondem em coro: *ao mesmo tempo.* (risos).

__ *Professor neste problema vou somar ou multiplicar?* Perguntou a aluna 4.

O professor responde: *Leia atentamente ao problema e analise, você encontrará a resposta para sua pergunta*.

__ *Professor posso resolver do meu jeito novamente?* Pergunta a aluna 2.

__ *já disse, vocês estão livres para resolver da forma que acharem melhor, o importante é o resultado.* Responde do pesquisador.

Nesta atividade a maioria dos grupos resolveu utilizando os intervalos sendo somados ao valor anterior formando três sequências numéricas, depois foi observado o valor que estava repetido nas três sequências. Teve grupo que resolveu calculando o M.M.C e em seguida fez a conversão em horas e outros ainda que fizeram listando os múltiplos de 20, 30 e 40 e em seguida também fizeram a conversão para horas. Em todos os casos, perceberam que os ônibus sairão juntos do terminal sempre de duas em duas horas.

❖ ***Resolução apresentada pelas alunas do grupo 1***

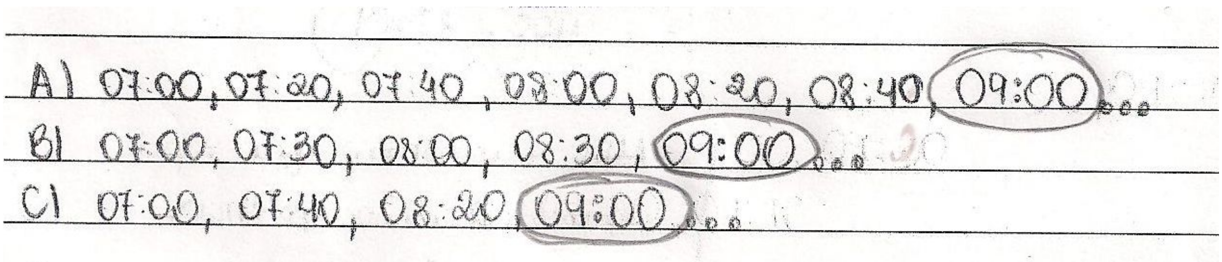

A) 07:00, 07:20, 07:40, 08:00, 08:20, 08:40, 09:00...
B) 07:00, 07:30, 08:00, 08:30, 09:00...
C) 07:00, 07:40, 08:20, 09:00...

Figura 7: Resolução da atividade 4, utilizando uma sequência numérica
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

As alunas concluíram ainda que os ônibus sairão juntos do terminal a cada duas horas.

❖ ***Resolução apresentada pela aluna 6 – grupo 5***

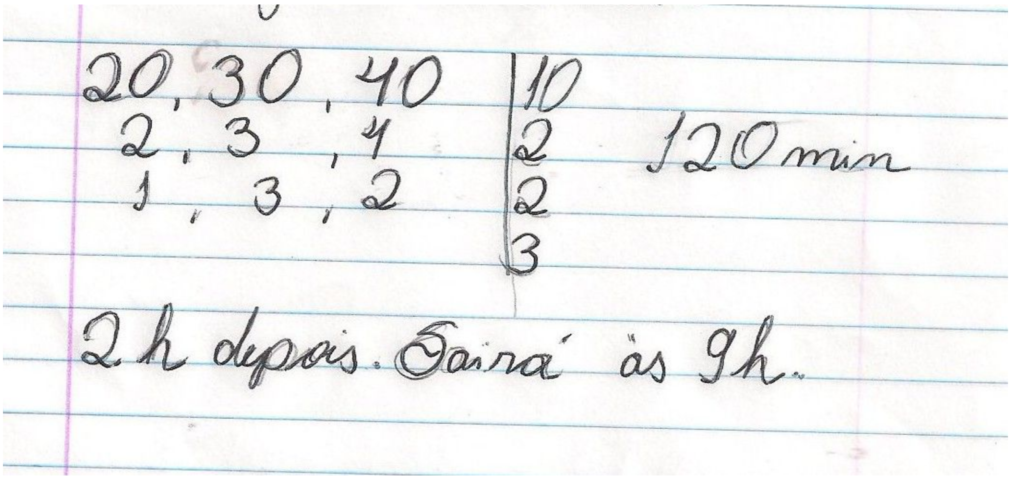



Figura 8: Resolução da atividade 4, utilizando o cálculo do MMC através do método da divisão
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

❖ ***Resolução apresentada* pela aluna *5 – grupo 6***

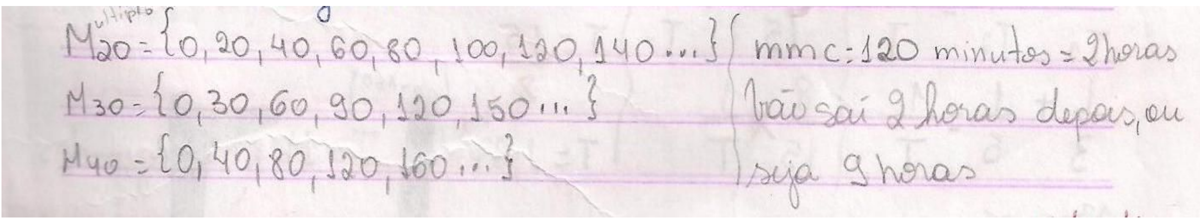



Figura 9: Resolução da atividade 4, utilizando o cálculo do MMC através da listagem dos múltiplos
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Ratificando a conclusão das alunas, o professor explicou que os ônibus sairão juntos do terminal a cada duas horas.

Percebemos nesta atividade que as alunas utilizaram de métodos e processos diferentes para uma mesma solução, o que segundo Vila e Callejo é muito válido, pois o processo é muito mais importante do que o produto dentro da Metodologia de Resolução de Problemas. “os alunos costumam valorizar mais o produto que o processo, porque os professores também o fazem” (VILA E CALLEJO, 2006, p.98).

- ***Atividade 5***

| |
|---|
| *Marilene dispõe de três cortes de pano um de 15 m, um de 12 m e outro de 18 m. ela deseja confeccionar bandeiras retangulares todas do mesmo tamanho. Qual deve ser o maior pedaço a ser cortado nos três cortes de pano, todos iguais, a fim de evitar desperdício?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar Máximo Divisor Comum (MDC)**

__ *Professor neste problema vou diminuir ou dividir?* Pergunta a aluna 4.

__ *Leia atentamente o problema e analise você também encontrará a resposta para sua pergunta*. Responde o professor pesquisador.

__ *Professor, dá uma dica.* Disse a aluna 2.

__ P*ensem um pouco, vocês conseguem.* Responde o professor pesquisador.

__ *Esse não tem jeito.* Respondeu a aluna 5.

__ *Lembrem-se vocês querem cortar o pano, isto lembra o que, qual operação?* Pergunta o professor pesquisador.

__ C*ortar significa dividir.* Respondeu a aluna 3.

__ T*em que ser todos iguais, o mesmo número para dividir os três?* Perguntou a aluna 2.

__ *Isso mesmo.* Respondeu o professor pesquisador.

__ E*ntão já sei a resposta, é o três, só não sei explicar.* Responde a aluna 2.

__ E*ntão eu sei professor, vou listar os divisores de cada um, ai vejo o número que vai repetir.* Disse a aluna 3.

__ *O que quer dizer repetir?* Perguntou o professor.

__ *O número comum aos três na minha lista.* Respondeu a aluna 3.

__ *Muito bem*. Disse o professor.

__ *Professor, posso cortar em pedaços de 2 m*. Argumentou a aluna 5.

__ *Verdade, mas observe o que vai acontecer em cada caso.* Respondeu o professor.

__ *Já vi, vai sobrar um pedaço de um metro no pano de 15 m e não sobra nada nos outros.* Respondeu a aluna 5.

__ *E o que é que o problema diz.* Perguntou o professor.

__ *Que tem de ser todos iguais.* Respondeu a aluna 5.

__ *E o que mais?* Perguntou o professor.

__ *Que não pode haver desperdício.* Respondeu a aluna 5.

__ *Então se as bandeiras devem ser iguais, um metro é desperdício, concorda?* Perguntou o professor.

__ *É verdade.* Respondeu a aluna. (professor se afasta para outro grupo)

O problema foi resolvido de duas maneiras nos grupos. Algumas alunas usaram os divisores, outras usaram simplesmente a demonstração através da divisão usando o método das chaves.

❖ ***Resolução apresentada pela aluna 2***

__ *15 a gente divide por 3 e por 5. 12 a gente divide por 2, por 3, 4 e 6. 18 a gente divide por 2, 3, 6, e 9. O número que repete é o 3. Logo cada pedaço terá 3 metros.* (escreve no quadro).

__ *E se eu quiser pegar o pedaço de 15 metros e cortar bandeiras de 2m?* Perguntou a aluna 6.

__ *Responde pra ela professor.* Falou a aluna 2.

O professor então devolve a pergunta para a turma e pede à aluna 5 e os membros do grupo que não se pronunciassem naquele momento, pois já sabiam a resposta.

__ *Aí os pedaços não seriam iguais,* disse a aluna 3.

__ *Mas os pedaços de 12 m e 18 m podem ser divididos por dois.* Responde a aluna 6.

__ *É verdade não sei explicar. Só sei que tem de ser o 3, é o número que repete*. Falou a aluna 3.

O professor então provocou a discussão e nesse momento se colocou na condição de mediador e incentivador do processo conforme proposta de Onuchic e Allevato (2008).

__ *O que diz o problema?* Pergunta o professor?

__ *Todos iguais.* Responde a turma.

__ *O que mais?* Pergunta o professor.

__ *Não pode haver desperdício.* Responde a turma.

__ *Aluna 5, agora você já pode falar.* Disse o professor.

__ *O segredo está aí. Se cortamos bandeiras de 2 m, então do pedaço de 15 m vai sobrar uma tira de um metro, que também poderá ser uma bandeira, porém, não será do mesmo tamanho, como pede o problema. Vai haver desperdício.* Falou a aluna 5. (palmas)

__ *O número que repete, ou seja, que é comum aos três é o número três. Logo cada bandeira terá três metros.* Falou a aluna 3. (aplausos).

__ *Entendi.* Respondeu a aluna 6.

❖ ***Resolução apresentada pela aluna 4 – Grupo 1***

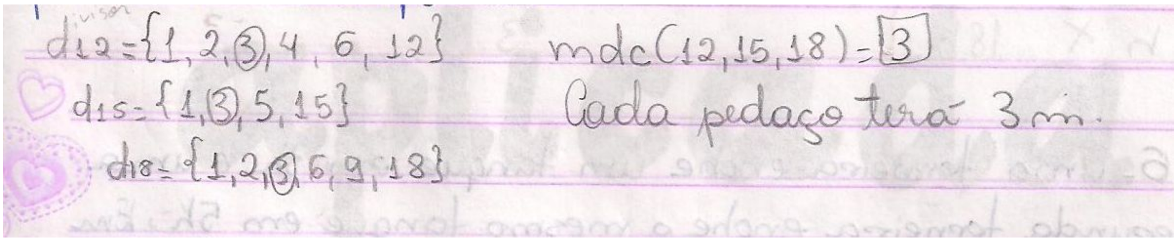



Figura 10: Resolução da atividade 5, utilizando o cálculo do MDC, através da listagem dos divisores.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

➢ ***Atividade 6***

| |
|---|
| *Marcelo vai dar uma festa e ele tem 6 pets de três litros cada. Ele vai distribuir em copos de 250 ml. Quantos copos vai precisar comprar?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar transformação de unidades**

Com essa atividade apenas a aluna 3 que primeiro fez a transformação de unidades de litros para ml, e em seguida, apresentou a resposta esperada. O professor pesquisador pediu à mesma que não interferisse no primeiro momento para que as demais tivessem a oportunidade de resolver a atividade. Foi solicitado da mesma que resolvesse a atividade 5.

Algumas alunas dividiram 6 por 250 obtendo como resposta 0,024. O professor observador pediu que prestassem atenção ao que estavam fazendo.

__ *Se estamos calculando o número de copos a ser utilizado tem que ser um número inteiro não é verdade?* Observou o professor pesquisador.

__ *Então o que devemos fazer?* Perguntou a aluna 4.

__ *Vocês não fazem isso frequentemente em casa? Não dividem um refrigerante para a família? Perguntou* o professor.

__ *Em casa não precisamos preocupar com contas,* respondeu a aluna 4.

__ *lembrem-se de um detalhe, as garrafas apresentam qual unidade de medida?* Perguntou o professor.

__ *Em mililitros. Quer dizer que temos que transformar?* Perguntou a aluna 2.

__ *É isso aí.* Respondeu o professor.

__ *Professor, acho que resolvi, encontrei setenta e dois copos está correto?* Perguntou aluna 3.

__ *Corretíssimo.* Respondeu o professor.

Após o acompanhamento da resolução e desenvolvimento dos grupos, fez-se a plenária.

A aluna 3 foi convidada a ir até à lousa para apresentar a resolução do grupo. A aluna em frente à turma diz.

__ *Pessoal, são seis pets, cada uma de três litros logo temos dezoito litros de refrigerante. Cada litro tem mil ml, então temos dezoito mil ml. Cada copo "cabe" duzentos e cinquenta ml, então é só dividir dezoito mil por duzentos e cinquenta. Dá setenta e dois copos. Certo professor?*

O professor pesquisador faz o sinal de positivo e esta apresenta a solução na lousa. (aplausos da turma).

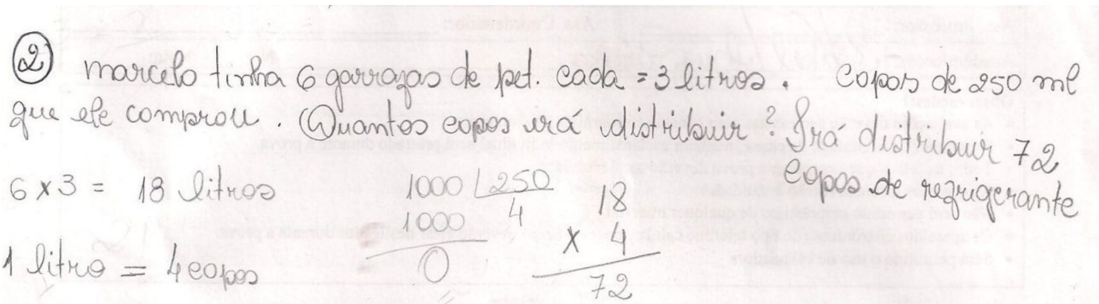
Após a resolução apresentada pela aluna 3, a aluna 4 diz:

__ *Professor, fiz de outra maneira e o resultado foi o mesmo.*

A aluna foi convidada a ir até a lousa apresentar o resultado. A mesma chega à frente da turma e diz:

__ *Pessoal, um litro dá para encher quatro copos de duzentos e cinquenta ml, temos dezoito litros de refrigerante, então é só multiplicar dezoito por quatro. Logo são setenta e dois copos.* (aplausos da turma).

❖ Solução da aluna 18, grupo 6



2 marcelo tinha 6 garrafas de pet. cada = 3 litros. copos de 250 ml que ele comprou. Quantos copos irá distribuir? Irá distribuir 72 copos de refrigerante

6 x 3 = 18 litros

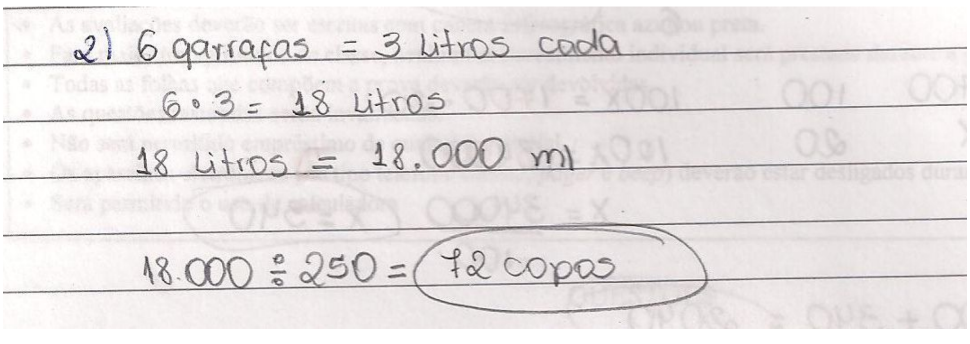
1000 | 250 = 4; 1000; 0

18 x 4 = 72

1 litro = 4 copos

Figura 11: Resolução da atividade 6, utilizando operações de multiplicação e divisão
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

❖ Solução da aluna 3, grupo 1



2) 6 garrafas = 3 litros cada

6 · 3 = 18 litros

18 litros = 18.000 ml

18.000 ÷ 250 = 72 copos

Figura 12: Resolução da atividade 6 utilizando a transformação de unidades.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Embora o problema apresente uma situação corriqueira do cotidiano das estudantes, o fato de relacionar as medidas de capacidade e seus múltiplos e submúltiplos, no caso litro e mililitro, as mesmas apresentaram dificuldade na transformação. E foi gratificante vê-las efetuar a atividade após a intervenção em cada grupo de trabalho. Conforme já citado por Sadovsky (2009) já citada no capítulo 2 deste trabalho, é necessário incentivar o aluno a pensar, explorar os conhecimentos que possui, desafiando-o à descoberta e fazê-los interagir com os colegas.

