UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA FÓRMULA PARA A ÁREA DE UM POLÍGONO COMO FUNÇÃO DOS SEUS VÉRTICES

Elielson Magalhães Lima

Instituto de Matemática

Maceió, Dezembro de 2014

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELIELSON MAGALHÃES LIMA

UMA FÓRMULA PARA A ÁREA DE UM POLÍGONO COMO FUNÇÃO DOS SEUS VÉRTICES

MACEIÓ
2014

ELIELSON MAGALHÃES LIMA

UMA FÓRMULA PARA A ÁREA DE UM POLÍGONO COMO FUNÇÃO DOS SEUS VÉRTICES

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de dezembro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza.

MACEIÓ

2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

L732f Lima, Elielson Magalhães.
Uma fórmula para a área de um polígono como função dos seus vértices / Elielson Magalhães Lima. – Maceió, 2014.
51 f. ; il.

Orientador: Luis Guillermo Martinez Maza.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

Bibliografia: f. 48.
Anexos: f. 49-51.

1. Geometria analítica. 2. Polígonos. 3. Áreas - Geometria. I. Título.

CDU: 514.12

AUTOR: ELIELSON MAGALHÃES LIMA

Uma fórmula para a área de um polígono como função dos seus vértices

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de Dezembro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Luis Guillermo Martinez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza (Orientador - UFAL)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (UFAL)

Vicente Francisco de Souza Neto

Prof. Dr. Vicente Francisco de Souza Neto (UNICAP)

À minha esposa e meus filhos que tiveram paciência e abriram mão da minha atenção durante esses anos de vida acadêmica.

Resumo

Este trabalho apresenta uma forma para se calcular à área de um polígono de n lados quando são conhecidas as respectivas coordenadas de seus vértices, esta idéia é diferente do que é apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio. Dados n pontos de um polígono, associa-se a cada par de pontos um determinante formado pelas coordenadas de seus vértices. A área será o somatório das metades desses determinantes.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Polígonos, Áreas.

Abstract

This paper presents a way to calculate the area of a polygon with n sides are known as the coordinates of their respective vertices, and this idea different from what is presented in textbooks of high school books. n data points of a polygon, is associated with each pair of points a determinant formed by the coordinates of its vertices. The area will be the sum of the halves of the determinants.

Keywords: Analytic, Polygons, Areas.

Sumário

Introdução

De acordo com os PCNs, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

Com as referidas competências descritas nos PCNs, vimos que existem algumas contradições com a prática de resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas, os quais não estimulam o estudante a pensar, e sim , a repetir exaustivamente alguns métodos, como por exemplo o cálculo da área do triângulo, onde esta área é igual a metade do módulo do determinante formado pelas coordenadas dos vértices deste triângulo (GENTIL, 2000). Em outras situações que envolvam áreas de polígonos de mais de três lados, como no caso do quadrilátero, SANTOS et al.(2003) sugere que triângule o quadrilátero ABCD, pois a área do quadrilátero ABCD é igual a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD, ou seja, dividir o polígono em triângulos e assim aplicar a fórmula em cada um dos triângulos formados, o que para o estudante se torna pouco atrativo, já que ele aplicará várias vezes o mesmo algoritmo.

Tendo em vista esta problemática, o presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma fórmula que calcule áreas de polígonos regulares e não regulares, conhecendo apenas as coordenadas de seus vértices, e assim apresentar uma nova forma de realizar a medição dessas áreas.

O primeiro capítulo trata dos conhecimentos matemáticos preliminares indispensáveis para que o estudante possa desenvolver suas habilidades, visando que na Matemática existe um processo gradativo e acumulativo de conhecimentos, ou seja, o estudante tem que assimilar de maneira correta tudo aquilo que foi transmitido anteriormente. O segundo capítulo, traz a definição de área de polígonos segundo MUNIZ NETO (2012), este também trará o Teorema da área do quadrado e o Teorema da área do retângulo segundo OLIVEIRA (2010), e logo após trataremos da fórmula da área do triângulo em função das coordenadas de seus vértices.

Depois dessa explanação, apresentaremos no capítulo 3 a fórmula do cálculo de áreas de qualquer polígono conhecendo apenas as coordenadas de seus vértices, esta fórmula será demonstrada utilizando o princípio da indução finita. Ainda neste capítulo, faremos uma comparação entre a nossa fórmula e dois métodos, um deles o Teorema de Pick segundo PICK (1900) e a regra que se encontra em GENTIL et al (2000).

O último capítulo trará as considerações sobre a aplicação desta fórmula em questões discutidas em sala de aula.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Os sistemas de coordenadas cartesianas, foram idealizados pelo famoso matemático frances René Descartes e consiste em um plano Π e um par de retas perpendiculares contidas em Π, chamadas de eixos, que se intersectam em um ponto O, denominado origem do sistema. Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes. Por simplicidade em geral considera-se um dos eixos na posisão horizontal, denotado OX, e o outro na posição vertical, denotado OY. Assim, sem nenhum risco de ambiguidade, os quadrantes são enumerados no sentido anti-horário, começando pela região nordeste do plano.

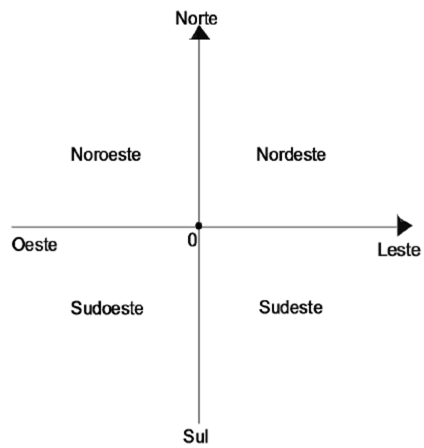


Figura 1.1: Eixos coordenados

Seja P um ponto qualquer do eixo OX, a distância da origem O ao ponto P é denotada por $\overline{OP}$, veja figura 1.2.

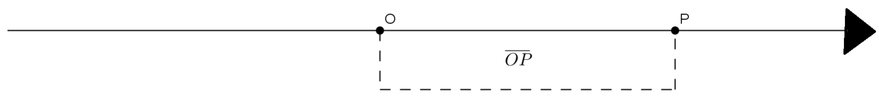


Figura 1.2: Distância entre P e a origem

Temos que dado um ponto P sobre o eixo OX, iremos identificar P com o número real $x_p = \overline{OP}$, se P está à direita do eixo OY, caso contrário, $x_p = -\overline{OP}$.

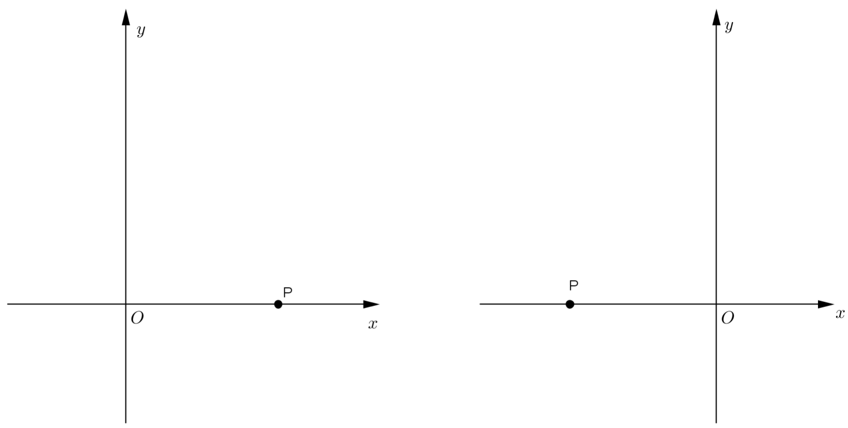


Figura 1.3: Ponto P localizado sobre OX

Analogamente, temos que dado um ponto Q sobre sobre o eixo OY, identificaremos Q com um número real $y_p = \overline{OQ}$, se Q está acima do eixo OX, caso contrário, $y_p = -\overline{OQ}$.

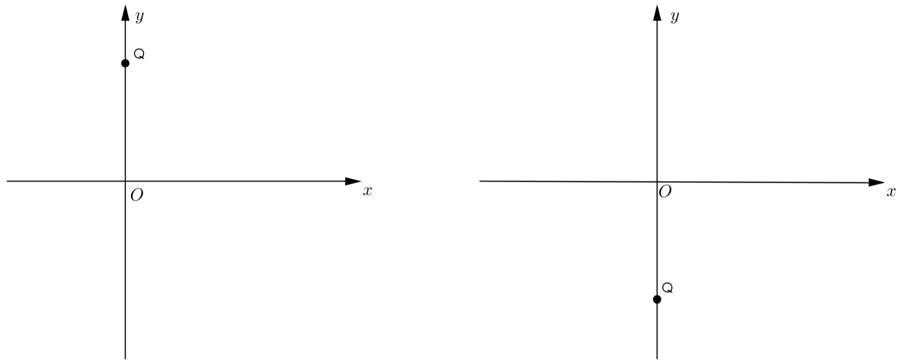


Figura 1.4: Ponto Q localizado sobre OY

Em geral, dado um ponto P no plano, as retas r e s que passam por P e são perpendiculares a OX e OY, respectivamente, intersectam os eixos em P_1 e P_2. Os números reais x_{p_1} e y_{p_2} associados a P_1 e P_2, denotaremos por x_p e y_p e, chamaremos coordenadas de P. Então, identificaremos o ponto P com o par ordenado (x_p, y_p).

