UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLAUDENOR ANCELMO DA SILVA

A TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA FACILITADORA DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

MOSSORÓ/RN
2015

CLAUDENOR ANCELMO DA SILVA

A TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA FACILITADORA DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Catalogação na Fonte
Catalogação de Publicação na Fonte. UFERSA - BIBLIOTECA ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Silva, Claudenor Ancelmo Da.
A torre de hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas / Claudenor Ancelmo Da Silva. - Mossoró, 2015.
62f: il.

1. Função exponencial. 2. Resolução de problemas. 3. Torre de Hanói. I. Título

RN/UFERSA/BOT/317-15 CDD 511.326
S586a

CLAUDENOR ANCELMO DA SILVA

A TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA FACILITADORA DO PROESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 23 de janeiro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA
Presidente

Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Primeiro Membro

Aleksandre Saraiva Dantas

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 23 de janeiro de 2015.

Dedico este trabalho à minha mãe Maria das Graças, em memória, por sua capacidade de acreditar e investir em mim desde a mais tenra infância. Dedico também a minha filha Maria Clara que é o grande amor da minha vida e se tornou a minha maior motivação para a conclusão deste curso com êxito.

“Precisamos contribuir para criar a escola
que é aventura, que marcha, que não tem medo do
risco, por isso que recusa o imobilismo.
A escola em que se pensa, em que se atua, em que se cria,
em que se ama, se adivinha, a escola que
apaixonadamente diz sim à vida”.
Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Ao Deus Todo Poderoso, pela saúde e sabedoria que me proporcionou a alegria de participar com êxito deste Programa de Mestrado.

Ao Governo Federal, juntamente com SBM, CAPES e UFERSA pela oferta deste curso numa região que nos possibilitou cursar um mestrado sem muitos sofrimentos físicos.

À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Ao Coordenador do Curso Antônio Ronaldo Gomes Garcia, pelo excelente trabalho realizado e por todo apoio dado para que nossa turma pudesse alcançar o sucesso.

Ao meu Orientador, Professor Odacir Almeida Neves, pela paciência, atenção e pelas valorosas contribuições feitas ao orientar este trabalho.

Aos meus colegas e amigos da turma 2012 do PROFMAT – UFERSA – MOSSORÓ - RN, por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos.

Por fim, aos meus colegas do Grupo de Estudo, carinhosamente chamado de *JaguarMath*, Francisco Reginaldo Amorim, José Uéslei Marques, Joziel Lima da Sila e João Paulo de Lima, pelas valorosas contribuições nas discussões que nos fizeram crescer juntos e nos tornarmos vencedores em todas as etapas desta árdua jornada chamada PROFMAT.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma atividade utilizando a Torre de Hanói como uma ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de função exponencial. Neste trabalho foi apresentada uma atividade lúdica onde o professor possa inserir os alunos numa situação problema cuja solução envolve a criação de um modelo matemático fundamentado na função exponencial. Primeiramente é feita uma introdução ao assunto através da fundamentação teórica, com ênfase especial à importância da utilização de jogos no ensino de Matemática. O desenvolvimento metodológico da atividade proposta utiliza-se dos fundamentos do jogo da Torre de Hanói para introduzir a noção intuitiva de função exponencial, explorando a lenda que envolve o jogo, apresentando a teoria sobre função exponencial e propondo problemas abertos, fechados e situações-problema. Citando alguns autores, procurou-se fundamentar a utilização da atividade como alternativa viável para aperfeiçoar o processo de aquisição das competências e habilidades básicas no ensino de funções, que se configura como base de construção de vários conteúdos do Ensino Médio. A atividade pretende aguçar no aluno a curiosidade em conhecer o jogo em seus diversos níveis de complexidade, deduzir que existe uma relação entre o número de movimentos e o número de discos, motivando-o a conhecer o conceito formal função exponencial, suas propriedades e resolver diversos tipos de problemas práticos envolvidos nesta teoria.

Palavras-chave: Torre de Hanói, Função Exponencial, Ensino-aprendizagem, Resolução de problemas.

ABSTRACT

This work aims to present an activity using the Tower of Hanói as an easier in the teaching-learning process of Exponential Function. It was presented a playful activity where the teacher could insert the students in a problem-situation in which the solution evolves to create a math model based in Exponential Function. First of all, an introduction was made on the subject through theoretical principles, emphasizing the importance of using games in Math teaching. Methodological development on the proposed activity is based on the Tower of Hanói game to introduce the Exponential Function intuitive notion, by exploring the legend behind the game, presenting the theory about, proposing opened and closed problems and problem-situations. Quoting some authors, it was sought to base the use of the activity as a viable alternative to improve the acquisition process of basic competences and abilities when teaching Functions. It takes the form to support most of the contents of High School. The activity aims to sharpen the student curiosity and know its different complexity levels so that he/she can infer that there is a relation between the number of movements and the number of pieces. This can motivate them to know the Exponential formal concept, its properties and solve a variety of practical problems in the theory.

Keywords: Tower of Hanói, Exponential Function, Teaching-Learning Process, Problems solution.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

1.1. Introdução

Este trabalho apresenta uma proposta de trabalho que trata o conteúdo de função exponencial a partir do jogo Torre de Hanói e tem como objetivo principal dar uma contribuição para o ensino de Matemática facilitando a introdução desse conteúdo que está presente em numerosas aplicações matemáticas na ciência e na indústria, e é indispensável no estudo de muitos problemas de finanças e economia.

Percebendo a quantidade limitada de publicações de trabalhos voltados para os conteúdos do Ensino Médio e a falta de motivação dos alunos para estudar Matemática, este trabalho reforça as ideias subjacentes ao trabalho com jogos e intenciona a incorporação dessas ideias pelos professores do Ensino Médio como forma de aumentar o interesse dos alunos por essa disciplina mostrando que o conhecimento matemático pode ser construído de forma lúdica, criativa e, principalmente, através dos erros que surgem na busca das repostas corretas.

Nesta perspectiva, GRANDO (2001) ressalta a importância dos jogos na incorporação dos conteúdos matemáticos:

> A investigação surge da necessidade de compreensão dos aspectos cognitivos envolvidos na utilização dos jogos como instrumento na aprendizagem matemática, uma vez que uma criança em situações de brincadeira e/ou jogo desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas estratégias, ou seja, resolver problemas.

Há múltiplas justificativas para o uso dos jogos em sala de aula e isso torna notória a sua importância para aprendizagem do nosso aluno atual. Dessa forma, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN´s, 1998), publicação do Ministério de Educação e Cultura (MEC), traz importantes contribuições para auxiliar o professor em relação à inserção de jogos no ensino de Matemática, pontuam que:

> [...] estes constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propicia a

> simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (p. 46).

Como se percebe no trecho supracitado, os PCN´s orientam para a utilização de jogos no ensino de Matemática como forma de facilitar a incorporação das competências e habilidades matemáticas. Cabe ao professor planejar atividades lúdicas que estimule a curiosidade dos alunos e os insira em contextos que os permitirão vivenciar situações em que eles utilizem seus conhecimentos matemáticos e, a partir deles, possam ser apresentados a novas abordagens antes de serem apresentados aos conhecimentos matemáticos de maneira formalizada.

No jogo Torre de Hanói podemos desenvolver várias habilidades que estão intimamente vinculadas aos objetivos do ensino de Matemática, entre as principais podemos citar: planejamento das próximas jogadas, capacidade de generalização, criação do modelo matemático que dá a quantidade mínima de jogadas em função do número de discos. É bom ressaltar que isso só ocorrerá se houver intervenções pedagógicas por parte do professor. E, segundo GRANDO (2001), essa intervenção pedagógica com jogos nas aulas de Matemática deve acontecer em sete momentos distintos: familiarização com o material do jogo, reconhecimento das regras, jogar para garantir regras, intervenção pedagógica verbal, registro do jogo, intervenção escrita e jogar com competência.

Nesse aspecto, a Torre de Hanói é um jogo que pode representar uma simulação matemática na medida em que se caracteriza por ser uma situação real, criada pelo professor, para significar vários conceitos matemáticos a serem compreendidos pelos alunos através da Torre de Hanói, especialmente o conceito matemático de crescimento exponencial facilmente perceptível através da variação da quantidade de discos. Dessa forma, tornam-se necessários aos processos pedagógicos considerarem a importância de se ampliar à experiência dos alunos a fim de proporcionar-lhes momentos de atividade criadora.

Para justificar a inserção da Torre de Hanói é necessário apontar algumas possibilidades pedagógicas:

1. A competição através da Torre de Hanói garante dinamismo, movimento, propiciando interesse e contribuindo para o desenvolvimento social.

2. A competição faz ainda com que o aluno elabore estratégias, e com o tempo, aprimore essas estratégias, a fim de superar deficiências.
3. A busca pela competição faz com que o jogador sempre busque desafios maiores, a fim de sempre se superar, pois a competição no jogo propicia uma constante autoavaliação do sujeito sobre suas competências, habilidades, etc.

A utilização da Torre de Hanói em sala de aula permite inserir o aluno no contexto de um jogo em que ele pode manusear, analisar, inferir e incorporar a ideia de crescimento exponencial, através da utilização de material concreto.

Segundo SCHIMITT e FERREIRA, 2004 (apud Moura, G.S.S; et al):

> Os materiais concretos são elementos facilitadores para que os alunos aprofundem e ampliem seus conhecimentos dando maior significado as situações e atividades matemáticas que desenvolvem no espaço escolar e levando esta compreensão para o mundo. (SCHIMITT e FERREIRA, 2004, p.17).

Neste contexto, o jogo da Torre de Hanói é uma maneira lúdica, concreta e simplificada de iniciar a contextualização do conteúdo de funções exponenciais no currículo do Ensino Médio, principalmente depois da institucionalização do Novo ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, fato esse que obrigou todos os sistemas de ensino a reorganizarem seus currículos em torno de um ensino mais integrado e contextualizado.

A partir da Portaria nº. 109, de 27 de maio de 2009, publicado no Diário Oficial da União em 28 de maio de 2009, o Instituto Nacional de Estudos e pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP – e o Ministério da Educação – MEC – estimularam e conseguiram a adesão das universidades federais a utilizarem os resultados deste exame na oferta das vagas de seus cursos. Diante disso, os sistemas de ensino voltaram uma atenção especial para a contextualização dos conteúdos e, dessa forma, a utilização de jogos se torna essencial para a introdução dos conteúdos do Ensino Médio que exigem um nível de abstração mais acurado e cuja contextualização é restrita aos contextos alcançados apenas pelos intelectos com nível de preparação mais avançados.

Diante de tal contexto, a Torre de Hanói se configura como uma ferramenta poderosa para a aprendizagem dos conteúdos e a consequente incorporação das competências e habilidades explicitadas na Matriz de Referência do Novo Enem.