➢ ***Atividade 7***

| |
|---|
| Uma caixa tem 6 m de comprimento, 2 m de altura e 3 m de largura.<br>a) Qual é o volume dessa caixa em $m^3$?<br>b) Qual o volume da caixa em litros? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: trabalhar o conteúdo capacidades de medidas: Volume e transformação de unidades.**

Foi possível perceber com esta atividade a dificuldade de todas as alunas com relação ao conteúdo trabalhado, demonstrando desconhecimento quanto ao cálculo do volume de um paralelepípedo.

__ *Professor qual é fórmula?* Perguntou a aluna 2.

__ *Vamos pensar um pouco*, respondeu o professor.

__ *Acho melhor você dar logo essa resposta, não estou nem um pouco a fim de pensar.* Retrucou a aluna 7. Esta, aliás, foi a aluna quem mais reclamou desde o início quanto a metodologia empregada. A que demonstrava maior dificuldade.

__ *Se eu multiplico os lados, vou encontrar a área, então é somar os resultados?* Perguntou a aluna 3.

__ *Não é bem assim, você começou certo, pense um pouco mais. Veja o enunciado do problema.* Respondeu o professor.

__ *Agora estou lembrando,* disse a aluna 3, *tenho que multiplicar todos os lados.*

__ *Porque temos que fazer assim?* Perguntou uma colega do grupo de trabalho.

__ *Porque esta é regra, está certo professor? P*ergunta a aluna 3. Este faz sinal positivo e se afasta em direção aos outros grupos. (vibração da aluna).

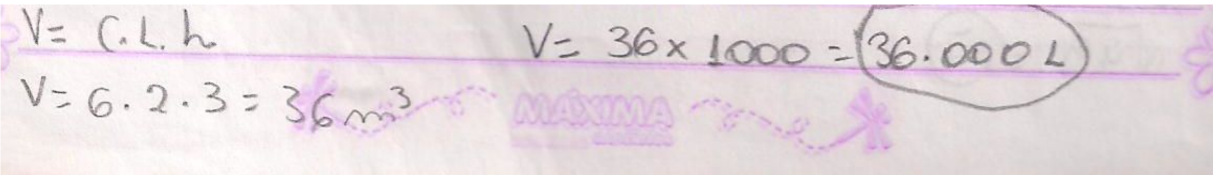
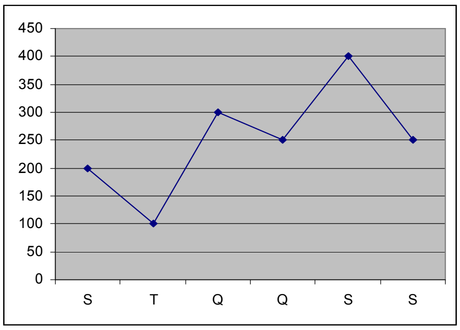



Figura 13: Resolução da atividade 7 utilizando a fórmula para o cálculo de volume de paralelepípedo.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Figura 14: Momento de assistência aos grupos feito pelas alunas com maior facilidade
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- ***Atividade 8***

*Observe o gráfico de linhas que mostra a venda de Roupas em uma loja durante a semana.*




*a) Em qual dia da semana vendeu mais?*
*b) Em qual dia da semana vendeu menos?*
*c) Em quais intervalos houve queda na venda?*
*d) Em quais intervalos houve aumento nas vendas?*
*e) Qual foi a venda total da semana?*
*f) Qual foi a média diária de vendas?*
*g) Qual foi o aumento percentual de vendas de quinta para sexta?*

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar o tratamento da informação. Estatística. Análise de gráficos.**

Com esta atividade foi possível perceber que a maioria das alunas tinham pouco ou nenhum conhecimento sobre gráficos. Mais uma vez as alunas 2 e 3 se destacaram e resolveram o problema com facilidade do item “a” até o item “f” tendo dificuldades no item “g”. Após orientação, as mesmas resolveram o exercício. Foi solicitado das mesmas que não dessem a resposta para as demais para que as mesmas pensassem um pouco.

Esta atividade é de fundamental importância, considerando que segundo Smole e Diniz (2001, p. 83), “a capacidade de ler gráficos e tabelas também deve ser considerada em um projeto de formar o leitor nas aulas de matemática”.

__ *Professor, vou somar todos os números que estão na tabela para encontrar a venda da semana?* Perguntou a aluna 4.

__ *Observe a venda de cada dia. Qual a venda da segunda? E da terça?* Respondeu o professor.

__ *Entendi, vou somar apenas os números que estão nos pontinhos.* Gritou a aluna 5.

__ *Professor não vejo nenhum intervalo.* Falou a aluna 6.

__ *Leia os intervalos da seguinte forma: de segunda para terça, de terça para quarta, de quarta para quinta, e assim sucessivamente*. Respondeu o professor.

__ *São 1.500 CDs vendidos*? Perguntou a aluna 7. O professor faz sinal positivo. (vibração da aluna).

__ *Só não sei esse negócio de média.* Disse a aluna 7, colocando o lápis sobre a mesa.

__ *Conte os dias da semana, depois você divide.* Falou a aluna 8.

__ *É verdade, então já sei fazer. São seis dias, então vou dividir por seis, correto?* Pergunta.

Novamente o professor faz sinal positivo. (tempo para os cálculos).

__ *Dá duzentos e cinquenta?* Pergunta. Professor faz sinal positivo novamente. (vibração da aluna).

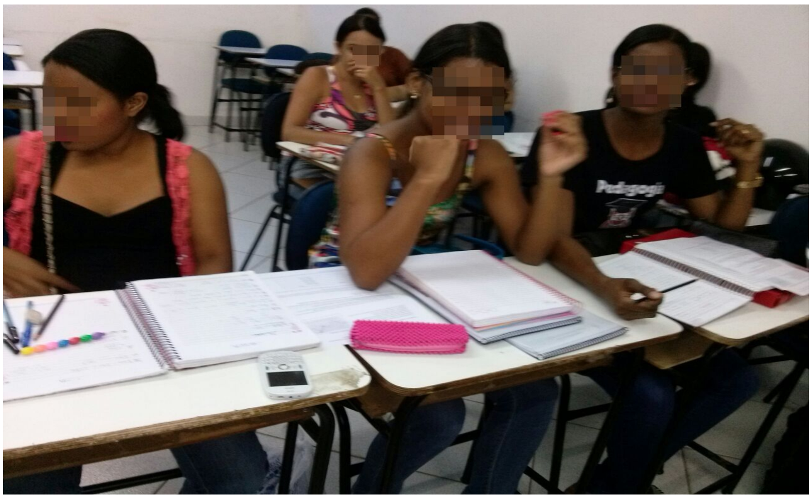


Figura 15: Momento de discussão nos grupos
Fonte: Arquivo do professor pesquisador.

) a) sexta
b) Terça
c) De segunda p/ terça
De quarta p/ quinta
De sexta p/ sábado

d) De terça p/ quarta
De quinta p/ sexta

e) 100 + 200 + 300 + 250 + 400 + 250 = 1500 CD's

f) 1500 ÷ 6 = 250

g) 250 100 250x = 40000
400 x x = $\frac{40000}{250}$ x = 160

% Quinta = 100
% sexta = -160
60% percentual de aumento.

Figura 16: Resolução da atividade 8 – Grupo 1
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Esta atividade atende a uma orientação dos PCNEM que diz que ao trabalhar com Números e Operações o professor deve oportunizar ao aluno a chance de interpretar gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados em diferentes mídias. (PCNEM, p. 71)

- ***Atividade 9***

| |
|---|
| *Viajando a uma velocidade de 60 km /h, Cássia gastou 3 horas para percorrer um determinado percurso. Em quanto tempo faria o mesmo percurso a uma velocidade de 90 km/h?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar *grandezas inversamente proporcionais.***

__ *Deu quatro e meio professor?* Falou a aluna 7.

__ *Eu também achei esse resultado.* Disse a aluna 5.

__ *Vamos daqui até a rodoviária, andando, tranquilos, gastamos cinco minutos. Se vamos apressados, correndo, gastamos mais tempo ou menos tempo?* Perguntou o professor.

__ *Menos tempo é claro*. Respondeu a aluna 7.

__ *a velocidade inicial era?* Perguntou o professor.

__ *Sessenta.* Respondeu a turma (em coro).

__ *Passou para?* Perguntou o professor.

__ *Noventa.* Respondeu a turma (em coro).

__ *Aumentou ou diminuiu?* Perguntou o professor.

__ *Aumentou.* Respondeu a turma (em coro).

__ *Então se com a velocidade de sessenta quilômetros por hora o tempo foi de três horas, viajando a noventa quilômetros por hora, o tempo vai aumentar ou diminuir?* Perguntou o professor.

__ *Diminuir.* Respondeu a turma (em coro).

__ *Professor, esse é o problema das setinhas para cima e setinhas para baixo, não é isso mesmo?* Falou a aluna 2.

__ *Professor, achei duas horas, correto?* Perguntou a aluna 3.

__ *Correto,* respondeu o professor.

__ *Mas eu não usei regra de três nem setinha. Fiz direto.* Falou a aluna 3.

__ *Direto como?* Perguntou a aluna 2.

__ *O tempo foi de três horas e a velocidade sessenta. Então a distância era cento e oitenta quilômetros. Com velocidade de noventa quilômetros por hora, dividindo cento e oitenta por noventa encontra o tempo que será duas horas.* Respondeu a aluna 3.

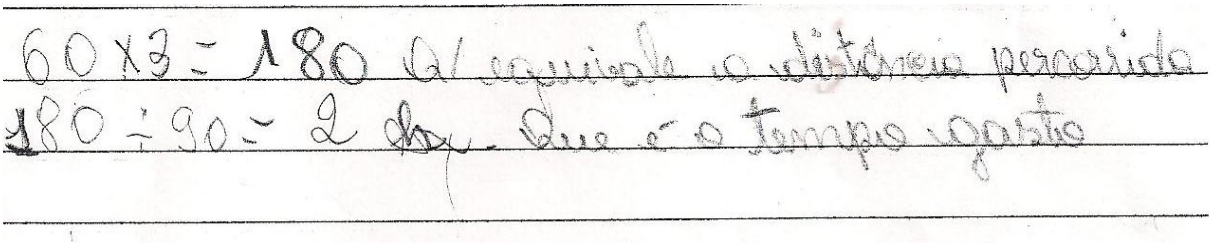



Figura 17: Resolução da atividade 9 utilizando as grandezas tempo, velocidade e distância – Grupo 7
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

__ *Muitas de vocês aprenderam assim com setinha para cima e setinha para baixo. Eu prefiro não falar em setas para não fazer confusão. Melhor dizer em grandezas inversamente proporcionais, é o contrário do problema anterior.* Falou o professor.

__ *Sempre que em um problema aparecer as grandezas tempo e velocidade, e/ou distância e velocidade, estas serão inversamente proporcionais*. Concluiu o professor.

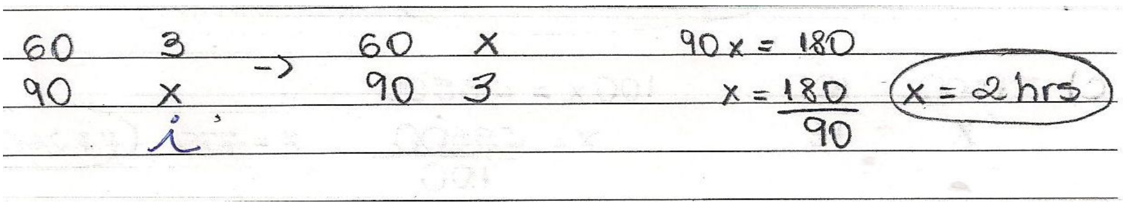



Figura 18: Resolução da atividade 9, utilizando regra de três, grandezas inversamente proporcionais – Grupo 1
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

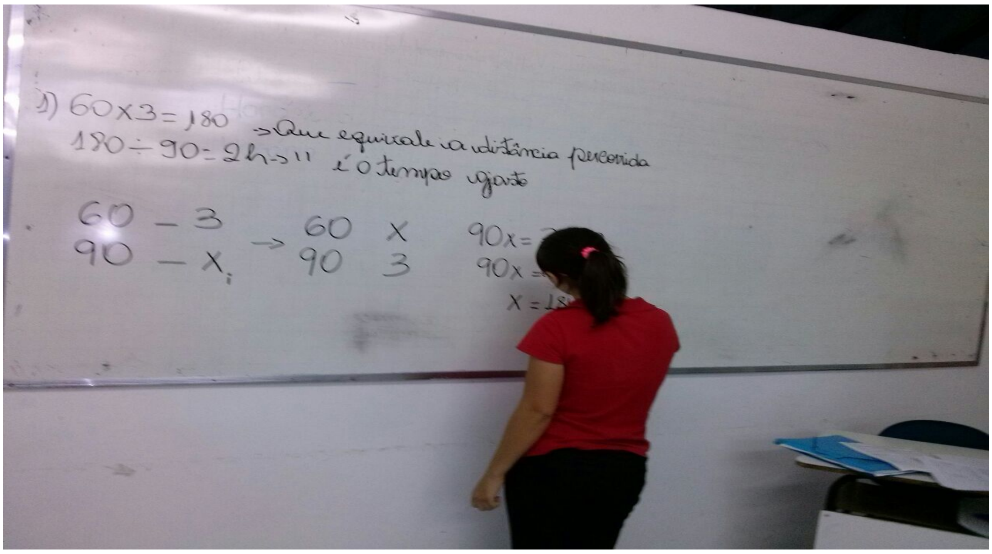



Figura 19: Momento de apresentação das respostas encontradas
Fonte Arquivo do pesquisador.

Com esta atividade as alunas tiveram muitas dificuldades, algumas se sentiram frustradas por não conseguir resolver a tarefa. Foi preciso incentivá-las o máximo possível instigando-as a pensar em como seria o tempo gasto, maior ou menor que o anterior. Segundo Vila e Callejo, 2006, "As dificuldades encontradas durante o processo de resolução de problemas criam nos alunos sentimentos de fracasso" (p. 99). Porém, quando estes são incentivados, "o desafio é motivador e o aluno considera que está ao seu alcance, porém, é capaz de investir tempo e energia na perseguição do seu objetivo". (VILA E CALLEJO, 2006, p.99).

Na figura 14, vimos que a aluna entendeu o conceito de grandeza inversamente proporcional e resolveu o problema fazendo a inversão das razões.

- ***Atividade 10***

| |
|---|
| *O preço de uma TV de 32" é de R$1.400,00 à vista. A compra pode ser à vista com desconto de 12% ou à prazo, parcelada em até 12 meses e nesse caso, o preço sofre um acréscimo de 20%.*<br>*a) Qual será o valor da TV à vista?*<br>*b) Qual será o valor da TV à prazo?*<br>*c) Qual será o valor de cada prestação?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: trabalhar juros, porcentagens, descontos e acréscimos.**

__ *Professor, como escrevo dez por cento e quinze por cento?* Perguntou a aluna 8.

__ *Dez por cento é dez sobre cem e quinze por cento é quinze sobre cem*. Respondeu a aluna 5.

O professor pesquisador então disse:

__ *Não esqueçam que o símbolo de porcentagem nos diz que a nossa fração e centesimal, ou seja, tem como denominador o número cem. Dez por cento é dez sobre cem e quinze por cento é quinze sobre cem, como disse a aluna 5.*

__ *Professor, posso dividir primeiro para depois multiplicar?* Perguntou a aluna 7.

__ *Pode.* Respondeu o professor.

__ *Eu achei cento e setenta na letra a, está certo professor?* Perguntou a aluna 5

__ *Correto.* Respondeu o professor. (vibração da aluna)

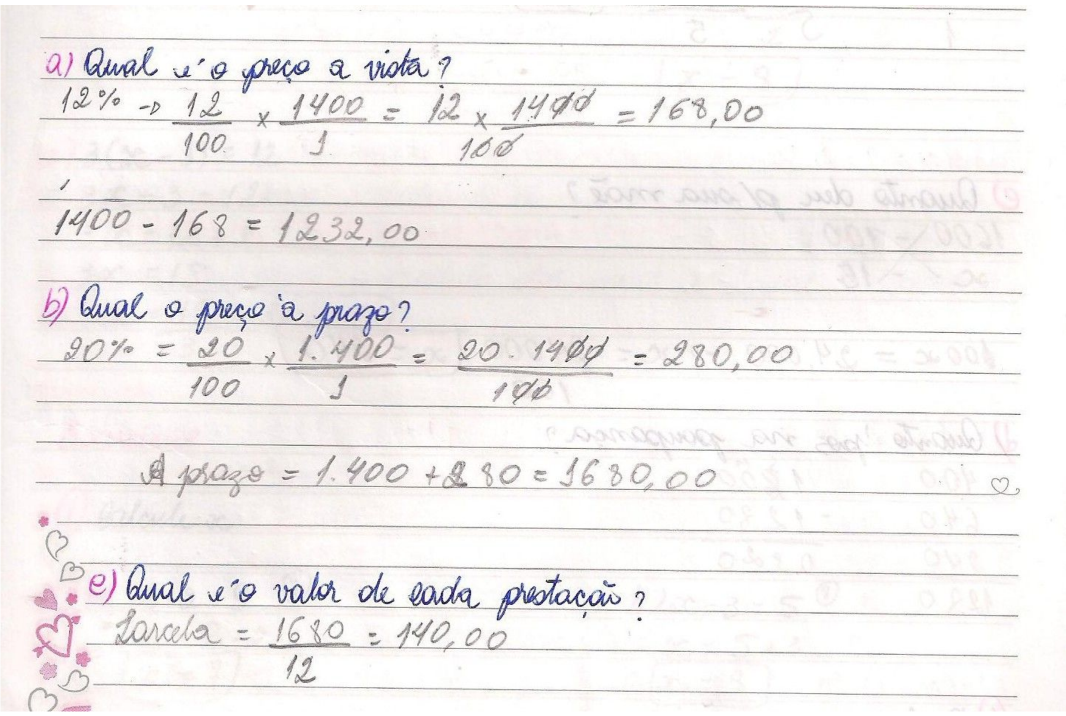
__*Também achei cento e setenta, para calcular o preço da TV à vista, agora é só diminuir os* *resultados?* Perguntou a aluna 7.