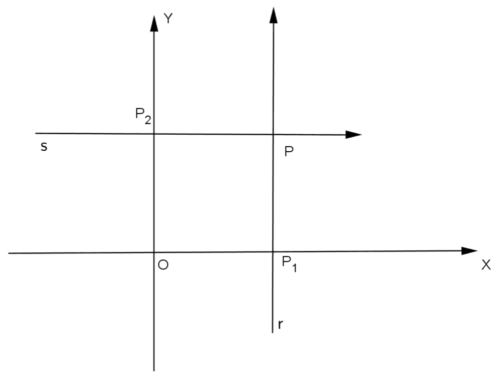


Figura 1.5: Representação do ponto P no sistema de coordenadas

Reciprocamente, dado um par ordenado (x, y) de números reais, associamos a x e y os pontos $P_1 \in OX$ e $P_2 \in OY$, respectivamente, de modo que $|x| = \overline{OP_1}$ e $|y| = \overline{OP_2}$. Note que a reta r perpendicular a OX passando por P_1 e a reta s perpendicular a OY passando por P_2 são perpendiculares entre si e, portanto, se intersectam no ponto P. Logo, (x, y) são as coordenadas de P.

Assim, a escolha do sistema de coordenadas cartesianas, permite estabelecer uma corres-

pondência biunívoca entre Π e $\mathbb{R}^2$, ou seja, a cada ponto P de Π faz corresponder um único par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Observamos no sistema de coordenadas cartesianas os seguintes casos:

Primeiro caso: Se $P \in OY$, então $x_p = 0$, ou seja, $P(0, y_p)$.

Segundo caso: Se $P \in OX$, então $y_p = 0$, ou seja, $P(x_p, 0)$.

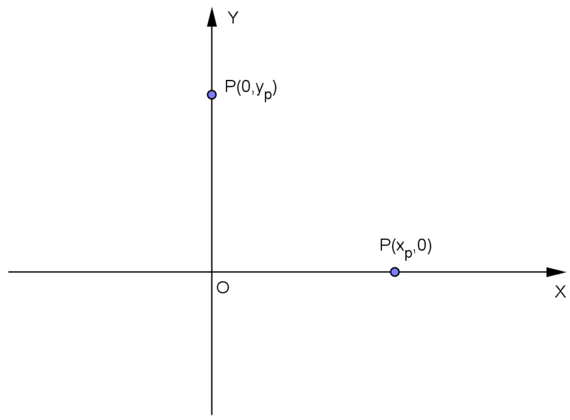


Figura 1.6: Pontos localizados sobre OX e OY

1.2 Distância entre dois pontos

Intuitivamente a distância entre dois pontos distintos num plano cartesiano é a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

Dados os pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$, distintos, tal que o segmento PQ seja paralelo ao eixo OX, a distância entre P e Q é dada pelo módulo da difernça entre x_Q e x_P, e indicaremos por d_{PQ}. Logo, temos $d_{PQ} = |x_Q - x_P|$.

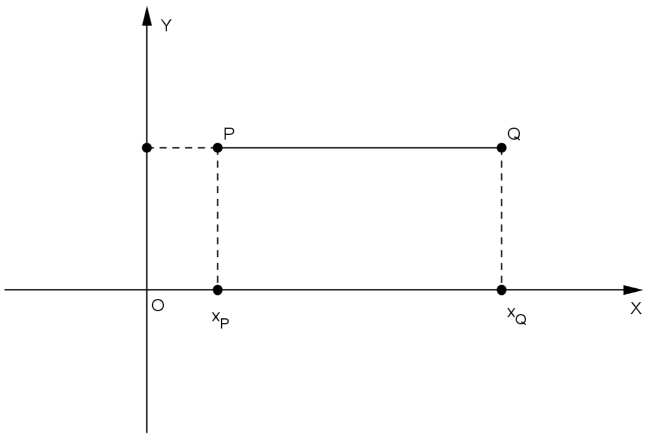


Figura 1.7: Distância entre dois pontos

De modo análogo, se o segmento PQ for paralelo ao eixo OY, a distância entre P e Q é dada pelo módulo da diferença entre y_Q e y_P, ou seja, $d_{PQ} = |y_Q - y_P|$.

Em geral, dados dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$, quaisquer no sistema de coordenadas cartesianas, podemos considerar o ponto R de intersecção entre as retas perpendiculares aos eixos OX e OY passando por P e Q, respectivamente. Daí, podemos construir o triângulo retângulo PRQ.

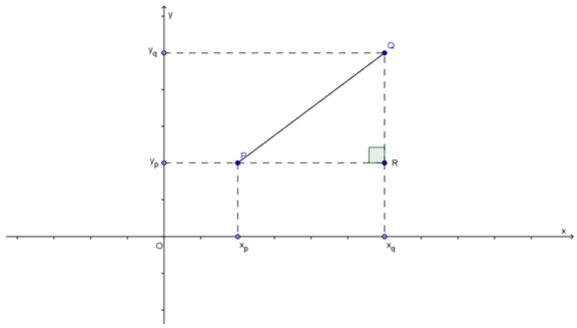


Figura 1.8: Representação da distância entre P e Q

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $d_{PQ}^2 = QR^2 + PR^2$.

Mas $QR = |x_P - x_Q|$ e $PR = |y_P - y_Q|$.

Assim, $d_{PQ}^2 = |x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2$.

Portanto,

$$d_{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2}$$

Exemplo 1.1. Determinar a distância entre os pontos P(1, -1) e Q(4, -5).

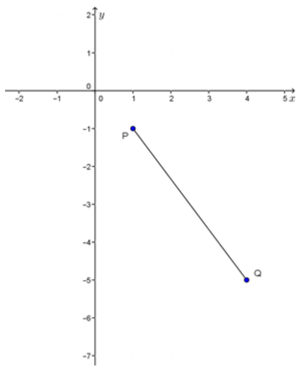


Figura 1.9: Distância entre P e Q

Solução:
Basta aplicar a fórmula da distância de dois pontos, assim,

$$d_{PQ} = \sqrt{|4-1|^2 + |-5+1|^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$ ■

1.3 Distância entre ponto e reta

Sejam r a reta de equação ax+by+c=0 e o ponto $P(x_0, y_0)$.

Seja $Q(x_Q, y_Q)$ a interseção entre a reta r e a reta perpendicular a r passando por Q, assim, a distância entre o ponto P e a reta r é igual a distância entre os pontos P e Q,como já é conhecida a fórmula de calcular a distância entre dois pontos, basta determinar as coordenadas de Q e aplicar a distância entre P e Q.

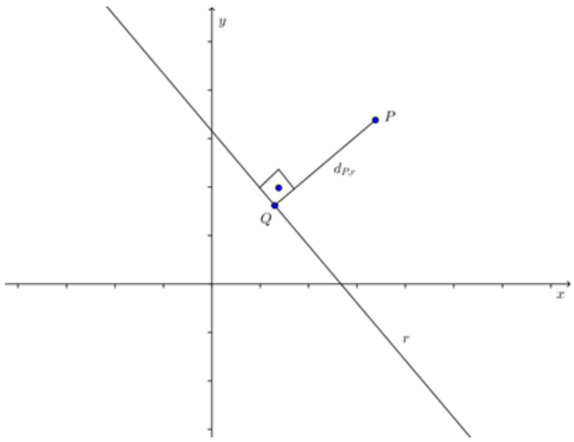


Figura 1.10: Distância entre ponto e reta

Por outro lado, se $r : ax + by + c = 0$ então: $m_r = -\dfrac{a}{b} \Rightarrow m_{PQ} = \dfrac{b}{a}$, assim, a reta que passa por PQ é dada por:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

As coordenadas de Q são determinadas pela solução do sistema linear,

$$\begin{cases} bx_q - ay_q = bx_0 - ay_0 & (i) \\ ax_q + by_q = -c & (ii) \end{cases}$$

Multiplicando (i) e (ii) por a e b, respectivamente, temos

$$\begin{cases} b^2x_q - aby_q = b^2x_0 - aby_0 & (iii) \\ a^2x_q + aby_q = -ac & (iv) \end{cases}$$

Somando (iii) e (iv), logo,

$$a^2x_q + b^2x_q = b^2x_0 - aby_0 - ac \Rightarrow x_q(a^2+b^2) = b^2x_0 - aby_0 - ac \Rightarrow$$

$$x_q = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2} \Rightarrow y_q = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2+b^2}$$

Designa-se por $d_{P,r}$, como a distância entre o ponto P e a reta r.

$$d_{Pr} = d_{PQ} = \sqrt{(x_0 - x_q)^2 + (y_o - y_q)^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\left[\ x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}\ \right]^2 + \left[\ y_0 - \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2+b^2}\ \right]^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\left[\ \frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2}\ \right]^2 + \left[\ \frac{abx_0 + b^2y_0 + bc}{a^2+b^2}\ \right]^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{a^2\left[\ \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2+b^2}\ \right]^2 + b^2\left[\ \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2+b^2}\ \right]^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\left[\ \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2+b^2}\ \right]^2 + [a^2+b^2]^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_o + c)^2}{a^2+b^2}}$$

Portanto, a distância entre ponto P e a reta r é dada por,

$$d_{Pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A expressão da reta que aparece na fórmula da distância entre um ponto e uma reta é a equação geral da reta, logo, se a reta for dada por uma de suas outras formas (reduzida, segmentária ou paramétrica) é necessário, transformá-las na forma da equação geral, podendo ser feita esta transformação por meios de operações algébricas.