Embora não seja o objetivo desse trabalho é importante enfatizar que o jogo Torre de Hanói pode ser utilizado para desenvolver outras competências explicitadas na matriz de referência do ENEM que serão explicitadas a seguir:

Na competência 01 (um) – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais – da matriz supracitada, podemos utilizar a Torre de Hanói na contagem da quantidade mínima de movimentos dos discos para desenvolver as seguintes habilidades:

- H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

Na Competência 04 (quatro) – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano – a Torre de Hanói pode se configurar como uma ferramenta eficaz no desenvolvimento das habilidades:

- H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.
- H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
- H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Na competência 05 (cinco) – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas – mais uma vez podemos elencar várias habilidades que podem ser desenvolvidas através da Torre de Hanói:

- H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

- H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- H22 – Utilizar conhecimentos algébrico-geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Uma observação importante é que antes de levar qualquer jogo, inclusive a Torre de Hanói para sala de aula, é necessário que haja um planejamento de intervenções pedagógicas que ajude o aluno a se familiarizar com os principais conceitos deste jogo para que os mesmos possam incorporar as competências e as habilidades matemáticas subjacentes à Torre de Hanói e especialmente ao estudo de função exponencial.

Portanto este trabalho traz uma proposta de atividade educacional com a abordagem do conteúdo de função exponencial a partir do auxílio de um jogo matemático milenar e fundamentado nos parâmetros educacionais institucionalizados no país e explicitado na matriz de referência do ENEM.

CAPÍTULO 2

2.1. Justificativa

As últimas décadas têm sido relativamente prósperas em relação às discussões sobre a importância do estabelecimento de um sistema de ensino sólido em nosso país. Diante das novas diretrizes para o Ensino Médio brasileiro e de uma iminente mudança nos currículos provocada pela confirmação do ENEM como avaliação em larga escala utilizada para avaliar os sistemas de ensino de forma mais eficaz e diante da universalização gradativa da substituição do vestibular por essa avaliação, é necessário que haja uma disseminação de maneiras lúdicas de ensinar os conteúdos do Ensino Médio.

Diante disso, percebe-se a necessidade urgente de uma melhoria nas aulas dos professores no sentido de aproximar dos jovens e adultos da atualidade o conhecimento historicamente sistematizado pelas gerações anteriores através da contextualização dos mesmos.

É inegável que a quantidade limitada de trabalhos voltados para facilitar as práticas pedagógicas dos professores de Matemática do Ensino Médio é um fator que agrava a situação do ensino de Matemática em nosso país. Dessa forma, faz-se necessário o aumento de publicações que ampliem o leque dessas possiblidades tendo em vista que a maioria das publicações em livros, revistas e periódicos restringem-se à contextualização de conteúdos do Ensino Fundamental, deixando uma lacuna na oferta de atividades que estimulem os professores de Matemática do Ensino Médio, dificultando assim a aprendizagem daqueles alunos que têm mais dificuldade em incorporar os conceitos matemáticos elementares a uma formação mais sólida.

Dessa forma, este trabalho traz uma proposta de atividade como uma alternativa viável de introduzir a ideia e, consequentemente, o conceito de função exponencial visando à facilitação da incorporação da ideia de crescimento exponencial por parte do discente, tornando o conteúdo inteligível e aumentando a efetividade do processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo tão importante para o exercício da cidadania.

Com a introdução do trabalho a partir do jogo Torre de Hanói e a consequente assimilação e incorporação do conceito matemático de função exponencial, o aluno deverá ser colocado diante de situações-problemas desafiadoras e poderá resolvê-las utilizando as competências e habilidades incorporadas a partir do jogo.

Portanto a pertinência deste trabalho está vinculada à necessidade de incrementar o número de publicações relacionadas ao ensino de Matemática no Ensino Médio de forma lúdica e ajudar professores e alunos na busca da efetivação do processo de ensino-aprendizagem.

CAPÍTULO 3

3.1. A Importância dos Jogos nas Aulas de Matemática

Quando o professor traz algo novo e diferente para sua sala de aula, logo desperta a curiosidade e o interesse do aluno. Na verdade, quando o professor foge daquela aula tradicional, e traz uma aula inovadora porque não dizer mais criativa, os alunos desmotivados ficam com mais vontade de participar, experimentar e aprender mais sobre o objeto em estudo.

Fiorentini e Miorim, 1990 (apud Drabeski, E.J.; Francisco, R, p. 03) diz que:

> São muitas as dificuldades encontradas por professores e alunos no processo ensino-aprendizagem da Matemática. Se, por um lado o aluno não entende a Matemática que lhe é ensinada e é reprovado por isso, por outro lado o professor, não conseguindo alcançar resultados satisfatórios em suas aulas procura, muitas vezes, simples receitas de como ensinar determinado conteúdo, acreditando ser esta a melhor solução. (Fiorentini e Miorim, 1990)

De acordo com Lopes, 2005, p.22 (apud Drabeski, E.J.; Francisco, R, p. 04): “Os métodos tradicionais de ensino estão cada vez menos atraentes para o jovem, ele quer participar, questionar, atuar e não consegue ficar horas a fio sentado ouvindo uma aula expositiva”.

Podemos observar também nas aulas de Matemática, que o professor não explora a criatividade do aluno, ou seja, a repetição prevalece e acaba inibindo o aluno de pesquisar e buscar seu próprio conhecimento. É preciso que haja uma mudança no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. É preciso despertar a curiosidade e o interesse do aluno pelas atividades executadas em sala de aula. O professor deve propiciar momentos que os levem a querer buscar o seu próprio conhecimento, fazer com que eles não sejam simplesmente os espectadores, mas sim os protagonistas no processo de ensino. Pensando nisso, inserir os jogos nas aulas de Matemática é a melhor maneira para que haja o início de uma mudança nos processos de ensino e aprendizagem, permitindo assim mesclar o modelo tradicional de ensino a modelos mais criativos e motivadores.

Segundo SMOLE et al. (2007) todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual entra apenas livros, cadernos e lápis.

Para enfatizar a importância da utilização de jogos em sala de aula SMOLE et al. (2007) continua:

> Por sua dimensão lúdica, o jogar pode ser visto como uma das bases sobre o qual se desenvolve o espírito construtivo, a imaginação, a capacidade de interagir socialmente. Isso ocorre porque a dimensão lúdica envolve desafio, surpresa, possibilidade de fazer de novo, de querer superar os obstáculos iniciais e o incômodo por não controlar todos os resultados. Esse aspecto lúdico faz do jogo um contexto natural para o surgimento de situações-problema cuja superação exige do jogador alguma aprendizagem e um certo esforço na busca por sua solução.

Como foi dito anteriormente, através do jogo os alunos podem interagir uns com os outros de forma a desenvolver seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. Inclusive, no campo lúdico e na busca por um conhecimento significativo, os jogos com o uso do material concreto são de grande importância no processo de ensino por ser um recurso didático palpável e que conta o autoestímulo dos alunos na prática e na construção do conhecimento. Nesse sentido é uma ferramenta de grande importância e deve ser explorada na atuação do professor como facilitador no processo de construção do conhecimento.

Ainda segundo SMOLE et al. (2007), o jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. Dessa forma, percebe-se que a utilização de jogos nas aulas de Matemática é essencial para o desenvolvimento de competências e habilidades pessoais que representam uma condição necessária para o aluno ser protagonista de suas próprias aprendizagens e, assim, esteja munido das competências que lhe assegure a condição de aprender a aprender, um dos pilares da educação para o Século XXI citados no relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação.

Para finalizar, mais uma vez a SMOLE et al. (2007) enfatiza que antes de trabalhar com algum jogo em sala de aula é necessário que haja um planejamento e que seja utilizada a seguinte sequência didática:

1 - A escolha do jogo que é apropriado para aquele conteúdo;
2 - Apresentação do jogo aos alunos;
3 - Apresentar as regras e o objetivo do jogo;
4 - A organização da sala de aula;
5 - O tempo de jogar (tempo de aprendizagem e tempo de aula);
6 - Exploração do jogo (conversar com os alunos sobre o jogo, e pedir a eles que produzam um registro expondo suas dúvidas, suas opiniões e manifestando sua aprendizagem com o jogo).
7 - Problematizar o jogo, ou seja, enquanto os alunos jogam o professor pode pedir para explicar uma jogada, ou porque tomaram uma decisão e não a outra, e até mesmo perguntar se não há uma jogada que dificulte a próxima ação. Vale a pena também o professor se colocar como jogador em algumas ocasiões para se interagir mais dentro do grupo, observar como os alunos pensam, discutir as jogadas com eles dentro do grupo.
8 - O professor deve fazer intervenções para relacionar o jogo com o conteúdo estudado;
9 - Avaliação da aula (O que vocês aprenderam na aula? O jogo facilitou no entendimento do conteúdo? Como? O que vocês mudariam na aula de hoje? O que não mudariam? O que você espera da próxima aula?)

Como podemos perceber, levar um jogo para a sala de aula é algo muito sério, que exige do professor um planejamento cuidadoso, só assim há aprendizagem. Se forem bem aproveitadas as situações do jogo, todos ganham. Ganha o professor por estar proporcionando aos alunos uma nova e bem elaborada metodologia de ensino, despertando o interesse do aluno no conteúdo estudado. E ganha também o aluno por ele estar sendo o protagonista na construção do seu conhecimento. Enfim, a utilização de jogos nas aulas de Matemática traz o desenvolvimento do raciocínio, possibilita um trabalho mais dinâmico, rico em discussões, reflexões e, claro, em experimentos.

CAPÍTULO 4

4.1. Proposta de Atividade

Este capítulo traz uma proposta de atividade para trabalhar o conteúdo de função exponencial usando o jogo Torre de Hanói como elemento motivador do processo de incorporação das principais competências e habilidades que são envolvidas no jogo e no conteúdo tratados nesta atividade.

4.1.1. Objetivo Geral

Mostrar que a partir do jogo da Torre de Hanói é possível estabelecer um elo entre este jogo e a função exponencial contribuindo assim para o ensino da Matemática voltado diretamente para a realidade do aluno.

4.1.2. Objetivos Específicos

Ao final dessa atividade os alunos deverão ser capazes de:

- Conhecer as regras do jogo e entender a estratégia correta de efetuar a quantidade mínima de movimentos.
- Identificar a relação de dependência entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários.
- Perceber o crescimento exponencial do número mínimo de movimentos em função do número de discos.
- Utilizar o algoritmo do número mínimo de movimentos em função do número de discos para incorporar a ideia de função exponencial e suas propriedades.
- Conhecer o conceito de função exponencial e utilizá-lo na resolução de situações-problemas.
- Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
- Identificar a relação de dependência entre grandezas.

- Modelar e resolver situações-problemas usando os conhecimentos sobre funções exponenciais.

4.1.2. Conhecimentos Prévios

Para o desenvolvimento da proposta de atividade com a Torre de Hanói com eficácia é necessário que o aluno tenha conhecimentos sólidos sobre potenciação, Progressão Geométrica, relações entre conjuntos, funções e gráficos no sistema cartesiano.

4.1.3. Materiais e Tecnologias

Essa proposta de atividade necessita de uma Torre de Hanói para cada dupla de alunos na sala de aula, pois é baseada no uso do jogo em duplas como ferramenta para que os alunos possam se apropriar das principais ideias relacionadas ao estudo de função exponencial. É necessária também a utilização de um projetor de multimídia conectado a um computador com o Geogebra para que os alunos possam perceber o crescimento exponencial do número da quantidade mínima de movimentos relacionada com a quantidade de discos. Os demais itens necessários são o quadro branco, pincel, apagador e material impresso com as regras e tabelas necessárias para preenchimentos durante a atividade.