__ *Exatamente.* Respondeu o professor.

__ *O raciocínio é o mesmo para o juro e depois soma não é mesmo?* Perguntou a aluna 7.

__ *Exatamente.* Respondeu o professor.

Figura 20: Momento de discussão nos grupos
Fonte: Arquivo do professor pesquisador.



a) Qual é o preço a vista?

$12\% \rightarrow \frac{12}{100} \times \frac{1400}{1} = \frac{12 \times 1400}{100} = 168{,}00$

$1400 - 168 = 1232{,}00$

b) Qual o preço à prazo?

$20\% = \frac{20}{100} \times \frac{1.400}{1} = \frac{20 \cdot 1400}{100} = 280{,}00$

A prazo $= 1.400 + 280 = 1680{,}00$

c) Qual é o valor de cada prestação?

Parcela $= \frac{1680}{12} = 140{,}00$

Figura 21: Resolução da atividade 10 – Grupo 8
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Este é um exemplo de problemas que segundo Krulik e Reys (1997) pode e deve ser resolvido por partes. Primeiro calcular o percentual de desconto ou acréscimo para depois ver o preço final. Nesse exercício foi necessário buscar auxílio na literatura para fazê-las lembrar da escrita correta de porcentagens.

➢ ***Atividade 11***

*Marcelo tinha R$ 1.500,00. Gastou $\frac{1}{3}$ com lazer, $\frac{2}{5}$ com roupas, 12 % pôs na poupança e o restante distribui com os irmãos.*

*a) Quanto gastou com lazer?*
*b) Quanto gastou com roupas?*
*c) Quanto pôs na poupança?*
*d) Quanto distribuiu com os irmãos?*

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Reforçar proporções e porcentagens.**

Nesta atividade algumas alunas tiveram dificuldades com as operações. Outras, primeiro dividiram as frações transformando os resultados em porcentagens.

__ *Não sei nem como começar.* Murmurou a aluna 7.

__ *Professor, a parte de baixo, indica quantas partes vamos dividir não é mesmo?* Perguntou a aluna 2.

__ *Isto mesmo.* Disse o professor.

__ *Viu, é fácil, primeiro você divide o resultado por 5, depois veja quantas partes você quer*. Falou a aluna 2.

__ *Professor, para calcular os dois quintos é sobre o restante?* Perguntou a aluna 3.

__ *O problema diz o quê?* Perguntou o professor?

__ *Não diz nada, é por isso que estou perguntando.* Respondeu a aluna 3.

O professor então devolve a pergunta para a turma.

__ *Pessoal o que vocês acham, é sobre o restante ou sobre o principal?*

__ *Como o problema não fala restante, acho que é sobre o valor inicial.* Respondeu a aluna 4.

Após as discussões o professor então explica que realmente era esse o raciocínio. Os cálculos deveriam ser feitos sempre sobre o valor principal. Só será calculado sobre o restante se vier assim descrito no problema.

__ *Professor, podemos fazer usando a regra de três?* Perguntou a aluna 3.

__ *Lembrem-se, vocês estão livres para resolver do jeito que cada uma achar mais fácil.* Respondeu o professor.

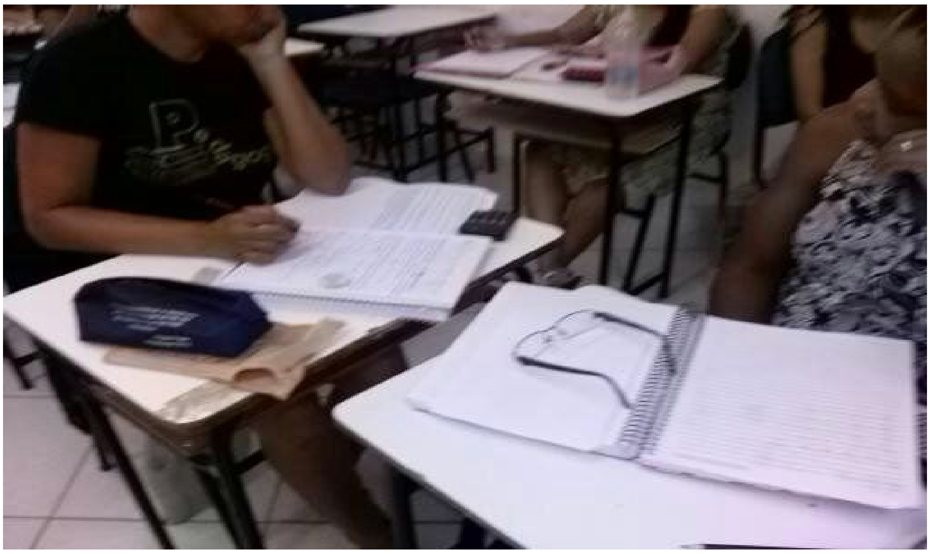


Figura 22: Momento de discussão nos grupos:
Fonte: Arquivo do professor pesquisador.

## ❖ Solução apresentada pelos grupos

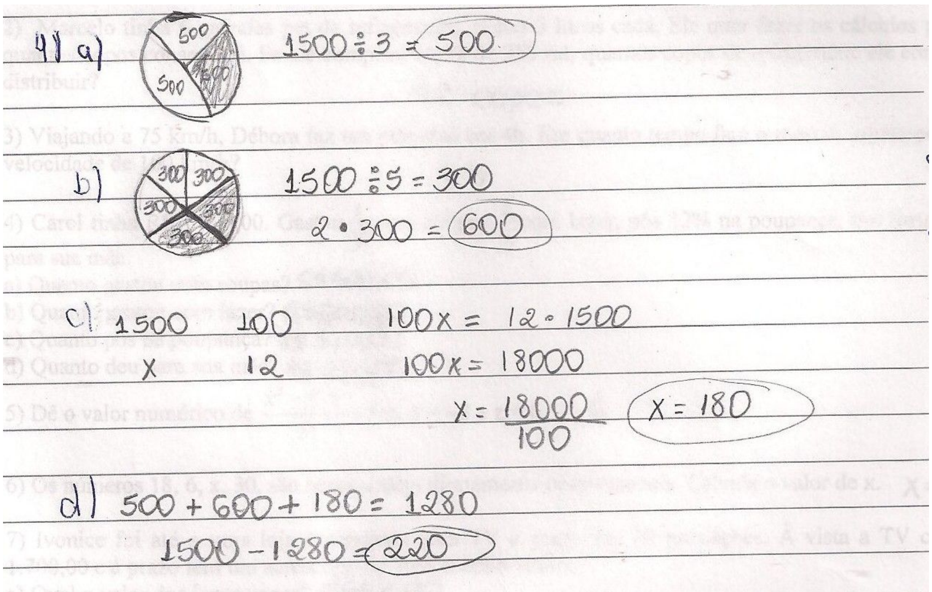



Figura 23: Resolução da atividade 11 – Grupo 1
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

➢ ***Atividade 12***

| |
|---|
| *Marilene percebeu que ao dividir bombons entre seus sobrinhos, viu que se desse 6 bombons para cada um iriam faltar 2 bombons, mas se desse 3 bombons para cada um sobrariam 8 bombons.*<br>*a) Quantos eram os sobrinhos?*<br>*b) Quantos eram os bombons?* |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Objetivo da atividade: Trabalhar equações do primeiro grau com uma incógnita.**

Com esta atividade a dificuldade foi apenas inicial, na montagem das equações, mas, com a presença do professor nos grupos, auxiliando na montagem das equações, os grupos desenvolveram a atividade com precisão.

__ *Professor, dá uma dica de como iniciar.* Disse a aluna 5.

__ *O que posso dizer inicialmente é que vocês devem montar duas equações, uma situação na primeira distribuição e outra na segunda distribuição.* Disse o Professor.

__ *Como assim duas equações?* Perguntou a aluna 6.

__ *Ela fez duas simulações, uma dando cinco bombons para cada sobrinho e outra dando três bombons para cada sobrinho. Em cada situação o número de bombons é o mesmo. Monte uma equação para cada caso, em seguida é só igualar as equações e resolver.* Disse o Professor.

__ *Vou usar "x" e "y"?* Perguntou a aluna 3.

__ *Usem as letrinhas que quiserem.* Disse o professor.

__ *Vamos usar o sinal de mais ou de menos?* Perguntou a aluna 4.

O professor devolve a pergunta para os grupos.

__ *Acho que quando sobra é mais e quando falta é menos*. Disse a aluna 3.

__ *Isto mesmo*. Disse o professor.

__ *Professor são cinco crianças?* Perguntou a aluna 3.

__ *Exatamente.* Disse o professor. (vibração da aluna). *Agora calcule o número de bombons.*

__ *Também achamos cinco*. Disse a aluna 4. *Como fazemos para encontrar o número de bombons?*

__ *É só fazer a substituição, não é isso professor?* Falou a aluna 3.

__ *Substituir o quê?* Pergunta a aluna 4.

__ *Você encontrou o número cinco que são as crianças, agora substitui o número cinco no lugar de x, aí você acha o número de bombons. Deu vinte e três bombons não é isso professor?* Perguntou a aluna 3.

__ *Exatamente.* Responde o professor. (vibração da aluna).

__ *Professor, também achamos vinte e três.* Respondeu a aluna 4.


Figura 24: Momento de discussão nos grupos.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

## ❖ Solução apresentada pelos grupos

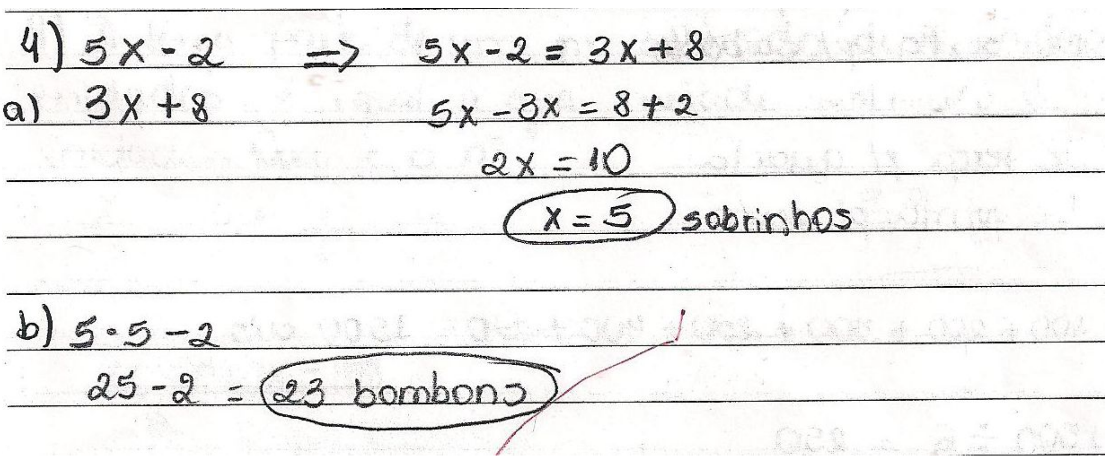



Figura 25: Resolução da atividade 12, utilizando equações do primeiro grau – Grupo 1.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Com as atividades 11 e 12, foi possível perceber que as alunas apresentaram dificuldades para resolvê-las individualmente e a partir do trabalho realizado em grupo, percebeu-se uma maior interação na resolução da atividade. Com isso podemos observar que conforme Vila e Callejo (2006, p. 141), “vale a pena apostar em um trabalho em pequenos grupos e na discussão”.

### 5.3 Alguns problemas elaborados pelas alunas

Conforme já dito anteriormente, após a realização das atividades propostas, o professor colocou na lousa uma tabela de preços e pediu que as alunas, individualmente ou em grupo, elaborassem problemas a partir dos dados apresentados na mesma e, em seguida resolvessem a atividade.

Tabela 1: Tabela de Preços

| Produto | Valor: |
|---|---:|
| Jaqueta | R$ 80,00 |
| Blusa | R$ 20,00 |
| Bicicleta | R$ 240,00 |
| Brinquedo | R$ 70,00 |
| Tênis | R$ 120,00 |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

#### 5.3.1 Problemas elaborados a partir da tabela apresentada pelo professor pesquisador

Após a atividade proposta, o professor ficou surpreso ao ver a quantidade e qualidade dos problemas. Abaixo descreve um dos problemas elaborados por três grupos com destaque para a complexidade apresentada na elaboração do problema.


Figura 26: Problema elaborado pela aluna 10 com a resolução correta.
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Observa-se aqui a complexidade na elaboração do problema o que demonstra que a aluna assimilou o conteúdo sobre porcentagem trabalhado em sala. Inicialmente a aluna havia colocado 100%. Perguntada como chegou ao resultado, a mesma respondeu:

__ *A blusa custa vinte reais e o tênis cento e vinte logo é cem por cento.* Disse a aluna.

__ *Se eu lhe digo que uma blusa custava vinte reais e sofreu um aumento de cem por cento, qual o novo preço?* Perguntou o professor.

A aluna pensa e em seguida responde:

__ *É mesmo, vai custar quarenta reais.*

__ *Você criou um problema interessante, então pense um pouco e você conseguirá a resposta correta.* Disse o professor.

Alguns minutos depois a aluna chama o professor e mostra a resolução correta.

__ *Perfeito, agora está correto.* Disse o professor.

A aluna foi incentivada o tempo todo e sentiu confiança na resolução da atividade. Segundo Vila e Callejo (2006, p. 99), é bom “reforçar a autoestima e a autoconfiança” dos alunos.

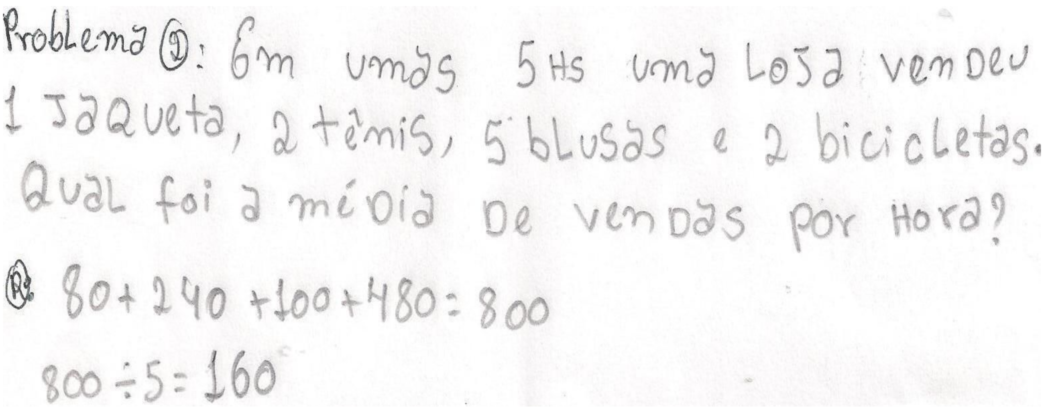

Problema 1: Em umas 5 Hs uma Loja vendeu 1 Jaqueta, 2 tênis, 5 blusas e 2 bicicletas. Qual foi a média de vendas por Hora?
R: 80+240+100+480=800
800÷5=160

Figura 27: Problema elaborado pela aluna 10
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

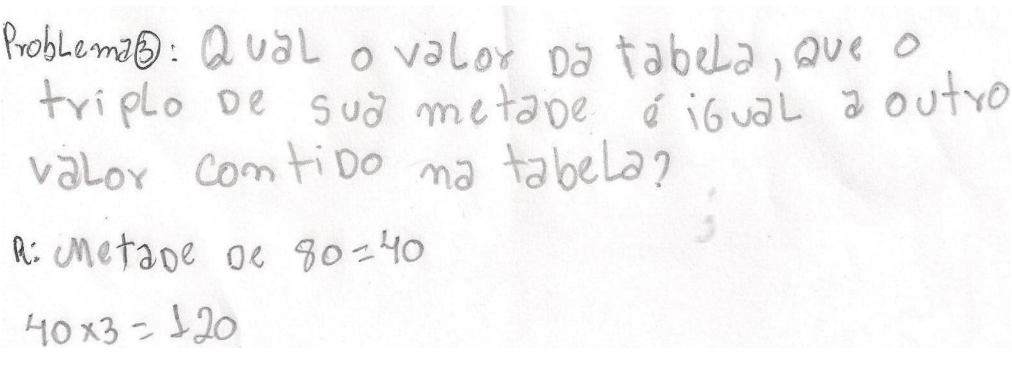

Problema 3: Qual o valor da tabela, que o triplo de sua metade é igual a outro valor comtido na tabela?
R: metade de 80=40
40x3=120

Figura 28: Problema elaborado pela aluna 10
Fonte: arquivo do professor pesquisador.

