UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPOS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

IVANILSON FERREIRA NOLETO

UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE DINÂMICO SKETCHUP NO ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA TURMAS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

PALMAS - TO
2014

IVANILSON FERREIRA NOLETO

UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE DINÂMICO SKETCHUP NO ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA TURMAS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

PALMAS - TO
2014

*

Noleto, Ivanilson Ferreira

Uma Proposta de Utilização do Software Dinâmico SketchUp no Ensino dos Sólidos Geométricos para turmas do 2º ano do Ensino Médio/ Ivanilson Ferreira Noleto. – Palmas, 2014

94 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Tocantins Campos Universitário de Palmas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2014.

1. Geometria Espacial Métrica. 2. Visualização. 3. Software SketchUp. 4. Aprendizagem. I. Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. IV. Título

CDU 02:141:005.7

IVANILSON FERREIRA NOLETO

UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE DINÂMICO SKETCHUP NO ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA TURMAS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 05 / 12 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha
____
Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Hellena Apolinário
____
Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

____
Prof. Dr. Claudio de Castro Monteiro (IFTO)

Dedico este trabalho a minha filha Karina de Oliveira Noleto; ao meu pai Celso Lucena Noleto e "in memoriam" à minha mãe Corina Ferreira Noleto; à minha madrinha Otani Maria Noleto e aos meus irmãos e irmãs.
Dedido também a todos os meus alunos, bem como a todos da turma PROFMAT/UFT 2012.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado força para alcançar mais um objetivo na minha vida.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes, por todo o empenho, sabedoria, compreensão e, acima de tudo, pelas sugestões para a conclusão deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica, em especial aos do Mestrado PROFMAT/UFT.

Aos meus familiares que sempre demonstraram amor, compreensão e força.

Aos meus colegas do Mestrado; aos meus amigos e amigas que estiveram presentes, me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação durante esta trajetória.

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."

(Emile Lemoine)

RESUMO

O presente trabalho almeja contribuir com o ensino de Geometria Espacial na segunda etapa do Ensino Básico no Brasil, tendo por objetivo despertar o interesse de estudantes do Ensino Médio para o estudo dos sólidos geométricos com a aplicação do software SketchUp, e que esse material possa auxiliar os professores que desejem trabalhar esse conteúdo no Ensino Médio. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, como segue. Fez-se um histórico da evolução da Matemática e da Geometria, verificou-se como se aplica a Geometria Espacial no Ensino Médio, de acordo com as Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM) e segundo alguns autores. Em seguida, relatou-se sobre o uso da informática no ensino da Geometria. Finalmente, fundamentou-se o estudo teórico dos sólidos geométricos e propôs-se uma aplicação didática de construção e cálculo da área dos principais sólidos geométricos com o uso do software SketchUp. A interface amigável encontrada no software SketchUp foi o ponto de partida para a realização deste trabalho. Como resultado, fica a fomentação das discussões sobre o uso das tecnologias no ensino de Matemática, a certeza das contribuições positivas dos ambientes educacionais informatizados para o trabalho de professores e alunos, e o recurso didático aplicável ao estudo de sólidos geométricos por meio do SketchUp. Espera-se que este trabalho contribua para tornar o ensino dos sólidos geométricos mais atrativo e motive os professores a abordarem novas metodologias de ensino.

Palavras-chave: Geometria Espacial Métrica. Visualização. Software SketchUp. Aprendizagem.

ABSTRACT

This paper aims to contribute to the teaching of Spatial Geometry in the second stage of Basic Education in Brazil, aiming to arouse the interest of high school students for the study of geometric solids with the application of SketchUp software, and that this material can help teachers who want to work this content in High School. The methodology used in this bibliographic research, as follows. Made it a history of the evolution of Mathematics and Geometry, verified it as if applies to spatial geometry in high school, according to the Curriculum Guidelines of Secondary Education (OCEM) and according to some authors. Then it was reported on the use of information technology for teaching geometry. Finally, was based on the theoretical study of geometric solids and proposed a didactic application of construction and calculation of the area of the main geometric solids using the SketchUp software. The user friendly interface found in the SketchUp software was the starting point for this work. As a result, it is fostering discussions on the use of technology in teaching Mathematics, the certainty of the positive contributions of computerized educational environments for work of teachers and students, and the teaching resource applicable to the study of geometric solids through the SketchUp. It is hoped that this work will contribute to make teaching more attractive of the geometric solids and motivate teachers to address new teaching methodologies.

Key-words: Metric Spatial Geometry. Preview. Software SketchUp. Learning.

LISTA DE FIGURAS

Lista de símbolos

α	Alfa, letra minúscula do alfabeto grego, usada para representar um plano
β	Beta, letra minúscula do alfabeto grego, usada para representar um plano
A, B, C, ... , Z	Letras maiúsculas do nosso alfabeto representarão vértices de um polígono
r, s, t	Letras minúsculas do nosso alfabeto representarão retas
A_b	Área da base
A_l	Área lateral
A_t	Área total
V	Volume do sólido geométrico
F_l	Faces laterais
g	Geratriz
h	Altura
a	Aresta
l	Aresta da base
al	Aresta lateral
A_p	Apótema da pirâmide
m	Apótema da base
r	Raio da base
$=$	Igualdade
$\Rightarrow$	Implicação lógica
$\sqrt{a}$	Raiz quadrada de a
$\geq$	Maior que ou igual a
π	Pi (aproximadamente 3,14)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tomando por base o princípio de que toda situação no processo ensino-aprendizagem deve propiciar o desenvolvimento de habilidades, é preciso priorizar a qualidade do processo e não a quantidade de conteúdos trabalhados.

Tem-se dado um destaque maior às questões que envolve o processo ensino-aprendizagem, em virtude das constantes alterações ocorridas na sociedade. Consequentemente, a escola tem passado por uma transformação.

"Em virtude dessa transformação, a função do professor adquiri uma nova dimensão: possibilitar que, ao acessar informações, o aluno seja capaz de decodificá-las, interpretá-las e, a partir disso, emitir uma análise. O professor é, então, considerado o mediador entre o conhecimento e o aluno, bem como o facilitador, o incentivador e o avaliador do processo de ensino-aprendizagem." (SOUZA, 2013)

Ao compreender a sua função, o professor pode elaborar suas aulas de modo a atingir seus objetivos e proporcionar aos alunos a aprendizagem. O processo de reflexão gera dúvidas e esclarecimentos sobre interação aluno-professor, bem como professor-aluno.

Segundo Perez (2004), pode-se considerar que:

> [...] A reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e compartilha suas ideias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo. [...]

De acordo com Souza (2013), o desenvolvimento científico-tecnológico vem alcançando uma importância maior no contexto educacional, pois sua contribuição diante da sociedade está aumentando rapidamente, bem como sua utilização no processo ensino-aprendizagem. Desse modo, a integração de novas mídias, como a calculadora e o computador, não é mais novidade nas aulas, mas recursos que contribuem para criação de novas estratégias no ensino-aprendizagem. Além disso, a utilização na sala de aula desses elementos possibilita ao professor estar mais próximo da realidade extraclasse do aluno, que, em geral, tem acesso a algumas mídias, como televisão, computador e internet.

A utilização de softwares nas escolas como recurso didático vem se tornando cada vez mais frequente. Há um número considerado de alunos que encontram dificuldades no aprendizado de Matemática e, em particular, em Geometria. O uso de softwares educativos pode auxiliar os estudantes na visualização de conceitos e procedimentos geométricos. Com isso, surge a expressão *Geometria Dinâmica*, utilizada para especificar a Geometria em que as figuras geométricas são construídas e manipuladas pelo computador sem que suas propriedades sejam alteradas.

O objetivo deste trabalho foi elaborar uma base de dados com o software gratuito SketchUp para a simulação de construções dos principais sólidos geométricos, bem como o cálculo de suas áreas, aplicadas ao Ensino Médio.

Na dissertação de Carvalho (2013), ele utiliza o software SketchUp, mas apenas para fazer as simulações de construções dos sólidos geométricos, enquanto, que este trabalho, vai mais além, pois mostra como se calcula a área da base, a área lateral e a área total, destes sólidos geométricos.

No primeiro capítulo foi realizada uma pesquisa sobre os aspectos históricos da Geometria, na qual se relatou a evolução da Matemática e depois a evolução da Geometria.

O segundo capítulo trata de uma análise do ensino da Geometria Espacial Métrica na atualidade. Essa análise se baseia nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e em alguns livros didáticos que são utilizados nas redes públicas de ensino, depois, fala-se sobre o uso da Informática no ensino da Geometria

O terceiro capítulo aborda a fundamentação teórica dos sólidos geométricos, discorrendo sobre fatos históricos, conceitos, elementos, classificações, áreas da superfícies e cálculo dos volumes dos sólidos geométricos.

O quarto capítulo apresenta a proposta de aplicação do software SketchUp na construção dos principais sólidos geométricos. Inicia-se o capítulo apresentando as principais ferramentas do SketchUp para a aplicação em Geometria Espacial; em seguida, propõe-se uma sequência didática que pode ser utilizada pelo professor no ensino da Geometria Espacial Métrica. Nessa sequência didática, fez-se, passo a passo, a construção e cálculo da área dos seguintes sólidos geométricos: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Nas considerações finais, comenta-se que a utilização de softwares, como o SketchUp, trabalhando a Geometria Dinâmica, fornece novas perspectivas para o ensino de Geometria, tornando as atividades mais ricas e diversificadas. Relata-se também que as construções da proposta constitui apenas uma ferramenta a mais que o professor pode utilizar com seus alunos a fim de melhorar o ensino e a aprendizagem em relação aos sólidos geométricos.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA

1.1 A EVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA

A origem da Matemática leva o docente a compreendê-la para melhor transmiti-la, como relata Boyer (2012):

> Afirmações sobre a origem da Matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, em uma carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita.

Segundo Ponte (2009), a Matemática começou com uma técnica do dedo polegar, para manipulação de quantidades espaciais. Muito mais tarde, surgiu a ideia de formulação de teorias gerais, em Geometria, e a generalização do cálculo numérico veio muito depois.

Etimologicamente, a palavra Matemática, de origem grega, significa ciência racional. O método usado pela Matemática é essencialmente o método dedutivo, oposto ao método indutivo, das ciências experimentais. Por isso, para conseguir um resultado, a Matemática institui uma sequência de proposições, começando com axiomas, em que cada uma, a partir da segunda, se liga à que a precede, por argumentos de ordem lógica.

Há três séculos, faria algum sentido definir Matemática como a ciência que estuda os números, a forma de serem combinados, as relações entre eles e as propriedades geométricas dos objetos e a sua extensão. Presentemente, essa definição corresponde a um setor muito restrito da Matemática. Logo, defini-la é difícil, já que não se trata de uma ciência estática. Pelo contrário, de modo geral, as ciências vão se alargando cada vez mais, criando novas estruturas e conceitos, pelas solicitações dos mais variados setores da atividade humana, desde a Física, a Astronomia, as Ciências Econômicas, as Ciências Sociais, até o pensamento. Por isso, Bertrand Russel formulou uma moderna definição, que refere a Matemática como "a ciência ligada à dedução lógica das consequências ligadas as permissas genéricas, por meio da razão". Bertrand Russel acreditava que, para se criar uma filosofia, só era preciso renunciar à metafísica e tornar-se apenas um bom matemático. Ao mesmo tempo, verificou-se uma ampliação no reconhecimento do conceito da Matemática, tanto como uma arte, quanto como uma ciência. Passou-se, então, a falar na "beleza" de certos desenvolvimentos matemáticos.

Segundo Einstein: "Há uma razão que explica a elevada reputação das matemáticas: é que elas levam às ciências naturais exatas uma certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter". E pergunta-se: "como pode acontecer que as matemáticas, que são, afinal de conta, um produto do pensamento humano, estejam tão admiravelmente adaptadas aos objetos da realidade?".

A arte ou a beleza da Matemática não impedem, contudo, que essa ciência seja um instrumento de progresso social e econômico e que esteja na base de inúmeras descobertas como resposta a necessidades específicas. Os dois aspectos da Matemática, o artístico e o prático, refletem-se no desenvolvimento de duas vias: a Matemática Pura e a Matemática Aplicada.

O conceito de Matemática, como uma linguagem para discussão de ideias complexas com o mais elevado desenvolvimento da Lógica, fez luz sobre a natureza do próprio pensamento e levou à construção de máquinas de pensar. Dessas investigações resultaram os computadores e autômatos utilizados em tantas áreas.

Podemos não nos aperceber, mas o mundo em que vivemos depende fundamentalmente da Matemática. A informação que chega ao nosso televisor deve-se a ondas eletromagnéticas; a informação telefônica por meio de satélites, que liga locais distantes do planeta, só foi possível pela Matemática e, após esta, pela Física. A própria computação que está a revolucionar a sociedade foi desenvolvida inicialmente por matemáticos. O motor, o circuito elétrico ou um "chip" de computador, para terem sido desenvolvidos, necessitaram de enormes quantidades de cálculos matemáticos, e a maioria dos aparelhos elétricos que são atualmente considerados indispensáveis não existiriam sem o desenvolvimento da Matemática. A própria teoria de Einstein, bem como a teoria de buracos negros do universo, de Hawking, necessitou da Matemática, de resultados que envolvem números complexos, Mecânica Quântica e Teoria das Probabilidades.