4.1.4. Dificuldades Previstas

Os professores que se dispuserem a trabalhar o conteúdo de função exponencial utilizando o jogo Torre de Hanói devem estar conscientes de que enfrentarão algumas dificuldades relacionadas ao domínio insuficiente dos conteúdos que são pré-requisitos para o estudo de função exponencial através da torre de Hanói. Assim, os professores devem estar conscientes de que os alunos já incorporaram as competências relacionadas à potenciação e suas propriedades, relação entre conjuntos, noção intuitiva de função, sistema cartesiano, funções e seus gráficos e progressão geométrica.

Outro fator a ser considerado é o nível de motivação do aluno para trabalhar em grupo, tendo em vista que o trabalho será todo desenvolvido em duplas e a indisponibilidade de alguns pode prejudicar o andamento da tarefa planejada. Dessa forma, é importante que as duplas sejam escolhidas por afinidade e na gestão da aula o professor deve estar sempre vigilante para que o foco na atividade seja mantido.

Por fim, é importante que o professor seja tolerante com o barulho, pois numa atividade em duplas em que as trocas de ideias são constantes o barulho faz parte e é consequência da proatividade e da curiosidade natural do jovem em busca de um conhecimento novo.

4.1.5. Tema do Trabalho

Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas.

4.1.6. Desenvolvimento Metodológico da Atividade

Num primeiro momento os alunos deverão ser deixados à vontade com o jogo, na intenção de que se familiarizem com as peças, com os movimentos e com o jeito de encaixar os discos nos pinos. Depois disso, para deixar o jogo mais atraente, deve-se fazer uma apresentação das regras do jogo e da história da torre explicando que a construção foi inspirada numa lenda hindu e que a partir dele é possível construir ideias matemáticas importantes para a complementação do estudo de um novo tipo de função.

Neste segundo momento, deve-se observar o desenvolvimento do jogo segundo as regras explicadas. O jogo será iniciado com apenas um disco, para que os alunos transfiram-no para outra haste, depois com dois discos, aumentando o grau de dificuldade segundo as regras, até que se chegue ao limite de cinco discos. Durante o desenvolvimento dessa etapa os alunos deverão anotar em tabelas fornecidas o número de movimentos em cada etapa do jogo.

Nesta etapa os alunos serão questionados a respeito de quantos movimentos cada um realizou para transferir a torre do primeiro para o terceiro pino, se a quantidade de movimentos será a menor possível, a quantidade de movimentos de cada peça e sobre a relação entre as quantidades de movimentos dos discos do jogo.

Para que eles se apropriem mais das estratégias, deve-se pedir aos alunos para que fiquem separados em duplas e a tarefa seja dividida da seguinte forma: um dos alunos moverá os discos e o outro deve contar a quantidade de movimentos e anotar numa tabela que deve ser fornecida antes da atividade. Depois disso a dupla deve trocar de função para que os dois membros da dupla vivenciem a atividade de mover os discos, contar a quantidade de movimentos necessários para mover os discos para a terceira torre. Em seguida, os alunos devem construir uma tabela com o número mínimo de movimentos necessários para transferir os discos do primeiro para o terceiro pino e a quantidade de movimentos de cada disco em cada etapa e responder outras perguntas presentes na tabela que os mesmos receberão para ser preenchida durante a atividade.

Diante dos resultados, deve-se oferecer um brinde para a dupla que tenha obtido o maior número de quantidades mínimas de resultados nas cinco etapas, usando como segundo critério de desempate o tempo necessário para que seja executada cada tarefa, sendo que esse tempo deve ser contado, mas não pode ser inserido na tabela para não confundir o aluno em relação a sua percepção da relação entre a quantidade de discos e a quantidade mínima de movimentos necessários.

A tabela a seguir deve ser usada para que as duplas anotem o número de movimentos (y) necessários para que os movimentos com os x discos sejam efetuados:

x discos	**x = 1**	**x = 2**	**x = 3**	**x = 4**	**x = 5**
Dupla 01	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 02	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 03	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 04	y =	y =	y =	y =	y =

Dupla 05	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 06	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 07	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 08	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 09	y =	y =	y =	y =	y =
Dupla 10	y =	y =	y =	y =	y =
y mínimo					

Tabela 1. Tabela das quantidades de movimentos efetuados por cada dupla
Fonte: Autor

Com base na tabela anterior, os discentes serão perguntados qual será o menor número de movimentos realizados para todas as etapas propostas e montarão uma tabela que relaciona o número mínimo de movimentos à quantidade de discos e, a partir disso, serão impelidos a perceberem o crescimento exponencial do número mínimo (y) de movimentos em função do número de discos (x) e a expressão matemática que dá o número mínimo de movimentos (y) em função do número x de discos, de acordo com os dados inseridos na tabela a seguir:

Número de discos	**Número mínimo de movimentos**
1	
2	
3	
4	
5	
....	....
x	y = f(x) = ?

Tabela 2. Tabela das quantidades mínimas de movimentos.
Fonte: Autor

Para aguçar a curiosidade daqueles alunos mais perspicazes que não se conformam com conjecturas e precisam de uma linha de raciocínio mais acurada sobre a expressão matemática que dá o número mínimo f(x) de movimentos necessários para passar x discos do primeiro para o terceiro pino, faremos as perguntas a seguir seguindo uma ordem crescente de dificuldade:

Hanói com Um Disco

a) Sem desperdiçar movimentos, qual o número mínimo de movimentos, para transportar o disco do primeiro para o terceiro pino obedecendo as regras do jogo?

Hanói com Dois Discos

a) Sem desperdiçar movimentos, qual o número mínimo de movimentos, para transportar todos os discos do primeiro para o terceiro pino obedecendo as regras do jogo?

b) Indique a quantidade mínima de movimentos de cada peça. Disco 01 e disco 02.

Hanói com Três Discos

a) Sem desperdiçar movimentos, qual o número mínimo de movimentos, para transportar todos os discos do primeiro para o terceiro pino obedecendo as regras do jogo?

b) Indique a quantidade de movimentos de cada peça. Disco 01, Disco 02 e Disco 03.

c) Qual o disco que mais se movimenta? Qual o que menos movimentamos? Existe alguma relação entre a quantidade de movimentos de um disco e a quantidade de movimentos do disco imediatamente inferior?

Hanói com Quatro Discos

a) Sem desperdiçar movimentos, qual o número mínimo de movimentos, para transportar todos os discos do primeiro para o terceiro pino obedecendo as regras do jogo?

b) Indique a quantidade de movimentos de cada peça. Disco 01, Disco 02, Disco 03 e Disco 04.

c) Qual o disco que mais se movimenta? Qual o que menos movimentamos? Existe alguma relação entre a quantidade de movimentos de um disco e a quantidade de movimentos do disco imediatamente inferior?

d) Qual o segredo que permite jogar bem, sem desperdiçar movimentos, com: 03, 04, 05, ..., x peças?

e) Existem movimentos semelhantes para quatro e cinco peças? Explique. Existem diferenças? Quais?

f) Se sua torre encontra-se no 1º pino e você muda para o 3º, usando o 2º pino como intermediário e depois muda para o 2º usando o 1º pino como intermediário, muda alguma coisa na quantidade de movimentos? Por quê? Algo permanece igual? Explique.

Hanói com Cinco Discos

a) Utilizando 5 discos no jogo, quantos movimentos fazemos com o menor e com o maior disco?

b) Sem efetuar o jogo é possível calcular o número mínimo de movimentos para 06 peças? E 09 peças? Explique e faça os cálculos.

Depois de aplicada a atividade prática, passa-se ao momento de olhar para todas as respostas às perguntas anteriores e provar a expressão matemática que nos dá o número mínimo $f(x)$ de movimentos necessários para passar x discos do primeiro para o terceiro pino, a partir de conclusões retiradas das ideias da tabela.

	Quantidade de movimentos de cada disco					
Quantidade de discos	**Disco 01**	**Disco 02**	**Disco 03**	**Disco 04**	**Disco 05**	**Total de Movimentos**
1						
2						
3						
4						
5						
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
x						

Tabela 3. Tabela para conjecturar a fórmula da quantidade mínima de movimentos.
Fonte: Autor

Depois de analisar a tabela supracitada, refletir sobre o funcionamento do jogo, incorporar a técnica para se jogar com eficiência e conjecturar a expressão matemática que dá o número mínimo de movimentos possíveis em função do número de discos, parte-se para uma demonstração simples da referida expressão utilizando a soma das quantidades mínimas de movimentos de cada um dos discos utilizando a expressão da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG). Dessa forma, pretende-se provar a expressão matemática que nos dá o número mínimo f(x) de movimentos necessários para passar x discos do primeiro para o terceiro pino, a partir de conclusões retiradas das ideias da tabela.

A partir da prova de que o jogo Torre de Hanói é todo modelado por uma equação cuja variável está no expoente, dá-se continuidade a apresentação da teoria relativa à função exponencial, dando destaque especial para os gráficos das funções e classificando-as em crescentes ou decrescentes.

Para que o aluno estabeleça o elo entre o conteúdo a ser estudado com o jogo motivador do estudo é importante que seja inserida em todas as atividades a relação da mesma com o jogo e, neste contexto, é importante a análise do gráfico discreto da função que modela o crescimento do número mínimo de movimentos necessários para transferir todos os x discos de uma Torre de Hanói.

Em seguida, trabalha-se a ideia de inequação exponencial fundamentado na recíproca da definição da função crescente e função decrescente, analisando as particularidades da função exponencial em questão e mais uma vez fazendo a relação das equações com o jogo ao propor uma equação envolvendo o jogo da Torre de Hanói.

Para finalizar, deve ser proposta uma atividade envolvendo situações-problemas que visam trabalhar as competências relacionadas ao conteúdo de função exponencial e avaliar o nível de incorporação dessas competências pelos alunos a partir do trabalho com função exponencial utilizando o jogo Torre de Hanói como elemento motivador.

Ao final dessas atividades é importante que se promova uma autoavaliação para que os alunos possam refletir sobre o que aprenderam e consigam externar suas opiniões e sugestões a respeito do trabalho com jogos para a motivação do discente diante de uma nova abordagem matemática de um conteúdo.

4.1.7. Procedimento Metodológico da Atividade

A aula será iniciada com a apresentação da história do jogo Torre de Hanói e ao mesmo tempo apresentando uma situação problema contida na lenda de criação do referido jogo.

4.1.7.1. Situação-Problema e Lenda.

De acordo com KIRNER (2007), o matemático De Parville aprimorou a história criada por Edouard Lucas e o publicou no ano de 1884 da seguinte maneira:

> No grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante, cada uma com a altura do osso cúbito do braço e tão fina como o corpo de uma abelha. Em uma dessas agulhas, Deus, quando criou o mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. Isto se constituiu na torre do bramanismo. Dia e noite, os monges transferiam incessantemente os discos de uma haste para outra, de acordo com as leis fixas e imutáveis do bramanismo, que exigiam que os monges nunca movessem mais de um disco por vez e nunca deixassem um disco maior ficar sobre um menor.