Com esta atividade, percebe-se que a aluna desenvolveu uma estratégia criando a atividade com um toque de curiosidade. Segundo House (1997, p.232), “os alunos que veem seus professores entusiasmados ao resolver problemas que os intrigam tendem a desenvolver sua própria curiosidade natural e participar avidamente dos problemas do professor”.

- Questões elaboradas pelo grupo 1.
  a) Camila comprou um tênis e uma blusa, pagou com duas notas de R$ 100,00. Qual foi o troco?
  b) Com R$ 200,00 o que Cíntia poderá comprar?

- Questões elaboradas pelo grupo 2.
  a) Cássia tem R$ 150,00. O que poderá comprar?
  b) Quanto a jaqueta é mais cara que a blusa?
  c) Quantas vezes a bicicleta é mais cara que a jaqueta?
  d) Se você for pagar a bicicleta em quatro vezes, quanto pagará por cada parcela?
  e) Quanto gastei comprando todos os produtos?
  f) Comprando todos os produtos e pagando 30% de entrada, quanto eu pagarei dividindo o restante em duas parcelas?

- Questão elaborada pelo grupo 3.
  a) Comprando a bicicleta à vista tem desconto de 10%. Qual o valor da bicicleta à vista?

- Questão elaborada pelo grupo 4.
  a) Comprando a bicicleta a prazo, tem aumento de 10%. Qual o valor da bicicleta á prazo?

### 5.3.2 Problemas elaborados pelas alunas a partir de outros dados

A surpresa apresentada pelas alunas foi a complexidade presente na elaboração dos problemas 5 e 6. São problemas que exigem um maior grau de raciocínio e conhecimento de conteúdo, o que demonstrou o nível de participação das alunas no trabalho desenvolvido pelo professor pesquisador.

- **Problema 1**

| |
|---|
| Baiana foi ao supermercado e comprou uma dezena de balas, uma dúzia de chupetas e meio cento de chicletes. Ela deu metade para José Marcos.<br>a) Quantas guloseimas Baiana comprou?<br>b) Quantas guloseimas sobraram? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Problema 2**

| |
|---|
| Franquilane ganhou de sua mãe uma caixa de chicletes contendo 50 unidades. Ela ficou com 20 unidades e vai distribuir 30 unidades entre 15 amiguinhos. Quanto receberá cada um? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Problema 3**

| |
|---|
| Das 40 chupetas que Débora tem, 20 ela vai doar para a Creche Tia Chica e 20 ela vai guardar em 5 caixas de papelão. Quantas chupetas serão colocadas em cada caixa? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

**Problema 4**

| |
|---|
| Zenóbia possui 36 balas. Ela vai doar 12 para seu neto e vai dividir 12 balas para suas 5 coleguinhas de sala.<br>a) Quantas balas receberão cada coleguinha?<br>b) Quantas balas sobrarão? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Problema 5**

| |
|---|
| João e Pedro foram a uma loja da cidade. João comprou uma blusa e uma bermuda e pagou R$ 80,00. Pedro comprou 3 blusas e uma bermuda e pagou R$ 170,00. Quanto custou cada blusa e cada bermuda? |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

- **Problema 6**

| |
|---|
| Utilizando os dados do exercício anterior, qual o percentual do salário de João seria gasto se ele comprasse 3 bermudas e 2 blusas, sabendo que ele recebe R$ 1.300,00 por mês. |

Fonte: arquivo do professor pesquisador.

### 5.4 Algumas respostas das alunas ao questionário elaborado e aplicado pelo professor/pesquisador

**1) Quais as dificuldades encontradas no início do trabalho?**

Para a resposta a esta pergunta, foi possível perceber que a maioria das alunas respondeu que foi na interpretação dos problemas que tiveram mais dificuldade.

Destaque para a resposta da aluna 5: *Na maioria das vezes os alunos estavam acostumados apenas a decorar fórmulas e demoraram um pouco para compreenderem a importância do raciocínio.*

Aluna 9: *Todas, pois faz muito tempo que estava fora da sala de aula e tive muitas dificuldades em relação ao conteúdo.*

Aluna 10: *Primeiramente foi o medo de não dar conta, mas a maneira que o professor explica, passa muita segurança.*

Conforme o pensamento de Nunes, (2010, p. 84), "O professor tem a responsabilidade de criar um ambiente que motive e estimule a participação dos alunos nas aulas".

Aluna 11: *A interpretação dos problemas propostos.*

Aluna 12: *Não me lembrava dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental e Médio.*

Aluna 13: *No início do trabalho tive dificuldade em interpretar os problemas, pois não estava habituada a interpretar problemas de matemática.*

**2) Você tinha alguma dificuldade antes do processo?**

Aluna 1: *Sim, mas foram supridas durante o processo.*

Aluna 2: *Não, pois sempre tive facilidade em aprender a matéria.*

Aluna 7: *Antes encarava o conteúdo da matemática como algo difícil de aprender e fazer porém, descobri a gostosura de estudar seguindo esse processo.*

Aluna 8: *Tenho um pouco, eu não consigo aprender com barulho e preciso de mais atenção.*

Aluna 10: *Sempre tive e continuo tendo, mas a disciplina de matemática é assim se não fizer exercícios todos os dias, a pessoa esquece.*

Aluna 11: *Sim, pois, não conseguia desenvolver os cálculos.*

Aluna 14: *A matemática era algo difícil de aprender.*

Aluna 15: *Sim, pois nunca gostei de matemática pelo fato de ter tido professores tradicionais, mas agora foram superadas.*

Aluna 18: *Sim, principalmente probabilidade e porcentagens.*

Conforme Onuchic e Allevato (2008), o professor deve Ensinar matemática *através* de Resolução de Problemas, assim o ensino se dá através da resolução de problemas, envolvendo todo o processo do início ao fim, com isso as dificuldades vão sendo superadas, e o aluno se torna construtor do seu conhecimento, descobrindo a "gostosura" do processo, conforme citado pela aluna 7, e as inseguranças e medos são superados.

**3) O que você aprendeu com esse trabalho?**

Aluna 5: *Aprendi que estudar matemática não precisa ser algo cansativo e chato. Que a matemática é instigante e dinâmica.*

Aluna 7: *Descobri que eu também tenho capacidade de resolver problemas e que a matemática para ser aprendida depende muito do professor.*

Aluna 11*: Aprendi a resolver problemas de forma diferenciada.*

Aluna 12: *Aprendi que quando o professor ensina a raciocinar e a interpretar, fica mais fácil entender o conteúdo.*

*A*luna 14: Q*ue Resolução de Problemas é uma forma mais atrativa de se estudar.*

Aluna 15: *Com este trabalho eu pude perceber que todas as dificuldades que eu tinha antes foram superadas com esse trabalho diferenciado.*

Aluna 18: *Que a matemática tem vários caminhos para resolver problemas e é interessante quando você encontra.*

Estas respostas confirmam o pensamento de Nunes (2010, p. 84) quando afirma que "o professor irá apresentar situações que irão gerar novos conceitos ou conteúdos e o aluno tornar-se-á construtor do seu próprio conhecimento. O professor tem a responsabilidade de criar um ambiente que motive e estimule a participação dos alunos nas aulas". É tarefa de o professor mostrar que existem diferentes formas de resolução para um problema proposto e consequentemente, incentivá-los à busca de diferentes soluções para o problema.

**4) Este trabalho é possível ser aplicado na sala de aula?**

Todas as alunas responderam que sim.

**5) Você está atuando em sala de aula? Trabalha com Resolução de Problemas**?

Aluna 5: *Atualmente trabalho na Secretaria da escola, mas pretendo colocar em prática o* *aprendizado adquirido quando estiver em sala de aula.*

Aluna 7: *Não trabalho em sala de aula.*

Aluna 9: *Não, mas pretendo em breve.*

Aluna 11: *Sim, calculando distâncias, áreas e escalas.*

Aluna 14: *Comecei meu trajeto como docente há pouco tempo, mas gostei do projeto e estou colocando em prática.*

**6) Você acha importante trabalhar com resolução de Problemas? Por quê?**

Todas as alunas responderam que sim considerando que desenvolve o raciocínio lógico, a interpretação e a criatividade.

Aluna 5: *Sim, porque trabalha o raciocínio lógico do aluno e sua concentração.*

Aluna 6: *Sim, pois com esse tipo de trabalho, ensina-se a enfrentar os problemas da vida e resolvê-los com mais facilidade.*

Aluna 7: *Sim, porque leva o aluno a pensar, raciocinar, seguir etapas.*

Aluna 8: *É uma forma de "aguçar" o raciocínio do aluno.*

Aluna 10: *Sim, pois é uma maneira de sermos críticos em relação a fatos.*

Aluna 14: *Fica mais transparente, desafiador e atraente para o tipo de estudantes que encontramos hoje nas escolas.*

Estas respostas mostram que conforme Toledo e Toledo (2009), o professor deve criar um ambiente propício ao desenvolvimento do trabalho, onde os alunos não tenham medo de expressar suas opiniões sem a preocupação primeira de acertar ou errar, encorajando o aluno durante o processo.

Aluna 15: *Sim, pois ao trabalhar com Resolução de Problemas, respeita-se a autonomia do aluno e desperta sempre a sua criatividade e interesse.*

Aluna 17: *Sim, pois é através dos problemas que o aluno procura ler para entender, pois, só através da leitura, interpretação para conseguir solucionar o problema.*

Para Smole e Diniz (2001), o processo de leitura é fundamental para êxito na resolução de problemas. Segundo Cagliari (2003), já citado no capítulo 2 desse trabalho, "O aluno muitas vezes não resolve um problema de matemática, não porque não sabe matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema".

**7) Faça o comentário que você achar conveniente quanto às aulas desenvolvidas.**

Aluna 1: *São aulas muito atrativas, dinâmicas, e com elas temos um grande aproveitamento.*

Aluna 3: *Para mim são ótimas, pois, por gostar de matemática, acho as aulas interessantes e prende a minha atenção a aula toda.*

Aluna 4: *As aulas são dinâmicas e de grande aproveitamento.*

Aluna 6: *As aulas são boas, apesar de haver um tanto de discussão pois com isso gera barulho e atrapalha no raciocínio, mas enfim, são todas aproveitadas.*

A aluna questiona o "barulho", mas como afirma Toledo e Toledo, o professor estará mais exposto quanto à "disciplina" na sala de aula, "pois numa sala em que há troca de ideias dificilmente há silêncio" (TOLEDO e TOLEDO, 2009, p. 5).

Aluna 5: *As aulas são dinâmicas, bem humoradas, eu já gostava de matemática, agora pretendo cursar a Faculdade de Matemática.*

Vê-se aqui o pensamento de Toledo e Toledo, (2009, p. 5), quando afirma que o processo é instigante, "alimenta o espírito e estimula a ir mais longe, criar mais, ouvir mais, aprender mais".

Aluna 7: *As aulas foram bem articuladas, a insegurança e o medo de não conseguir aprender aos poucos foram desaparecendo e veio fora um potencial que eu não sabia de ter. Isso porque o professor usou a metodologia adequada.*

Vê-se aqui, claramente, que imperou o pensamento de Onuchic e Allevato (2004, p. 222) "na sala de aula, onde os professores têm adotado essa abordagem, o entusiasmo de professor e alunos é alto e ninguém quer voltar a trabalhar com a forma de ensino tradicional".

Aluna 9: *Acho as aulas atrativas, porque já estou sabendo desenvolver o meu raciocínio com mais facilidade.*

Aluna 10: *As aulas de matemática que estou tendo no curso de Pedagogia têm grande importância porque o professor procura estratégia para ajudar o aluno a estudar. O aluno descobre que tem capacidade e o educador respeita o ritmo de cada um.*

Conforme Vila e Callejo (2009), Itacarambi e Dante (2010), com o auxílio da Metodologia da Resolução de Problemas, o aluno desenvolve o raciocínio lógico, descobre suas qualidades e potencialidades e a aprendizagem se torna significativa.

Aluna 13: *As aulas foram muito proveitosas e me auxiliaram a mudar o conceito sobre a matemática, entendendo que a mesma pode ser muito agradável de se estudar.*
Aluna 14: *Saímos das aulas estáticas e entramos nas dinâmicas.*

Quando a aluna diz: *Saímos das aulas estáticas e entramos nas aulas dinâmicas,* mostra que entendeu o que é estudar matemática, pois, como afirma Toledo e Toledo (2009), não é simplesmente decorar fórmulas e ou aplicá-las, mas é vivenciar todo o processo na aprendizagem.

Aluna 15: *As aulas ministradas pelo professor são excelentes, pois, ele procura sempre trabalhar de forma diferenciada, e tem procurado sempre motivar o interesse dos educandos pela disciplina.*
Aluna 18: *aulas ótimas, o educador muito paciente e boa vontade para ensinar*
Aluna 21: *Todas as aulas foram ótimas, o professor sempre disposto a nos ensinar, aulas bastante interativas.*

Conforme Onuchic e Allevato (2008) o professor deve ser um observador, consultor, mediador e incentivador da aprendizagem. Com isso o processo de aprendizagem se dá de forma natural e o aluno vai percebendo as suas qualidades.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa, conforme referencial teórico buscou-se apresentar a Metodologia da Resolução de Problemas como uma ferramenta facilitadora da aprendizagem para auxiliar o professor para superação das dificuldades apresentadas pelos alunos independentemente da faixa etária ou condição social, bem como a definição de problemas, de acordo com alguns autores. Também se buscou mostrar como a Metodologia da Resolução de Problemas pode facilitar a aprendizagem da Matemática, na sala de aula sempre, com o objetivo de responder à seguinte questão de investigação: **quais contribuições o uso da metodologia de resolução de problemas trouxe para mudança de atitude na postura das alunas de um Curso de Pedagogia, no Município de Teófilo Otoni – MG e, consequentemente para a aprendizagem da matemática?** Este tema surgiu das indagações apresentadas pelas alunas do curso de Pedagogia quando segundo as mesmas haviam escolhido o curso considerando as dificuldades encontradas no Ensino Fundamental e Médio e também após as discussões sobre que trabalho desenvolver como conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática oferecido pelo PROFMAT que trouxesse uma contribuição efetiva para o desenvolvimento profissional.

Um fato a ser destacado por este pesquisador, é que há muitos anos desenvolve todo o trabalho nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, ensinando matemática através da Resolução de Problemas, contudo não tinha o conhecimento de que se tratava de uma metodologia reconhecida mundialmente e que é defendida por muitos pesquisadores. Destacou ainda que o trabalho continua e continuará a ser desenvolvido desta forma, pois acredita que a Metodologia da Resolução de Problemas é o caminho para a aprendizagem da matemática. Corroborando com o pensamento dos pesquisadores citados na presente pesquisa (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008; DANTE, 2010; TOLEDO e TOLEDO, 2009; DÁMBRÓSIO, 2004), só se aprende matemática resolvendo problemas.

Na busca pela resposta à pergunta diretriz da presente pesquisa, foi desenvolvido um roteiro de trabalho baseado na Metodologia de Resolução de Problemas, com atividades elaboradas a partir dos conteúdos a serem trabalhados na disciplina de matemática no quarto período do curso de pedagogia da FUPAC, unidade Teófilo Otoni. O roteiro de atividades foi desenvolvido em sala de aula e não trouxe prejuízo à carga horária das alunas, considerando que as atividades contemplaram as unidades de ensino exigidas na Ementa do Curso.

Os resultados apontaram que a Metodologia de Resolução de Problemas é um caminho para favorecer a aprendizagem da matemática e consequentemente fazer com que a matemática seja vista com outros olhos pelos alunos. Os resultados mostraram ainda que a Metodologia de Resolução de Problemas levam o aluno a pensar e construir seu próprio conhecimento, levando-o a ser um sujeito protagonista no processo ensino aprendizagem.

Considerando que o pesquisador era também professor do grupo de indivíduos participantes da pesquisa, foi possível perceber o crescimento destes no processo tanto nas atitudes individuais em sala quanto no desempenho escolar.

Durante o desenvolvimento das atividades foi possível perceber o envolvimento de todas as alunas nas atividades e o quanto estas se sentiam motivadas a interagir no processo, o enriquecimento do vocabulário, das discussões em grupo, principalmente aquelas que no início pareciam agir com indisciplina considerando o desconhecimento da metodologia e a dificuldade na aprendizagem da matemática considerando a falta do pré-requisito que as mesmas não possuíam no início do trabalho, porém gratificante foi perceber a participação e a alegria destas ao perceber que também podiam resolver qualquer atividade proposta a partir do entendimento do enunciado dos problemas, considerando que estas se consideravam que não sabiam e/ou se consideravam fracas em matemática.

Assim, foi possível perceber que a metodologia provocou uma mudança de atitude na postura das alunas que antes ficavam passivas aguardando a exposição dos conteúdos ou que fosse resolvido um problema parecido para que pudessem repetir a fórmula ou a técnica para a resolução.