Nas Ciências Sociais, o ramo da Matemática conhecido como Estatística é um instrumento extremamente útil para qualquer profissional. Para o investimento em bolsa de valores, utilizam-se teorias matemáticas; para maximizar ou minimizar certas quantidades de interesse (como lucro e prejuízo), o que significa que há um modelo matemático em jogo.

Atualmente nas sociedades modernas, na maioria dos programas de nível superior, a Matemática está presente. A tendência de todas as ciências é agora cada vez mais recorrerem à Matemática, "se matematizarem". Por isso, a Matemática é considerada a "rainha" de todas as ciências e das tecnologias. É aplicada em cada setor da atividade humana, por que torna possível realizar abstrações, procurando demonstrar verdades que não têm qualquer relação aparente com a realidade imediata do mundo em que vivemos.

1.2 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA

Boyer (2012), destaca que:

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugere uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que, em essência, são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes.

De acordo com Ponte (2009), o estudo das propriedades das figuras e do espaço compete à Geometria, ou melhor dizendo, às geometrias. Os matemáticos utilizam numerosas geometrias, que se distinguem por estudarem as propriedades das figuras, que não se alteram sob a mudança de determinados "grupos" ou por serem estudadas sob determinados pontos de vistas, como é o caso das geometrias métricas: a Projetiva, a Euclidiana, a Analítica, a Diferencial, etc.

A Matemática, por meio da Geometria, foi a primeira ciência que atingiu um grau de perfeição aceitável. Euclides não foi propriamente um inventor da Geometria. Outros gregos como Eudoxo e Arquimedes, nesse domínio, tiveram um valor muito superior. O grande mérito de Euclides residiu em ter quase conseguido desenvolver toda a Matemática conhecida na época de algumas proposições iniciais, poucas, é verdade, como postulados, definições, demonstrando todos os teoremas e resolvendo problemas que deles necessitavam a partir de proposições.

Embora, presentemente, não se considere o tratamento euclidiano como perfeito, ele representa uma notável proeza do espírito humano. A Geometria Euclidiana é a racionalização da Geometria Intuitiva, espontânea. É uma das geometrias métricas. A classificação das geometrias pode fazer-se segundo as propriedades das figuras, que se mantêm por meio de vários grupos de transformações, tais como um deslocamento ou uma rotação. Um conjunto de transformações constitui um grupo se a cada transformação corresponde uma inversa. A Geometria Métrica estuda as propriedades métricas das figuras, isto é, as propriedades que são invariantes sob as transformações do grupo dos deslocamentos. A Topologia é a disciplina que estuda as propriedades mais gerais das figuras. A Geometria de Euclides, além de se ocupar com a igualdade de figuras, ocupa-se com a semelhança. A homotetia é a transformação que permite obter, de uma figura, outra que lhe é semelhante. O grupo fundamental da Geometria Euclidiana é o conjunto dos deslocamentos, das homotetias e das semelhanças. A Geometria Euclidiana tem por base o célebre postulado das paralelas, e sua métrica tem como base o Teorema de Pitágoras. O postulado das paralelas aparece no primeiro livro dos Elementos de Euclides, cujo enunciado é o seguinte: "por um ponto exterior a uma reta passa sempre uma paralela a essa, e uma só". Os matemáticos tiveram sempre o pressentimento que essa proposição não era evidente e, por isso, não deveria ser uma axioma, no sentido de Euclides, ou então seria passível de demonstração, a partir de outras proposições fundamentais. No entanto, as tentativas de demonstrações falharam.

Segundo Tahan (2006), a Geometria existe por toda parte[1]. Procure observar as formas regulares e perfeitas que muitos corpos apresentam. As flores, as folhas e incontáveis animais revelam simetrias admiráveis que nos deslumbram o espírito. A Geometria, frise-se, existe por toda parte. No Sol, na folha da tamareira, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar e até num pequenino grão de areia. Há, enfim, uma infinidade de formas geométricas espalhadas pela Natureza. Um corvo, a voar lentamente pelo céu, descreve, com a mancha negra do seu corpo, figuras admiráveis; o sangue que circula nas veias do camelo não foge aos rigorosos princípios geométricos[2]; a pedra que se atira no chacal importuno desenha no ar uma curva perfeita[3]! A abelha constrói seus alvéolos com a forma de prismas hexagonais, e adota essa forma geométrica, para obter a sua casa com a maior economia possível de material. Assim, a respeito da Geometria, é preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la. O beduíno rude vê as formas geométricas, mas não as entende; o sunita[4] entende-as, mas não as admira; o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e admira a Ordem e a harmonia! Deus foi o grande geômetra: geometrizou a Terra e o Céu.[5]

[1] O asserto é atribuído a Platão, filósofo grego do século IV a.C. Platão foi discípulo de Sócrates e mestre de Aristóteles.

[2] O camelo apresenta uma singularidade: é o único mamífero que tem os glóbulos do sangue com a forma elíptica. Os naturalistas assinalam essa forma dos glóbulos como característica das aves e dos répteis.

[3] Essa curva é a parábola. É a curva descrita pelo jato d'água de um repuxo.

[4] Indivíduo de uma das seitas muçulmanas. Adepto da ortodoxia da "Sunnat". Foi, em geral, contrário a qualquer manifestação de arte.(nota de Malba Tahan).

[5] A frase é de Platão. Foi parodiada pelo notável analista alemão Karl Gustav Jacobi (1832-1891): "Deus aritmetizou o Céu e a Terra." Sentia-se ali um ar de tranquilidade e repouso.

2 GEOMETRIA ESPACIAL

Objetiva-se, neste capítulo, analisar as orientações de como devem ser trabalhados os temas de Geometria no Ensino Médio, principalmente a Geometria Espacial de Posição e Métrica.

A Geometria auxilia no desenvolvimento do ser humano, ajudando-o na resolução de problemas do dia a dia, na melhor visualização e aproveitamento do espaço tridimensional, melhorando a habilidade de percepção visual e auxiliando no estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. “Se o conceito geométrico tem aspectos figurais e conceituais e os figurais são decorrentes de imagens visuais, a visualização pode ser considerada como uma habilidade espacial necessária à formação desse conceito” (NACARATO, 2002).

Segundo Soares (2009), a escolha de ensinar Geometria Espacial justifica-se pela necessidade de verificar, na prática, aplicações para os conteúdos trabalhados em sala de aula. Geometria é um campo cheio de possibilidades de interpretações, muitas vezes vinculadas à realidade do aluno.

Por que ensinar Geometria? Qual a importância em aprender Geometria? Talvez a resposta mais plausível seja: a Geometria está em toda parte, visto que lidamos no nosso cotidiano com ideias de paralelismo, de congruência, de semelhança, de simetria, de área, de volume, dentre muitas outras. É claro que os aspectos utilitários da Geometria são importantes, mas, para Fonseca (2001),

> [...] é possível e desejável, todavia, que o argumento da utilização da Geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar, permita e desencadeie o reconhecimento de que sua importância ultrapasse esse seu uso imediato para se ligar a aspectos mais formativos.

Muitos autores, dentre os quais Pavanello (1995), consideram a Geometria como sendo o ramo da Matemática mais adequado para o desenvolvimento de capacidades intelectuais, tais como a percepção espacial, a criatividade, o raciocínio hipotético-dedutivo.

2.1 ORIENTAÇÕES CURRICULARES DO ENSINO MÉDIO

A Matemática, de maneira geral, ensinada na escola deve proporcionar aos educandos inúmeras alternativas, que não sejam somente abstração de conceitos e fórmulas. No caso específico da Geometria Espacial, isso também deve ocorrer de maneira que o aluno possa perceber a relação existente entre o que ele estiver estudando na escola e o mundo real, de modo que, o que ele estiver aprendendo passa a ter mais significado, conforme podemos evidenciar nas sugestões para os professores contidas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006).

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006), os conteúdos a serem trabalhados no ensino médio, parti-se do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos..

Segundo OCEM (BRASIL, 2006), o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Em relação às grandezas geométricas, OCEM (BRASIL, 2006), relata que, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores, como área, perímetro e volumes. Nessa fase, o aluno já apresenta as condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas, por exemplo, a área do círculo.

2.2 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL, SEGUNDO ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Ao iniciar o estudo da Geometria Espacial, é viável fazer um breve resumo da Geometria Plana, principalmente no que diz respeito ao cálculo de área e perímetro das principais figuras. Esse estudo inicial se divide em duas partes: primeira, com a apresentação dos conceitos primitivos da Geometria Espacial, o reconhecimento posicional desses entes geométricos; segunda, com a visualização das diferentes formas espaciais.

Nesta seção, será realizada uma breve análise dos seguintes livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, indicados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD):

"Matemática: Ensino Médio", de Katia Stocco e Maria Ignez Diniz (Editora Saraiva); "Matemática Paiva", de Manoel Paiva (Editora Moderna); "Matemática: Ciências e Aplicações", de Gelson Iezzi *et al* (Editora Saraiva) e "Matemática: Contextos e Aplicações", de Luiz Roberto Dante (Editora Ática).

De acordo com Smole (2010), o pensamento espacial inclui a habilidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais – para girar e virar coisas em sua mente. Isso inclui um confronto com as descrições geométricas de objetos e suas posições. Pessoas com senso espacial apreciam formas geométricas na arte, na natureza e na arquitetura. Elas são capazes de usar as ideias geométricas para descrever e analisar o mundo em que vivem. Ainda segundo Smole (2010), o pensamento espacial se desenvolve também relacionando propostas de trabalho com Geometria feitas nas aulas de Matemática e envolve conhecimentos ligados a espaço e forma. Em Geometria, Smole (2010), na sua abordagem dos conteúdos, não foca a memorização de um conjunto de postulados e demonstrações, e sim, busca desenvolver habilidades de visualização espacial e indicar como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos. O tratamento escolhido para a Geometria Espacial não é o formal. "Não nos deteremos na Geometria Dedutiva, com seus postulados e teoremas. Essa opção foi feita com base nos estudos sobre o desenvolvimento do pensar geométrico que enfatiza a necessidade da análise das propriedades geométricas das figuras antes de exigir a compreensão das deduções dos teoremas. Por isso, as propriedades de pertencimento, concorrência, paralelismo e outras da Geometria de Posição serão apresentadas empiricamente, com apoio de modelos como representações de figuras espaciais."

Para Paiva (2009), "o aluno do Ensino Médio pode entender três estágios do pensamento científico: concreto, concreto-abstrato e abstrato, considerando-se a abstração como o pensamento sobre um objeto ausente, que pode existir completamente ou não."

Em seguida, ele apresenta o estágio concreto, com uma atividade relacionando um paralelepípedo reto retângulo com um cubinho de unidade "u" e verificando quantos cubinhos cabem no paralelepípedo. Depois, ele mostra o estágio concreto-abstrato, por meio de outra atividade, para calcular o volume de uma caixa, onde a mesma apresenta uma camada no fundo preenchida com vários cubinhos. Por fim, no estágio abstrato, propõe-se uma atividade para calcular o volume de uma caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo de dimensões pré determinadas, onde a resolução desse problema exige a abstração dos objetos concretos disponíveis nos estágios anteriores.

Primeiramente Iezzi *et al* (2010) propõe que o professor aprofunde o conteúdo de áreas de figuras planas, tema o qual já foi trabalhado em ciclos anteriores, lembra ainda que o cálculo dessas figuras planas será amplamente usado na Geometria Métrica Espacial. Iezzi *et al* (2010) sugeri que ao estudar Geometria Espacial de Posição se faça um trabalho informal e intuitivo ao invés de apresentar uma teoria baseada em postulados, proposições, teoremas e demonstrações. No estudo dos sólidos geométricos, os autores evidenciam que os professores devam dar importância a resolução de problemas voltados para o cotidiano, necessário para confecção de duas embalagens diferentes (por exemplo, na forma de prisma e na forma cilíndrica), bem como de seus volumes e respectivos preços. Eles também, destacam para não transfomarem as aulas de Geometria em um grande formulário para os alunos decorarem. Primam, que essas fórmulas, podem ser facilmente construídas, através da planificação dos sólidos geométricos. De acordo com Iezzi *et al* (2010), o princípio de Cavalieri ajuda na obtenção das expressões dos volumes de outros sólidos. É importante também lembrar a possibilidade de o professor realizar com os alunos uma validação experimental da relação entre o volume de um prisma e e o volume de uma pirâmide: "basta considerar um prisma e uma pirâmide com bases equivalentes e mesma altura. Em seguida, enchemos completamente a pirâmide com água e despejamos o líquido no prisma. Será necessário encher a pirâmide mais duas vezes para completar totalmente o conteúdo do prisma. Mostra-se, assim, que o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma. É fundamental também que o docente comunique para os discentes que várias propriedades matemáticas cujas demonstrações só viriam a ser feitas séculos depois eram empiricamente conhecidas há muito tempo."