Exemplo 1.2. Calcular a distância da origem à reta $r : 4x + 3y - 5 = 0$.

Solução:

Sendo $O(0,0) = O(x_0, y_0)$ e $a = 4$,$b = 3$ e $c = -5$ (coeficientes da reta), aplicando a fórmula, temos,

$$d_{O,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4.0 + 3.0 - 5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1 \qquad \blacksquare$$

Exemplo 1.3. Calcular a distância entre as reta $r : 4x - 3y + 1 = 0$ e $s : 4x - 3y + 11 = 0$, onde $r \parallel s$.

Solução:

A distância entre duas retas paralelas é igual à distância entre um ponto P de uma delas e a outra.

Para determinarmos um ponto P de r, atribuímos um valor qualquer a uma das variáveis (por exemplo, $x = 2$) e substituímos em r, obtendo o valor da outra variável.

$$4 \cdot 2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Assim,

$$P(2, 3) = P(x_0, y_0)$$

Como $d_{rs} = d_{Ps}$ temos,

$$d_{rs} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{rs} = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5}$$

Logo, $d_{rs} = 2$ ■

Capítulo 2

Área de Polígonos

2.1 Definição de Áreas de Polígonos

Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associa à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, postulamos que as seguintes propriedades sejam válidas:

i) Polígonos congruentes têm áreas iguais.

ii) Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de $P = 1$.

iii) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos $P_1, \cdots, P_n$ tais que dois quaiquer dele têm rm comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.

iv) Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono manor,

Como se sabe, a área representa uma medida. E ela mee o quê? Comumente falando, a área mede a quantidade de superfície ocupado por uma figura. Como qualquer medida que se preze, deve-se adotar um unidade e medida, algo em relação ao qual a comparação será fita. Convenciona-se que a unidade de medida de área é a área de um quadrado de lado unitário.

Na prética, utiliza-se muito os axiomas, direta ou indiretamente, da seguinte forma. Quando se deseja calcular a área de uma figura para a qual não se tem fórmula explícita ou conhecida, aplica-se um dos raciocíios gerais, aditivo (construivo) ou subtrativo (destrutivo), ou ambos.

Pelo método aditivo, procura-se dividir a figura dada em figuras componentes justapostas, cujas áreas se sabe calcular. Já de acordo com o processo subtrativo, engloba-se a figura por outra conhecida, de forma a obter figuras justapostas da área conhecida (dentre as quais, a figura desejada).

Exemplo 2.1. Por meio das diagonais que passam pelo seu centro, um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros (congruentes) adjacentes. Pelo método aditivo, a área do hexágono é igual à soma das áreas dos triângulos. Daí:

$A_{hexágono} = 6.A_{triângulo}$.

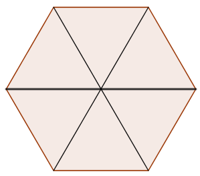


Figura 2.1: Héxagono dividido em trângulos

Exemplo 2.2. Um octógono equiângulo de lados alternadamente a e $a\sqrt{2}$ pode ter sua área calculada pelo método subtrativo. Prolongam-se os lados de medida a, obtendo-se um quadrado de lado $3a$ ("englobante"), o qual pode ser visto como formado pelo octógono e por quatro triângulos retângulos isósceles congruentes, de catetos a. Portanto:

$A_{octógono} = A_{quadrado} - 4.A_{triângulo}$

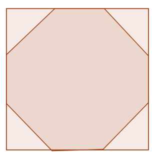


Figura 2.2: Octógono

Portanto, os métodos (aditivo e subtrativo) são particularment úteis. De forma geral, para figuras muito irregulares, não se pode escapar dos métodos aproximativos, os quais, de uma forma geral, recorrem a definições de Cálculo Integral.

Como sabemos que qualquer polígono pode ser dividido em um número finito de polígonos justapostos mais simples. Particularmente, todo polígono é decomponível em triângulos. Daí, a ideia é definir a área de uma figura F da seguinte forma:

Definição 1. A área de F é o resultado (limite) das aproximações por falta das áreas dos polígonos inteiramente contidos em F, bem como das aproximações por exesso das áreas dos polígonos que contêm F.

Ao invés de considerar polígonos quaisquer na definiçõa precedente, basta considerar polígonos (regiões) triangulares ou retangulares, uma vez que um polígono qualquer pode ser decomposto em polígonos mais simples. Um polígono (região) n-gonal é formado por um número finito de n-ágonos justapostos(sem pontos internos em comum). Isso simplifica a definiçõa de área de uma figura.

Desse modo, uma definição útil para a área de uma figura F qualquer é a seguinte:

Definição 2. A área de F é o (único) número real cujas aproximações por falta são as áreas das regiões retangulares contidas em F e cujas aproximações poe excesso são as áreas das regiões retangulares que contem F.

2.2 Área do quadrado e área do retângulo

Teorema 2.3. A área de um quadrado de lado l é igual a l^2.

Prova:

Se o quadrado Q tem lado $l \in \mathbb{N}$, é possível dividir cada um dos quatro lados em l segmentos unitários. Após traçar paralelas aos lados pelos pontos de divisão, obtêm-se $l \cdot l = l^2$ quadrados unitários. Como cada quadrado unitário q não possui pontos internos em comum com outro de mesmo tipo (isto é, os quadrados são justaposto),conclui-se que Q tem área igual a $1 \cdot l^2 = l^2$.

No caso em que a medida do lad de Q é dada por um número racional qualquer, isto é, quano $l = \dfrac{m}{n}$ em que m e n são naturais, a ideia é subdividir cada lado (unitário) de q em n

segmentos congruentes. São obtidos, assim, n^2 quadrados q' de lados $\frac{1}{n}$, de modo análogo ao anterior. Note que:

$$\text{Área de } q = n^2.(\text{Área de } q') \iff \text{Área de } q' = \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{n^2}.$$

Agora, como $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$, percebe-se que "cabem" m segmentos "sub-unitários" (ou seja, de medida $\frac{1}{n}$) em cada lado de Q. Por conseguinte, de modo similar ao exposto inicialmente, Q pode ser decomposo em m^2 quadrados q'. Daí:

$$\text{Área de } Q = m^2.(\text{Área de } q') \iff \text{Área de } Q = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = l^2.$$

A maior dificuldade consiste em provar que a área do quadrado continua a ser l^2, mesmo no caso em que l é irracional. Nesta situação, o raciocínio anterior não pode mais ser aplicado, já que l não admite um submúltiplo comum a unidade. Uma alternativa conveniente a ser adotada é utilizar o méodo da exaustão. Tal método consiste em uma demonstração indireta (redução ao absurdo).

Suponha que um quadrado Q tenha lado de meida l, irracional. O racocínio é provar que a área S do quadrado não pode ser nem menor nem maior que l^2. Logo, por exclusão (exaustão), a S só poe ser l^2. Se $S > l^2$, ou equivalentemente, $\sqrt{S} = l$ podemos escolher um racional r, tal que:

$$\sqrt{S} > r > l \ (\Rightarrow \ \sqrt{S} > r) \ \diamondsuit$$

Desse modo, como o segmento de medida l estaria contido no de medida r (já que $l < r$), concluimos que o quadrado de lado $l(Q)$ estaria inteiramente contido no quadrado de ldo $r(Q_1)$.

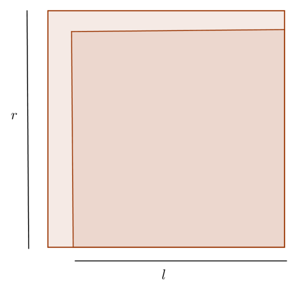


Figura 2.3: Quadrados de lados r e l

Daí, por definição de área: $S < áredeQ_1$. Conforme provado anteriormente, área de $Q_1 = r^2$ (pois r é racional). Portanto, $S < r^2 \Rightarrow \sqrt{S} < r$, o que é uma contradição de acordo com $\diamondsuit$.

Desse modo, a área de Q não pode ser interior a l^2. Um raciocínio inteiramente análogo conduz à conclusão de que S também não pode ser superior a l^2. Logo, $S = l^2$, qualquer que seja o número real positivo l. ■

Teorema 2.4. A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.

Prova:

Prolongando os lados de um retângulo de dimensões b e h, é posível obter um quadrado Q de lado $b + h$. Tal quadrado pode ser decomposto em dois quadrados, d lados $b(Q_1)$ e $h(Q_2)$, e em dois retângulos (R), congruntes ao original.