> Quando os 64 discos fossem transferidos para outra haste, a torre, o templo e as pessoas seriam transformados em pó e, com um estrondo, o mundo desapareceria.

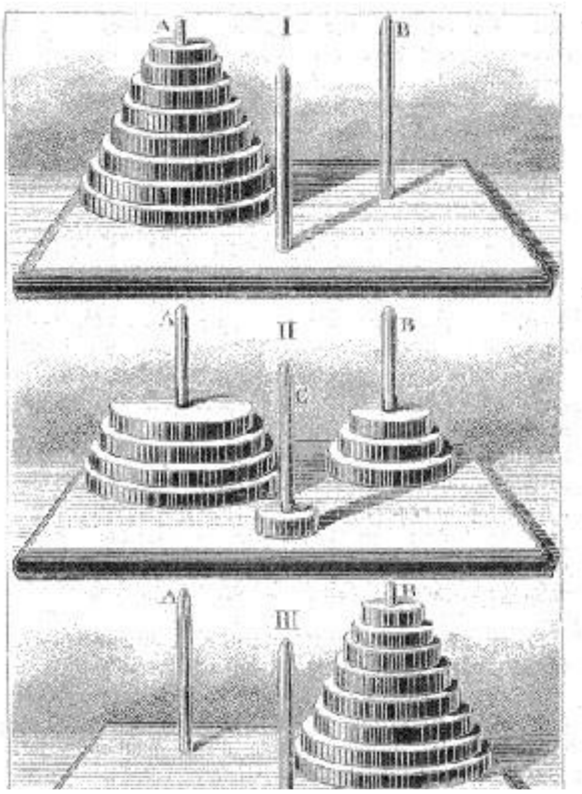


Figura 1. Uma página do livro La Torre de Hanói, (1884), De Parville
Fonte: http:// olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/hanoi.html
Acesso em 06 de janeiro de 2015

Segundo CORDEIRO (2007), O Universo tem uma idade aproximada de 13,7 bilhões de anos com um erro de 0,2 bilhões de anos. Diante desses dados e de acordo com a lenda, qual o tempo que falta para tudo desaparecer, considerando que os monges movem um disco em cada segundo? Quantos são os movimentos necessários? Será que o universo já deveria ter desaparecido? Qual é a relação do número de discos com o número de movimentos? Será que essa relação é linear? Ou não? Qual o tipo de relação entre o número de discos e a quantidade mínima de movimentos?

4.1.7.2. Resumo Histórico do Conteúdo

Em meados de 1883 o matemático francês Fraçois Edouard Anatole Lucas (1842 - 1891), com o pseudônimo de Prof. N. Claus de Siam, um anagrama de seu nome, apresentou ao mundo um jogo matemático que hoje é conhecido como Torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou ainda como o jogo do fim do Mundo.

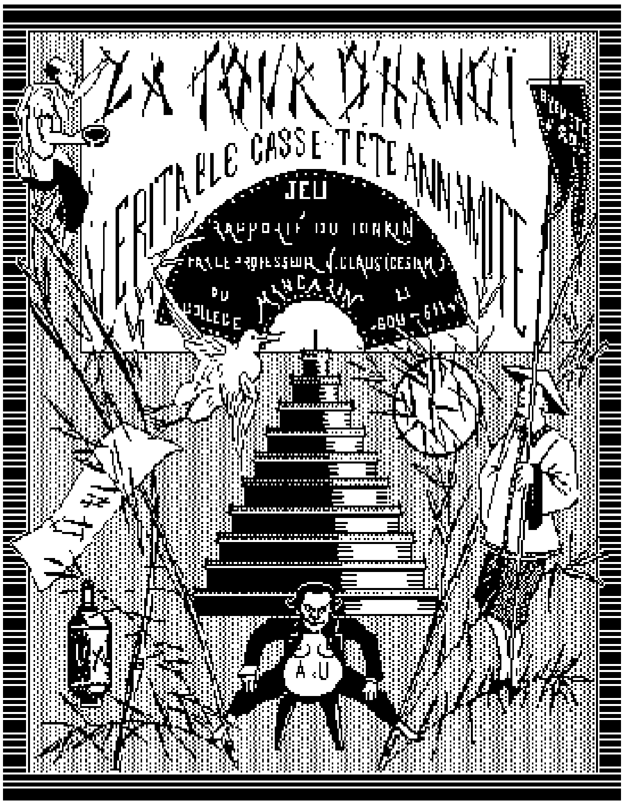


Figura 2. Capa do original do trabalho de De Parville
Fonte: http:// olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/hanoi.html
Acesso em 06 de janeiro de 2015

Por que Hanói? Nessa época, final do Século XIX, a França invadira a colônia chamada Indonésia Francesa, que durou até 1954 e incluía os atuais países Camboja, Laos e Vietnã. Seguindo o ritmo das batalhas é evidente que os franceses se referiam a esses lugares constantemente. Hanói, nome chinês que significa dentro do rio, era a capital da região norte do Vietnã e atual capital do país.

A torre de Hanói é um jogo com três pinos sendo que em um deles é colocado uma pilha de discos concêntricos de tamanhos diferentes, ordenados com o menor em cima e o maior em baixo. Pode ser jogado com uma quantidade qualquer de discos e o objetivo é transferir a pilha de disco de um pino para outro utilizando o terceiro pino como auxiliar, conseguindo completar a transferência com uma quantidade mínima de movimentos movendo um disco de cada vez e sempre colocando os discos menores em cima dos maiores.

Na primeira publicação Edouard Lucas dizia que o jogo teve origem no Vietnã (país cuja capital recebe o nome de Hanói), sendo muito popular na China e no Japão, e junto à publicação acompanhava uma com o jogo.

Na mesma publicação era oferecida uma quantia de mais de um milhão de Francos para quem resolvesse o problema da Torre de Hanói com 64 peças.

Existem diversas lendas a respeito da origem do jogo têm sido contadas ao logo da história. Porém, segundo HEFEZ (2009 p.34), o jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883, que, para dar mais sabor à sua criação, criou a lenda que falava da existência de um templo oriental, onde existia uma torre sagrada, que tinha como objetivo trabalhar a disciplina mental dos jovens monges que o habitavam. Também conhecida como torre de Brahma, tem seu nome inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

A lenda diz que em uma das hastes, no momento da criação do universo, Deus colocou 64 discos de ouro, de maneira que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os demais decresciam, até que chegasse o topo. Aos monges foi dada a tarefa de mover a torre formada pelos discos de diamante, para uma outra haste, podendo-se utilizar a terceira como auxiliar, deve-se mover apenas um disco por vez e, sem que nunca fosse colocado um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar incessantemente até que terminassem de mover as placas de ouro e, com o estrondo de um trovão, o templo desmoronaria e o mundo desapareceria. Dessa forma, um novo mundo seria criado, o mundo de Hanói.

Segundo as teorias científicas mais modernas sobre origem e fim do universo, o sol está em atividade há cerca 13,7 bilhões de anos e deverá continuar por igual período, quando entrará em colapso. Nessa fase, a camada de hélio no interior do sol terá crescido bastante e as camadas exteriores expandidas o suficiente para englobar a Terra, destruindo-a. Será o fim do mundo. Depois disso, os gases serão expelidos e o sistema solar será transformado numa estrela anã.

Certamente a Torre de Hanói é o jogo mais conhecido do mundo matemático. Por apresentar diversos níveis de dificuldade em decorrência da variabilidade da quantidade de discos utilizados, é utilizado em todos os níveis de ensino desde a educação infantil até o ensino superior. Nas fases iniciais da educação básica a Torre de Hanói pode trabalhar as habilidades mentais de concentração, planejamento das ações, diferenciação das formas geométricas, percepção de tamanho e forma. Podemos trabalhar também vários conceitos matemáticos, entre eles podemos citar: contagem, potenciação, conceito de diferenciação de áreas, progressão, cálculo de valor numérico, funções, indução finita, periodicidade e o assunto focado nessa aula: função exponencial.

CAPÍTULO 5

5.1. Apresentação da Teoria

A apresentação da teoria referente ao conteúdo de função exponencial para o Ensino Médio deve ser feita a partir das definições dos autores dos livros didáticos, mas é importante que a expressão matemática obtida a partir da Torre de Hanói e seus gráficos sejam sempre retomados ao longo da explanação da teoria.

5.1.1. Função Exponencial

De acordo com IEZZI (2004):

A função $f:\Re \to \Re^{+}$ definida por $f(x)=a^{x}$, em que $a \in \Re^{+}$ e $a \neq 1$, é chamada função exponencial de base a. O domínio dessa função é o conjunto $\Re$ (reais) e o contradomínio é $\Re^{+}$ (reais positivos, maiores que zero).

Ou seja, chamamos de funções exponenciais aquelas nas quais encontramos a variável independente no expoente.

Considerando a relação entre a quantidade de discos e a quantidade mínima de movimentos da Torre de Hanói, podemos perceber experimentalmente o crescimento não linear de uma grandeza em relação à outra.

Lembremo-nos do jogo Torre de Hanói e preenchamos a tabela a seguir:

x (quantidade de discos)	1	2	3	4	5	6	...	x
y (quantidade mínima de movimentos)	1	3	7	15	31	63	...	y=f(x)

Tabela 4. Quantidade mínima de movimentos do Hanói.
Fonte: Autor

Como saber a expressão matemática que define f(x)? Somente através da resposta a esta pergunta é que conseguiremos responder às perguntas surgidas a partir da Torre de Hanói.

Para preencher a tabela acima, e conjecturar algumas respostas, devemos fazer as atividades propostas nos procedimentos metodológicos, preencher todas as tabelas e resumir todos os resultados na tabela acima.

5.1.2. Uma Prova Simples

Vamos partir de uma situação simples e a partir dela fazer generalizações para uma Torre de Hanói com x discos.