A sugestão de Dante (2013) é que o professor aprofunde alguns aspectos da Geometria Plana com o objetivo de preparar os alunos para o estudo da Geometria Espacial. Ele visa com isso, instigar os alunos a desenvolver estratégias para comparar as áreas das diferentes figuras planas. Dante (2013), aborda a Geometria Espacial de posição de maneira intuitiva, com o objetivo de ajudar a desenvolver habilidades relacionadas à Geometria Plana e Espacial.

Para o estudo de prismas e pirâmides Dante (2013), orienta a observar figuras presentes em nosso cotidiano, desde estruturas de prédios até os mais variados tipos de embalagens e objetos, destacando suas principais características e identificando seus vértices, faces e arestas. Na área da superfície desses sólidos, usa a planificação como ferramenta para auxiliar na identificação das mesmas.

No estudo dos corpos redondos Dante (2013), inicia com o cilindro, identificando elementos como base, superfície lateral, eixos, geratrizes e destaca o cilindro equilátero, em muitas aplicações e exercícios, usa a planificação para auxiliar, as determinações de áreas lateral, total e das bases, para o cone usa o mesmo procedimento adotado no cilindro, tomando o cuidado de destacar a geratriz, a secção meridiana do cone e a definição de cone equilátero. Por fim, o estudo da esfera, cuja estrutura leva às mais diversas formas presentes na natureza como frutas, corpos celestes, entre outros objetos, por exemplo, uma bola de futebol. Destacando os principais elementos como raio, centro e diâmetro e definindo também a área de sua superfície.

O ensino da Geometria atualmente, deve ser feito de forma contextualizado, onde significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre a geometria e o mundo real. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas.

2.3 O USO DA INFORMÁTICA NO ENSINO DA GEOMETRIA

Hoje já não há duvidas em relação a necessidade do uso de novas tecnologias em sala de aula. O computador, pelas suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micro mundos, é o instrumento mais poderoso que atualmente dispõem os educadores matemáticos, principalmente os da área de geometria, para proporcionar este tipo de experiência aos seus alunos.

“É importante destacar a utilização de recursos digitais, como por exemplo os softwares relacionados à geometria, não prescinde da necessidade de colocar o aluno como sujeito de seu processo de aprendizagem, isto é, em procedimentos de investigação de modo que de fato ocorram atos criadores de cohecimento. É o professor em sala de aula quem pode observar no aluno indicativos que vão além das possibilidades virtuais de interação.”(DANTE, 2013)

As vantagens e prejuízos dos recursos digitais, no ensino de geometria, são causados pelo uso que se faz deles, ou seja, deve-se evitar a noção ilusória de que a simples presença do recurso digital garante melhores resultados de aprendizagem. Em contrapartida, o seu uso planejado e apropriado tem se mostrado eficiente em melhorar o ensino de geometria em vários aspectos.

Segundo Cano (2001), software educativo é “[...] um conjunto de recursos informáticos projetados com a intenção de serem usados em contextos de ensino e de aprendizagem”.

Via de regra, as escolas dispõem de pouca verba para a aquisição desses recursos didáticos. Assim, os softwares gratuitos podem ser uma boa alternativa para os professores como auxílio nas práticas docentes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste trabalho, serão relacionados os objetos espaciais presentes em nosso cotidiano com os conceitos teóricos adotados na Geometria Espacial euclidiana. Para tanto, será lançada mão das figuras geométricas mais conhecidas dos cursos de Geometria Espacial, que muitos autores chamam de sólidos geométricos.

Segundo Iezzi *et al* (2010), quando examinamos as formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos observado sólidos geométricos. Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos: *poliedros*, que são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.), e *corpos redondos*, que são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada.

Portanto, neste trabalho serão estudados os seguintes sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

3.1 PRISMA

3.1.1 Fatos históricos do prisma

Textos históricos mostram que o prisma é uma figura geométrica conhecida desde antes de 2000 a.C., pois, segundo Eves (2011), os estudiosos da época já se mostram familiarizados com o volume do paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, com o volume do prisma reto de base trapezoidal.

Estudos produzidos historicamente mostram que diversos estudiosos dedicaram-se ao estudo do prisma. Dentre esses estudiosos, pode-se destacar Platão, Demócrito e Arquimedes.

Platão, que viveu no IV século a.C., mostrou, dentre os seus estudos geométricos, interesse pelo estudo do cubo, quando estudou os poliedros regulares. Ele associava cada poliedro com um dos elementos naturais, sendo que o cubo era associado com o elemento terra, enquanto Demócrito comparou o volume do prisma com o volume da pirâmide, e Arquimedes (287 – 212 a.C.), por sua vez, definiu os sólidos arquimedianos.

Baseados nesses e em outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo do prisma com objetivos diversos. Neste trabalho, será abordado o conceito de prisma segundo alguns autores contemporâneos.

3.1.2 Conceito geométrico do prisma

Foi feita uma pesquisa em livros didáticos de Matemática em uso no Ensino Médio, da qual se reproduz algumas definições de prisma, listadas abaixo:

1. "Sejam dois planos paralelos distintos α e β, uma reta r secante a esses planos e um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em α. Consideremos todos os segmentos de retas paralelos à r, de modo que cada um deles tem um extremo pertencente a um polígono e outro extremo pertencente a β. A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado *prisma*". (PAIVA, 2009)

2. "Consideremos dois planos α e β, distintos e paralelos entre si, um polígono convexo P, contido em α, e uma reta r que intersecta α e β nos pontos X e Y, respectivamente. Por todos os pontos de P, tracemos paralelas à r [...] os pontos de interseção dessas retas com α e β determinam segmentos conguentes ao segmento XY. A reunião de todos os segmentos assim obtidos é um sólido chamado *prisma*". (IEZZI, 2010)

3. "Sejam α e β dois planos paralelos, R uma superfície poligonal contida em α e s uma reta que intersecta α. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em R e a outra em β, paralelos à s, é denominada *prisma*". (SMOLE; DINIZ, 2010)

Assim, de acordo com essas definições, concluímos que o *prisma* é um poliedro que se constitui de duas faces poligonais idênticas e paralelas entre si e, ainda, circundada por polígonos quadriláteros, tanto quanto o número de lados das faces poligonais idênticas.

3.1.3 Elementos do prisma

Com base na definição adotada neste trabalho, pode-se destacar os seguintes elementos do prisma (observe a Figura 1):

- *Bases* (b): são as duas superfícies poligonais paralelas que caracteriza o prisma;
- *Altura* (h): é a distância entre os planos que contém as bases;
- *Faces laterais* (F_l): são todas as superfícies (paralelogramos) que contornam as bases do prisma;
- *Superfície lateral*: é a união de todos os paralelogramos que formam as faces laterais, cuja medida chama-se área lateral do prisma(A_l);
- *Superfície das bases*: é a união das duas bases, cuja medida chama-se área das bases do prisma (A_b);
- *Superfície total*: é a união da superfície lateral com a superfície das bases, cuja medida chama-se área total do prisma (A_t);

- *Vértices* (v): são pontos de interseção das três faces, ou seja, duas faces laterais e a face de uma das bases;
- *Arestas* (a): são os segmentos de reta comum entre duas faces.

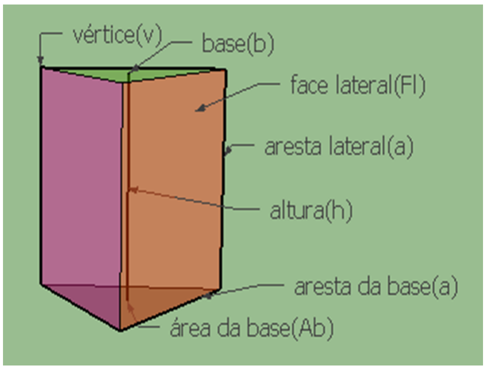


Figura 1 – Elementos do prisma
Fonte: Elaboração própria

3.1.4 Classificação dos prismas

Um prisma pode ser classificado de acordo com o polígono que constitui a sua base e a sua inclinação.

De acordo com a base do prisma, tem-se: se a base é um triângulo, o prisma é triangular; se a base é um quadrilátero, o prisma é quadrangular; se a base é um hexágono, o prisma é hexagonal, e assim por diante.Veja alguns exemplos, de acordo com a Figura 2.

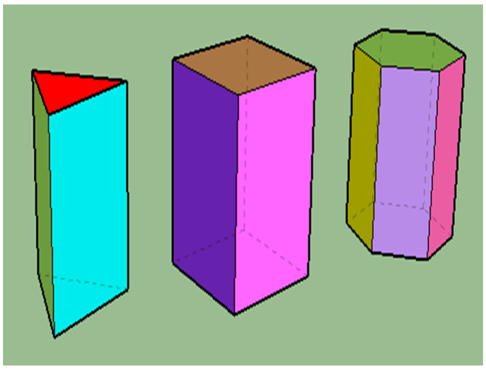


Figura 2 – Prismas triangular, quadrangular e hexagonal
Fonte: Elaboração própria

Quanto à inclinação, um prisma é classificado de duas maneiras: *prisma reto* – as arestas laterais são perpendiculares aos planos que contêm as bases; *prisma oblíquo* – as arestas laterais não são perpendiculares aos planos que contêm as bases, conforme a Figura 3.

Neste trabalho, será dada ênfase apenas aos prismas retos.

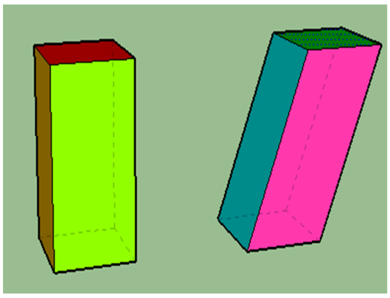


Figura 3 – Prismas reto e oblíquo.
Fonte: Elaboração própria

3.1.5 Prisma regular

Um prisma reto é denominado *regular* se o polígono da sua base é regular, ou seja, todos os seus lados ou arestas das bases são congruentes.

3.1.6 Casos especiais de prismas quadrangulares

Quando a base do prisma é um quadrilátero, ele pode ser denominado *cubo* ou *paralelepípedo*. É denominado *paralelepípedo* o prisma cujas bases são paralelogramos (em particular, se esse paralelepípedo é reto, ele pode ser denominado *paralelepípedo retângulo* ou *ortoedro*). Na Figura 4, tem-se um exemplo de ortoedro.

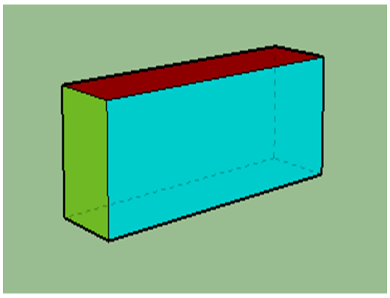


Figura 4 – Paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaboração própria

O cubo (também conhecido como hexaedro regular) é um caso particular do paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes entre si. Na Figura 5, tem-se um exemplo de hexaedro regular.

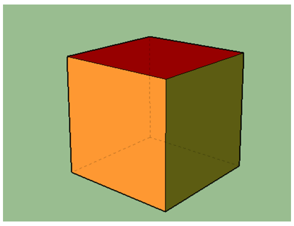


Figura 5 – Cubo
Fonte: Elaboração própria

3.1.7 Área da superfície de um prisma

Como mencionado anteriormente, ao apresentar os elementos do prisma, a superfície total corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a área total do prisma (A_t).

Assim, a área da superfície de um prisma corresponde à área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = 2A_b + A_l$.

Veja a representação de um prisma triangular regular e sua planificação, na Figura 6:

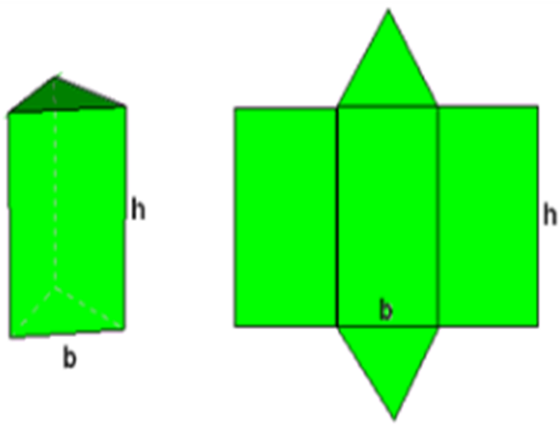


Figura 6 – Planificação do prisma triangular
Fonte: Elaboração própria

3.1.8 Medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo

Considere um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são: comprimento (a), largura(b) e altura(c), conforme a Figura 7. Sendo d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente, tem-se:

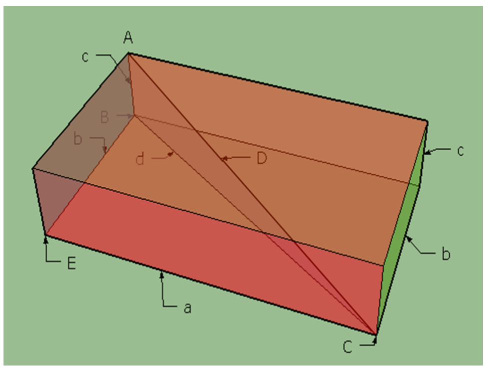


Figura 7 – Paralelepípedo reto-retângulo
Fonte: Elaboração própria

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos ABC e BCE, representados na Figura 8, tem-se:

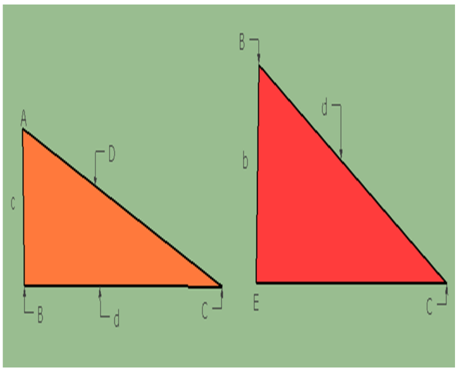


Figura 8 – Triângulos retângulos
Fonte: Elaboração própria

$D^2 = d^2 + c^2$ (I) e $d^2 = a^2 + b^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem:

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Portanto:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

3.1.9 Área da superfície de um paralelepípedo retângulo

Considere um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são: comprimento (a), largura(b) e altura(c), conforme a Figura 9.