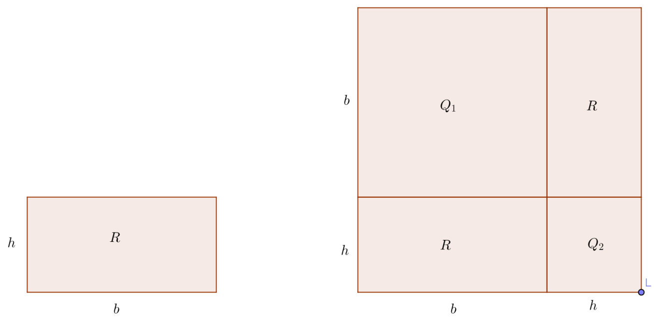


Figura 2.4: Retângulo de dimensões b e h e quadrado de dimensão $b + h$

Portanto,Área de Q=Área de Q_1 + Área de Q_2 + 2. Área de R $\diamond$

Por outro lado, de acordo com o teorema precedente:

Área de $Q = (b + h)^2$; Área de $Q_1 = b^2$; Área de $Q_2 = h^2$ $\diamond\diamond$

Substituindo as equações $\diamond\diamond$ em $\diamond$, temos,

$(b + h)^2 = b^2 + h^2 + 2.$Área de $R \iff b^2 + h^2 + 2.b.h = b^2 + h^2 + 2.$Área de R.

Logo, Área de $R = b.h$. ■

2.3 Área do triângulo utilizando a Geometria Plana

Segue da Geometria Plana que todo triângulo tem área igual a área de um retângulo que possui mesma base e metade da altura do triângulo. Para tanto, basta observar que sempre podemos decompor um triângulo qualquer em um trapézio (de altura igual à metade da altura) e dois triângulos, que podem ser reagrupados de modo a formar um retângulo.

Podemos mostrar que os triângulos são congruentes pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo).

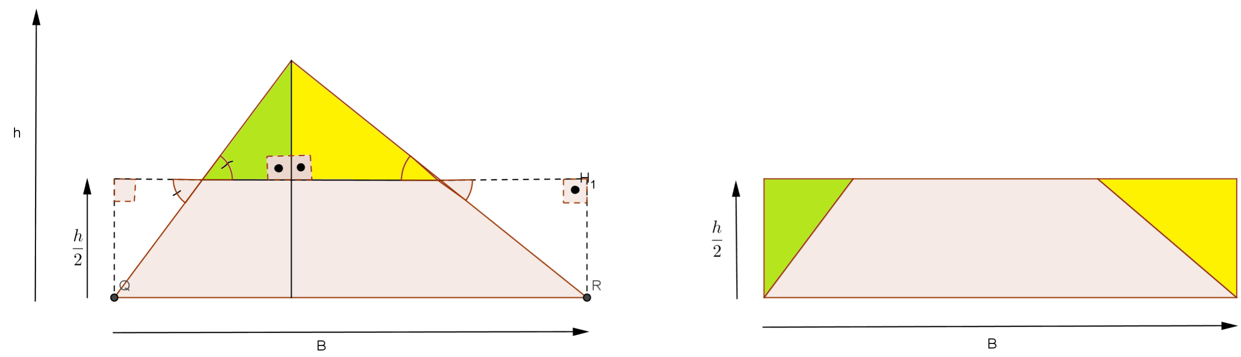


Figura 2.5: Decomposição dos triângulos em retângulos

Assim, a área de um triângulo é igual a $S = \dfrac{B.h}{2}$.

2.4 Área do triângulo em função das coordenadas de seus vértices

Mostraremos dois casos particulares onde um dos lados do triângulo esta sobre o eixo OX, e em seguida demonstraremos para um caso geral.

Primeiro caso particular:

Seja T um triângulo cujos vértces têm coordenadas $P_1(0,0), P_2(b,0)$ e $P_3(0,h)$, denotando a área por S_T, então,

$$S_T = \frac{bh}{2}$$

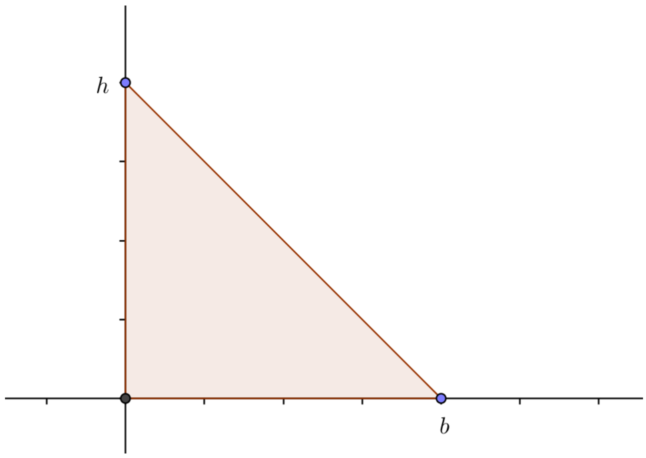


Figura 2.6: Área do triângulo caso particular 1

Segundo caso particular:

Seja T um triângulo cujos vértces têm coordenadas $P_1(0,0), P_2(b,0)$ e $P_3(a,h)$, denotando a área por S_T, então,

$$S_T = \frac{bh}{2}$$

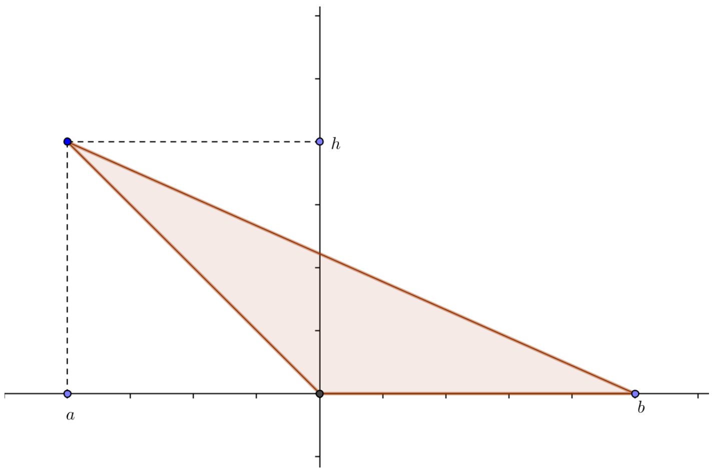


Figura 2.7: Área do triângulo caso particular 2

Sejam $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ três pontos não alinhados do plano cartesiano.Para calcular a área do triângulo $P_1P_2P_3$,que denotaremos por S_T, logo,

$$S_T = \frac{1}{2}.\ \text{base}\ .\ \text{altura}$$

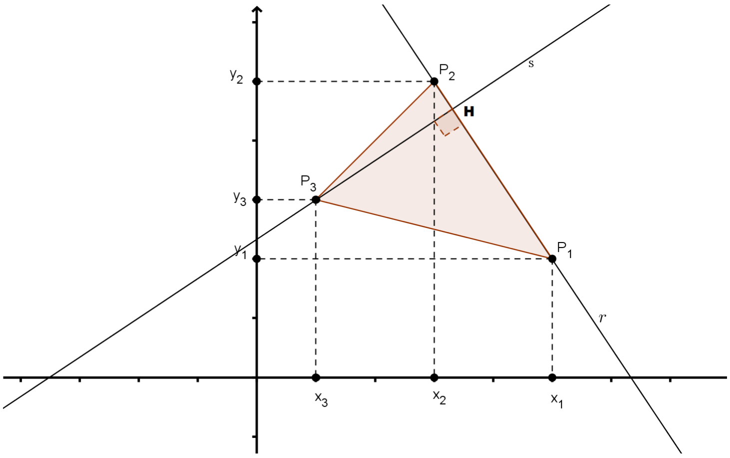


Figura 2.8: Área do triângulo

Note que a base pode ser tomada como a distância entre os pontos P_1P_2, e a altura correspondente será $h = d_{P_3H}$, onde r é a reta suporte que passa pelos pontos P_1P_2 e $H(x, y)$ é o ponto e intersecção entre as retas perpendiculares r e s.

Inicialmente iremos calcular os coeficientes angulares m_r, m_s das retas r e s, respectivamente.

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A equação da reta r é dada por,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$r\colon\ (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

Como $r \perp s$, então, $m_r \cdot m_s = -1$, assim

$$m_s = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

A equação da reta s é dada por,

$$y - y_3 = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x - x_3)$$

$$s\colon\ (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y - x_3(x_2 - x_1) - y_3(y_2 - y_1) = 0$$

As coordenadas do ponto H seram dadas pela solução do sistema linear formado pelas equações das retas r e s.

$$\begin{cases} (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0 \quad \star \\ (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y - x_3(x_2 - x_1) - y_3(y_2 - y_1) = 0 \quad \star\star \end{cases}$$

Multiplicando $\quad \star$ por $(x_2 - x_1)$ e $\quad \star\star$ por $-(y_2 - y_1)$, temos,

$$\begin{cases} (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)x - (x_2 - x_1)^2 y - x_1(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + y_1(x_2 x_2 - x - x_1)^2 = 0 \\ -(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)x - (y_2 - y_1)^2 y + x_3(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - y_3(y_2 - y_1)^2 = 0 \end{cases}$$

somando membro a membro, temos

$$x = \frac{(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)y_3 + (x_2 - x_1)^2 x_1 + (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$y = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 y_1 + (y_2 - y_1)^2 y_3}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Então, o valor da altura é

$$h = d_{CP} = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}$$

$$h = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Logo,

$$S_T = \frac{1}{2} d_{P_1P_2}.h$$

$$S_T = \frac{1}{2}.\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}.\frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)}{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

$$S_T = \frac{1}{2}.(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) \qquad \square$$

Lema 2.5. Seja T um triângulo cujos vértices são $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, orientado no sentido anti-horário. Então, sua área será dada por.

$$S_T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

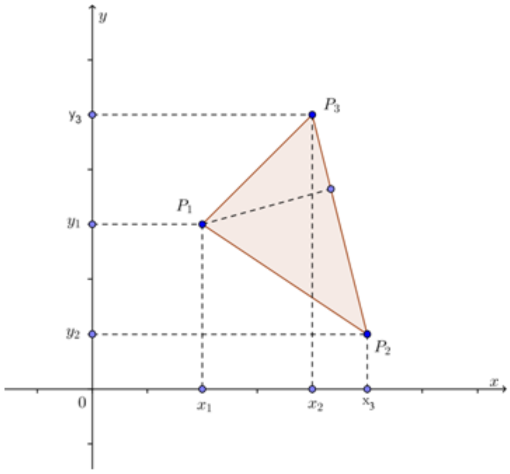


Figura 2.9: Área do triângulo

Prova:

Dividiremos em dois caso essa demonstração, o primeiro considerando o sentido proposto (anti-horário) e o segundo com o sentido contrário (horário)

Primeiro caso.