Vamos analisar a solução de uma Torre de Hanói com 03 (três) discos:

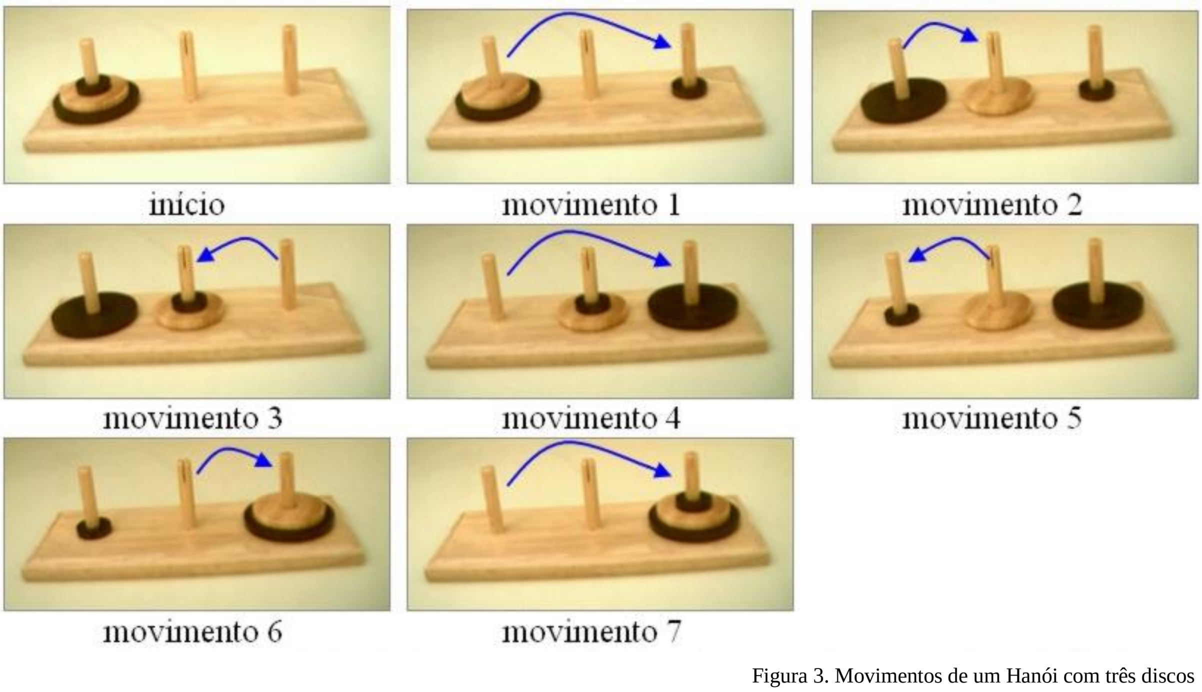


Figura 3. Movimentos de um Hanói com três discos
Fonte: http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimplerv/
Acesso em 06 de janeiro de 2015

Observe que podemos enumerar os três discos de 1 a 3, da menor para a maior. As peças foram transferidas do poste inicial da esquerda para o poste da direita utilizando o poste do meio como suporte e seguindo a regra principal do jogo.

Veja que o disco 3 (disco maior) foi transferido uma única vez (Do poste inicial para o poste final).

Já o disco de tamanho intermediário, o disco 2, deslocou o dobro de vezes do disco maior (02 vezes), pois foi necessário fazer um movimento para retirá-lo de cima do disco maior e outro movimento para recolocá-lo de volta cima do disco maior para que o disco menor pudesse ser movimentado seguindo as regras do jogo.

Analisando o número de movimentos do disco menor (disco1), é possível perceber que é o dobro do número de movimentos do disco intermediário, pois o disco menor está sempre oscilando entre os postes e também necessário fazer um movimento de retirada e um movimento de retorno cada vez que o disco intermediário faz um movimento. Dessa forma, o disco menor faz 4 movimentos.

Veja que o número total de movimentos é a soma das quantidades de movimentos de cada peça. Assim, percebemos que a quantidade de movimentos de um Hanói de três discos é: $1+2+4=7$, ou melhor, $1+2^1+2^2=7$.

Agora vamos considerar uma Torre de Hanói com **x** peças enumeradas de 1 a **x**, da menor para a maior. O objetivo do jogo é transportar as "**x**" peças do poste inicial para o poste final seguindo as regras do jogo. Vamos analisar quantas vezes se move cada um dos discos:

O disco **x** move-se apenas 01 vez (do poste inicial para o poste final).

O disco $x-1$ tem de se mover o dobro das vezes que o disco x se move, isto é, 2 vezes (uma para sair de cima do disco **x** e outra para voltar para cima do disco x). Analogamente, o disco $x-2$ tem de se mover o dobro das vezes que o disco $x-1$ se move, ou seja, 4 (uma para sair de cima do disco $x-1$ e outra para voltar para cima do disco $x-1$, isto repetido tantas vezes quantas o disco $x-1$ tem que se mover).

Continuando este processo, facilmente se conclui que o menor dos discos, o disco 1, se move o dobro das vezes do disco 2 ou seja 2^{x-1} vezes.

Note-se que estes valores são todos potências de 2, que os números de movimentos dos discos x**;** $x-1$**;** $x-2$**; ... ;** 2**;** 1; são, respectivamente, **1; 2; 4; ...;** 2^{x-2}**,** 2^{x-1} .

Assim é possível concluir que a quantidade mínima de movimentos de um Hanói com **x** discos é dada por: $1+2+4+\ldots+2^{x-2}+2^{x-1}$ movimentos. Observe que essa sequência é uma Progressão Geométrica (PG) de **x** termos cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2.

Usando a expressão da soma dos termos de uma PG, temos o seguinte:

$$1+2+4+\ldots+2^{x-2}+2^{x-1}=\frac{1\cdot(2^x-1)}{2-1}=2^x-1$$

Assim é possível concluir que um Hanói de **x** discos é transferido do primeiro para o último disco com um total de 2^x-1 movimentos.

Portanto, completemos a tabela com a função $f(x)=2^x-1$, onde x é a quantidade de discos e $f(x)=2^x-1$ é uma função exponencial, objeto matemático que é o foco deste trabalho.

5.1.3. Gráfico da Função Exponencial

O gráfico da função $f:\Re\to\Re^+$ definida por $f(x)=a^x$, em que $a\in\Re^+$ e $a\neq 1$, deve ser estudado considerando dois casos:

- Caso $a>1$;
- Caso $0<a<1$.

Vejamos os exemplos a seguir:

1º Caso: $y = f(x) = 2^x$ (nesse caso, $a = 2$, logo $a > 1$)

Atribuindo alguns valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	**y=2ˣ**
-2	1/4
-1	½
0	1
1	2
2	4

Tabela 5. Dados para a construção do gráfico da função $f(x) = 2^x$
Fonte: O Autor

De acordo com a tabela e com auxílio do *Geogebra*, temos o seguinte gráfico:

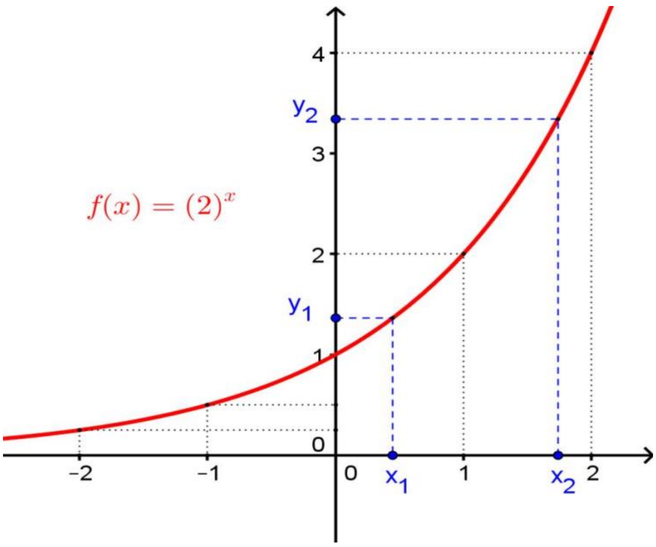


Gráfico1. Gráfico da função f(x)
Fonte: O autor

2º Caso: $y = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (nesse caso, $a = \frac{1}{2}$, logo $0 < a < 1$).

Atribuindo alguns valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	**y=(1/2)^{x}**
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	1/4

Tabela 6. Dados para a construção do gráfico da função $g(x) = (0{,}5)^x$

Fonte: O Autor

De acordo com a tabela e com auxílio do *Geogebra*, temos o seguinte gráfico:

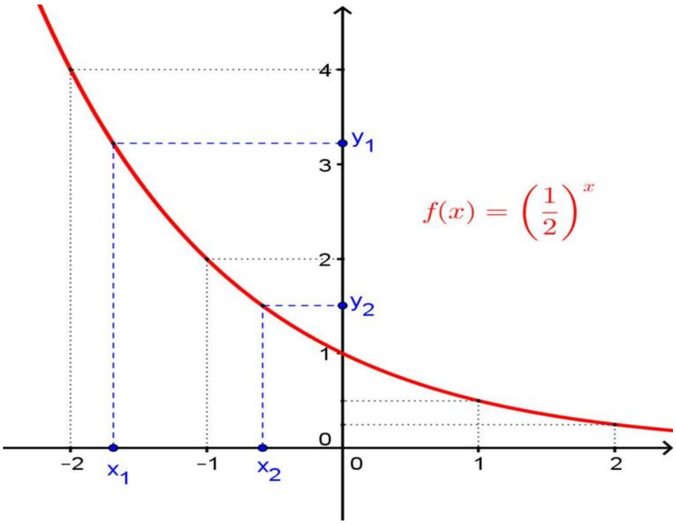


Gráfico2. Gráfico da função g(x)

Fonte: O autor

Nos dois casos, podemos observar que:

a) o gráfico **não** intercepta o eixo horizontal, ou seja, a função não tem raízes;

b) o gráfico corta o eixo vertical no ponto (0,1);

c) os valores de y são **sempre positivos** (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é $\text{Im} = \Re^+$

Dessa forma, é possível demonstrar que:

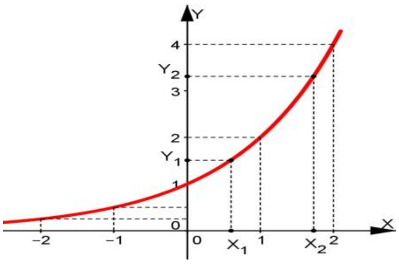
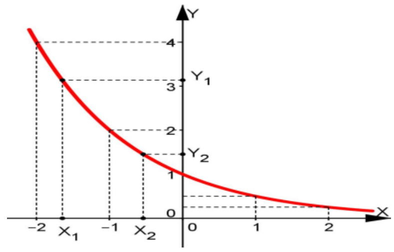
a>1	**0<a<1**
 f(x) é crescente e $\text{Im} = \Re^{+}$ Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio: $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$ (as desigualdades têm mesmo sentido)	 f(x) é decrescente e $\text{Im} = \Re^{+}$ Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio: $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Tabela 7. Desigualdades em expoentes
Fonte: Autor

Considerando a relação entre a quantidade de discos (x) e a quantidade mínima de movimento, podemos tomar a função $h: \aleph \to \aleph$, em que $h(x) = 2^x - 1$, com $\aleph$ sendo o conjunto dos números inteiros positivos, podemos fazer um gráfico descontínuo a partir da tabela de resultados obtidos pela função h. Vejamos a seguir:

x (quantidade de discos)	$h(x)$ (quantidade mínima de movimentos)
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
...	...
x	$2^x - 1$

Tabela 8. Dados para a construção do gráfico discreto da função $h(x) = 2^x - 1$
Fonte: O Autor

De acordo com a tabela acima, podemos traçar o gráfico discreto da função que representa a quantidade mínima $y = h(x)$ de movimentos necessários para levar x discos de uma Torre de Hanói do primeiro para o terceiro disco, seguindo as regras do jogo:

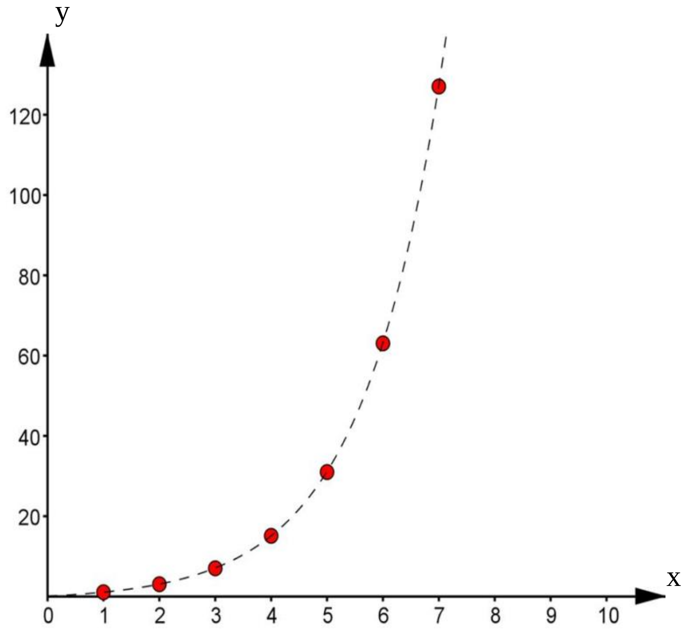


Gráfico 3. Gráfico discreto da função h(x)
Fonte: Autor

5.1.4. Inequações Exponenciais

Chamamos de inequações exponenciais toda inequação na qual a incógnita aparece em expoente.