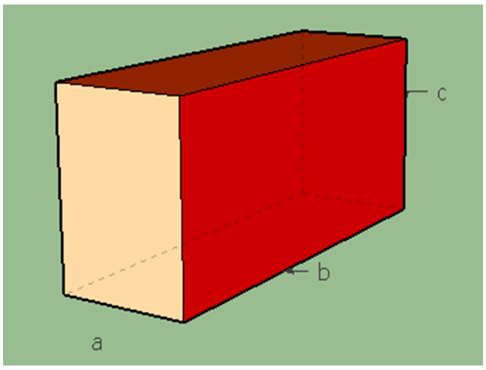


Figura 9 – Paralelepípedo reto-retângulo
Fonte: Elaboração própria

Tem-se, dentre as faces do paralelepípedo, dois retângulos de área ab, dois de área ac e dois de área bc. A área total A_t desse paralelepípedo é, pois, a soma de suas seis faces:

$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$

Portanto:

$A_t = 2(ab + ac + bc)$

3.1.10 Volume de um paralelepípedo retângulo

Dentre as unidades de medida de volume mais utilizadas estão o centímetro cúbico (cm^3), o decímetro cúbico (dm^3) e o metro cúbico (m^3). Um centímetro cúbico corresponde ao volume de um cubo com 1 cm de aresta; um decímetro cúbico, ao volume de um cubo com 1 dm de aresta; e um metro cúbico, ao volume de um cubo com 1 m de aresta.

O paralelepípedo (Figura 10) foi construído com cubos de 1 cm de aresta, isto é, cubos com 1 cm^3 de volume. O volume V desse paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos com os quais ele é formado. Para calcular o número de cubos e, consequentemente, o volume do paralelepípedo, multiplica-se a quantidade de cubos em cada camada pelo número de camadas. Dessa forma, tem-se $V = 6.3.2 = 36cm^3$. Pode-se calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo utilizando a fórmula: $V = abc$, em que a é o comprimento, b é a largura e c é a altura, de acordo com a Figura 9. A área da base do paralelepípedo é dada por A_b = ab. Dessa maneira, também pode-se escrever a seguinte fórmula para o volume: $V = A_b h$.

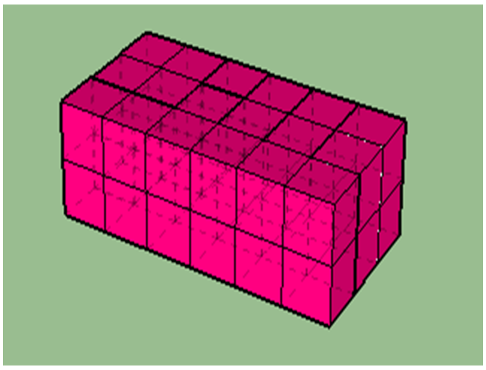


Figura 10 – Paralelepípedo construídos com cubos de 1 cm de aresta.
Fonte: Elaboração própria

3.1.11 Medida da diagonal, área total e volume de um cubo

O cubo (hexaedro regular) é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm todas a mesma medida a, conforme Figura 11. Para calcular a medida D de uma diagonal do cubo, a área total A_T e o volume V, basta aplicar as fórmulas correspondentes para essas mesmas grandezas do paralelepípedo reto-retângulo, considerando as três dimensões iguais a a, isto é:

$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$

$A_T = 2(a.a + a.a + a.a) \Rightarrow A_T = 6a^2$

$V = a.a.a \Rightarrow V = a^3$

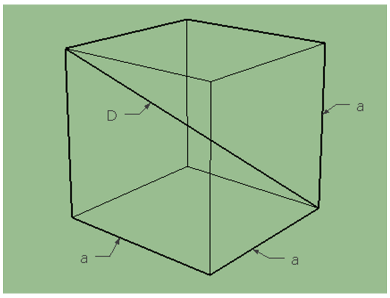


Figura 11 – Cubo de aresta a
Fonte: Elaboração própria

3.1.12 Cálculo do volume de um prisma

Considere os sólidos S_1 e S_2 (Figura 12), cuja altura h é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α, e o plano β, paralelo a α , que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, tem-se que o volume de S_1 é igual ao volume de S_2, ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.

O exemplo acima é uma aplicação do Princípio de Cavalieri, que pode ser enunciado (como axioma) do seguinte modo:

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

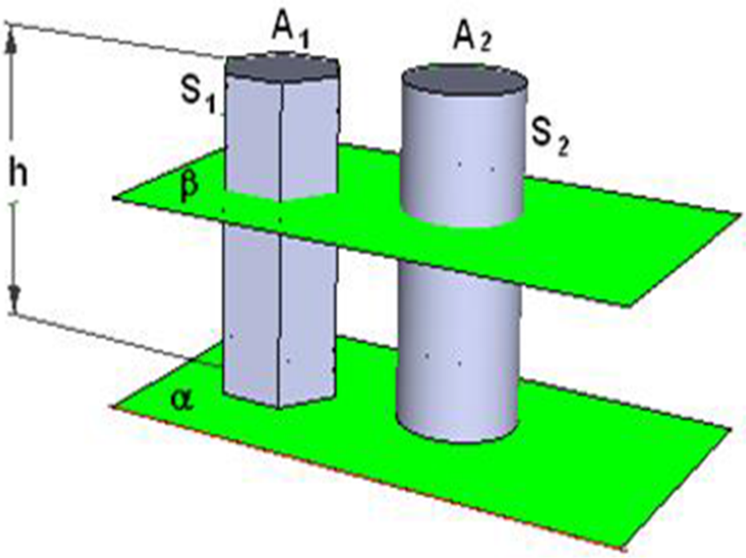


Figura 12 – Prisma hexagonal e cilindro de mesma altura e mesma área da base.
Fonte: Elaboração própria

Agora, utilizando o Princípio de Cavalieri, deseja-se obter o volume de um prisma qualquer. Para isso, considere um paralelepípedo reto retângulo (S_1) e um prisma qualquer (S_2), apoiados em um plano horizontal α, ambos de altura h e de bases com áreas. Todo plano β , paralelo a α , determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas iguais (Figura 13). Então, pelo Princípio de Cavalieri, tem-se que os dois sólidos possuem o mesmo volume: $V_{S_1} = V_{S_2}$. Como o volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado por $V_{S_1} = A_b h$, segue que o volume do prisma também é dado por $V_{S_2} = A_b h$.

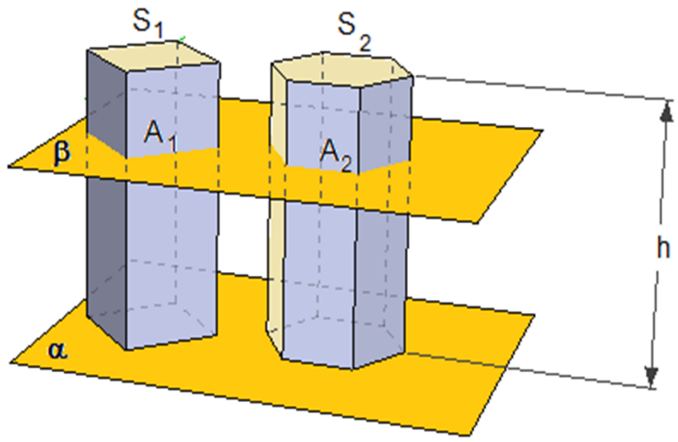


Figura 13 – Paralelepípedo reto retângulo e um prisma hexagonal de mesma área da base e mesma altura.

Fonte: Elaboração própria

3.2 PIRÂMIDE

3.2.1 Fatos históricos da pirâmide

Pode-se perceber, por meio das pirâmides do Egito, que o estudo da pirâmide tem despertado interesse há milhares de anos. Pode-se observar isso por meio, por exemplo, da grande pirâmide de Gizé, construída por volta de 2600 a.C., em que "o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a 1/14000 e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excede a 1/27000" (EVES, 2011), mostrando, assim, o conhecimento e a capacidade de engenharia empreendido na obra.

Para uma análise mais aprofundada sobre a engenharia da época, é preciso considerar que os estudiosos babilônicos tinham um conhecimento matemático superior aos dos egípcios no mesmo período, ao mesmo tempo em que a matemática romana era bastante inferior à da Grécia naquela mesma época.

Um dado que torna clara a inferioridade da matemática egípcia é o fato de que esta não distinguia claramente medidas exatas de medidas aproximadas. Um exemplo disso é que "o volume de um tronco de pirâmide era achado às vezes calculando a média aritmética das bases e multiplicando o resultado pela altura." (BOYER, 1974)

Em contrapartida, tem-se o papiro de Moscou, que traz uma fórmula para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada que pode ser usada até os dias atuais.

Baseados nesses e em outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo da pirâmide com objetivos diversos. Neste trabalho, será abordado o conceito de pirâmide segundo alguns autores contemporâneos.

3.2.2 Conceito geométrico da pirâmide

Foi feita uma pesquisa em livros didáticos de Matemática em uso no Ensino Médio, da qual se reproduz alguns definições de pirâmide, listadas abaixo:

1. "Sejam um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$, contido num plano α , e um ponto V, não pertencente a α . Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertecente ao polígono e o outro extremo V. A reunião de todos os segmentos de reta é um poliedro chamado *pirâmide*". (PAIVA, 2009)

2. "Dados um polígono contido num plano α e um ponto V, não pertencente a α, tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em V e a outra num ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado *pirâmide*". (IEZZI, 2010)

3. "Sejam uma superfície poligonal R contida num plano α e um ponto V fora de α. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em R é denominada *pirâmide*". (SMOLE; DINIZ, 2010)

Assim, de acordo com essas definições, concluímos que a *pirâmide* é um poliedro que se constitui de segmentos de reta que ligam cada ponto do contorno do polígono (de n-lados com $n \geq 3$) de sua base em um ponto, chamado de vértice e representado por V, que não está no plano desta base.

Com base nessa definição pode-se destacar alguns tipos de pirâmides, conforme Figura 14:

3.2.3 Elementos da pirâmide

Também pode-se destacar os seguintes elementos da pirâmide, conforme Figura 15:

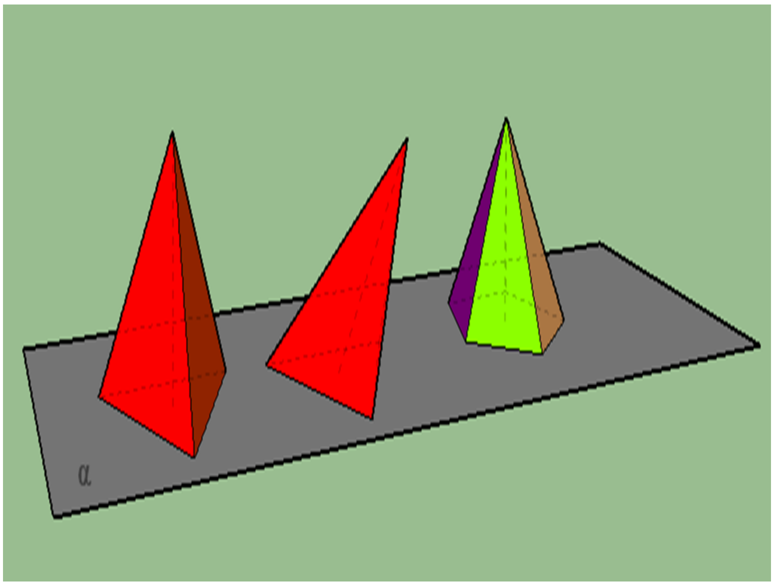


Figura 14 – Pirâmide triangular reta, pirâmide triangular oblíqua e pirâmide pentagonal reta.
Fonte: Elaboração própria

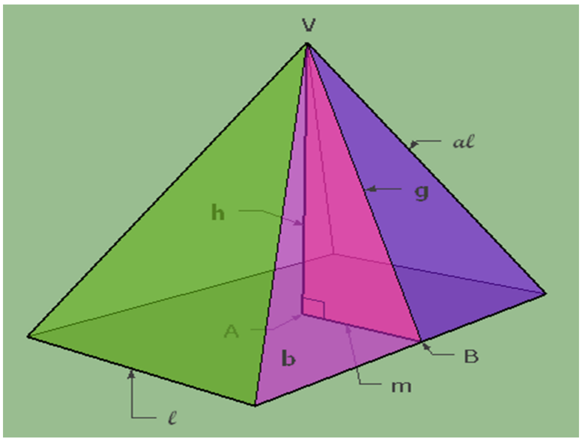


Figura 15 – Elementos de uma pirâmide
Fonte: Elaboração própria

• *Aresta lateral* (al): são todos os segmentos de reta que ligam o vértice da base com o vértice da pirâmide;

• *Aresta da base* (l): são os lados do polígono que forma a base da pirâmide;

• *Vértice da pirâmide* (V): é o ponto, geralmente, denotado de V, em que todas as faces laterais se encontram;

• *Base* (b): é a região poligonal em que apóia a pirâmide;

• *Altura* (h): é a distância entre o vértice e o plano que contém a base;

• *Superfície lateral*: é a superfície obtida pela reunião de todos os segmentos que ligam o vértice e o contorno da região poligonal da base, cuja medida chama-se área lateral (A_l);

• *Superfície da base*: é a superfície da região poligonal que forma a base da pirâmide, cuja medida chama-se área da base (A_b);

• *Superfície total da pirâmide* (A_t): é a reunião da superfície lateral com a superfície da base, portanto a área total da pirâmide é a soma entre a área lateral e a área da base;

• *Apótema da pirâmide* (g): é a altura do triângulo que forma cada face lateral.