Desenvolvendo S_T, temos,

$$S_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

Segundo caso.

$$S_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(x_1y_3 - x_3y_1) + (x_3y_2 - x_2y_3) + (x_2y_1 - x_1y_2)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[-(x_3y_1 - x_1y_3) - (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$S_T = \frac{-1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \qquad \blacksquare$$

Note que os dois casos difere somente no sinal. Logo, usaremos sempre a orientação no sentido anti-horário.

Exemplo 2.6. (Cesgranrio) A área do triângulo, cujo vértices são (1,2), (4,-1) e (3,4), é igual:

a) 6.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e) 12.

Solução:

Aplicando a fórmula, temos,

$$S_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(-1-8) + (16+3) + (6-4)]$$

$$S_T = \frac{1}{2}[-9 + 19 + 2]$$

$$S_T = \frac{1}{2} \cdot 12$$

Portanto, $S_T = 6$ $\blacksquare$

Exemplo 2.7. (ITA-2007) Considereno plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$,$x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede.

a) $\frac{15}{2}$

b) $\frac{13}{4}$

c) $\dfrac{11}{6}$

d) $\dfrac{9}{4}$

e) $\dfrac{7}{2}$

Solução:

Calculando as interseções:

$$\begin{cases} 2x = y \\ x = 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x = y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (2,4)$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (5, \frac{5}{2})$$

Aplicando a fórmula, temos,

$$S_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_T = \frac{1}{2}[(0-0) + (20-5) + (0-0)]$$

Portanto, $S_T = \dfrac{1}{2}[15]$

Capítulo 3

Fórmula da Área de um Polígono como Função dos seus Vértices

Teorema 3.1. Seja Q(n) um polígono de n lados, com $n \geqslant 3$ e vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $\ldots$, $P_n(x_n, y_n)$ orientado no sentido anti-horário. Então sua área é dada por.

$$S_{Q(n)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

A prova será feita por indução sobre n.

i) Para $n = 3$, temos

$$S_{Q(3)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(3)} = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

o que é verdadeiro, pois é a fórmula da área do triâmgulo.

ii)Admitindo verdadeiro para n = k,

$$S_{Q(k)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Devemos mostrar que $S_{Q(n)}$,continua verdadeira para n = k + 1, isto é,

$$S_{Q(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}$$

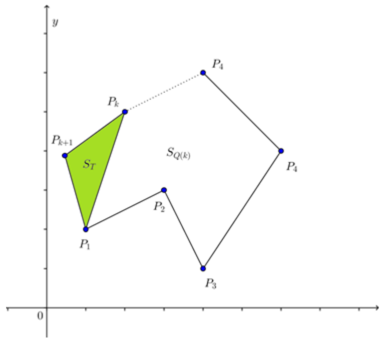


Figura 3.1: Representação do polígono de k+1 vértices

Note que $S_{Q(k+1)} = S_T + S_{Q(K)}$

Onde $S_{Q(k)}$ é a área do polígono de k vértices e S_T é o triângulo de vértices P_1, P_k e P_{k+1}.

$$S_{Q(k+1)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_k & y_k\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right] + \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{k-1} & y_{k-1} \\ x_k & y_k\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(k+1)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_1 & y_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_k & y_k\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(k+1)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{k-1} & y_{x-1} \\ x_k & y_k\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_1 & y_1\end{vmatrix} \qquad \square$$

Portanto, $S_{Q(k+1)}$ é verdadeira, o que prova o teorema.

Note que, assim como no caso do triângulo, a orientação também será mantida, basta observar que se mudarmos a orientação estaremos mudando a ordem das linhas do determinante.

Exemplo 3.2. Calcular a área do quadrilátero de vértices $P_1(1,0), P_2(5,0), P_3(4,2), P_4(0,3)$.

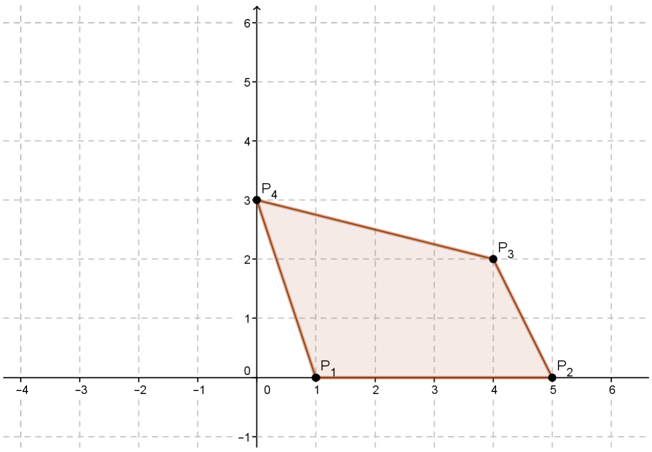


Figura 3.2: Área do quadrilátero

Solução:

Aplicando a fórmula, temos,

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}1 & 0\\5 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 0\\4 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 2\\0 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[(1.0 - 5.0) + (5.2 - 4.0) + (4.3 - 0.2) + (0.0 - 1.3)]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[10 + 12 - 3]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[19]$$

$$\therefore S_{Q(4)} = \frac{19}{2}$$ ■

Exemplo 3.3. (PUC/RJ-2009) Calcule a área do quadrilátero de vértices $(3,5), (1,3), (2,1)e(5,4)$.

Solução:

Aplicando a fórmula, temos,

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix}3 & 5\\1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 4\\3 & 5\end{vmatrix}\right]$$

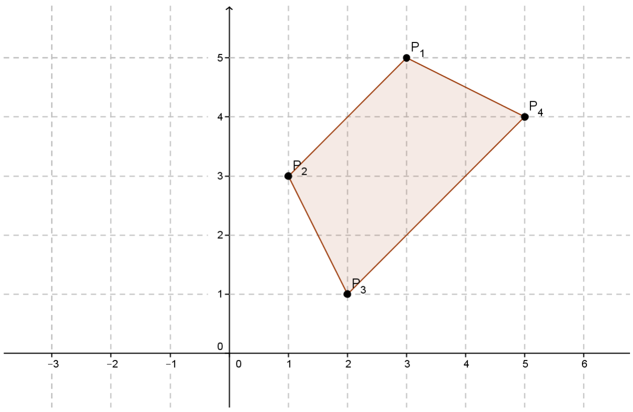


Figura 3.3: Área do quadrilátero

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[(3.3 - 5.1) + (1.1 - 2.3) + (4.2 - 5.1) + (5.5 - 4.3)]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[4 - 5 + 3 + 13]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[15]$$

$$\therefore S_{Q(4)} = \frac{15}{2} \qquad \blacksquare$$

3.1 Comparando a fórmula com outros métodos

Existe na literatura outros métodos de calcular áreas conhecendo as coordenadas de seus vértices, iremos comparar a nossa fórmula com dois desses métodos, são eles:
O teorema de Pick:

Teorema 3.4.

A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela fórmula

$$A(P) = \frac{1}{2}f + I - 1$$

Em que f é o número de pontos da rede situados sobre o contorno do polígono e I é o número de pontos da rede situados no interior do polígono, que serão chamados de pontos da fronteira e pontos do interior, respectivamente.

O outro modo é uma regra prática:
Para a área de um polígono com um número de lados $n \geq 3$, podemos usar a seguinte regra:
• Anotamos os vértices do polígono, a partir de qualquer um, repetindo o primeiro vértice no final.
• Calculando a soma dos produtos das diagonais, a área será a metade do módulo dessa soma. denotemos por D a soma do produto das diagonais e A a área, então

$$A = \frac{1}{2} \mid D \mid$$

Apliquemos três modos diferentes de calcular área no seguinte problema:
Calcule a área do polígono cujos vértices têm coordenadas $P_1(-5;2)$, $P_2(-2;1)$, $P_3(0,5;-2)$, $P_4(6;4)$, $P_5(1;2)$ e $P_6(1,5;5,5)$.