Exemplos de inequações exponenciais:

1) $3^x > 81$ (a solução é $x > 4$)

2) $2^{2x-2} \leq 2^{x^2-1}$ (que é satisfeita para todo x real)

3) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x \geq \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-3}$ (que é satisfeita para x $\leq$ -3)

4) $25^x - 150.5^x + 3125 < 0$ (que é satisfeita para $2 < x < 3$)

Para resolver inequações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;

2º) aplicação da recíproca da propriedades das funções crescentes e decrescentes:

Seja $f(x)=a^x$, onde $1 \neq a > 0$, podemos dividir as inequações exponenciais em dois tipos:

1º TIPO	2º TIPO
Se $0 < a < 1$, então $f(x)$ é decrescente, logo:	Se $a > 1$, então $f(x)$ é crescente, logo:
$a^m > a^n \Rightarrow m < n$; com $m, n \in \Re$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)	$a^m > a^n \Rightarrow m > n$; com $m, n \in \Re$ (as desigualdades têm mesmo sentido)

Tabela 9. Resumo das desigualdades em funções exponenciais
Fonte: Autor

5.1.5. Exercícios Propostos

5.1.5.1. Problemas Fechados (05)

1. Qual a quantidade mínima de movimentos de um Hanói de 9 discos?

2. Sendo $f(x)=2^x-1$, calcule:

a) $f(1)f(2)+f(3)+...+f(8)$

b) x, tal que $f(x)=1023$.

3. Seja $f:\Re \to \Re^+$, definida por $f(x)=3^x$. Determine os valores de $x \in \Re$, tais que $f(x+1)+f(-x+4)=36$.

4. Qual o menor inteiro **m**, tal que: $5^{m^2} \cdot 5^{2m-1} \cdot 5^{-3} \leq \frac{1}{5}$.

5. Se (m, n) é a solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2^m + 3^n = 11 \\ 2^m - 3^n = 5 \end{cases}$$

Calcule o valor de m + n.

5.1.5.2. Situações-Problemas (05)

1. Sabemos atualmente que a quantidade mínima Q de movimentos necessários para transportar n discos da do 1º para o 3º poste, utilizando o 2º como auxiliar e obedecendo as regras do jogo é modelada pela expressão: $Q = 2^n - 1$, onde Q é a quantidade mínima de movimentos e n é quantia de peças utilizadas na torre.

Figura 4. Situação-Problema envolvendo o Jogo Torre de Hanói.
Fonte: http://casadamatematica.blogspot.com.br.
Acesso em 12 de dezembro de 2013

De acordo com a lenda da Torre de Hanói, o mundo se destruirá após o último movimento dos 64 discos do Hanói do templo em Bernares, Índia. Sabendo que o Universo tem 13,7 bilhões de anos (Fonte: http://super.abril.com.br/ciencia/qual-idade-universo-447004.shtml, acesso em 15 de dezembro de 2013), e que os monges conseguem efetuar um movimento por segundo, sem errarem, tente responder:

a) Quantos anos são necessários para movimentar todas as peças?

b) O mundo já deveria ter sido destruído ou falta muito tempo para isso acontecer? Quantos anos faltam?

2. Pierre faz um depósito de R$ 500,00 na caderneta de poupança no Banco Incógnita atraído por uma taxa de juros de 0,9% ao mês sobre o saldo total. Após consultar o matemático Isaac ele descobre que o montante após x meses, é

$M = 500 \cdot (1{,}009)^x$

a) Qual o montante após 1 ano?

b) Qual o rendimento do 1º ano?

Figura 5. Porquinho-símbolo da poupança.
Fonte: http://queroficarrico.com
Acesso em 12 de dezembro de 2013

c) Depois de quanto tempo o dinheiro vai dobrar?

3. A piscina da casa de Arquimedes tem capacidade para 100 m^3 de água. Nos finais de semana de descanso ele manda o caseiro Genival encher a piscina e colocar 1000g de cloro na água às 22h00min do sábado. A água pura continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de uma saída d'água. Depois de t horas, observa-se que a quantidade de cloro na piscina é $Q(t) = 1000 \cdot (0,9)^t$.

Figura 6. Situação-problema envolvendo concentração de cloro na piscina
Fonte: http://www.portalbarueri.com
Acesso em 12 de dezembro de 2013

a) Que quantidade de cloro restará na piscina às 08h00min do domingo?

b) E ao meio dia do domingo?

c) Qual o momento em que a quantidade de cloro ficará reduzida à metade do cloro que foi inicialmente colocado?

d) Qual o percentual de cloro ainda restante na água às 17h00min do domingo?

(Adaptado de: LIMA, Elon Lages. Temas e Problemas Elementares).

4. O Açude Castanhão está localizado no interior do estado do Ceará, no curso do Rio Jaguaribe e é um importante mecanismo para o combate a falta de água na capital do Estado. O açude suporta um volume de 6,7 bilhões de metros cúbicos de água e tem uma taxa de evaporação de um valor

Figura 7. Barragem do Castanhão, Nova Jaguaribara – CE.
Fonte: http://rafaelfernandesrn.blogspot.com.br
Acesso em 12 de dezembro de 2013

aproximado de 5% ao mês. Em março de 2009 o açude estava com 90% de sua capacidade máxima. Considerando a manutenção da vazão normal do Rio Jaguaribe, responda:

a) qual o percentual de águas no Açude Castanhão em janeiro de 2010?

b) considerando que não haja inverno rigoroso e que 40% é o percentual crítico, qual o mês que ocorrerá esse fato?

c) Quantos meses são necessários para que o volume de água se reduza a um terço?

(Adaptado de: LIMA, Elon Lages. Temas e Problemas Elementares).

5. Estima-se que a população de Paraíso do Norte cresça 3% a cada 5 anos.

a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

b) E em um período de t anos?

(Adaptado de: LIMA, Elon Lages. Temas e Problemas Elementares).

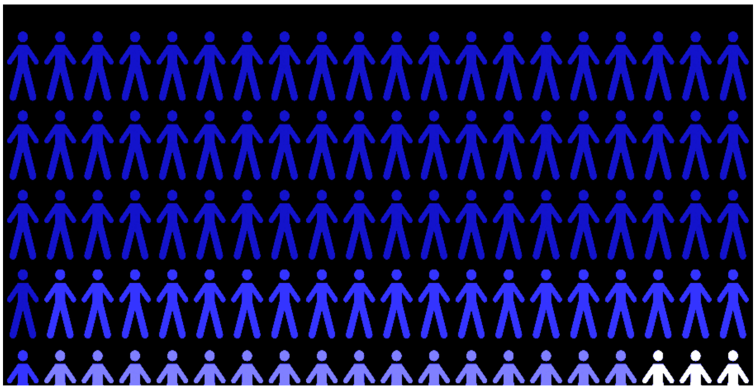


Figura 8. Gravura
Fonte: http://alfredojunior.wordpress.com
Acesso em 12 de dezembro de 2013

5.1.5.3. Problemas Abertos (05)

1. Uma cultura, inicialmente com n_0 bactérias, reproduz-se em condições ideais. Suponha que, por divisão celular, cada bactéria dessa cultura dê origem a duas bactérias idênticas por hora. Pergunta-se: qual a população de bactérias dessa cultura após t horas do instante inicial?

2. Uma bola cai de uma altura h e salta, cada vez que toca o chão, dois terços da altura da qual caiu. Seja $h(n)$ a altura da bola no salto de número n, qual a expressão matemática para encontrar $h(n)$?

3. Um automóvel zerado é comprado por um determinado preço P_0 e tem uma desvalorização de 10% por ano nos primeiros 05 anos. Seja $P(n)$ o preço do automóvel após n anos, encontre a expressão matemática que possibilite calcular $P(n)$ no intervalo de n = 0 n = 5.

4. Jônatas é um comerciante e quer fazer um bom investimento em que a taxa de juros seja maior que o juro da poupança. Sendo assim, ele resolveu emprestar uma quantia Q_0 a um amigo e cobrou 3% ao mês sobre o saldo. Qual a quantia final Q depois de t anos?

5. A água de um reservatório se evapora à taxa de i% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início?

5.2. Autoavaliação e Avaliação Docente

Ao final de todo processo de ensino é importante que o aluno seja desafiado a pensar sobre suas aprendizagens através de algum mecanismo objetivo e/ou subjetivo de autoavaliação, pois é nesse momento que aluno tem a oportunidade de participar de maneira mais ampla e ativa do processo de aprendizagem, uma vez que tem a oportunidade de analisar seu progresso nos estudos, suas atitudes e comportamento diante do professor e colegas.

A avaliação da aprendizagem deve ser um processo em que professor e aluno mantenham um diálogo permanente em busca da melhoria da aprendizagem ao mesmo tempo em que o professor melhora sua prática. Para Hoffmann (2005), a autoavaliação é o caminho mais eficaz nessa direção, pois é a partir desse instrumento que o aluno realiza um olhar sobre si mesmo e tem a oportunidade de pronunciar seus sentimentos e dificuldades na escola, superando assim o seu anonimato e tornando protagonista de sua aprendizagem.

Diante disso, a autoavaliação dessa essa atividade é considerada também avaliação docente porque é através dela que o professor passa ater uma visão geral do aluno e poderá refletir sobre sua prática.

5.3. Possíveis Continuações e Desdobramentos

O trabalho com jogos deve e pode se configurar como uma grande oportunidade para que os professores possam aproveitar a vontade que os alunos têm de brincar para aproximá-los de objetos matemáticos que serão elo entre o lúdico e o conhecimento matemático.

O trabalho com a Torre de Hanói pode ser aplicado nos diversos níveis de ensino desde a educação infantil até o ensino superior, com trabalhos que envolvem ordem de grandezas e cores na educação infantil, atravessando o Ensino Fundamental no trabalho com potenciação, no Ensino Médio ao trabalhar relações, funções, conjuntos, Progressão Geométrica e entrar no nível superior ao trabalhar o Princípio da Indução Finita, recorrências lineares, aritmética e teoria dos números.