• *Apótema da base* (m): é o segmento de reta que partindo do centro geométrico da base é perpendicular a um dos seus lados.

3.2.4 Classificação das pirâmides

Uma pirâmide pode ser classificada de acordo com o polígono que contém a sua base e a sua inclinação.

De acordo com o polígono que contém a base de uma pirâmide, tem-se: se a base é um triângulo, a pirâmide é triangular; se a base é um quadrilátero, a pirâmide é quadrangular; e assim por diante, conforme a Figura 16.

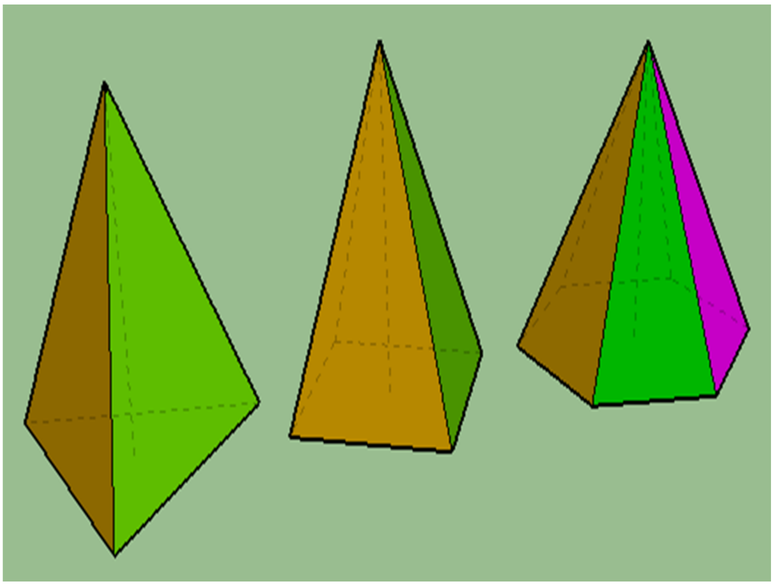


Figura 16 – Pirâmide triangular, pirâmide quadrangular e pirâmide hexagonal
Fonte: Elaboração própria

Quanto à inclinação, uma pirâmide pode ser classificada de duas maneiras: *pirâmide reta* – a projeção do vértice coincide com o ponto central do polígono que constiui a base; *pirâmide oblíqua* – a projeção do vértice não coincide com o ponto central do polígono que constitui a base. Observe a Figura 17.

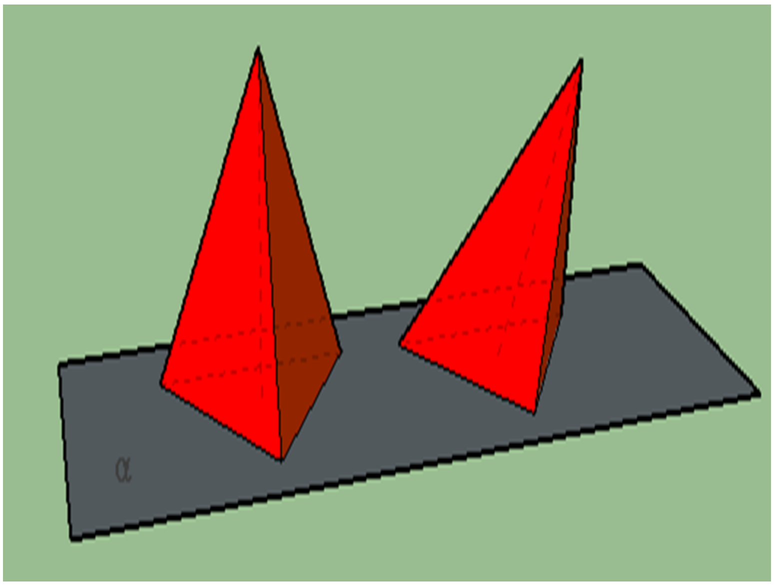


Figura 17 – Pirâmide triangular reta e pirâmide triangular oblíqua.
Fonte: Elaboração própria

3.2.5 Área da superfície de uma pirâmide

Como mencionado anteriormente, ao apresentar os elementos da pirâmide, a superfície total corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a área total da pirâmide (A_t).

Assim, a área da superfície de uma pirâmide corresponde à área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_b + A_l$.

Veja a representação de uma pirâmide quadrangular regular e sua planificação, na Figura 18:

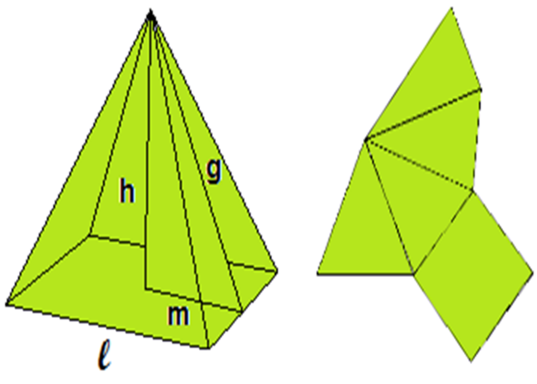


Figura 18 – Pirâmide regular e sua planificação.
Fonte: Elaboração própria

Em uma pirâmide reta, se a base é um polígono regular, diz-se que ela é uma *pirâmide regular* (Figura 18). Nesse caso, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Além disso, o apótema do polígono da base é o apótema da base (m), e a altura de uma face lateral é o apótema da pirâmide (g). Destacando o triângulo retângulo dessa figura, verifica-se o Teorema de Pitágoras, de acordo com a Figura 19, na qual:

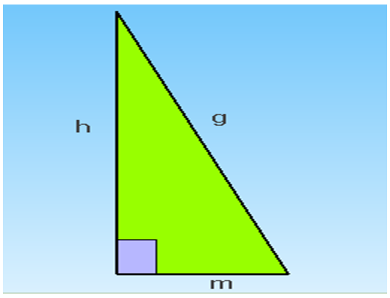


Figura 19 – Triângulo retângulo destacando a altura da pirâmide(h), apótema da base (m) e apótema da pirâmide (g).
Fonte: Elaboração própria

$$g^2 = h^2 + m^2$$

3.2.6 Cálculo do volume de uma pirâmide

Pode-se obter o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, considere um prisma de base triangular e o decomponha em três pirâmides triangulares, conforme Figura 20.

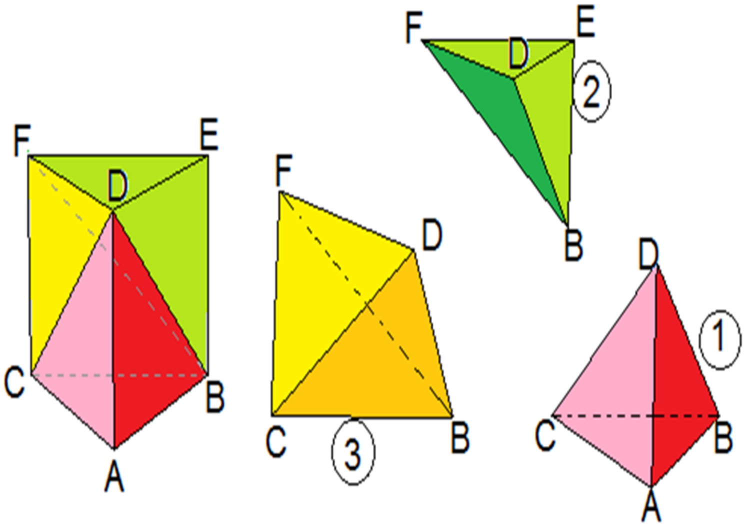


Figura 20 – Prisma sendo decomposto em três pirâmides.
Fonte: Elaboração própria

Pode-se notar que as pirâmides 1 e 2 possuem bases congruentes ($ABC \cong DEF$) e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides 1 e 2 possuem o mesmo volume.

Observe que as bases das pirâmides 2 e 3 também são congruentes ($BEF \cong BFC$) e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto D ao paralelogramo $BEFC$. Assim, as pirâmides 1, 2 e 3 possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$. Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$, e considerando que $V_1 = V_2 = V_3 = V$, tem-se:

$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \dfrac{V_{prisma}}{3}$

Sabe-se que o volume do prisma é dado por $V_{prisma} = A_b h$. Assim:

$V = \dfrac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow V = \dfrac{A_b h}{3}$.

Com essa fórmula, é possível calcular o volume de uma pirâmide qualquer, não somente de pirâmides triangulares. Isso pode ser garantido pelo Princípio de Cavalieri, visto que pirâmides com áreas das bases iguais e de mesma altura possuem volumes iguais.

3.3 CILINDRO

3.3.1 Fatos históricos do cilindro

A maior quantidade de registros que se conhece da matemática antiga foi escrita em papiros, dentre os quais se destaca o papiro de Moscou, que consiste em uma tira de 5,5 metros de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas. Um desses problemas faz o cálculo do volume do cilindro reto determinando como sendo o produto da área da base pelo comprimento da altura. Essa relação é a que utilizamos até nossos dias.(EVES, 2011)

No trabalho remanescente de Arquimedes sobre esfera e cilindro, encontra-se uma relação entre a área da superfície esférica com a superfície lateral de um cilindro, assim como, uma relação do volume da esfera com o volume do cilindro. Arquimedes também defendeu a ideia de Eudoxo que relacionava o volume do cilindro com o volume do cone de mesma base e mesma altura.

Arquimedes, por ter descoberto e demonstrado a razão dos volumes do cilindro e da esfera, pediu para que sobre seu túmulo fosse esculpida uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro.

Portanto, deve-se a Arquimedes boa parte dos conhecimentos da Geometria Espacial que se estuda hoje.

3.3.2 Conceito geométrico do cilindro

Foi feita uma pesquisa em livros didáticos de Matemática em uso no Ensino Médio, da qual se reproduz algumas definições de cilindro, listadas abaixo:

1. “Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta r secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta paralelos à s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro pertencente a β. A reunião de todos os segmentos de reta é um sólido chamado *cilindro circular limitado* ou, simplismente, *cilindro*”. (PAIVA, 2009)

2. “Consideremos um círculo de centro O e raio r, em um plano α, e um segmentos de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intersecta α. Tomemos segmentos de retas paralelos e conguentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade num mesmo semiespaço dos determinados por α. A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado *cilindro circular* ou, simplismente, *cilindro*”. (IEZZI, 2010)

3. “Sejam α e β dois planos paralelos, C um círculo de centro O e de raio r, contido em α, e s uma reta concorrente com α. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos à s, com extremidade em C e a outra em β, é denominada *c*ilindro circular”. (SMOLE; DINIZ, 2010)

Assim, de acordo com essas definições, conclui-se que o *cilindro* é considerado o lugar geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma das extremidades na superfície de uma curva suave (base inferior) e a outra extremidade em uma superfície de uma segunda curva (base superior) congruente e contida num plano paralelo ao plano da primeira curva. Portanto, o cilindo será considerado como sendo uma superfície. Entretanto, quando for necessário considerar um sólido com o formato de cilindro, será usada a terminologia sólido cilíndrico.

Com base nessa definição pode-se destacar alguns tipos de cilindro, conforme a Figura 21.

Apesar de poderem ser definidos diversos tipos de cilindros, neste trabalho será dado destaque ao cilindro circular reto.