Durante a intervenção do pesquisador nos grupos de trabalho e/ou a realização das plenárias, conforme proposta de Onuchic e Allevato, discutido no capítulo 2 deste trabalho, foi possível perceber a empolgação e o interesse das alunas em apresentar as soluções e as formas de resolução dos problemas esclarecendo suas dúvidas, bem como apresentando conjecturas próprias no momento da formalização do conteúdo trabalhado feito pelo professor pesquisador, demonstrando que conforme já citado por Onuchic e Allevato (2004) e Toledo e Toledo (2010), o trabalho com a Metodologia da Resolução de Problemas, o entusiasmo de professor e aluno é alto.

Corroborando com o pensamento de Carvalho (1990), pode-se afirmar que o mais importante dentro da Metodologia da Resolução de Problemas, é a garantia de que o professor proporcionará aos alunos os momentos de discussão, seja nos pequenos grupos ou com a sala toda, pois a partir dessas discussões, há o enriquecimento espontâneo ou provocado pelo professor, surgindo assim, novos problemas que possibilitem um maior aprendizado.

O uso de problemas geradores obrigou uma nova postura das alunas frente a uma mudança de atitude, bem como foi observada a utilização de raciocínios indutivos e dedutivos na busca de soluções e validação das conjecturas propostas durante a execução das atividades.

Enfim, os resultados obtidos com a pesquisa possibilitaram responder à pergunta diretriz da presente pesquisa. A Metodologia de Resolução de Problemas é uma ferramenta importante para provocar uma mudança de postura durante as aulas e consequentemente promover a aprendizagem da Matemática além de envolver os pesquisados no processo de busca pelo conhecimento, oferece-lhes a oportunidade de pensar, selecionar estratégias para a resolução de problemas, bem como elaborar e validar conjecturas além de propiciar também a capacidade de argumentação.

O trabalho desenvolvido foi bastante proveitoso e significativo para o pesquisador e os pesquisados, porém, corroborando com Smole e Diniz (2001), esse trabalho não é muito simples e requer do professor tempo e planejamento e ainda, conforme Onuchic e Alevatto (2008), a Metodologia da Resolução de Problemas permitiu às alunas dar sentido à aprendizagem da matemática.

As opiniões de algumas alunas com relação às atividades propostas, bem como quanto ao trabalho desenvolvido, evidenciaram a postura do professor de conhecedor e transmissor do conhecimento para observador, consultor, mediador e incentivador da aprendizagem, conforme salienta Onuchic e Alevatto (2008).

Ao fazer a análise das respostas dos questionários, recolhidos junto às alunas, foi possível perceber que na maioria das respostas tinha certa "empatia" com o conteúdo da matemática, alguns até demonstraram aversão ao conteúdo considerando as dificuldades encontradas quando no ensino fundamental e médio. Também foi possível verificar que a metodologia empregada durante a execução das atividades, muito contribuiu para desmistificar a fama de "bicho papão" apresentada pela matemática, uma vez que a partir do momento em que entenderam a metodologia, passaram a trabalhar as estratégias de resolução de problemas, encontrando facilidade para a obtenção das respostas procuradas.

Algumas alunas que já trabalham com o ensino fundamental anos finais e, mesmo as professoras dos anos iniciais, afirmaram ser possível aplicar a Metodologia de Resolução de Problemas com estas séries, e outras afirmaram estar aplicando a metodologia com o objetivo de desenvolver o raciocínio dos alunos.

O presente trabalho não esgota o assunto e o autor jamais teve tal intenção. É possível desenvolver novos trabalhos com o tema aqui apresentado e colher resultados ainda mais surpreendentes. Porém é possível concluir que com o professor desenvolvendo trabalho em sala de aula através da Metodologia de Resolução de Problemas, a aprendizagem se torna mais significativa, mais prazerosa e consequentemente teremos um aluno mais comprometido e participativo na sala de aula.

Concluindo este trabalho, deixando como sugestão para todos os professores: que *ensinem* a matemática através da *Metodologia de Resolução de Problemas* em todas as séries e tipos de ensino, sempre com problemas geradores sem se preocupar com o tempo em sala de aula, permitindo ao aluno descobrir o potencial matemático existente em cada um.

# REFERÊNCIAS


ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; BATISTA, Irinéa de Lourdes. Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 45, abr. 2013.
Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000100002&lng=pt&nrm=iso >. Acesso em: 29 jul. 2014. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000100002.

Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, v. 25, n. 41, pp. 73-98, dez. 2011. Acesso em: 12 maio 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática/organizado por Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo; autores; Dário Fiorentini, Antônio Vicente Marafioti Garnica, Maria Aparecida Viggiani Bicudo. – 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica** / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 562p. Educação Básica. Diretrizes Curriculares. Disponível em: https://www.google.com.br/?gws_rd=ssl#q=diretrizes+curriculares+nacionais+2013 Acesso em 04/2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.
Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2014.

CANDAU, Vera Maria. Magistério: construção cotidiana. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997. p. 160-183.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. Metodologia do ensino de matemática / Dione Lucchesi de Carvalho. – São Paulo: Cortez, 1990. – (Coleção magistério. 2º grau. Série formação do professor).

CBC, Proposta Curricular, Matemática - Ensino Fundamental - 6º ao 9º. **Centro de Referência Virtual do Professor** – CRV – SEE. Disponível em: < http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?id_projeto=27&id_objeto=38908&tipo=ob&cp=B53C97&cb=&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-20CBC&n3=Fundamental%20-%206%C2%BA%20ao%209%C2%BA&n4=Matem%C3%A1tica&b=s>. Acesso em 04/06/2014.

CHICA, Cristiane H. Por que Formular Problemas. *In:* **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Organizado por Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Artmed, 2001. 204p .

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2).

CUNHA, Daniela Santa Inês. **Investigações geométricas**: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009. 98f. Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2009. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/80/17%20Daniela%20 Cunha.pdf?sequence=1>. Acesso em: 23 jun. 2014.

D`AMBRÓSIO, Beatriz S. **Formação de Professores de Matemática para o Século XXI**: ao Grande Desafio. Pro-Posições, Vol. 04, nº 1 [10] – 1993, Disponível em: http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-d%5C'ambrosiobs.pdf ; Acesso em 06/06/2014.

D`AMBRÓSIO, Ubiratan. Prefácio. *In:* BORBA, Marcelo de Carvalho. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1ª ed. – São Paulo : Ática, 2010. 192p. – (Educação).

FELDMANN, Maria Graziela. **Formação de professores e Escola na contemporaneidade**. São Paulo: Editora Senac, 2009. p. 71-80.

FERREIRA, C. P. **A metodologia da Resolução de Problemas na primeira série do Ensino Médio: Experiência e contradições.** Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia .pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_cleonice_pereira_ferreira.pdf> . Acesso em 23 jun. 2014.

FIORENTINI, Dário. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

FRANCO NETO, Vanessa; SILVA, Marcio Antonio da. Competências profissionais de professores de matemática do ensino médio valorizadas por uma boa escola: a supremacia da cultura da performatividade. **Bolema**, Rio Claro , v. 27, n. 45, abr. 2013 . Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000100008&lng =pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2014.

HOUSE, Peggy A. Aventurando-se pelos caminhos da resolução de problemas. In: KRULIK, Stephen; [Problem Solving in school mathematics. Português] A Resolução de Problemas na matemática escolar. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

HÜBNER, Magda C. S. **Educação matemática**: processo de resolução de problemas no contexto escolar. Disponível em: <http://obraslivres.com/obras/162059/educacao-matematica-processo-de-resolucao-de-problemas-no-contexto-escolar>. Acesso em: 23 jun. 2014.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de problemas**: construção de uma metodologia: (ensino fundamental I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

KRULIK, Stephen; [Problem Solving in school mathematics. Português] A Resolução de

Problemas na matemática escolar. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo : Atual, 1997.

LOPES, S. E. **Alunos de ensino fundamental e problemas escolares:** leitura e interpretação de enunciados e procedimentos de resolução. 278f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, 2007. Disponível em: <http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/0c6078cfbd0d293.pdf >. Acesso em: 23 jun. 20014.

LUDKE, Menga. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. (Temas básicos de educação e ensino).

LUDWIG, Paula Isabel. **Formação inicial de professores de matemática**: situações vivenciadas pelos alunos na realização do estágio. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.. Disponível em: <http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/viewFile/67/61>. Acesso em: 6 jun. 2014.

MARANDINO, Martha. A formação continuada de professores em ensino de ciências: problemática, desafios e estratégias. In: CANDAU, Vera Maria. **Magistério**: construção cotidiana. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997. p. 160-183.

MEDIANO, Zélia D. A formação em serviço de professores através de oficinas pedagógicas. In: CANDAU, Vera Maria. **Magistério** : construção cotidiana. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997. p. 91-109.

MILANI, Wilton Natal. A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio [manuscrito]. 2011. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, dez. 2012. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000400003&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2014.

______ . **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 120p. (Tendências em Educação Matemática, 11).

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A matemática nos anos inicias do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. – 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. – (Tendências em Educação Matemática).

NUNES, Célia Barros. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos para obtenção do titulo de Doutora em Educação Matemática. disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default

/files/artigos/trab_completo_celia.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2014.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. A Resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos e para onde iremos. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_lonuchic.pdf >. Acesso em: 3 jul. 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf>. Acesso em: 3 jul. 2014.

POFFO, E. M. **A resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise a partir das construções de Vygotsky.** Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/artigo_resolucao_problemas.pdf>. Acesso em: 23 jun. 20014.

POLYA, George, 1887 – 1985, A arte de resolver problemas / G. Polya; [tradução Heitor Lisboa de Araujo]. Rio de janeiro: Interciência, 2006. Tradução de How to solve it: a new aspecto of mathematical method.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélio. Investigações matemáticas na sala de aula. 3. ed. Rev. Ampl. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

REIS, Melise Maria Vallim; ZUFFI, Edna Maura. Estudo de um caso de implantação da metodologia de resolução de problemas no Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 20, n. 28, 2007, pp. 113 a 137.

SADOVSKY, Patrícia, O ensino de matemática hoje: enfoque, sentidos e desafios. Tradução Antônio de Pádua Danesi. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010. 112p. (Educação em ação).

SILVA, Circe Mary Silva da; SIQUEIRA FILHO, Moyses Gonçalves. Matemática: resolução de problemas. Brasília: Liber Livro, 2011. 156 p. (Coleção ser professor)

SILVA, Lilian Aragão da; OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de. As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, ago. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000300014&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2014.

SMOLE K. S.; DINIZ M. I. , Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. 204p.

SOUZA, Adenise Vieira De. A Resolução de problemas como meio de integrar a matemática às disciplinas técnicas: uma experiência no curso Técnico em Agropecuária. 2014. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

STANCANELLI, Renata. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE K. S.; DINIZ M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre : Artmed, 2001. 204.

TOLEDO, Marília Barros de Almeida; TOLEDO, Mauro de Almeida Toledo. **Teoria e prática de matemática**: como dois e dois. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2009.

TORRENTE, Carlos. **Os professores**: A crescente desvalorização social e profissional. Disponível em: <http://carlostorrente.blogspot.com.br/2014/08/os-professores-crescente-desvalorizacao.html>. Acesso em: 15 ago. 2014.

TRIVIÑOS, Augusto Nivaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. 1ª ed. 15. Reimp. São Paulo: Atlas, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. O lugar da matemática escolar na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, dez. 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000400012&lng=pt&nrm=iso>. Acessos em: 29 jul. 2014.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luiz Callejo. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto alegre: Artmed, 2006. 212 p.

VILELA, Denise Silva. Tendência profissionalizante da universidade: o caso da Licenciatura em Matemática da UFSCar. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, dez. 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000400013&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2014.

# APÊNDICE

**APÊNDICE A: Questionário aplicado para as alunas avaliarem o trabalho desenvolvido**

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Disciplina: TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Turma: 2012

Orientadora: Maria Deusa Ferreira da Silva

Mestrando: José Marcos Nascimento Magalhães.

QUESTIONÁRIO

1) Quais as dificuldades encontradas no início do trabalho?

2) Você tinha alguma dificuldade com a matemática antes do processo?

3) O que você aprendeu com esse trabalho?

4) Este trabalho está sendo aplicado na sala de aula?

5) Você já está atuando em sala de aula? Trabalha com resolução de problemas?

6) Você acha importante trabalhar com resolução de problemas? Por quê?

7) Faça o comentário que você achar conveniente quanto às aulas desenvolvidas.

## APÊNDICE B: Lista de atividades 1

1) Cássia comprou 3 Kg de maçã a R$ 1,85 cada, 2 Kg de mamão a R$ 1,75 cada, 5 Kg de banana a R$ 1,79 cada, 8 Kg de melancia a R$ 0,85 cada, 2 kg de uva a R$4.85. Deu R$ 30,00 ao caixa. Qual foi o troco?

2) Eliana foi a uma festa e percebeu que havia 4 mulheres para cada três homens. Se na festa tinha 20 mulheres, quantos eram os homens?

3) Uma lanchonete vende diariamente 80 jarras de suco. Para fazer uma jarra de suco são usadas cinco laranjas.

a) Quantas laranjas são usadas diariamente?
b) "Um cento" equivale a 100 laranjas. Quantos centos de laranja o dono da lanchonete precisa diariamente?
c) Um cento de laranja custa R$ 12,50. Quanto gasta diariamente?
d) Uma jarra de suco rende 5 copos, cada copo é vendido a R$ 1,30. Quanto fatura diariamente?

4) Três ônibus partem simultaneamente do terminal rodoviário às 7h. O ônibus da linha A, sai de 20 em 20 minutos, o ônibus da linha B sai de 30 em 30 minutos e o ônibus da linha C sai de 40 em 40 minutos. A que horas o três partirão juntos novamente do terminal?

5) Marilene dispõe de três cortes de pano: um de 15 m, um de 12 m e outro de 18 m.. Ela deseja confeccionar bandeiras retangulares todas do mesmo tamanho. Qual deve ser o maior pedaço a ser cortado nos três cortes de pano, sendo todos iguais, a fim de evitar desperdício?

### Lista de atividades 2

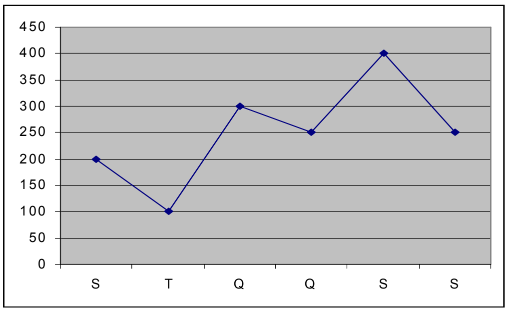
1) Daiane, Carol, Patrícia e Jaqueline foram a uma pizzaria e gastaram respectivamente R$ 18,00, R$26,00, R$ 32,00 e R$ 24,00. Qual foi a média de gastos?

2) Marcelo vai dar uma festa e ele tem 6 pets de três litros cada. Ele vai distribuir em copos de 250 ml. Quantos copos vai precisará comprar?

3) Uma caixa tem 6 m de comprimento, 2 m de altura e 3 m de largura.

c) Qual é o volume dessa caixa em $m^3$?
d) Qual o volume da caixa em litros?

4) Observe o gráfico de linhas que mostra a venda de CDs em uma loja durante a semana.
a) Em qual dia da semana vendeu mais?
b) Em qual dia da semana vendeu menos?
c) Em quais intervalos houve queda na venda?
d) Em quais intervalos houve aumento nas vendas?
e) Qual foi a venda total da semana?
f) Qual foi a média diária das vendas?
g) Qual o percentual de aumento de quinta para sexta feira?




5) O preço de uma TV de 32" é de R$1.700,00 à vista. A compra pode ser à vista com desconte de 12% ou à prazo, parcelada em até 12 meses e nesse caso, o preço sofre um acréscimo de 20%.
a) Qual será o valor da TV à vista?
b) Qual será o valor da TV a prazo?
c) Qual será o valor de cada prestação?

## APÊNDICE C: Lista de atividades 3

1) Marcelo tinha R$ 1.500,00. Gastou $\frac{1}{3}$ com lazer, $\frac{2}{5}$ com roupas, 12 % pôs na poupança e o restante distribui com os irmãos.
a) Quanto gastou com lazer?
b) Quanto gastou com roupas?
c) Quanto pôs na poupança?
d) Quanto distribuiu com os irmãos?

2) Para 12 pães, Adriana gasta 2 kg de trigo. Quantos pães fará com 3 kg?

3) Viajando a uma velocidade de 60 km /h, Cássia gastou 3 horas para percorrer um determinado percurso. Em quanto tempo faria o mesmo percurso a uma velocidade de 90 km/h?

4) Marilene percebeu que ao dividir bombons entre seus sobrinhos, viu que se desse 6 bombons para cada um iria faltar 2 bombons, mas se desse 3 bombons para cada um sobraria 8 bombons.
a) Quantos eram os sobrinhos?
b) Quantos eram os bombons?

5) Com R$ 300,00 reais Laís compra 5 blusas. Quantas blusas comprará com R$ 180,00?

6) Em um treino de fórmula 1, um piloto fez o percurso em 18 segundos com uma velocidade de 200 km/h. em quanto tempo faria o percurso com velocidade de 240 km/h?

**Lista de atividades 4**

1) Um pai quer dividir uma fazenda de 1300 alqueires entre seus 4 filhos na razão direta de suas idades que são 12a, 15a, 18a e 20ª. . Qual será a parte de cada um?

2) Zenóbia afirma que os números 15, 25, x e 40 são diretamente proporcionais. Qual o valor de x?

3) O dobro de um número real somado com 8 unidades é igual à sua terça parte somado com 33 unidades. Qual é o número?