Considerações Finais

Ao concluir este trabalho pôde se perceber que é possível trabalhar, introduzir função exponencial a partir da Torre de Hanói contribuindo assim para ensino de Matemática voltado para a realidade do educando. A partir do jogo da Torre de Hanói foi possível estabelecer um elo entre este jogo e a função exponencial que é um conteúdo que está presente em numerosas aplicações matemáticas na ciência e na indústria, e é indispensável no estudo de muitos problemas de finanças e economia.

Este trabalho permite que os docentes tenham um novo olhar sobre o trabalho com jogos, vendo-o sob uma perspectiva positiva diante de um contexto educacional onde é cada vez mais difícil executar um trabalho que faça o aluno aproveitar todo seu tempo pedagógico sem desviar a atenção para as futilidades que surgem dentro da sala de aula.

O trabalho com jogos permite ao aluno e ao professor construírem juntos as ideias que contribuirão para o desenvolvimento do raciocínio lógico do discente, além de ajudá-lo a organizar as ideias, a tomar decisões, inferir hipóteses e etc.

Os jogos também resgatam o desejo pela busca do conhecimento e tornam a aprendizagem mais prazerosa. Portanto é no jogo que se, cria, antecipa e inquieta, assim transforma-se, levantam-se hipóteses e traçam estratégias para a busca de soluções. No jogar, o desejável passa a ser algo obtido através da sua imaginação, onde o abstrato se concretiza e resulta no processo de construção do conhecimento.

Os jogos têm suas vantagens no ensino da Matemática desde que o professor tenha objetivos claros do que pretende atingir com a atividade proposta. O jogo por si só não basta, é necessário observar que as situações vivenciadas durante o jogo levem o jogador a desenvolver uma série de habilidades matemáticas em diversos níveis de ensino.

Desta forma, alunos e professores trabalham sob uma perspectiva de cooperação num eterno ato de fazer a aula juntos, aprendendo e ensinando, fazendo e refazendo, numa eterna busca pela aquisição de novos saberes e novos valores que irão nortear as suas ações durante toda vida.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**, vol. 3. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e tecnológica (SEMT), Brasília: 1998.

Casa da Matemática**, Dividir Ideias Para Multiplicar Conhecimentos**, Disponível em: < http://casadamatematica.blogspot.com.br/2008/08/resultado-das-advinhaes.html> Acesso em 12 de dezembro de 2013.

CORDEIRO, T**. Qual é a idade do Universo?** Revista Superinteressante, São Paulo. n. 240a. Junho de 2007. Disponível em: <http://super.abril.com.br/ciencia/qual-idade-universo-447004.shtml> Acesso em 29 de março de 2014.

CUNHA, Jussara Gomes Araújo. **Introduzindo o estudo da função exponencial através da Torre de Hanói.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. SBEM, 2013. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/ > Acesso em 29 de Dezembro de 2013.

DRABESKI, E.J.; FRANCISCO,R. **Estudo da função exponencial e a indução matemática com aplicação da Torre de Hanói.** Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/696-4.pdf>. Acesso em 17 de dezembro de 2013.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria A. **Uma Reflexão Sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM – SP, n. 7, julho-agosto 1990.

GRANDO, R. C. **O jogo na educação: aspectos didático-metodológicos do jogo na educação Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2001. Disponível em: <www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/cursos/el654/2001/jessica_e_paula/JOGO.doc>. Acesso em: 26 de Outubro de 2013.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Vol. 4, 2009. Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/Apostila4-Inducao.pdf. Acesso em 08 de janeiro de 2015.

HOFFMANN, Jussara. **O jogo do contrário em avaliação**. Porto Alegre: Mediação, 2005.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MURAMAKI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar. Logaritmos**. Volume 2, 9ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

JUNIOR, Alfredo Kalles. **Curiosidades-População**. Disponível em: < https://alfredojunior.wordpress.com/2010/09/20/curiosidades-populacao/> Acesso em 23 de dezembro de 2013.

KIRNER, Cláudio. **A História da Torre de Hanói**. RVA Torre de Hanói. 2007. Disponível em: http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimple-rv/?%26nbsp%3B_APLICA%C7%D5ES:Torre_de_Hanoi:Hist%F3ria, Acesso em 08 de janeiro de 2015.

LIMA, Elon Lages. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2001.

LOPES, Maria da Glória. **Jogos na Educação: Criar, Fazer, Jogar.** 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MORA, A.J.S. **La Torre de Hanói**. Disponível em: <http://olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/hanoi.html> Acesso em 06 de janeiro de 2015.

Portal Rafael Fernandes/RN**. Conhecendo a Barragem do Castanhão**, Janeiro de 2012, Disponível em: < http://rafaelfernandesrn.blogspot.com.br/2012/01/conhecendo-o-acude-castanhao.html > Acesso em 12 de dezembro de 2013.

SANTOS, Lilyan Dias dos, et al. **A utilização do jogo Torre de Hanói como ferramenta facilitadora no ensino de funções exponenciais.** 1º Encontro Nacional PIBID- Matemática. Escola de Inverno de Educação Matemática, 2012. Disponível em :<http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais_ed_3/arquivos/MDC/MDC_PIBID_Santos_Lilyan.pdf > Acesso em 20 de Janeiro de 2014.

SCHMITT, Carla Ludegero; FERREIRA, Cristina. A **Educação Matemática Escolar Relacionada ao Cotidiano do Educando**. *Revista de Divulgação Técnico-Científica do ICPG***.** Blumenau: 2v, n. 6, 2004. p.14-17.

SEABRA, Rafael. **Poupança.** Disponível em: < http://queroficarrico.com/blog/poupanca/> Acesso em 13 de dezembro de 2013.

SMOLE, K. S. DINIZ, M. I. MILANI, E**. Jogos de matemática de 6o a 9o ano.** Porto Alegre: Artmed, 2007. (Série Cadernos do Mathema-Ensino Fundamental).

TEZANI, T.C Rodrigues. **O jogo e os processos de aprendizagem e desenvolvimento: aspectos cognitivos e afetivos.** Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/educacaoemrevista/article/viewFile/603/486> Acesso em 28 de janeiro de 2014.

MOURA, S.S.M; Menezes, J.E; Moura, F.K.A; **Alternativas Metodológica para o Ensino de Matemática Via Resolução de Problemas Contextualizados.** Publicado no XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007. Disponível em:<http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_CientiFica/Trabalhos/CC97281026404T.doc> Acesso em 12 de janeiro de 2014.

WATANABE, Renata. Uma lenda: Torre de Hanói. In: Druck, S. (org). **Explorando o ensino da Matemática: atividades: v.2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap1.pdf>. Acesso em 30 de Novembro de 2013.

Anexo I – Autoavaliação da Atividade

Responda as perguntas a seguir e colabore para a melhoria da atividade:

01. Quais as principais dificuldades que surgiram na resolução dos problemas, abertos, fechados e situações-problemas? Há alguma diferença entre os diversos tipos de exercícios propostos? Quais são?

02. Houve algum conceito que você não entendeu? Cite-o. O que você sugere para que possas aprender melhor?

03. O que você sugere para melhorar a atividade envolvendo a Torre de Hanói?

04. Para você, qual o segredo para jogar bem o jogo e qual a relação dele com o conteúdo de função exponencial?

05. Como você vê a utilização do jogo para facilitar a aprendizagem do aluno em Matemática?

Anexo II – Resoluções

Resoluções dos Problemas Fechados:

1. Uma solução para o problema fechado 1.

Sabemos que o modelo matemático que dá a quantidade mínima de movimentos de um Hanói é $q_n = 2^n - 1$, onde n é a quantidade de discos do Hanói.

Assim, para um Hanói de 9 discos temos n = 9.

Substituindo na expressão temos: $q_n = 2^n - 1 = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$ movimentos.

2. Uma solução para o problema fechado 2.

a) Sendo $f(x) = 2^x - 1$, temos que:

$$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(8) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + ... + (2^8 - 1) =$$
$$= (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^8) - 1 \cdot 8 = 2 \cdot (2^8 - 1) - 8 = 2 \cdot 255 - 8 = 510 - 8 = 502$$

b) Sabemos que f(x) = 1023.

Como $f(x) = 2^x - 1$, temos a seguinte equação exponencial: $1023 = 2^x - 1$.

Adicionando 1 aos dois membros temos: $1023 + 1 = 2^x - 1 + 1 \Rightarrow 1024 = 2^x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{10} = 2^x \Rightarrow x = 10$.

3. Uma solução para o problema fechado 3.

Sabendo que f(x) = 3^x, temos que resolver a seguinte equação:

$$f(x+1) + f(-x+4) = 36 \Rightarrow 3^{x+1} + 3^{-x+4} = 36 \Rightarrow 3 \cdot 3^x + 81 \cdot 3^{-x} = 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 36.$$

Fazendo $\Rightarrow 3^x = y$, temos: $\Rightarrow 3y + \frac{81}{y} = 36 \Rightarrow 3y^2 - 36y + 81 = 0$

Assim temos $y = 3$ ou $y = 9 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$.

4. Uma solução para o problema fechado 4.

Veja a inequação:

$$5^{m^2} \cdot 5^{2m-1} \cdot 5^{-3} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{m^2+2m-1-3} \leq 5^{-1} \Rightarrow 5^{m^2+2m-4} \leq 5^{-1}.$$

Como a base da potência é 5 >1, temos que essa inequação é reduzida à inequação seguinte:

$$m^2 + 2m - 4 \leq -1 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

5. Uma solução para o problema fechado 5.

Temos o seguinte sistema: $\begin{cases} 2^m + 3^n = 11 \\ 2^m - 3^n = 5 \end{cases}$

Fazendo $2^m = x$ e $3^n = y$, temos o seguinte sistema: $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema temos $x = 8$ e $y = 3 \Rightarrow m = 3$ e $n = 1$.

Portanto $m + n = 3 + 1 = 4$

Resoluções das Situações-Problemas:

1. Uma solução para a situação-problema 1.

Como são 64 discos, temos $q = 2^{64} - 1 = 18.446.073.709.551.615$ movimentos.

Como é feito um movimento por segundo, temos $18.446.073.709.551.615$ segundos.

Calculando a quantidade de segundos temos: $1ano = 365dias + 6h = 365 \cdot 24h + 6h =$

$= 8.766h = 8.766 \cdot 3600s = 31.557.600s.$

É simples concluir que, de acordo com a lenda hindú, levaríamos 584.542.046.000 anos para transportar os 64 discos. Ou seja, levaríamos mais de 584 bilhões de anos.

b) Como o Universo tem 13,7 bilhões de anos, podemos concluir que ainda falta muito tempo para o Universo ser destruído.

Aproximadamente 584,5 – 13,7 = 570,8 bilhões de ANOS.

Ainda restam mais de 570 bilhões de anos para o nosso Universo.

2. Uma solução para a situação-problema 2.

a) Sabemos que o montante é calculado pela expressão: $M = 500 \cdot (1{,}009)^x$, onde M é o montante após x meses. Sendo assim, temos que $x = 12$ meses = 1 ano.