O cilindro circular reto pode ser construído por meio da rotação da superfície de um quadrilátero tendo como eixo um de seus lados.

Na Figura 22, pode-se observar um exemplo de cilindro circular reto proveniente da rotação de um quadrilátero. Observe que o quadrilátero (retângulo) gira em torno de um de seus lados que coincide com o eixo de rotação que gera o cilindro.

3.3.3 Elementos do cilindro

Com base na definição adotada neste trabalho pode-se destacar os seguintes elementos do cilindro, conforme Figura 23:

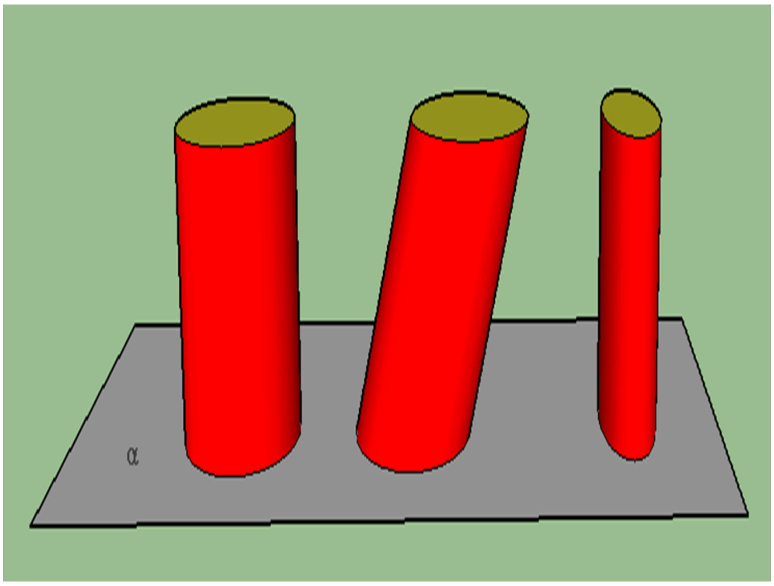


Figura 21 – Cilindro circular reto, cilindro circular oblíquo e cilindro de base qualquer.
Fonte: Elaboração própria

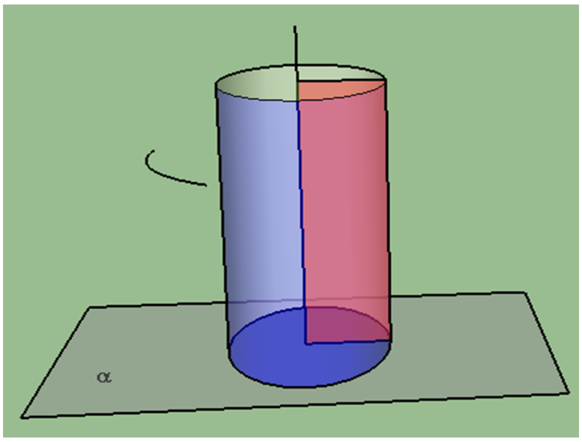


Figura 22 – Cilindro formado por rotação de um retângulo.
Fonte: Elaboração própria

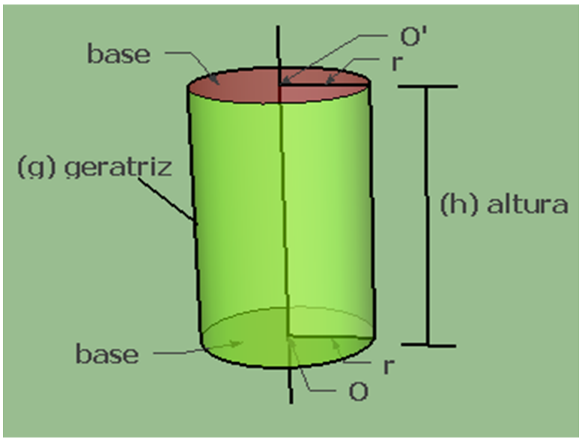


Figura 23 – Cilindro com seus elementos.
Fonte: Elaboração própria

- as *bases* são os círculos paralelos de raio r e centros O e O';
- as *geratrizes* são os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ extremidades nas circunferências das bases;
- o *eixo* é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$;
- a *altura* h é a distância entre os planos das bases;
- a *superfície lateral* é a reunião de todas as geratrizes.

Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, classifica-se como *cilindro oblíquo*. Já quando as geratrizes são perpendiculares às bases, classifica-se como *cilindro reto*, no qual tanto a base inferior quanto a base superior são circulares, o eixo de rotação é perpendicular ao plano que contém a sua base e a altura coincide com o comprimento da geratriz, isto é, o lado do retângulo que gerou o cilindro. (*Vide* Figura 21)

Denomina-se *seção meridiana* de um cilindro a região obtida na interseção do cilindro com um plano que contém seu eixo.

Quando a seção meridiana de um cilindro é um quadrado, ou seja, $2r = h$, o cilindro é denominado *cilindro equilátero*, conforme Figura 24.

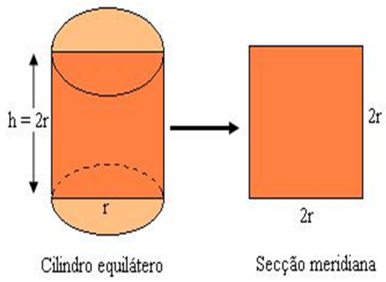


Figura 24 – Cilindro equilátero.
Fonte: Elaboração própria

3.3.4 Área da superfície de um cilindro reto

Em Geometria Espacial, é comum fazer a planificação de figuras para facilitar a visualização de suas partes, consequentemente, facilitar os cálculos, principalmente para descobrir a quantidade de material para fabricar um determinado objeto.

Assim, pode-se verificar, por meio da Figura 25, a planificação de um cilindro circular reto de raio r e altura h. Observe, também, que a planificação é formada de uma região retangular e dois círculos, sendo a região retangular a superfície lateral(A_l) do cilindro, e os círculos, as superfícies das bases (A_b).

As bases do cilindro (Figura 25) são círculos congruentes de raio r, e a superfície lateral corresponde a um retângulo de dimensões h e $2r$ (comprimento da circunferência

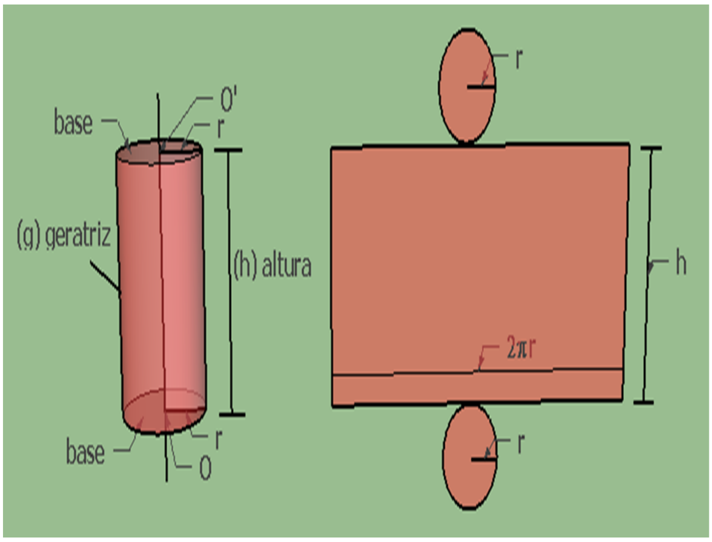


Figura 25 – Cilindro com seus elementos e sua planificação.
Fonte: Elaboração própria

da base). A partir dessas informações, pode-se calcular a área total(A_t) da superfície do cilindro.

- Área da base: $A_b = \pi r^2$.
- Área lateral: $A_l = 2\pi rh$.
- Área total da superfície: $A_t = 2A_b + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow A_t = 2\pi r(r+h)$.

3.3.5 Cálculo do volume do cilindro

Para estudar o volume do cilindro, utiliza-se o Princípio de Cavalieri. Para tanto, considere, inicialmente, um cilindro e um prisma com a mesma altura (h) e com bases de mesma área ($A_{b1} = A_{b2}$) contidas em um mesmo plano α (Figura 26). Qualquer plano β , paralelo a α, que secciona os sólidos, determina regiões de mesma área ($S_1 = S_2$).

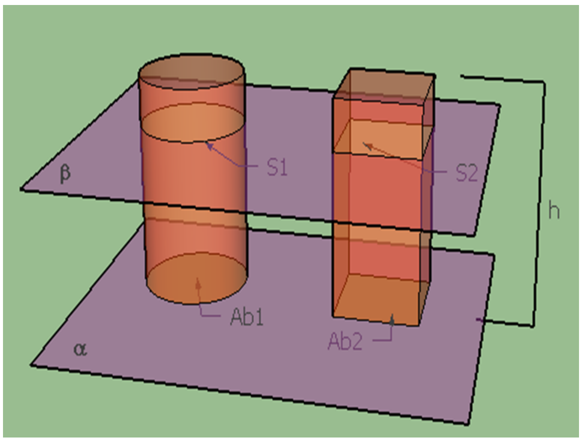


Figura 26 – Cilindro e prisma quadrangular.
Fonte: Elaboração própria

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes do cilindro e do prisma são iguais. Como o volume do prisma é dado por $V_p = A_b h$, tem-se que o volume do cilindro é dado por: $V = A_b h \Rightarrow V = \pi r^2 h$.

3.4 CONE

3.4.1 Fatos históricos do cone

Os relatos históricos mostram que os babilônicos calculavam o volume do tronco de cone, erradamente, como sendo o produto da altura pela semissoma das bases. Porém, esses mesmos relatos indicam que esse mesmo povo já se preocupava com o cone há mais de 2000 anos a.C.

Também encontram-se relatos tais como a métrica de Herão, que viveu, provavelmente, no primeiro século de nossa era. Esse material se resume em três livros que trazem os estudos geométricos de Herão. Dentre esses estudos, um é sobre a superfície do cone que, infelizmente, ficou escondido quase dois mil anos, sendo encontrado apenas no ano de 1896.

No caminho trilhado pelos geômetras de todas as épocas, também apresentavam momentos de confusão, por exemplo, o relato de Plutarco dizendo que Demócrito numa certa ocasião "[...] considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de seções planas paralelas à base [...]" (BOYER, 1974) isso não era verdade, mas "[...] se duas seções "adjacentes" fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro, não um cone". (BOYER, 1974),

Ainda, nessas trilhas, apresentaram defeitos, tais como medidas com aproximações bruscas feitas pelos egípcios. Por exemplo, para fazer o cálculo do volume do tronco de cone, somavam as áreas das bases, dividiam essa soma por dois, e o resultado multiplicavam pela altura do tronco.

Porém, foram muitos os acertos, como a descoberta da relação entre o cone e o cilindro de mesma base e mesma altura, descoberta esta que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo, juntamente com o método da exaustão.

Algumas generalizações importantes foram feitas, como a demonstração de Apolônio que mostra que para ser cone não necessariamente tem que ser reto, mas o cone poderia ter inclinações, ou seja, Apolônio demonstrou que o cone pode ser oblíquo ou até mesmo escaleno. Foi ele quem definiu o cone com o conceito que usamos até os dias de hoje, ou seja: "Se fizermos uma reta de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo". (BOYER,1974)

3.4.2 Conceito geométrico do cone

Foi feita uma pesquisa em livros didáticos de Matemática em uso no Ensino Médio, da qual se reproduz algumas definições de cone, listadas abaixo:

1. "Sejam um círculo C, de centro O, contido em um plano α , e um ponto V não pertencente a α . Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo C e o outro no ponto V. A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de *cone limitado* ou, simplismente, *cone circular*". (PAIVA, 2009)

2. "Considere um círculo de centro O e raio r, situado num plano α , e um ponto V fora de α. Chama-se *cone circular*, ou apenas *cone*, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo". (IEZZI, 2010)

3. "Sejam um círculo C, de centro O e raio r, contido num plano α , e um ponto V não pertencente a α . A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em C é denominada de *cone circular*". (SMOLE; DINIZ, 2010)

Assim, de acordo com essas definições, conclui-se que o *cone* é considerado o lugar geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade num ponto (denominado vértice, representado por V) e a outra extremidade em um ponto qualquer (pode ser chamado de P) de uma curva suave. Portanto, neste trabalho, o cone é definido como uma superfície e, quando for necessário falar do cone como sólido, será referido como o sólido cônico.

Com base nessa definição pode-se destacar alguns tipos de cone, conforme Figura 27:

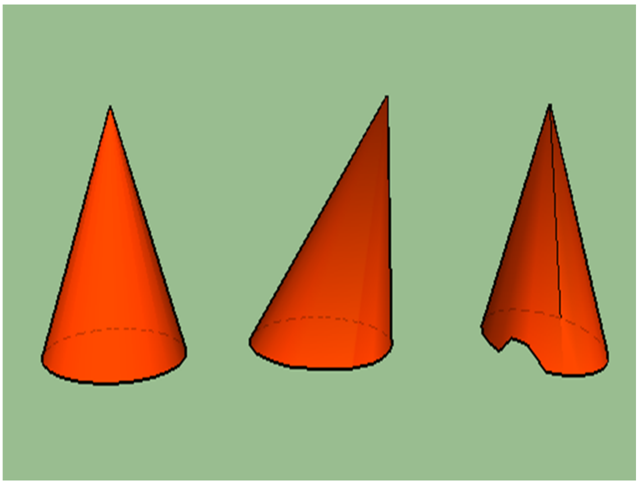


Figura 27 – Cone circular reto, cone circular oblíquo e cone de base qualquer.
Fonte: Elaboração própria

Apesar de poder definir diversos tipos de cone, neste trabalho será enfatizado o cone circular reto.