4) Um Motoboy tinha um certo número de cobranças a fazer para uma loja. Ele fez as cobranças em três dias. No primeiro dia fez um terço das cobranças, no segundo dia fez dois quintos das cobranças no terceiro dia ele fez 8 cobranças. Qual o número de cobranças que ele tinha para fazer?

5) Observem a tabela de preços. A partir da observação, criar problemas com os dados apresentados.

| Produto | Valor: |
|---|---|
| Jaqueta | R$ 80,00 |
| Blusa | R$ 20,00 |
| Bicicleta | R$ 240,00 |
| Brinquedo | R$ 70,00 |
| Tênis | R$ 120,00 |

## APÊNDICE D: Lista auxiliar 1

1) No Brasil temos 3 fusos horários, onde em alguns estados brasileiros temos horário de verão onde os relógios são adiantados em uma hora, e em outros não. Os estados da Bahia, Alagoas e Sergipe não têm horário de verão. Minas, São Paulo, Paraná, têm horário de verão.

a) Em Teófilo Otoni (MG) são 10h, que horas são em Salvador, capital baiana?
b) Rio Branco, no Acre, tem duas horas a menos que Curitiba. Se em Rio Branco são 13 h, que horas são em Curitiba?
c) São Paulo tem duas horas a mais que Manaus, Capital do Amazonas. Se em São Paulo são 17 horas, que hora são em Manaus?
d) O Brasil tem um fuso horário de 12 h a menos em relação ao Japão. Se em Tóquio, Capital japonesa são 12h, que horas são em Teófilo Otoni?

Fonte, arquivo do pesquisador.

2) Cássia comprou 3 Kg de maçã a R$ 1,75 cada, 2 Kg de mamão a R$ 1,60 cada, 5 Kg de banana a R$ 1,70 cada, 8 Kg de melancia a R$ 0,80 cada,, 1 kg de uva a R$4.70, . Deu R$ 30,00 ao caixa. Qual foi o troco?

3) Dê o valor numérico de $\frac{x^2 - 3.y}{z}$ x = 6, y = –3 e z = 5

**4)** Resolva as expressões.

a) $x = \sqrt{169} - \sqrt{49} + \sqrt{225}$

b) $y = \sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt{\frac{4}{100}} - \sqrt{\frac{49}{9}}$

5) Rita comprou 2 Kg de maçã a R$ 1,70 cada, 3 Kg de mamão a R$ 1,60 cada, 5 Kg de banana a R$ 1,70 cada, 5 Kg de melancia a R$ 0,80 cada. Deu R$ 30,00 ao caixa. Qual foi o troco?

6) Considere o número **8.365.472**
a) O algarismo 8 ocupa qual ordem?
b) Qual é o algarismo das dezenas de milhar?
c) Qual é a classe do algarismo 2?
d) Qual é o algarismo que ocupa a 3ª ordem?
e) Quantas classes possuem este número?
e) Quantas ordens possuem este número?

7) Considere o número **95.792.**
a) Qual é o valor absoluto do algarismo da 3ª ordem?
b) Qual é o valor relativo do algarismo da 4ª ordem?
c) Qual é o valor absoluto do algarismo da 2ª ordem?
d) Qual é o valor relativo do algarismo da 5ª ordem?
e) Troque de lugar o algarismo 9 e o 7. Que número formou?
f) O novo número é maior ou menor que o primeiro? Quantas unidades?

8) O preço de uma TV de 32 " é de R$1.800,00 à vista. A compra pode ser parcelada em até 12 meses e nesse caso, o preço sofre um acréscimo de R$ 280,00.
a) Qual será o valor da TV a prazo? B) Qual será o valor de cada prestação?

9) Rita comprou 3 Kg de maçã a R$ 1,75 cada, 2 Kg de mamão a R$ 1,50 cada, 3 Kg de banana a R$ 1,50 cada, 5 Kg de melancia a R$ 0,80 cada. Deu R$ 20,00 ao caixa. Qual foi o troco?

## APÊNDICE E: Lista auxiliar 2

**1)** Marcelo tinha R$ 400,00, gastou $\frac{1}{5}$ com lazer, $\frac{2}{5}$ com roupas, 25 % pôs na poupança e o restante distribui com os irmãos.
a) Quanto gastou com lazer?
b) Quanto gastou com roupas?
c) Quanto pôs na poupança?
d) Quanto distribuiu com os irmãos?

2)Dê o valor numérico das expressões:

a) $6^2 - 4.(-8) + 25$ b) $(-5)^2 - 3.(-5) - 6.(-7)$

c) $\sqrt{49} - \sqrt{36} + \sqrt{25} + \sqrt{100}$ d) $3.7 + 7.7 - 6.9$

3) Represente na forma de frações.

a) 0,5 b) 18 % c) 2% d) 0,58 e) 1,2

4) Uma caixa tem 2 m de comprimento, 1,2 m de altura e 2,5 m de largura. Qual é o volume dessa caixa?

5) Um time de futsal tem 6 jogadores cujas idades são: 24 a, 22 a, 18 a, 26 a, 20 a, 28 a . e as alturas são: 1,78m , 1,56m, 1,65m, 1,57m, 1,59m, em 1,60m.

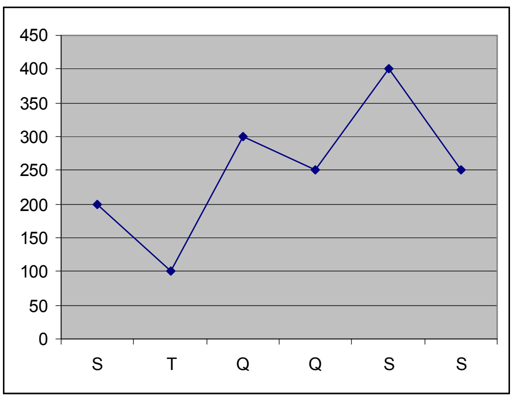
a) Qual a média de idades? b) qual a média das alturas?

6) Três ônibus A, B e C, partiram juntos às 9 h com destinos diferentes. Sabe-se que os intervalos de cada um são com saída de 20 em 20 min. Para o ônibus A, 30 em 30 min. Para o ônibus B e 25 em 25 min. Para o ônibus C. a que horas os três partirão juntos novamente?

7) Marília dispõe de 3 pedaços de pano e de comprimentos diferentes mas com larguras iguais. Ela tem um pedaço de 12 m, um de 18 m e um de 21 m. e deseja confeccionar várias bandeiras para venda. Qual deverá ser o comprimento de cada bandeira a fim de não haver desperdício?

8) Observe o gráfico de linhas que mostra a venda de Roupas em uma loja durante a semana.

a) Em qual dia da semana vendeu mais?
b) Em qual dia da semana vendeu menos?
c) Qual foi a venda total da semana?
d) em quais intervalos houve queda na venda?
e) em quais intervalos houve aumento nas vendas?



## APÊNDICE F: Lista auxiliar 3

1) O triplo de um número somado com sua metade é igual a 70. Qual é o número?

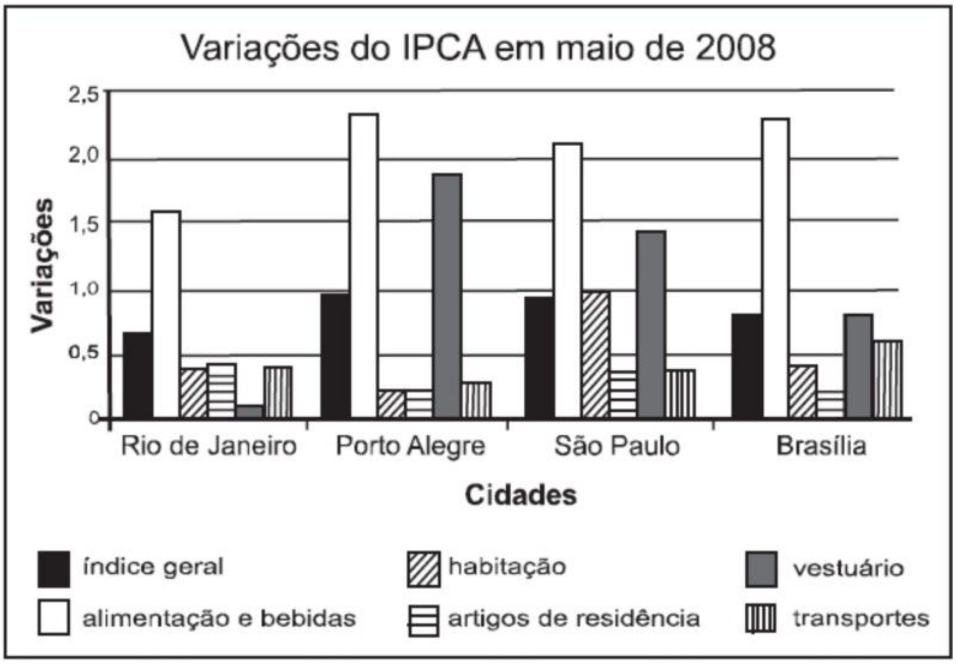
2) Eliane vai dividir bombons com seus sobrinhos. Ela percebeu que se der 5 bombons para cada um sobra 7 e se der 8 bombons para cada um faltam 5. Quantos são os sobrinhos? Quantos são os bombons?

3) Katiúcia fez um percurso em 2 horas viajando a 90 km/h. qual será tempo do percurso se a velocidade for 60 km/h?

4) Observe as expressões: $x = (6^2 - 4.7) \div \mathbf{2^2}$ e $y = 8.9 - 12.[\sqrt{64} - \sqrt{9}]$. Então $(x - y)^2$ vale:

5) Resolva a expressão. $\dfrac{3 - x.y}{x^2}$ para x = 3 e y = – 9

6) Para o cálculo da inflação, utiliza-se, entre outros, o índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que toma como base os gastos das famílias residentes nas áreas urbanas, com rendimentos mensais compreendidos entre um e quarenta salários mínimos. O gráfico a seguir mostra as variações do IPCA de quatro capitais brasileiras no mês de maio de 2008. Com base no gráfico, qual item foi determinante para a inflação de maio de 2008.




Disponível em:http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 05 jul. 2008 (adaptado)

a) Alimentação e bebidas. b) Artigos de residência. c) Habitação.
d) Vestuário. e) Transportes.

7) Marilene percebeu que ao dividir bombons entre seus sobrinhos, viu que se desse 5 bombons para cada um iria faltar 2 bombons, mas se desse 3 bombons para cada um sobraria 8 bombons. Quantos eram os sobrinhos? Quantos eram os bombons?

## APÊNDICE G: Lista auxiliar 4

1) O preço de uma TV é de R$1.350,00 à vista. A compra pode ser parcelada em até 12 meses e nesse caso, o preço sofre um acréscimo de 12%
a) Qual será o valor do juro?
b) Qual será o valor da TV a prazo?
c) Qual será o valor de cada prestação?

2) Marcelo tinha R$ 1.200,00, gastou $\frac{1}{5}$ com lazer, $\frac{2}{5}$ com roupas, 30 % pôs na poupança e o restante distribui com os irmãos.
a) Quanto gastou com lazer?
b) Quanto gastou com roupas?
c) Quanto pôs na poupança?
d) Quanto distribuiu com os irmãos?

3) Para fazer uma jarra de suco de laranja, são necessárias 6 laranjas. Uma lanchonete vende em média 50 jarras de suco por dia.
a) Quantas laranjas o dono da lanchonete dever ter diariamente para atender a demanda?
b) Um cento de laranja equivale a uma centena de laranjas. Quantos centos ele compra por dia?
c) Um cento de laranja custa para a lanchonete R$10,50. Quanto o dono da lanchonete gasta por dia com laranjas?
d) Uma jarra de suco rende 5 copos e cada copo é vendido a R$ 1,50 cada. Quanto a lanchonete fatura com o suco diariamente?

4) Um pai quer dividir R$ 1.600 entre seus três filhos Pedro, Márcia e Rafaela, na razão direta de suas idades que são respectivamente 3, 5 e 8 anos. Qual a parte de cada um?

5) O triplo de um número real, somado com 12 unidades, é igual a à sua terça parte somado com 42 unidades. Qual é o número?

6) O preço de uma TV de 32" é de R$1.350,00 à vista. A compra pode ser parcelada em até 12 meses e nesse caso, o preço sofre um acréscimo de 20%.
a) Qual o valor do juro a ser pago?
b) Qual será o valor da TV a prazo?
c) Qual será o valor de cada prestação?

7)Sabendo que os números 6, 24, 5 e x, formam nessa ordem uma proporção, calcule o valor de x

8) Sabendo que os números 8, 20, 32 e x, formam nessa ordem uma proporção, calcule o valor de x

9) Se um corredor corre 250 m em 25 segundos, em quanto tempo correrá 400m?

10) Mario e Carlos tem respectivamente 18 e 24 anos. Qual a razão entre suas idades?

11) Leila e Silvia tem respectivamente 15 e 25 anos. Qual a razão entre suas idades?

12) O triplo de um número real somado com 25 unidades é igual à sua metade somado com 45 unidades. Qual é o número?

## APÊNDICE H: Lista auxiliar 5

1) Um pai deseja repartir R$ 1800,00 entre seus três filhos Letícia, Marcelo e Renata, na razão direta de suas idades 3a, 5a e 7a. Qual será a parte de cada um?

2) Luciene percebeu que ao dividir bombons entre seus alunos viu que se distribuir 3 para cada aluno sobra 7 bombons. Se der 4 bombons para cada um sobra 2 bombons. Calcule o número de alunos e de bombons que ela tem.

3) Observe a tabela abaixo:

| ARTILHEIROS DO CAMPEONATO BRASILEIRO DE 1996 A 2007 | | | |
|---|---|---|---|
| ANO | NÚMERO DE GOLS | JOGADOR | TIME |
| 2007 | 20 | Josiel | Paraná |
| 2006 | 17 | Souza | Goiás |
| 2005 | 22 | Romário | Vasco |
| 2004 | 34 | Washington | Atlético-PR |
| 2003 | 31 | Dimba | Goiás |
| 2002 | 19 | Rodrigo Fabri<br>Luiz Fabiano | Grêmio<br>São Paulo |
| 2001 | 21 | Romário | Vasco |
| 2000 | 22 | Adhemar | São Caetano |
| 1999 | 28 | Guilherme | Atlético-MG |
| 1998 | 21 | Viola | Santos |
| 1997 | 29 | Edmundo | Vasco |
| 1996 | 16 | Paulo Nunes<br>Renaldo | Grêmio<br>Atlético-PR |

Fonte: <http://www.uol.com.br. Acesso em: 01 jun. 2014.

a) Qual é o título da Tabela?
b) A tabela tem quantas colunas?
c) A tabela tem quantas linhas?
d) Quais informações encontramos nas colunas?
e) Qual é a fonte da informação?
f) Qual artilheiro marcou mais gols? Quantos gols?
g) Qual(is) artilheiro(s) marcou menos gols? Quantos gols?
h) Na tabela há algum artilheiro que marcou o dobro de outro artilheiro de anos anteriores? Em caso positivo indique o jogador, o ano e número de gols marcados por cada jogador.

4) A torcida do CRUZEIRO comemorando o título de Bi-Campeão brasileiro, lotou uma praça retangular de lados 60 m por 40 m. A Polícia militar fez uma estimativa de que havia 5 torcedores por $m^2$. Quantos torcedores estavam felizes da vida naquela noite?

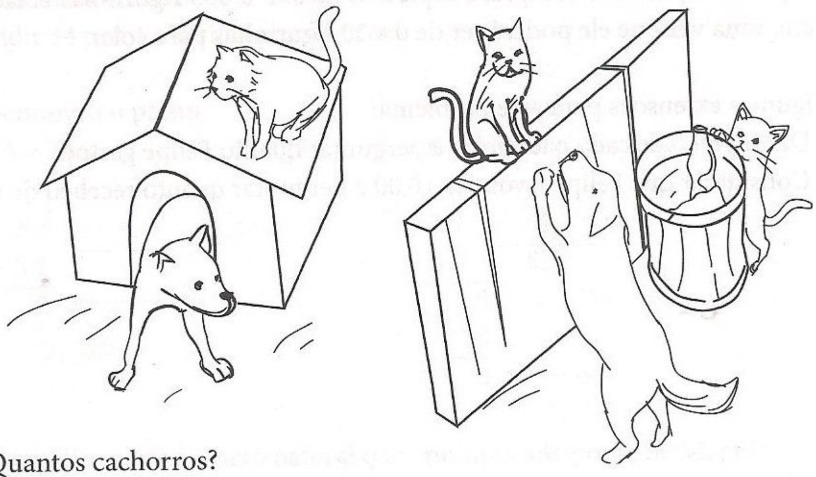
5) Foi construída uma praça retangular de dimensões 100 m por 80 m.. No centro foi construída uma parte circular de raio 50 m. A parte circular da praça foi coberta de grama e o restante foi pavimentada.
a) Qual foi a área gramada?
b) Qual foi a área pavimentada?
c) Um $m^2$ de grama custa em média R$ 3,00. Qual o valor gasto com a grama?
d) Um $m^2$ de pavimento custa em média R$ 16,00. Qual o valor gasto com a pavimentação?