Aplicando o Teorema de Pick, temos

$f = 6$, $I = 24$, logo

$$A(P) = \frac{1}{2}f + I - 1$$

$$A(P) = \frac{1}{2}6 + 24 - 1$$

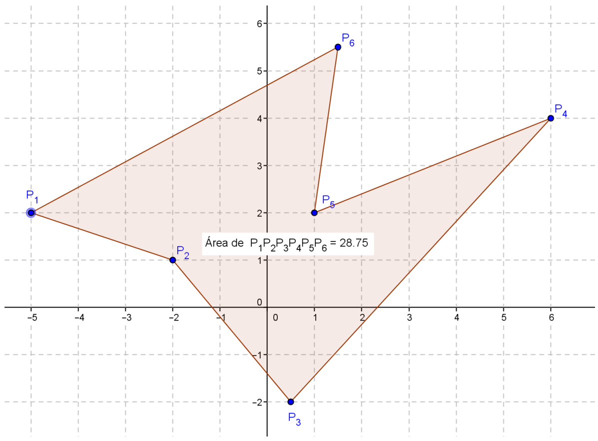


Figura 3.4: Área do hexágono usando o geogebra

$A(P) = 26$

Note que neste caso o Teorema de Pick falhou, pois nem todas coordenads são inteiras.

Agora vamos resolver o problema utilizando a regra prática.

Inicialmente iremos escrever as coordenadas uma abaixo da outra começando por P_1.

-5	2
-2	1
0,5	2
6	4
1	2
1,5	5,5
-5	2

Calculando D, temos

$D = (-5 + 4 + 2 + 12 + 5,5 + 3) - (-4 + 0,5 - 12 + 4 + 3 - 27)$

$D = 53,5$

Aplicando a fórmula da área, temos

$A = \frac{1}{2} \mid D \mid$

$A = \dfrac{1}{2} \mid 53,5 \mid$

$A = 26,75$

Note que essa fórmula também falha, pois o polígono em questão não é convexo.

Vamos resolver o problema utilizando nossa fórmula.

$$S_{Q(n)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$S_{Q(6)} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0,5 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,5 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1,5 & 5,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,5 & 5,5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$S_{Q(6)} = \frac{1}{2}[(-5+4) + (4-0,5) + (2+12) + (12-4) + (5,5-3) + (3+27,5)]$$

$$S_{Q(6)} = \frac{1}{2}[-1 + 3,5 + 14 + 8 + 2,5 + 30,5]$$

$$S_{Q(4)} = \frac{1}{2}[57,5] = 28,75$$

O resultado foi igual ao calculado pelo geogebra, esta fórmula diferente das anteriores não depende se as coordenadas são inteiras ou se o polígono é convexo.

Capítulo 4

Considerações Sobre as Aulas Ministradas

A fim de evidenciarmos nossa proposta, iniciamos os trabalhos numa turma de 3º ano do Ensino Médio noturno da Escola Estadual Manoel Leandro de Lira, em Feira Grande-Al, com o objetivo de apresentar aos alunos a fórmulas de calcular a área de um polígono conhecendo as coordenadas de seus vértices. Esta aplicação foi dividida em três momentos em um total de 4 aulas.

Primeiro momento: começamos a aula fazendo a divisão da turma em quatro grupos, cada grupo recebeu três questões para calcular a área de um triângulo, um quadrilátero e de um hexágono, sendo dado apenas as coordenadas de seus vértices, os alunos tinham que responder de qualquer forma, sem interferência do professor.

Segundo momento: foi mostrado o nosso teorema e uma aplicação.

Terceiro momento: os grupos receberam as mesmas questões, só que dessa vez eles tinham que resolver usando a fórmula, e eles deveriam dá suas opiniões sobre o que foi desenvolvido. Vejamos, as soluções dos grupos para cada uma das questões.

4.1 Primeiro momento

Questão 1.

Calcule a área de um triângulo cujos vértices têm coordenadas $P_1(0,5;2)$,$P_2(3;2)$ e $P_3(0,5;5)$.

Nesta parte dos trabalhos os alunos não mostraram dificuldade, três grupos utilizaram a fórmula da área do triângulo de acordo com o livro didático deles, e outro grupo utilizou a fórmula da área como visto na geometria plana.

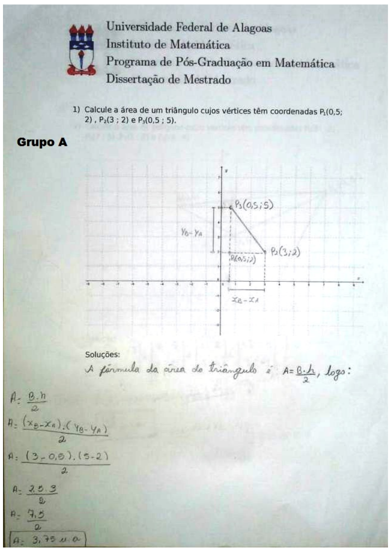


Figura 4.1: Solução grupo A

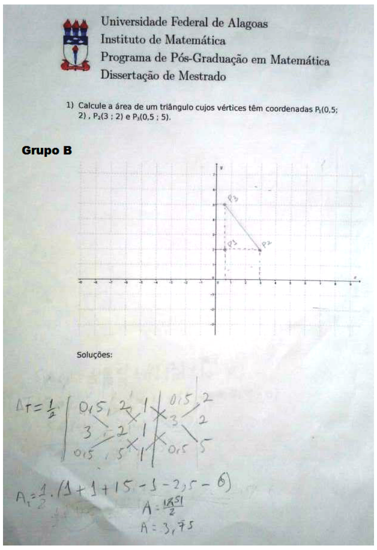


Figura 4.2: Solução grupo B

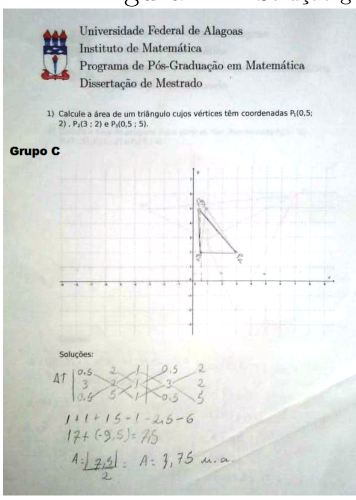


Figura 4.3: Solução grupo C

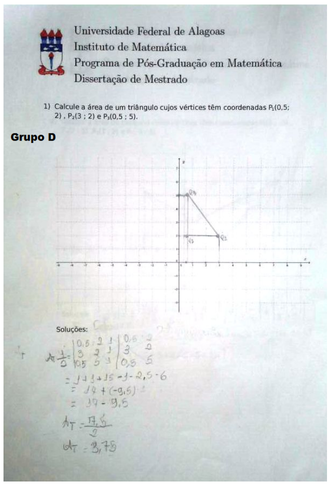


Figura 4.4: Solução grupo D

Quetão 2.

Calcule a área do polígono cujos vértices têm coordenadas $P_1(3;-3)$,$P_2(7;5)$,$P_3(1;2)$ e $P_4(-3;4)$. Neste segundo problema, os alunos mostraram dificuldades, principalmente em encontrar estratégias para a solução. Partiu de um dos grupos a ideia de triangular, porém só dois grupos conseguiram aplicar a ideia de triangulação.

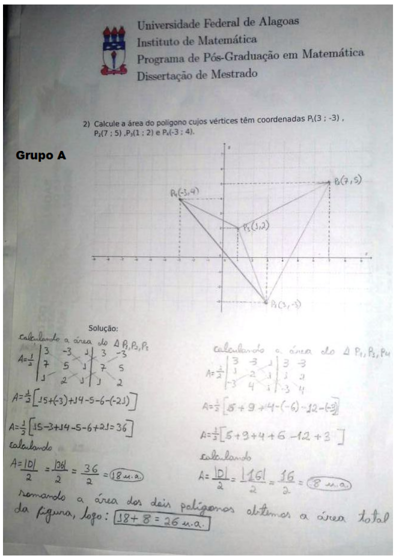


Figura 4.5: Solução grupo A

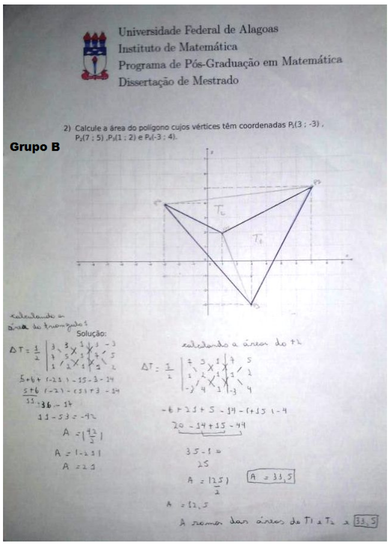


Figura 4.6: Solução grupo B

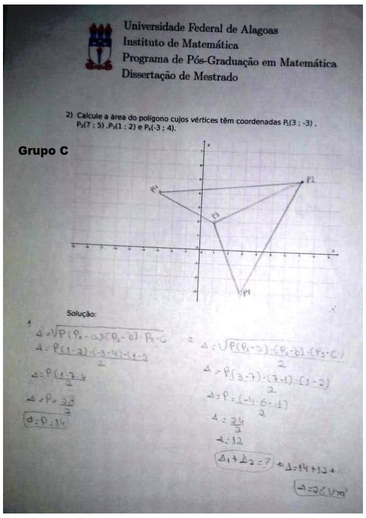


Figura 4.7: Solução grupo C

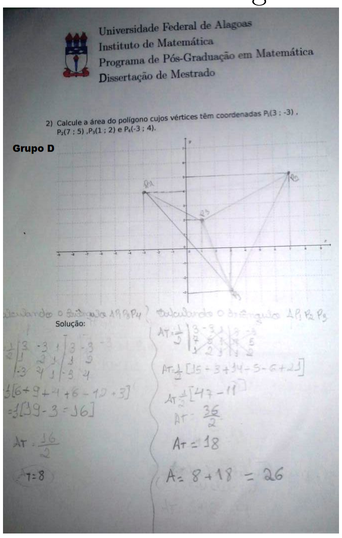


Figura 4.8: Solução grupo D

Questão 3.