3.4.3 Elementos do cone

Com base na definição adotada por este trabalho podemos destacar os elementos do cone, conforme figura 28:

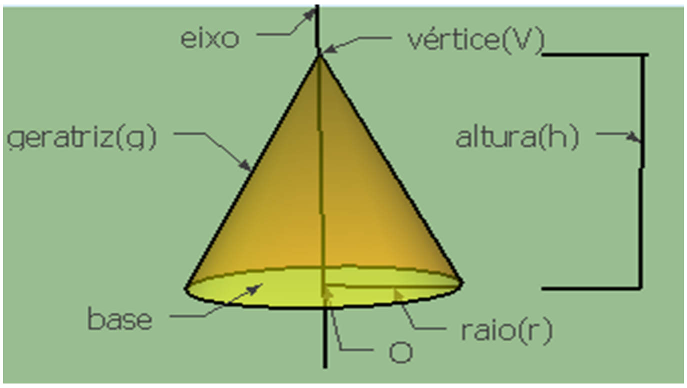


Figura 28 – Cone com seus elementos.
Fonte: Elaboração própria

- A *base* é o círculo de raio r e centro O.
- O *vértice* é o ponto V.
- As *geratrizes* são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base.
- O *eixo da reta* é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A *altura* h é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V.
- A *superfície lateral* é a reunião de todas as geratrizes.

Em um cone, a seção meridiana, obtida na interseção do cone com um plano que contém seu eixo, é um triângulo. Em um cone reto, a seção meridiana é um triângulo isósceles.

Quando a seção meridiana de um cone é um triângulo equilátero, ele é denominado cone equilátero, conforme figura 29. Nesse caso, $g = 2r$

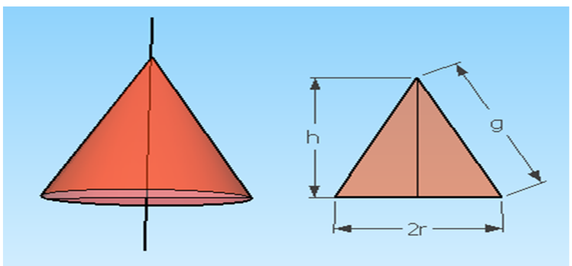


Figura 29 – Cone equilátero.
Fonte: Elaboração própria

3.4.4 Área da superfície de um cone

Observando o cone reto e sua respectiva planificação (Figura 30), é possível notar que a base do cone reto é um círculo de raio r e a superfície lateral corresponde a um setor circular de raio g e comprimento $2\pi r$. A partir dessas informações, pode-se calcular a área da superfície do cone.

- Área da base: $A_b = \pi r^2$.
- Área lateral:

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, pode-se determinar a área lateral por meio de uma regra de três, como a seguir.

Comprimento do arco	Área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_l

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_l} \Rightarrow A_l.g = r\pi g^2 \Rightarrow A_l = \pi r g$$

- Área total da superfície: $A_t = A_b + A_l = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow At = \pi r(r+g)$

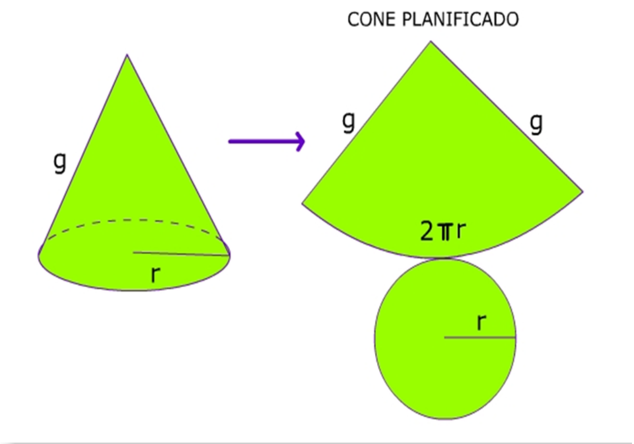


Figura 30 – Cone planificado.
Fonte: Elaboração própria

3.4.5 Cálculo do volume do cone

Assim como realizado no estudo do volume do cilindro, utiliza-se o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de um cone. Inicialmente, considere um cone e uma pirâmide com a mesma altura e com as bases de mesma área contidas em um plano (Figura 31). Qualquer plano β , paralelo a α , que seccione os sólidos determinará regiões de mesma área.

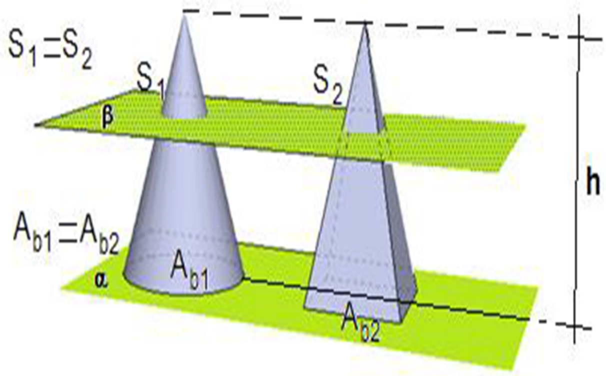


Figura 31 – Cone e pirâmide quadrangular.
Fonte: Elaboração própria

Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes do cone e o da pirâmide são iguais. Como o volume da pirâmide é dado por $V_p = \dfrac{A_b h}{3}$, tem-se que o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{A_b h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3.5 ESFERA

3.5.1 Fatos históricos da esfera

Muitos matemáticos dedicaram parte de suas vidas estudando e trabalhando com Geometria Espacial. Dentre eles, pode-se destacar Arquimedes, em seu tratado intitulado“Sobre a esfera e o cilindro” que consta de dois livros, no primeiro dos quais foram encontrados estudos sobre o cálculo da área de uma esfera e de uma calota esférica, bem como uma relação entre o volume da esfera e o volume do cilindro, enquanto o segundo livro consta de estudos sobre seções de esferas, isto é, se secionarmos uma esfera em duas partes, cada uma dessas partes são proporcionais entre si. Por outro lado, fatos históricos mostram que Arquimedes também chegou à conclusão de que entre os segmentos esféricos de bases cujas zonas esféricas de áreas são iguais, o de maior volume é o hemisfério.

Por muito tempo, acreditou-se que os egípcios sabiam calcular a área de um hemisfério. Entretanto, Arquimedes é considerado como sendo o primeiro a [...] “provar que a área da esfera é igual a quatro vezes a área de seu círculo máximo”. (BOYER, 1974)

Os hindus também aventuraram no estudo da esfera, mas como trabalhavam, geralmente, com a ideia de uma geometria mensurável e quase nunca faziam demonstrações, chegaram a relações imprecisas, como, por exemplo, o volume da esfera igual a $\pi^{3/2} r^3$ e, ainda, usavam para π os valores de 3 ou $\sqrt{10}$.

Assim como o volume da pirâmide, por volta do século seis de nossa era, o volume da esfera era calculado, erroneamente, como sendo a multiplicação da área do círculo maior pela raiz quadrada desse mesmo círculo.

A partir de Karl Friedrich Gauss, por volta do ano 1820, os geômetras começaram a estudar uma geometria pautada nas superfícies curvas. Dentre essas superfícies, a esfera, e, posteriormente, essa geometria foi chamada de geometria não-euclidiana, pois, aparentemente, contradizia a geometria de Euclides que até então era a única "verdadeira". Mas, apesar de Gauss não fazer publicações, rapidamente, Nikolai Ivanovich Lobachevsky e János Bolyai publicaram seus trabalhos a respeito dessa nova geometria.

A geometria não-euclidiana, atualmente, é estudada dividida em algumas partes, que são: a Geometria Fractal, a Geometria Projetiva, a Geometria Esférica e a Hiperbólica. Neste trabalho, a esse respeito, o que interessa é a Geometria Esférica, que foi estudada por Georg Friedrich Bernhard Riemann, a qual consiste em enxergar o plano como uma superfície esférica e a reta como um círculo máximo sobre a esfera. Foi exatamente esse estudo de Riemann que forneceu subsídio a Albert Einstein para escrever o artigo sobre a Teoria Geral da Relatividade.

3.5.2 Conceito geométrico da esfera

Foi feita uma pesquisa em livros didáticos de Matemática em uso no Ensino Médio, da qual se reproduz algumas definições de esfera, listadas abaixo:

1. "Consideremos um ponto O e uma medida R, com $R > 0$. Chama-se *esfera* de centro O e raio R o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O sejam menores ou iguais a R." (PAIVA, 2009)

2. "Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Denomina-se *esfera* de centro O e raio r o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r." (IEZZI, 2010)

3. "Sejam um ponto O e um segmento r, não nulo. *Superfície esférica* de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O são iguais a r. *Esfera* de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a O são menores ou iguais a r. Podemos também considerar: uma superfície esférica de centro O e raio r como a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência de raio r em torno de seu diâmetro; uma esfera de centro O e raio r como o sólido gerado pela rotação de um semicírculo de raio r em torno de seu diâmetro." (SMOLE; DINIZ, 2010).

4. "Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo r e um ponto C. Denomina-se *esfera* o conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r a partir do ponto C." (SOUZA, 2013)

Assim, observando essas definições, pode-se perceber que alguns autores definem a esfera como sendo uma superfície e outros definem como sendo um sólido geométrico.

Entretanto, neste trabalho, a esfera será definida como o lugar geométrico formado pela reunião de todos os pontos do espaço que estão equidistante (mesma distância) a um ponto chamado centro da esfera, que será representado por “O” e a distância será chamada de raio da esfera e representada por “r”. A relação que define a esfera no espaço tridimensional será definida por: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Portanto, a esfera é uma superfície no espaço. Logo, quando necessário referir-se a um sólido com o formato da esfera, este será chamado sólido esférico.

Assim como o cilindro e o cone retos, a esfera também é um sólido de revolução, que pode ser obtida ao rotacionar um semicírculo em torno da reta (eixo) que contém o seu diâmetro, conforme Figura 32:

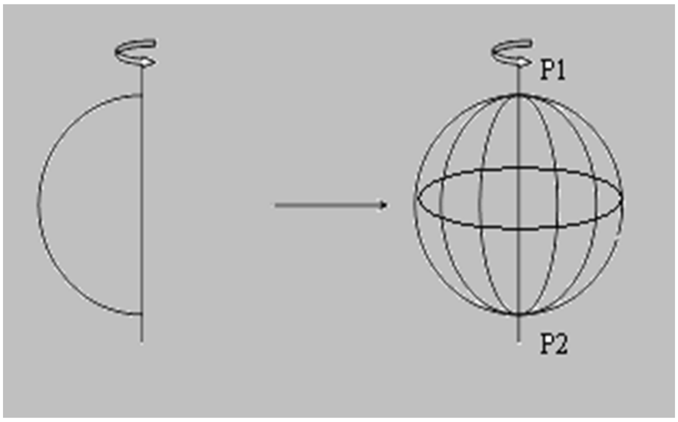


Figura 32 – Esfera formada por rotação de um semicírculo.
Fonte: Elaboração própria

3.5.3 Elementos da esfera

Com base na definição adotada nesse trabalho pode-se destacar os seguintes elementos da esfera, conforme a Figura 33:

- o *centro* é o ponto C;
- o *eixo* é a reta que contém o centro da esfera;
- os *polos* são os pontos de intersecção da superfície da esfera com o eixo;
- o *equador* é a circunferência obtida ao secionar a esfera por um plano perpendicular ao eixo e que passa pelo centro C;

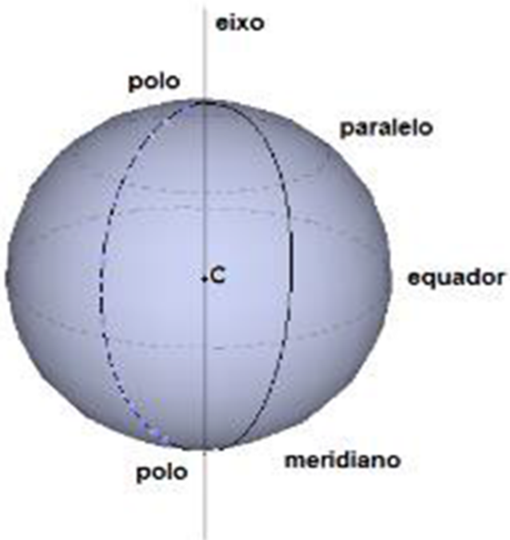


Figura 33 – Esfera com seus elementos.
Fonte: Elaboração própria

- os *paralelos* são as circunferências obtidas ao secionar a esfera por planos paralelos ao equador;
- os *meridianos* são as circunferências obtidas ao secionar a esfera por planos que contêm o eixo.