# ANEXOS

Nos presentes anexos apresentamos sugestões de problemas a serem trabalhados com os alunos. Os anexos de A até I contém problemas que foram extraídos do livro Formulação e Resolução de Problemas de Luiz Roberto Dante (2010). De J a M, extraídos do Livro Resolução de Problemas nos anos Iniciais do Ensino Fundamental de Ruth Ribas Itacarambi (2010). De N a P, extraídos do Livro Teoria e Prática da Matemática – como dois e dois, de Toledo e Toledo (2009) e de Q a S, extraídos do Livro A Arte de Resolver Problemas, de George Polya (2006).

## ANEXO A: Sugestão de problemas

**Animais domésticos**



a) Quantos cachorros?
b) Quantos gatos?
c) Quantos animais ao todo?
d) Quantas cabeças ao todo?
e) Quantas pernas ao todo?

**Estimando a soma**


Sem fazer a conta, responda:
a) Quais os dois brinquedos que, juntos, custam R$ 44,00?
b) Quais os dois brinquedos que, juntos, custam R$ 54,00?
Faça as contas e confira se acertou.

**ANEXO B: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

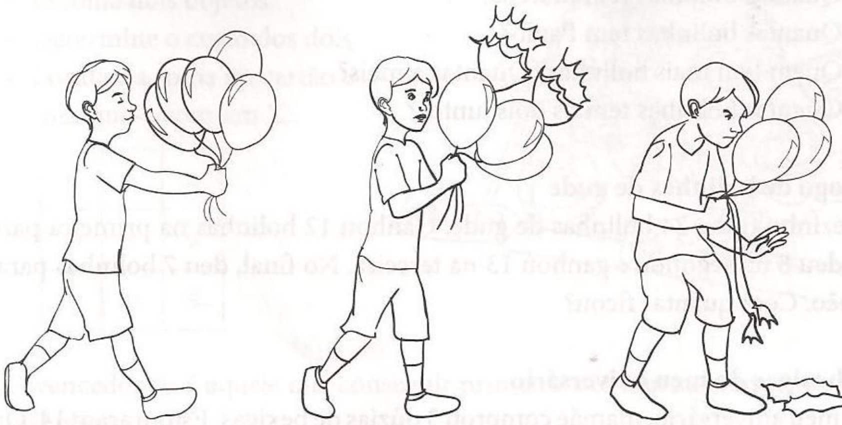
**Brincando no parquinho**

a) Quantas crianças estão no balanço?
b) Quantas crianças estão na gangorra?
c) Quantas crianças estão no escorregador ou próximas a ele?
d) Quantas crianças estão em volta do lago?
e) Quantas crianças estão na caixa de areia?
f) Quantas crianças estão no parquinho?
g) Onde há mais crianças brincando?
h) Onde há menos crianças brincando?
i) Faça você mesmo mais duas perguntas e responda.

## Anexo C: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.

**Inventando problemas**

Observe as figuras e invente uma história:



**A minha classe**

Na classe de Ricardo há 17 meninos e 22 meninas.

a) Quantas crianças há na classe?
b) E na sua classe, quantos são os meninos?
c) Quantas são as meninas?
d) Há mais meninos ou meninas?
e) Quantos são ao todo?

**Luke Skywalker × Darth Vader**

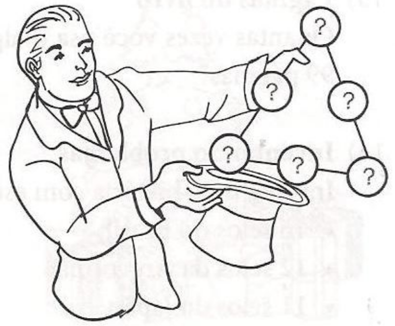
Luke Skywalker e Darth Vader são inimigos. Luke quer destruir a nave espacial de Darth Vader, mas ela dispara raios *laser* três vezes por segundo. Quantos disparos Luke recebe em 5 segundos?

**A chuva atrapalhou a aula**

O 1º ano B tem 29 alunos. Hoje, por causa da chuva, faltaram 6 alunos. Quantos vieram à aula?

**O triângulo mágico**

Copie em seu caderno o triângulo da figura ao lado e coloque os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nos círculos, de modo que a soma em cada lado seja 10.



## ANEXO D: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.

### O índice do livro

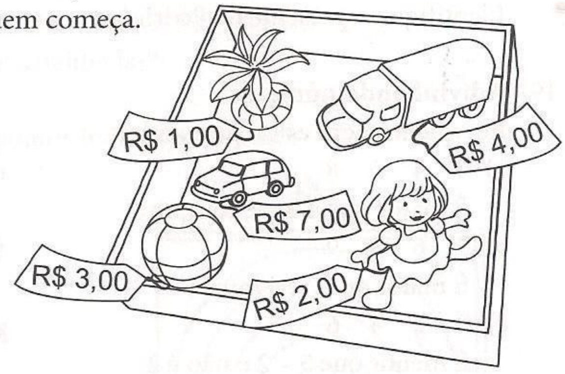
| Índice | | |
|---|---|---|
| Capítulo | Título | Página |
| 1 | Números naturais | 1 |
| 2 | Sistemas de numeração | 17 |
| 3 | Adição de naturais | 32 |
| 4 | Multiplicação de naturais | 49 |
| 5 | Figuras geométricas | 64 |
| 6 | Subtração de naturais | 79 |
| 7 | Divisão de naturais | 88 |

a) Quantos capítulos tem o livro?
b) Em que página começa o terceiro capítulo?
c) Qual é o título do sexto capítulo?
d) Quantas páginas tem o segundo capítulo?
e) Em que página termina o quarto capítulo?
f) Dentre os seis primeiros capítulos, qual é o mais longo e quantas páginas tem?
g) Se o capítulo 7 tem 20 páginas, qual é a última página do livro?
h) Qual é o capítulo mais curto e quantas páginas tem?
i) Escreva um problema usando esse índice e resolva-o.

**Fazendo somas** (jogo para duas crianças)

- Tire par ou ímpar para ver quem começa.
- Escolha dois objetos.
- Determine o custo dos dois.
- Localize a soma no cartão e marque-a com um **X**.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 3 |
| 10 | 4 | 9 |
| 7 | 11 | 5 |




O vencedor será aquele que conseguir primeiro três marcas numa mesma linha ou coluna.

**ANEXO E: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

**Contando dinheiro**

Isabel tem 7 notas na carteira, num total de R$ 20,00. Que notas são essas?

**Quem é o vencedor?**

Os seis meninos acabaram de apostar uma corrida. Analise as dicas abaixo e responda: quem ganhou a corrida?

- O vencedor tem uma camisa listrada.
- Ele não é o menino mais alto de todos.
- Ele está usando calças escuras.
- Sua camisa é de manga curta.

**O caminho da escola**

Todos os dias Annelise anda 600 m para ir à escola e mais outro tanto igual para voltar. Quantos metros ela anda por semana?

**Adivinhe se puder**

Qual é o maior número natural que você pode multiplicar por 6 e ainda ter um produto menor que 75?

**ANEXO F: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

) **Decifrando uma foto**

Tirei uma foto de algumas crianças brincando com cachorros. Na foto há 7 cabeças e 22 pernas. Quantas crianças estão na foto?

) **A lesma persistente**

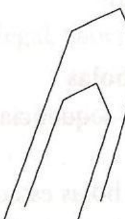
Uma lesma está no fundo de um poço de 6 m de altura. Ela sobe 2 m por dia, para um pouquinho e cai 1 m. Quantos dias ela levará para chegar ao topo do poço?

) **Procurando idades**

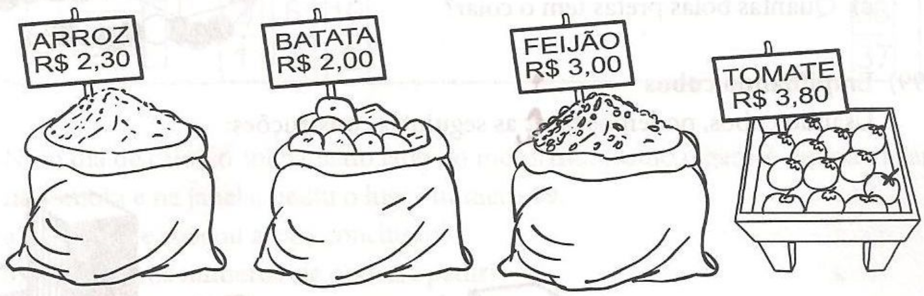
Dona Luzia tem 42 anos. A sua idade, junto com as idades de seus dois filhos gêmeos, é de 66 anos. Qual é a idade de cada um dos seus filhos?

) **Clipe, uma grande invenção**

Determine quantos quilômetros de arame são necessários para fazer 1 milhão de clipes do tamanho do da figura ao lado.



) **Fazendo compras**




Dona Maria foi ao supermercado e comprou:

- 3 kg de arroz;
- 4 kg de batata;
- 2 kg de feijão;
- 2 kg de tomate.

Pagou essa compra com 3 notas de R$ 10,00. Qual foi o troco recebido?

) **Números perfeitos**

Os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6. O número 6 é chamado *número perfeito* porque 1 + 2 + 3 = 6 (o último divisor é igual à soma de todos os anteriores). Na sequência dos números naturais, 6 é o primeiro número perfeito. Qual é o número perfeito seguinte?

**ANEXO G: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

**As idades**

a) O Brasil foi descoberto em 1500. Quantos anos de descobrimento do Brasil se comemoraram em 2007?
b) Tiradentes nasceu em 1746 e morreu enforcado em 1792. Quantos anos ele viveu?
c) Se Jesus Cristo estivesse vivo, quantos anos ele teria em 2007?
d) Machado de Assis nasceu em 1839 e morreu em 1908. Se ele estivesse vivo em 2009, quantos anos teria?
e) Vinicius de Moraes morreu em 1980, com 67 anos. Em que ano ele nasceu?
f) Einstein nasceu em 1879 e viveu 76 anos. Em que ano ele morreu?
g) O telefone foi inventado em 1876. Quantos anos ele completou em 2008?
h) Aline tinha 9 anos em 1989. Qual era sua idade no ano 2000?
i) Quando Felipe nasceu, seu pai tinha 31 anos. Hoje Felipe tem 13 anos. Qual é a idade do pai de Felipe hoje?

**A coleção de cédulas**

Felipe tem uma coleção de cédulas. Ele tinha 28 notas estrangeiras e 46 notas brasileiras. Seu pai conseguiu, com um colecionador, mais 13 notas brasileiras.

a) Quantas notas ele tinha?
b) Quantas notas seu pai lhe deu?
c) Com quantas notas ele ficou?
d) Com quantas notas brasileiras ele ficou?
e) Com quantas notas estrangeiras ele ficou?

**O vendedor de lanches**

Nas férias, Caio ajuda o pai, que tem um carrinho de lanches. No fim das férias, eles fizeram um balanço do que foi vendido e colocaram os números numa tabela:

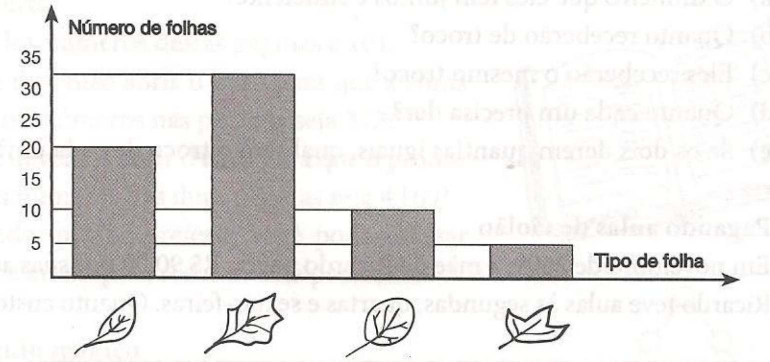
| | Cachorro-quente | Hambúrguer | Refrigerante |
|---|---|---|---|
| Dezembro | 315 | 468 | 285 |
| Janeiro | 376 | 616 | 416 |
| Fevereiro | 298 | 314 | 311 |

a) Quantos cachorros-quentes foram vendidos?
b) Quantos hambúrgueres foram vendidos?
c) Quantos refrigerantes foram vendidos?
d) Quantos cachorros-quentes e hambúrgueres eles venderam?
e) Em que mês a venda total foi menor?
f) Em que mês a venda de refrigerantes foi maior?

**ANEXO H: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

**A excursão ao horto florestal**

Numa excursão ao horto florestal, os alunos do 4º ano coletaram vários tipos de folha: 5 crianças pegaram 20 folhas finas e compridas; 10 crianças pegaram 32 folhas largas e curtas; 8 crianças pegaram 10 folhas arredondadas; e 2 crianças pegaram 5 folhas em forma de estrela. Nenhuma criança deixou de pegar folhas e cada uma pegou folha de um único tipo. Vamos colocar essas informações num gráfico?




a) Para onde os alunos do 4º ano fizeram uma excursão?
b) O que eles fizeram lá?
c) Quantas crianças foram à excursão?
d) Qual foi o total de folhas coletadas?
e) Que tipo de folha foi mais coletada?
f) Que tipo de folha foi menos coletada?
g) Foram coletadas mais folhas arredondadas ou mais folhas largas e curtas?

**A fila da roda-gigante**

A cada 5 minutos sobe um grupo de 25 pessoas na roda-gigante. Quanto tempo Taís ficará na fila se há 52 pessoas na frente dela?

**Completando e interpretando histórias**

Claudinha sempre acompanha a mãe à padaria. Quando chega lá, vai logo procurando a prateleira de doces e balas. Ela sempre pega doces que custam R$ 0,50 cada e balas que custam R$ 0,20 cada. Sua mãe sempre lhe dá 2 moedas de R$ 1,00 para suas pequenas compras. (Complete essa historinha.)

a) Onde Claudinha e sua mãe vão sempre juntas?
b) Qual prateleira Claudinha gosta de visitar?
c) Quanto custa cada doce de que ela gosta?
d) Quanto custa cada bala de que ela gosta?
e) Quanto sua mãe lhe dá para fazer essas compras?

**ANEXO I: Sugestão de problemas. Propostos por Dante.**

**Flávia no elevador**

Flávia pegou o elevador. Desceu 5 andares, subiu 6, desceu 7 e chegou no 2º andar. Em que andar ela estava?

**As casas dos sitiantes**

Três sitiantes — sr. Manoel, sr. Joaquim e sr. Oliveira — moram na mesma estrada. O sr. Manoel mora a 10 km do sr. Joaquim. O sr. Oliveira mora a 2 km do sr. Joaquim. A que distância o sr. Manoel mora do sr. Oliveira?

**A classe de Ricardo**

A classe de Ricardo tem 34 alunos. Ela fará uma apresentação na véspera do Dia das Crianças. Para isso, foram formadas equipes de 5 crianças.

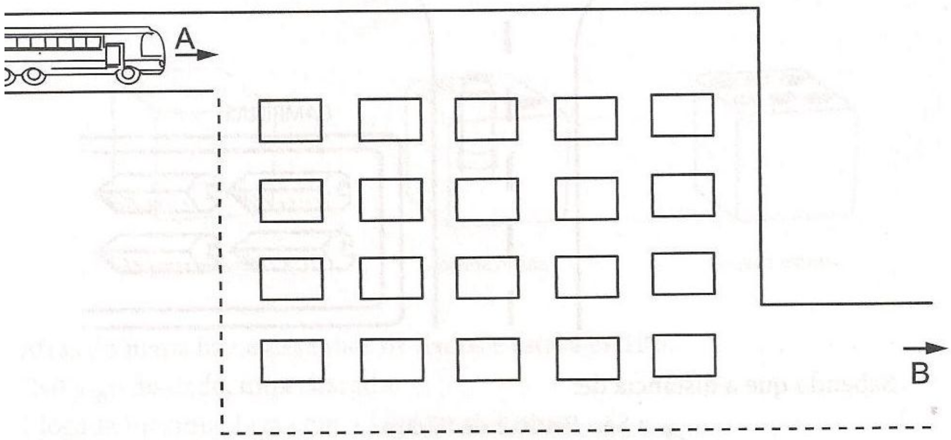
a) Quantos alunos há na classe de Ricardo?
b) Por que eles formaram equipes?
c) Quantos alunos estão em cada equipe?
d) Quantas equipes foram formadas?
e) Houve alguma equipe com menos alunos? Por quê?

**O trem-bala**

Um trem mede 1 km. Ele está a uma velocidade de 1 km por minuto. Quantos minutos ele levará para atravessar um túnel de 1 km?

**A rota do ônibus**

Um ônibus entra num bairro em **A** e sai em **B**:




a) Indique algumas rotas diretas (virando no máximo em 4 esquinas) de **A** até **B**.
b) Indique qual dessas rotas é a melhor para todos os moradores do bairro.

**ANEXO J: Sugestão de problemas. Propostos por Itacarambi.**

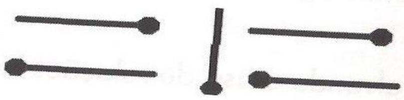
Problemas para o 1º ano.