Calcule a área do polígono cujos vértices têm coordenadas $P_1(-5; 2)$, $P_2(-2; 1)$, $P_3(0,5; -2)$, $P_4(6; 4)$, $P_5(1; 2)$ e $P_6(1,5; 5,5)$.

Neste terceiro problema, os alunos usaram a mesma ideia de triangular o polígono, porém os exaustivos cálculos dos determinantes de 3º ordem fizeram com que os alunos perdessem a motivação.

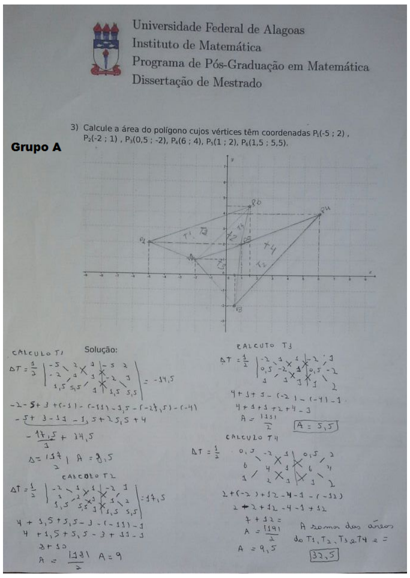


Figura 4.9: Solução grupo A

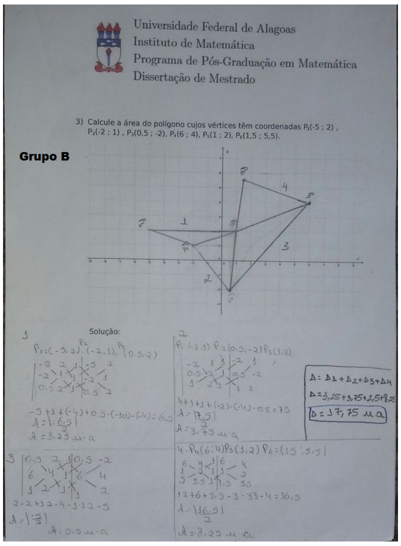


Figura 4.10: Solução grupo B

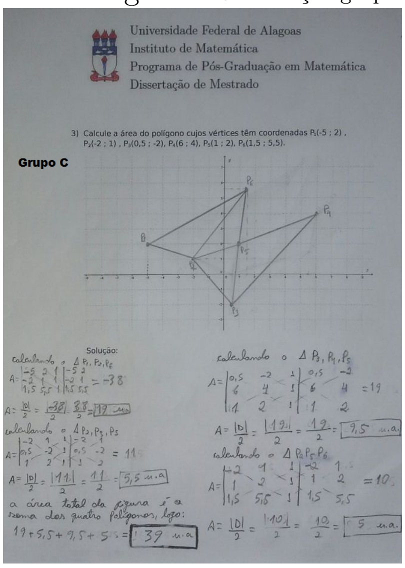


Figura 4.11: Solução grupo C

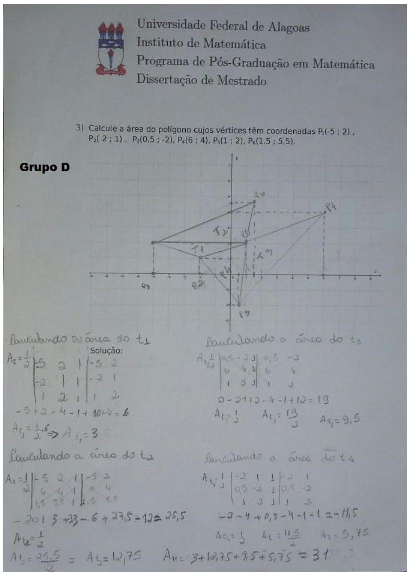


Figura 4.12: Solução grupo D

4.2 Segundo momento

Neste segundo momento, foi desenvolvido o teorema sem uma demostração rigorosa, tendo em vista que o objetivo era que os alunos entendessem e podessem aplicá-lo nas questões. Em seguida, foi dado um exemplo para mostrar que a aplicação da fórmula.

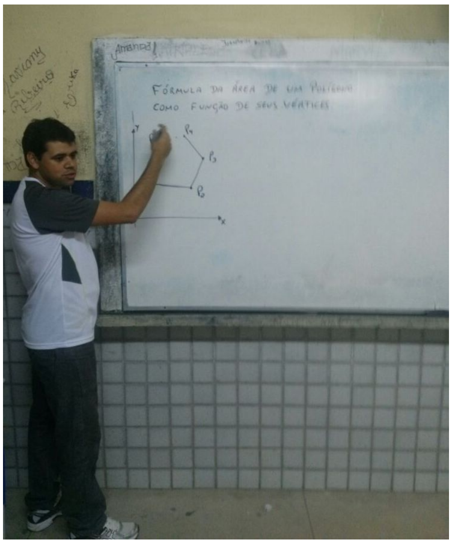


Figura 4.13: Apresentação do teorema

Figura 4.14: Aplicação da fórmula

Figura 4.15: Alunos no momento da explicação

Figura 4.16: Momento de dúvidas

4.3 Terceiro momento

Neste terceiro momento foi pedido aos grupos que resolvessem a terceira questão usando a fórmula que foi apresentada, dessa vez não apresentaram dificuldades.

Os comentários dos grupos a respeito da fórmula apresentada foram os seguintes:

Grupo A: "A fórmula apresentada foi um meio muito mais simples para se obter a área dos polígonos, facilitando o entendimento e a resolução das questões."

Grupo B: "Em nosso grupo em que respondemos algumas questões sobre áreas, achamos que a fórmula que encontramos no livro gasta muito tempo para conseguir responder a questão, já a fórmula que o professor mostrou fica mais fácil, prático e rápido para responder questões sobre áreas."

Grupo C: "A fórmula apresentada nos deu uma compreensão mais rápida e um gasto de tempo menor do que a que nós conhecíamos."

Grupo D: "A nova fórmula que nos foi apresentada, mostrou-se muito mais simples e prática, e através dela ficou mais fácil entender e solucionar as questões propostas."

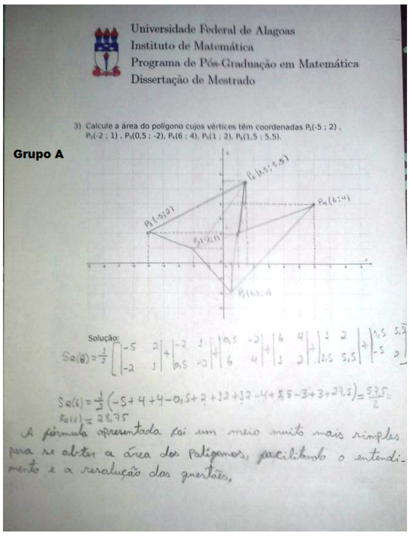


Figura 4.17: Solução grupo A

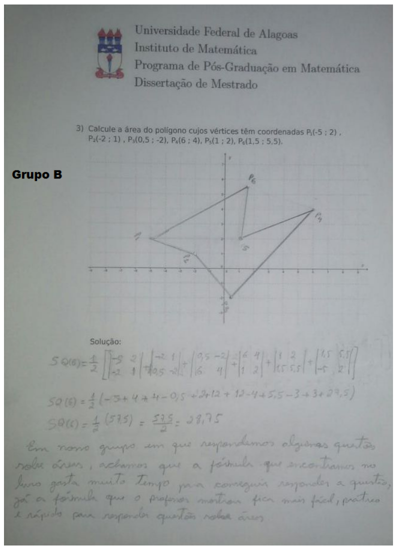


Figura 4.18: Solução grupo B

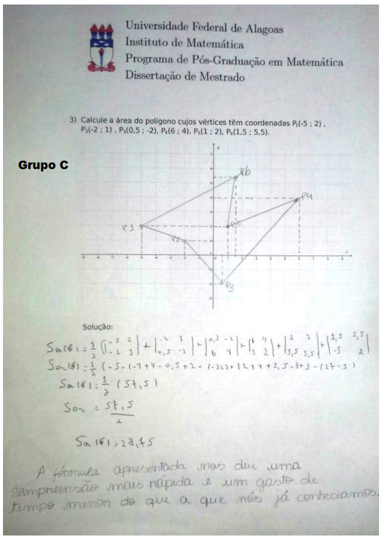


Figura 4.19: Solução grupo C

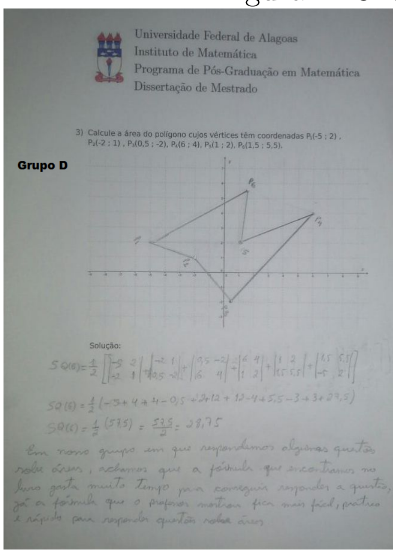


Figura 4.20: Solução grupo D

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta de calcular áreas de polígonos, dadas as cooredenads de seus vértices, utilizando uma soma dos determinantes de segunda ordem formados pelas coordenadas dos vértices. Deste modo, dadas as coordenads dos vértices de um polígono, a sua área será a metade do somatório desses determinantes, considerando a orientação no sentido anti-horário.