Aplicando na expressão, temos:
$M = 500 \cdot (1{,}009)^x \Rightarrow M = 500 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow M = 500 \cdot 1.113 \Rightarrow M = 556{,}75$.

Assim o montante após 01 ano é R$ 556,75.

b) Pelo item anterior é possível perceber que um capital de R$ 500,00 resultou num montante de R$ 556,75. Assim o rendimento é $556{,}75 - 500{,}00 = 56{,}75$.
O rendimento é de R$ 56,75.

c) A pergunta é: depois de quanto tempo o dinheiro vai dobrar?

Ora, temos uma quantia inicial de R$ 500,00 e queremos saber quanto tempo vai necessitar para o dinheiro dobrar, ou seja, em quanto tempo o dinheiro vai resultar num montante equivalente a R$ 1.000,00. Assim, temos M = 1.000.

Temos que: $M = 500 \cdot (1{,}009)^x$, dividindo tudo por 500, temos: $\Rightarrow 2 = (1{,}009)^x$.

Usando a definição de logaritmo, temos: $x = \log_{1{,}009} 2$, mudando para a base 10, temos o seguinte: $x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}009} \Rightarrow x = \dfrac{0{,}301}{0{,}0039} \Rightarrow x = 77$ meses $\Rightarrow x = 6$ anos e 5 meses.

Para duplicar um capital aplicado a 0,9 % ao mês necessita-se de 6anos e 5 meses.

3. Uma solução para a situação-problema 3.

a) Observe que o meu instante inicial é 22h00min, ou seja, vamos imaginar que um cronômetro fosse zerado às 22h00min. Assim, 22h00min equivale a $t = 0$, 23h00min equivale a $t = 1$, 24h00min equivale a $t = 2$, e assim sucessivamente.

Dessa forma é possível concluir que para 8h00min do dia seguinte eu terei $t = 10$.

Assim, a quantidade de cloro que restará é dada pela expressão $Q(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t$ e é calculada da seguinte maneira:

$$Q(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow Q(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^{10} \Rightarrow Q(t) = 1000 \cdot 0{,}349 \Rightarrow Q(t) = 349 \text{ g de cloro.}$$

Dessa forma é possível concluir que ainda restarão 349 g de cloro à 08h00min do dia seguinte.

b) Utilizando o mesmo raciocínio concluímos que, ao meio dia, temos t = 14.

Dessa forma:

$$Q(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow Q(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^{14} \Rightarrow Q(t) = 1000 \cdot 0{,}229 \Rightarrow Q(t) = 229 \text{ g de cloro.}$$

Dessa forma é possível concluir que ao meio dia ainda restarão 229 g de cloro.

c) Essa pergunta corresponde a perguntar qual o momento em que teremos 500g de cloro na piscina? Ou seja, para que valor de t temos $Q(t) = 500$.

Utilizando a equação temos:

$Q(t) = 1000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow 500 = 1000 \cdot (0,9)^{14}$, dividindo por 1000, temos:

$0,5 = (0,9)^t$, usando a definição de logaritmos, temos: $t = \log_{0,9} 0,5$.

Mudando a base, temos: $t = \dfrac{\log 0,5}{\log 0,9} \Rightarrow t = \dfrac{-0,301}{-0,046} \Rightarrow t = 6,54$ horas, ou seja, $6h + 0,54h = 6h32\min$.

Assim, o momento em que a piscina ficou com a metade do cloro foi $22h00\min + 6h32\min = 28h32\min$. O que equivale a $4h32\min$ da manhã seguinte.

4. Uma solução para a situação-problema 4.

a) Observe que se considerar que o Açude Castanhão tem sua vazão mantida, ele perde 5% de suas águas todos os meses. Assim o fator de multiplicação da expressão que dá a quantidade de águas é $100\% - 5\% = 95\% = 0,95$.

Assim $Q(t) = Q_o \cdot (0,95)^t$, onde $Q(t)$ é a quantidade de água no instante t e Q_o é a quantidade inicial.

Sabemos que a quantidade inicial da água do Castanhão é $Q_o = 90\%$ de 6,7 bilhões = $0,9 \cdot 6,7 = 6$ bilhões aproximadamente. Isso no mês de março.

Assim temos que: $Q(t) = 6 \cdot (0,95)^t$, em bilhões de metros cúbicos.

Em janeiro de 2010, se passaram 10 meses, ou seja, $t = 10$.

Dessa forma: $Q(t) = 6 \cdot (0,95)^t \Rightarrow Q(t) = 6 \cdot (0,95)^{10} \Rightarrow Q(t) = 6 \cdot 0,598 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q(t) = 3,6$ bilhões de metros cúbicos.

Portanto o percentual é: $\frac{3,6}{6,7} = 0,53 = 53\%$.

Em janeiro de 2010, o Açude Castanhão estaria com a capacidade de 53%.

b) Agora 40% de 6,7 bilhões = $0,4 \cdot 6,7 = 2,68$ bilhões de metros cúbicos é a quantidade crítica.

Assim, apliquemos $\mathrm{Q} = 2,68$ na expressão, que considera março de 2009 o instante inicial.

$\mathrm{Q(t)} = 6 \cdot (0,95)^{\mathrm{t}} \Rightarrow 2,68 = 6 \cdot (0,95)^{\mathrm{t}}$, dividindo por 6, temos:

$0,446 = (0,95)^{\mathrm{t}} \Rightarrow (0,95)^{\mathrm{t}} = 0,446$.

Usando a definição de logaritmos temos:

$$\mathrm{t} = \log_{0,95}{}^{0,446} \Rightarrow t = \frac{\log 0,446}{\log 0,95} \Rightarrow t = \frac{-0,350}{-0,0222} \Rightarrow t = 15,71 \text{ meses}$$

Ou seja, t = 1 ano 3 meses e 20 dias.

Portanto, são necessários aproximadamente 1 ano e 4 meses, a partir de março de 2009, para que o Açude atinja um nível crítico. Ou seja, somente em julho de 2010 o açude entrará em nível crítico se a pluviosidade não contribuir.

c) Agora temos que fazer que $Q(t) = \frac{1}{3} Q_0$.

Como temos que $\mathrm{Q(t)} = \mathrm{Q_o} \cdot (0,95)^{\mathrm{t}}$. Isso corresponde a $\mathrm{Q_o} \cdot (0,95)^{\mathrm{t}} = \frac{1}{3} Q_0 \Rightarrow (0,95)^{\mathrm{t}} = \frac{1}{3} \rightarrow$

$$t = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 0,95} \Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 3}{\log 0,95} \Rightarrow t = \frac{0 - \log 3}{\log 0,95} \Rightarrow t = \frac{0 - 0,477}{-00222} \Rightarrow t = \frac{-0,477}{-00222} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 21,48 \Rightarrow$ t = 21 meses e meio $\Rightarrow$ t = 1 ano e 10 meses aproximadamente.

Portanto o Açude Castanhão necessita de aproximadamente 01 ano e 10 meses para ficar com um terço da sua capacidade.

5. Uma solução para a situação-problema 5.

Observe que a cada 5 anos a população de Paraíso do Norte cresce 3%. Temos que dividir o nosso período em intervalos de 5 anos. Assim 20 anos corresponde a 4 intervalos de 5 anos.

A taxa de crescimento é 3%, logo o fator de aumento é 100% + 3% = 103% = 1,03

Logo a expressão que dá a população P depois de n períodos é: $P(n) = P_0 \cdot (1{,}03)^n$.

Para t = 20 anos temos $n = \frac{20}{5}$ = 4 períodos.

Assim: $P(n) = P_0 \cdot (1{,}03)^n \Rightarrow P(n) = P_0 \cdot (1{,}03)^4 \Rightarrow P(n) = P_0 \cdot 1{,}125 \Rightarrow$

$P(n) = P_0 + 0{,}125P_0 \Rightarrow P(n) = P_0 + 12{,}5\%P_0$ 0.

Portanto, o aumento em 20anos foi de 12,5%.

b) Para t anos, temos $n = \frac{t}{5}$, logo temos $\mathrm{P(n)} = \mathrm{P_0} \cdot (1{,}03)^{\mathrm{n}} \Rightarrow \mathrm{P(t)} = \mathrm{P_0} \cdot (1{,}03)^{\frac{t}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P(t)} = \mathrm{P_0} \cdot \sqrt[5]{(1{,}03)^{\mathrm{t}}} \Rightarrow \mathrm{P(t)} = \mathrm{P_0} \cdot \sqrt[5]{(1{,}03)^{\mathrm{t}}}$.

Assim, o percentual é $100 \cdot \left(-1 + \sqrt[5]{(1{,}03)^{\mathrm{t}}}\right)$%.

Resoluções dos Problemas Abertos:

1. Uma solução para o Problema Aberto 1.

Observe:

Para $t = 0$ = 0, temos $n = n_0$ n= n_0;

Para $t = 1$h, temos $n = 2n_0$;

Para $t = 2$h, temos $n = 2n_0 \cdot 2 = 4n_0$;

Para $t = 3$h, temos $n = 4n_0 \cdot 2 = 8n_0$;

Assim, para $t = t$ h, temos $n = 2^t n_0$ bactérias.

2. Uma solução para o Problema Aberto 2.

Observe:

Para $t = 0$, temos $h(0) = h$;

Para $t = 1$, temos $h(1) = \frac{2}{3}h$;

Para $t = 2$, temos $h(2) = \frac{2}{3}h \cdot \frac{2}{3} = h(2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h$;

Para $t = 3$, temos $h(3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h \cdot \frac{2}{3} = h(2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 h$;

Assim, para $t = n$, temos $h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n h$.

3. Uma solução para o Problema Aberto 3.

Para $t = 0$, temos $P(0) = P_0$;

Para $t = 1h$, temos $P(1) = P_o - 10\%P_0 = 0{,}9P_0$;

Para $t = 2h$, temos $P(2) = 0{,}9P_0 - 10\%0{,}9P_0 = 0{,}9 \cdot (P_o - 10\%P) = 0{,}9 \cdot 0{,}9P_0 = (0{,}9)^2 P_0$;

Para $t = 3h$, temos:

$P(3) = (0{,}9)^2 P_0 - 10\%(0{,}9)^2 P_0 = (0{,}9)^2 \cdot (P_o - 10\%P) = (0{,}9)^2 \cdot 0{,}9P_0 = (0{,}9)^3 \cdot P_0$;

Assim, para t = n, temos $P(n) = (0{,}9)^n \cdot P_0$

Outra solução para o Problema Aberto 3

Se houve uma desvalorização é por que o preço diminuiu e o fator de diminuição é:
$100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9$.

Então a expressão matemática que dá o valor de P(n) é:

$P(n) = P_o \cdot (0,9)^n$.

4. Uma solução para o Problema Aberto 4.

De maneira análoga ao problema anterior se conclui que $Q(t) = Q_o \cdot (1,03)^t$.

5. Uma solução para o Problema Aberto 5.

O procedimento a ser utilizado nesta questão é o mesmo utilizado para resolver a questão 5.4.3.3.

Procedendo da mesma maneira chegamos à seguinte resposta:

$$P(t) = P_o \cdot (1 - i\,\%)^t \Rightarrow P(t) = P_o \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right)^t .$$