1.1 – Relações lógicas (perguntas com soluções)

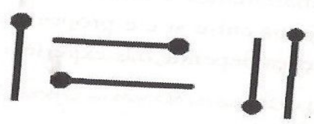
1.1.1 – Continuar as sequências descobrindo o critério estabelecido em cada uma.

a)

b)

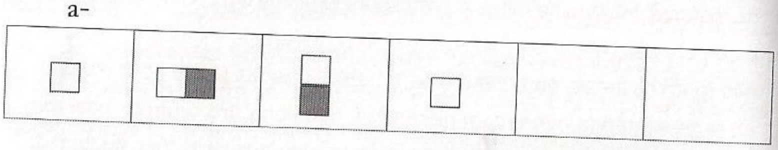


c)

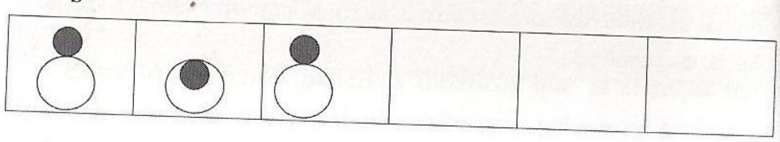


1.1.2 – Completar as sequências observando as formas dos três primeiros termos e suas posições.

a-



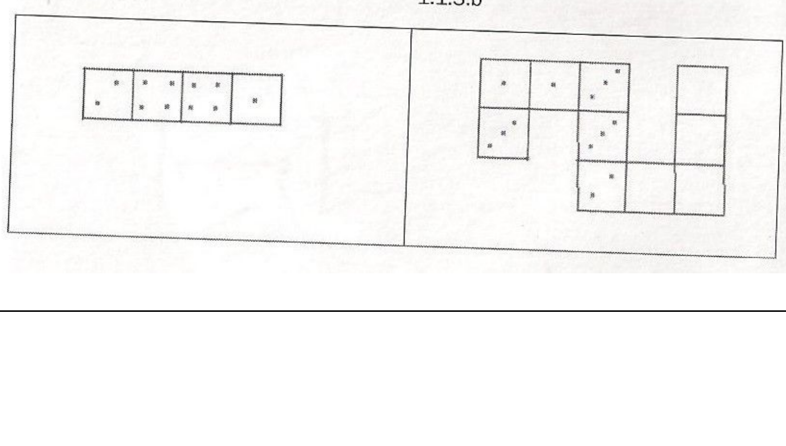
b-



1.1.3- Você já conhece as peças do dominó, então vamos completar as sequências:

1.1.3.a

1.1.3.b



**ANEXO k: Sugestão de problemas. Propostos por Itacarambi.**

### 1.3 – Relações lógicas (várias perguntas com solução)

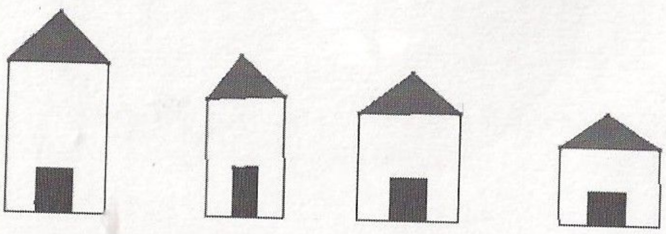
1.3.1 - Faça a leitura das pistas com atenção e descubra de quem é cada casa.

Pistas

– A casa dos Duendes não é a mais baixa.

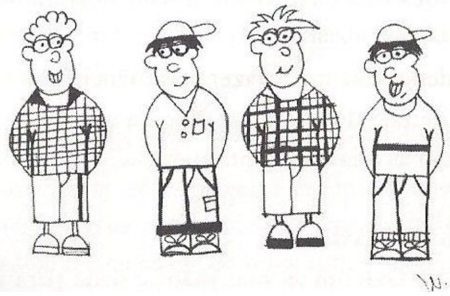
– A casa da Fada é mais alta que a dos Duendes, mas é mais baixa que a casa do Dragão.

– A Bruxa gostaria de ter uma casa maior.



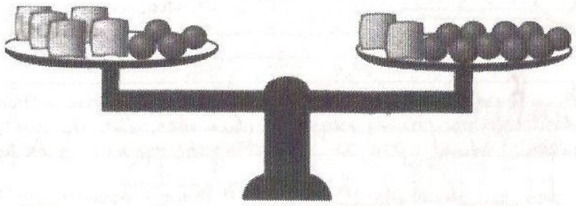
1.3.2 – Quatro amigos foram ao cinema. Na fila para comprar o ingresso, Lúcia não era primeira nem quarta. A Sara estava à frente da Lúcia, mas atrás da Karina. O Júlio estava atrás de Lúcia. Qual era a ordem dos amigos na fila?

1.3.3 – O Luís e o João usam camisa xadrez. O Lucas e o Rodrigo têm boné. O sapato do Luís tem sola escura. A camisa do Lucas tem botões. Escreva o nome de cada um na figura ao lado.



**ANEXO L: Sugestão de problemas. Propostos por Itacarambi.**

1.1.3 – A balança da figura está em equilíbrio com bolas de gude e saquinhos de arroz em cada um de seus pratos. As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de arroz é igual ao peso de quantas bolas?



## 2.2 – O sistema de numeração e operações (uma pergunta, várias informações)

2.2.1 – Um bombeiro está exatamente na metade de uma escada apoiada num prédio em chamas, jogando água sobre o fogo. Com o aumento da fumaça, ele foi forçado a subir três degraus. Logo em seguida uma labareda obrigou-o a descer 5 degraus. Depois disto, ele subiu sete degraus e ali permaneceu até apagar o fogo. Finalmente conseguiu subir os restantes seis degraus desta escada chegando ao topo do prédio. A escada tem quantos degraus?

## 3.2 – Estimativas e cálculo mental (várias perguntas com solução)

A avó de Joana está fazendo um cachecol de listras rosa e branco. A Joana pediu um cachecol bem comprido para enrolar no pescoço e nas mãos. A avó resolveu fazer com 150 cm de comprimento e começou com uma listra branca e cada listra mede 5 cm.

Quantas listras terão no cachecol?

Quantas listras cor de rosa terão no cachecol acabado?

Qual é a cor da última listra?

**ANEXO M: Sugestão de problemas. Propostos por Itacarambi.**

**3.2 – Estimativas e cálculo mental (várias perguntas, com solução)**

O supermercado Q. Bom estava vendendo latas de refrigerante em pacotes de 3 tipos:

– pacote de 4 latas: R$ 6,00

– pacote de 5 latas: R$ 7,00

– pacote de 6 latas: R$ 7,50

a – De quantas maneiras eu posso comprar 20 latas de refrigerante?

b – Qual é a maneira mais barata de comprar 20 latas de refrigerante neste supermercado?

**3.3 – Estimativa e cálculo mental (uma pergunta, várias soluções)**

Suponha que num posto de votação temos 917 pessoas cadastradas. Estas pessoas estão distribuídas em oito seções. Sabendo que em cada seção tem no mínimo 100 pessoas e no máximo 150, estime o número de pessoas em cada seção.

**4.1 – Problemas sobre possibilidades (uma pergunta, uma solução)**

Os avós paternos de Clara tiveram 2 filhos, cada um dos quais teve 2 filhos. Os avós maternos tiveram igualmente 2 filhos. Eles também tiveram 2 filhos cada um.

Quantas pessoas têm na família de Clara a partir de seus avós?

**4.2 – Problemas sobre possibilidades (uma pergunta, várias soluções)**

Os alunos da classe de Tiago compraram papel de seda de duas cores azul e amarelo, para fazer bandeirinhas e enfeitar a classe. Quantos tipos de bandeirinhas diferentes podem fazer com estas cores?

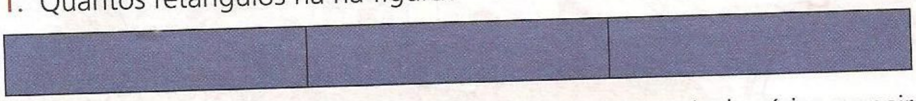
**ANEXO N: Sugestão de problemas. Propostos por Toledo e Toledo.**

## SUGESTÕES DE PROBLEMAS

Partindo sempre da estratégia de explorar nos problemas o interesse das crianças em descobrir segredos, resolver enigmas e brincar de detetive, o professor pode trabalhar com várias possibilidades.

**I** — Misturar situações-problema que envolvem operações e outras que não envolvem.

1. Quantos retângulos há na figura?



2. Com notas de 1, 5, 10, 50 e 100 reais, forme 120 reais de várias maneiras:
   a) como desejar;
   b) com a menor quantidade possível de notas;
   c) com a maior quantidade possível de notas;
   d) com 5 notas;
   e) com 8 notas.

3. Três irmãos fizeram um trabalho e receberam, juntos, R$ 540,00, que repartiram igualmente. Luís deu R$ 40,00 para a mãe e ficou com o resto; Maria comprou uma bolsa por R$ 45,00 e um vestido por R$ 56,00 e deu o resto para a mãe; Pedro deu metade para a mãe e ficou com o resto. Quanto cada uma das quatro pessoas tem agora?

4. Três amigos, Miguel, André e João, têm barracas vizinhas na feira. O que vende peixe não é vizinho do que vende frutas. As verduras que João vende são do sítio de seu pai. As laranjas que André trouxe hoje para vender estão fresquinhas. Faça uma planta da feira, escrevendo o nome dos donos das barracas e o que eles vendem.

5. Marquinhos quer comprar um ioiô e uma bola. Como ele pode saber se o seu dinheiro vai dar para fazer as compras?

**II** — Em meio aos problemas tradicionais, propor alguns que contenham informações desnecessárias (para que o aluno selecione os dados importantes) e outros em que faltem informações.

6. Na sala de brinquedos da escola há 3 bonecas, 5 caixas de quebra-cabeças, 8 carrinhos, 4 jogos de panelinhas e 5 cordas de pular. Quantas bolas há na sala? Que brinquedo há em maior quantidade? E em menor quantidade? Quantos desses brinquedos servem para brincar de casinha? Explique como eles são usados na brincadeira.

**ANEXO O: Sugestão de problemas. Propostos por Toledo e Toledo.**

V **7.** Três amigos entraram numa lanchonete. Jorge gastou R$ 5,00; Ana gastou menos que Jorge; Pedro gastou o mesmo que Ana. Quanto os três gastaram no total? Você acha que R$ 15,00 serão suficientes para pagar tudo? Se Pedro e Ana derem R$ 10,00 para pagar sua parte, vão receber troco?

V **8.** Dona Matilde tem, em seu galinheiro, 2 gansos, 3 galos, 5 galinhas com pintinhos, 7 galinhas sem filhotes, 6 perus e 8 patos. Quantas galinhas há no galinheiro?

**III** — Apresentar diferentes veículos de informação: catálogos de preços, ilustrações, histórias em quadrinhos etc.

V **9.** Observe a ilustração seguinte e depois responda:

Ilustra Cartoon

a) Quantas crianças estão brincando no parque?
b) Quantos tipos de brincadeiras são ao todo?
c) Em qual das brincadeiras há mais gente?
d) Quantos adultos estão no parque?

**ANEXO P: Sugestão de problemas. Propostos por Toledo e Toledo.**

14. Peça aos alunos que façam uma pesquisa de opinião, na própria classe ou em outras classes, sobre um assunto de interesse da escola no momento. Coloque os dados em um gráfico de barras.

15. Apresente uma lista de preços dos lanches e dos produtos vendidos na lanchonete da escola. Peça aos alunos que criem problemas a partir dessa lista.

**IV** — Apresentar problemas que podem ter diferentes encaminhamentos de soluções.

16. Um tijolo pesa 1 quilograma mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?

17. Um homem precisa atravessar um rio levando uma galinha, uma raposa e um saco de milho. Porém, o único barco disponível só pode carregar dois elementos em cada viagem — ele e um de seus pertences. O homem fica em dúvida: se deixar a galinha com o milho, a galinha come o milho; se deixar a raposa com a galinha, a raposa come a galinha. Qual é a saída?

18. Três pessoas querem dividir igualmente 30 garrafas, das quais 10 estão cheias, 10 têm líquido até a metade e 10 estão vazias. As pessoas querem receber a mesma quantidade, tanto de garrafas quanto de líquido. De que maneira isso pode ser feito?

**ANEXO Q: Sugestão de problemas. Propostos por Polya.**

## PROBLEMAS

1. Um urso parte do ponto *P* e percorre um quilômetro no sentido sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?

2. Roberto deseja adquirir um lote de terreno, rigorosamente plano e nivelado, limitado por quatro linhas. Dois dos limites deverão ficar exatamente na direção norte-sul e os dois outros na direção leste-oeste. Cada uma das linhas-limite deverá medir exatamente 100 metros. Será possível encontrar um lote com estas características no estado do Paraná?

3. Roberto tem 10 bolsos e 44 moedas. Ele quer colocar as moedas nos bolsos, mas de tal maneira distribuídas que em cada bolso fique um número diferente de moedas. Será possível consegui-lo?

4. Para numerar as páginas de um grosso volume, o tipógrafo utilizou 2 989 algarismos. Quantas páginas tem o volume?

5. Entre os papéis do vovô foi encontrado um recibo:

72 perus $ – 67,9 –

O primeiro e o último algarismo do número, que evidentemente representava o preço total das aves, aparecem aqui substituídos por espaços em branco porque se apagaram e estão ilegíveis.

Quais serão os algarismos apagados e qual era o preço de um peru?

6. São dados um hexágono regular e um ponto situado no seu plano. Traçar uma reta que passe pelo ponto dado e divida o hexágono dado em duas partes de áreas iguais.

7. É dado um quadrado. Determinar o lugar geométrico dos pontos dos quais o quadrado é visto sob um ângulo (a) de 90°; (b) de 45°. (Seja *P* um ponto situado fora do quadrado, mas no mesmo plano deste. O menor ângulo com vértice em *P* que contenha o quadrado é o "ângulo sob o qual o quadrado é visto" de *P*.) Traçar cuidadosamente ambos os lugares geométricos e descrevê-los completamente.

**ANEXO R: Sugestão de problemas. Propostos por Polya.**

8. Chama-se "eixo" de um sólido uma reta que liga dois pontos da sua superfície e tal que o sólido, girando em torno dessa linha, em um ângulo superior a $0^\circ$ e inferior a $360^\circ$, coincida com ele mesmo.

Determinar os eixos de um cubo. Descrever claramente a localização desses eixos e calcular o ângulo de rotação de cada um deles. Admitindo que a aresta do cubo tem comprimento unitário, calcular a média aritmética dos comprimentos dos eixos.

9. Num tetraedro (não necessariamente regular), duas arestas opostas têm o mesmo comprimento $a$ e são perpendiculares entre si. Além disso, cada uma delas é perpendicular a uma linha de comprimento $b$ que liga os seus pontos médios. Exprimir o volume do tetraedro em função da $a$ e $b$ e demonstrar a resposta.

10. Numa pirâmide, o vértice oposto à base é chamado *"ápice"*.

(a) Chamemos uma pirâmide de "isósceles" se o seu ápice estiver à mesma distância de todos os *vértices* da base. Adotando esta definição, demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está *inscrita* num círculo cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

(b) Chamemos agora de "isósceles" uma pirâmide cujo vértice estiver à mesma distância (perpendicular) de todos os lados da base. Adotando esta definição (diferente da anterior), demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está *circunscrita* a um círculo, cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

11. Calcular os valores de $x, y, u$ e $v$ que satisfazem o sistema de quatro equações:

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(Parece demorado e enfadonho: procure um atalho.)

**ANEXO S: Sugestão de problemas. Propostos por Polya.**

12. Roberto, Pedro e Paulo viajam juntos. Pedro e Paulo são bons andarilhos: cada um deles percorre a pé $p$ quilômetros por hora. Roberto está com um pé machucado e dirige um pequeno carro com capacidade para duas pessoas, mas não três: o carro percorre $c$ quilômetros por hora. Os três amigos adotaram o seguinte esquema: todos partem no mesmo momento, Paulo no carro com Roberto e Pedro a pé. Depois de certo tempo, Paulo salta do carro e passa a andar, enquanto Roberto volta para apanhar Pedro. Estes dois então viajam no carro até alcançar Paulo. Neste

ponto eles trocam: Paulo passa para o carro e Pedro vai a pé, exatamente como começaram a viagem. Todo o processo é repetido quantas vezes se fizerem necessárias.

(a) Quanto percorre, em quilômetros por hora, o grupo?

(b) Que fração do tempo de viagem o carro viaja com uma só pessoa?

(c) Verifique os casos extremos de $p = 0$ e $p = c$.

13. Três números estão em progressão aritmética e três outros em progressão geométrica. Somando-se sucessivamente os termos correspondentes dessas duas progressões, obtém-se

$$85, 76 \text{ e } 84$$

respectivamente, e somando-se todos os três termos da progressão aritmética, obtém-se 126. Calcular os termos de ambas as progressões.

14. Determinar para $m$ um valor tal que a equação em $x$

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

tenha quatro raízes reais em progressão aritmética.

15. O comprimento do perímetro de um triângulo retângulo é 60 centímetros e a altura relativa à hipotenusa é 12 centímetros. Calcular os lados desse triângulo.

16. Do pico de uma montanha divisam-se dois pontos, $A$ e $B$. As linhas de visada para estes pontos fazem o ângulo $\gamma$. As inclinações dessas linhas de visada, em relação a um plano horizontal, são $\alpha$ e $\beta$, respectivamente. Sabe-se que os pontos $A$ e $B$ estão no mesmo nível e que a distância entre eles é $c$.

Expressar a altura $x$ do pico, acima do nível comum a $A$ e $B$, em função de dois ângulos, $\alpha$ e $\beta$, e da distância $c$.