Uma vantagem desta fórmula é a não dependência da estrutura do polígono, ou seja, não depende se ele é convexo ou se suas coordenadas são inteiras.

Na maioria dos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio o tópico de áreas se resume em calcular a área de um triângulo ou no máximo calcular a área de um quadrilátero. A proposta desse trabalho é que o tópico de áreas seja um pouco mais explorado entre os alunos de Ensino Médio.

Como aplicamos esta proposta em sala de aula no Ensino Médio, acreditamos que a nossa fórmula facilita a interpretação do cálculo de áreas e motiva ainda mais os alunos a buscar novos desafios.

Referências Bibliográficas

[1] A. L. Pereira e S. T. Melo . **Contando Áreas- O Teorema de Pick**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 78, p. 36-42, 2º quadrimestre. 2012.

[2] GENTIL, Nelson...[et al.] . **Matemática para o 2º grau**. 7. ed. São Paulo: Ática, 2000.

[3] GOMES, Carlos A.; GOMES, José Maria . **Tópicos de Matemática-IME-ITA-Olimpíadas**. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2012.

[4] IEZZI, Gelson...[et al.] . **Matemática: ciências e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[5] LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[6] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[7] LIMA, Elon Lages...[et al] **A matemática do ensino médio vol. 3**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] MUNIZ NETO, Antonio Caminha.**Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigues da Rocha. **Coleção Elementos de Matemática: Geomtria Plana**. 3. ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.

[10] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigues da Rocha. **Coleção Elementos de Matemática: Números complexos, Polinômios, Geometria Analítica**. 3. ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.

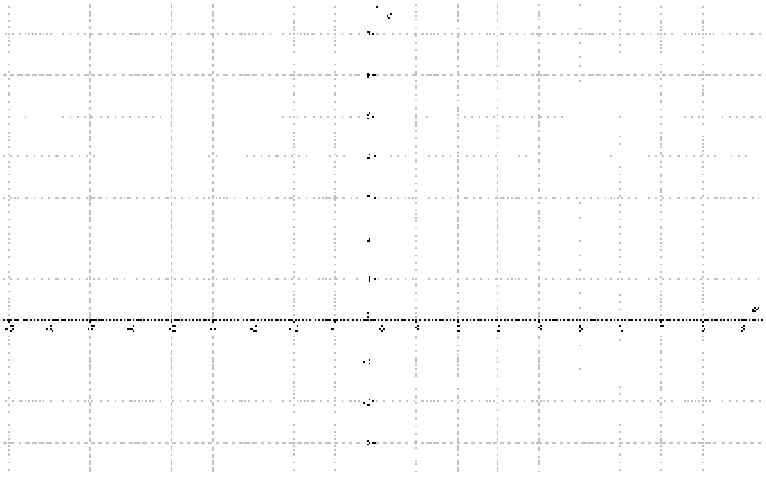
[11] PICK, G. A. **Geometrisches zur Zahlenlehre (Geometric results on number theory). Sitzungsber. des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereins für Böhmen "Lotos"**. Prag, 1900.

[12] SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emilio. **Matemática**. Vol.único, Série Novo Ensino Médio, 7. ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.

ANEXOS

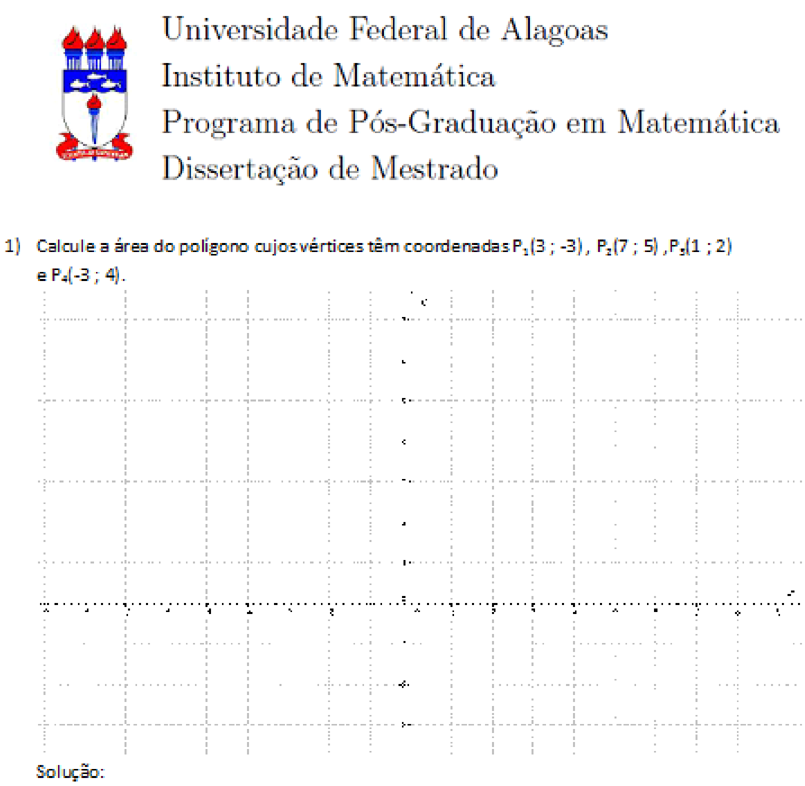
Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

1) Calcule a área de um triângulo cujos vértices têm coordenadas $P_1(0,5; 2)$, $P_2(3 ; 2)$ e $P_3(0,5 ; 5)$.



Soluções:

Figura 5.1: Quetão 1

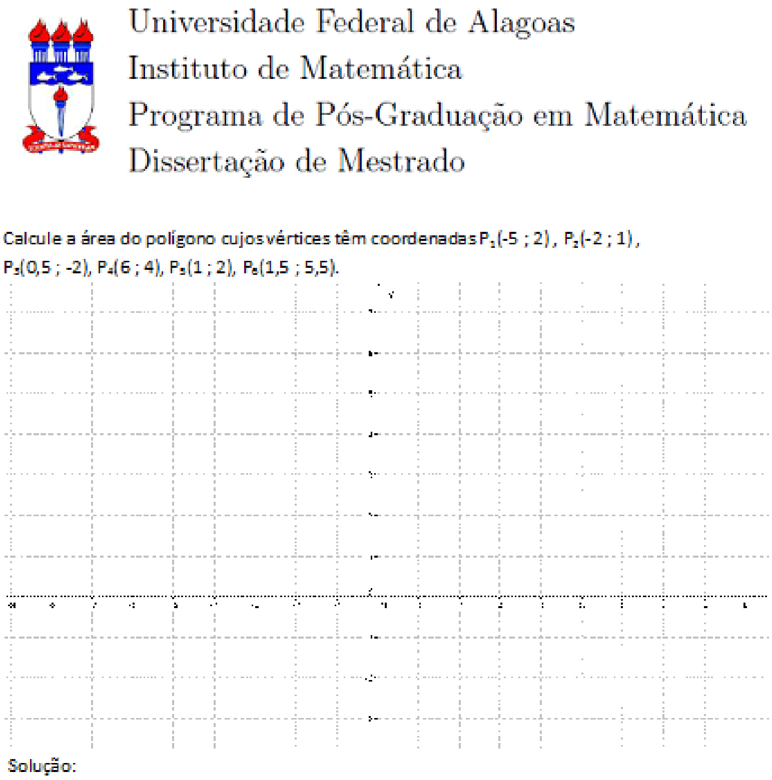


Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

1) Calcule a área do polígono cujos vértices têm coordenadas $P_1(3 ; -3)$, $P_2(7 ; 5)$, $P_3(1 ; 2)$ e $P_4(-3 ; 4)$.

Solução:

Figura 5.2: Quetão 2



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

1) Calcule a área do polígono cujos vértices têm coordenadas $P_1(-5 ; 2)$, $P_2(-2 ; 1)$, $P_3(0,5 ; -2)$, $P_4(6 ; 4)$, $P_5(1 ; 2)$, $P_6(1,5 ; 5,5)$.

Solução:

Figura 5.3: Quetão 3