3.5.4 Cálculo do volume da esfera

Considere uma esfera de centro C e raio r secionada por um plano β, conforme Figura 34:

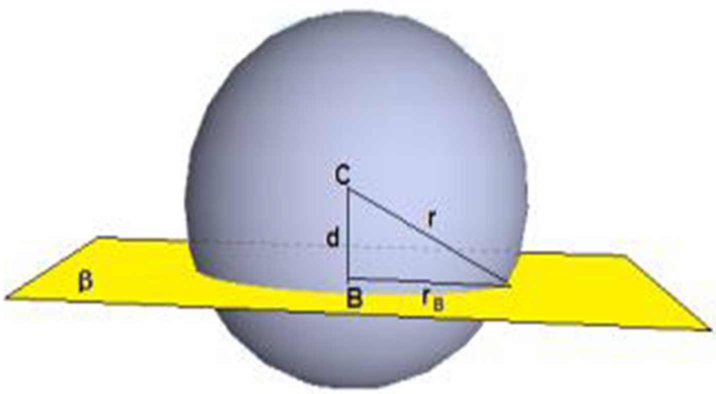


Figura 34 – Esfera cortada por um plano β.
Fonte: Elaboração própria

A partir do círculo de centro B e raio r_B, obtido na seção, pode-se estabelecer a seguinte relacão:

$$r^2 = r_B^2 + d^2 \Rightarrow r_B^2 = r^2 - d^2.$$

Escrevendo a área do círculo de centro em B em função de r e d, tem-se:

$$S_B = \pi r_B^2 \Rightarrow S_B = \pi(r^2 - d^2).$$

Considere um cilindro equilátero de raio r e altura $2r$. Retirando-se desse cilindro reto (Figura 35) dois cones retos de raio r, o volume desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retirados:

$$V = \pi r^2 2r - 2\frac{\pi r^2 r}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

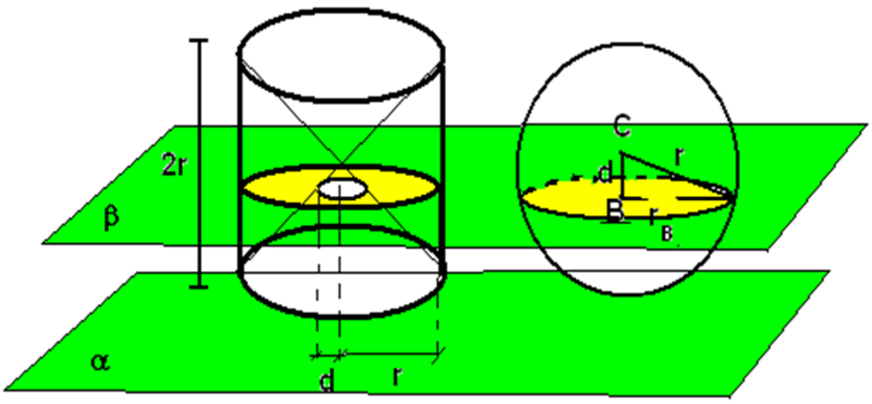


Figura 35 – Cilindro equilátero de altura 2r esfera de raio r.
Fonte: Elaboração própria

Para obter o volume da esfera, utiliza-se o Princípio de Cavalieri. Para tanto, considere a esfera e o sólido X gerado após a subtração dos dois cones do cilindro equilátero, apoiados em um plano α e secionados por um plano β, paralelo a α (Figura 35). A área S_C da seção obtida no sólido X é dada pela área da coroa circular definida pelos círculos de raios r e d:

$$S_C = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

Como a área da seção determinada na esfera S_B é iguala S_C, pode-se aplicar o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume da esfera e do sólido X são iguais. Sendo assim, o volume da esfera de raio r é dado por

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

3.5.5 Área da superfície da esfera

Suponha que uma esfera de centro C seja divida em n sólidos congruentes de maneira que, à medida que n aumenta, esses sólidos assemelham-se a pirâmides com vértice em C e altura igual ao raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $V_i = \frac{1}{3}A_i r$, em que A_i corresponde à área da base da pirâmide.

Tem-se que o volume da esfera, quando n tende ao infinito, é igual à adição dos volumes dos sólidos obtidos:

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + ... + \frac{1}{3}A_n r \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + ... + A_n).$$

Como, quando n tende ao infinito, a soma das áreas das bases dos sólidos é igual à área A da superfície da esfera, tem-se:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + ... + A_n) \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2.$$

Portando, a área da superfície esférica é dada por

$$A = 4\pi r^2$$

.

4 PROPOSTA DE APLICAÇÃO DO SCKETCHUP NA CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

A escolha do tema deste trabalho baseia-se, principalmente, em vários anos de experiência no ensino de Geometria Espacial, com a qual, mesmo buscando a aplicação de novas metodologias, tem-se identificado dificuldades dos alunos no momento da resolução de exercícios que exigem a aplicação de conceitos já apresentados na sala de aula.

Durante esses anos de experiência, verificou-se a importância de desenvolver os conceitos de Geometria Espacial de forma significativa e atraente, por meio de conexões do conteúdo com a realidade, visando suas aplicações nas mais diversas situações-problema apresentadas em exercícios de aula e livros, cursos diversos e vestibulares e, ainda, em situações cotidianas.

Ao longo dos vários anos de prática, diversas tentativas de metodologias foram testadas, dentre elas a técnica de perspectiva e maquete tridimensional. Porém, quando apresentadas situações-problema envolvendo sólidos geométricos mais elaborados, os alunos apresentaram dificuldades.

As tentativas já realizadas durantes esses anos de prática e os novos conhecimentos desenvolvidos durante o Mestrado em Ensino de Matemática me remetem a algumas questões motivadoras para o desenvolvimento dessa proposta didática:

- como auxiliar os alunos na melhoria de sua capacidade de visualização?
- seria o trabalho com software de Geometria Dinâmica uma experiência válida?

Com esses questionamentos propõe-se o desenvolvimento de uma proposta didática com o auxilio do software SketchUp, o qual pressupõe uma melhoria, para os alunos, tanto na sua capacidade de visualização como na sua capacidade de resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos.

Usar recursos computacionais no ensino de Matemática deve ser algo cada vez mais comum, pois professores e alunos devem estar preparados para lidar com as novas tecnologias, que estão cada vez mais presentes na sociedade. Além do mais, de acordo com os PCN's (BRASIL, 1997),

> "Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino de Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmaras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do

> próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas. [...]"

O professor de Matemática dispõe atualmente de uma gama bastante considerável de recursos didáticos que pode utilizar em sala de aula. Mas, para aproveitar ao máximo esses recursos, é necessária uma boa preparação, no intuito de usá-los com segurança e de forma crítica. Em relação ao uso de softwares, deve-se atentar às limitações que eles podem ter e empregá-los de modo a tornar o ensino de Matemática mais atraente para os alunos.

Para compreender de modo significativo os conteúdos de Geometria Espacial, o aluno deve exercitar a visualização dos sólidos em três dimensões. Uma das formas de que ele pode dispor para realizar esse exercício é o uso de materiais concretos, que podem ser confeccionados pelo professor ou pelos alunos. Mas este tipo de atividade requer tempo e material. Outra maneira de visualizar os sólidos geométricos é usar recursos computacionais, com os quais o aluno pode manusear virtualmente os sólidos, tendo uma visão deles no plano (tela estática) ou no espaço, interagindo com software, fazendo, inclusive, construções e planificações em tempo real, sem custo algum para professores e alunos.

Sugere-se os softwares, devido à praticidade e o enorme ganho de tempo que eles oferecem, o que não exclui, de modo algum, a possibilidade de o professor trabalhar também com materiais concretos, pois a experiência virtual, por mais realista que seja, não substitui a prática.

O professor deve propor atividades nas quais os estudantes utilizem o computador e a internet para resolvê-las e, desse modo, possam usufruir desses recursos, que devem ser usados em paralelo ao livro didático, pois são recursos que se complementam.

O aproveitamento de recursos computacionais é importante. Porém, o docente deve ter sempre em mente que esses softwares são apenas meios para alcançar um objetivo maior, qual deve ser, a compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Compreende-se por softwares de Geometria Dinâmica aqueles capazes de construir e manipular objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que distingui um software de Geometria Dinâmica dos demais é a possibilidade de "arrastar" a figura construída utilizando o mouse. Esse procedimento permite a transformação da figura em tempo real. Softwares desse tipo possibilitam trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria não Euclidiana e Geometria Analítica, sendo possível também tratar de alguns assuntos não geométricos, como funções, por exemplo.

"Os softwares de Geometria Dinâmica permitem agilidade na investigação, pois figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel são criadas em segundos na tela do computador. Eles possibilitam que os alunos explorem os mesmos conteúdos da Geometria Clássica, mas com um software interativo." (RODRIGUES, 2002)

Outra possível contribuição está relacionada ao enfoque dado à ideia da figura. Nas aulas tradicionais de Geometria, o papel de uma figura sempre foi o de ilustrar fatos expressos em um texto ou ajudar a compreender uma demonstração. Com um software de Geometria Dinâmica, além dessa ideia de ilustração, é possível privilegiar propriedades geométricas. Assim, o aluno pode mudar de uma atividade mecânica para uma atividade dinâmica.

Há vários softwares desse tipo disponíveis atualmente no mercado, com recursos e características em comum. Verificando a possibilidade de utilização de softwares gratuitos para o ensino de Geometria, a contribuição deste trabalho é, pois, elaborar uma base de dados com o software gratuito SketchUp Make para a simulação de construções geométricas e cálculo de áreas de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esfera, que possam ser utilizados com alunos do 2º ano do Ensino Médio.

4.1 CONHECENDO O SOFTWARE SKETCHUP

Segundo Gaspar (2010), o SketchUp é um software proprietário para a criação de modelos em 3D no computador. Foi originalmente desenvolvido pela At Last Software(@last software), uma empresa estadunidense com sede em Boulder, Colorado, a qual foi adquirida pelo Google, como anunciado em 14 de março de 2006. Em 2012, Trimble Navigation adquiriu o programa. O SketchUp está disponível em duas versões: a versão profissional (Pro), e a versão gratuita (Make), para uso privado, não comercial. O programa está disponível nas plataformas Windows e Macintosh.

O SketchUp, que pode ser baixado gratuitamente, é um produto do grupo Google extremamente versátil e muito fácil de usar. Pode ser usado para qualquer atividade profissional que necessite desenvolver rascunhos de produtos tridimensionais. Muito utilizado na área de Arquitetura, devido à sua facilidade de modelagem de estudos de formas e volumes tridimensionais, o software é muito utilizado também por Designers de Móveis, Desenhistas Técnicos, Engenheiros Civis, Engenheiros Mecânicos, Designers de Produtos, Escultores, Game Designers, e diversas outros profissionais relacionados aos trabalhos que necessitem visualizações em 3D. O SketchUp é utilizado principalmente para criar facilmente estudos iniciais e esboços (daí também o seu nome: "Sketch", que significa "esboço", em inglês) de modelos ou maquetes em 3D, eliminando, assim, muitas vezes a necessidade da execução de modelos ou maquetes físicas (feitas de massa modelagem, barro, cartolina, papel, acetato, acrílico, etc.). O resultado é um modelo que pode ser usado para gerar animações (arquivo digital AVI) ou [Imagem - digital|imagens em formatos digitais (JPG,PNG, GIF, BMP, TIF, etc.)] de qualquer ângulo de perspectiva que se deseje. Assim, por ser um programa que esboça modelos volumétricos, muitos artistas utilizam o

SketchUp na fase inicial de seus trabalhos, quando ainda têm a liberdade de alterar as formas, as cores e os volumes. O SketchUp permite-lhes alterar o modelo de forma simples e rápida, para, então, verificar as consequências dessas alterações no resultado final.

Trata-se, portanto, de uma ferramenta para a apresentação de modelos tridimensionais. Uma vez desenhado o modelo, é possível exportá-lo por meio da versão Pro para outros formatos (2D e 3D), como DWG, DXF, 3DS, OBJ, XSI ou VRML, para dar continuidade ao projeto do desenho preliminar.

Para o professor que não conhece esse software, o objetivo principal deste trabalho é mostrar-lhe um pouco como se trabalha a Geometria Espacial utilizando o SketchUp. Se o software não está instalado, utilize o site do Google e pesquise o termo SketchUp Make, versão em português, ou acesse direto o endereço eletrônico http://www.sketchup.com/pt-BR/download, e, na etapa 1, escolha uso educacional; na etapa 2, preencha seus dados e o nome da escola e, finalmente, na etapa 3, escolha SketchUp Make e clique em baixar. Em seguida, faça a instalação. Agora, acesse o ícone do software. Ao iniciar, vai aparecer a tela da Figura 36 a seguir; clique em escolher modelo e escolha o modelo simples - metros, e, em seguida, na última guia abaixo, clique em começar a usar o sketchUp.

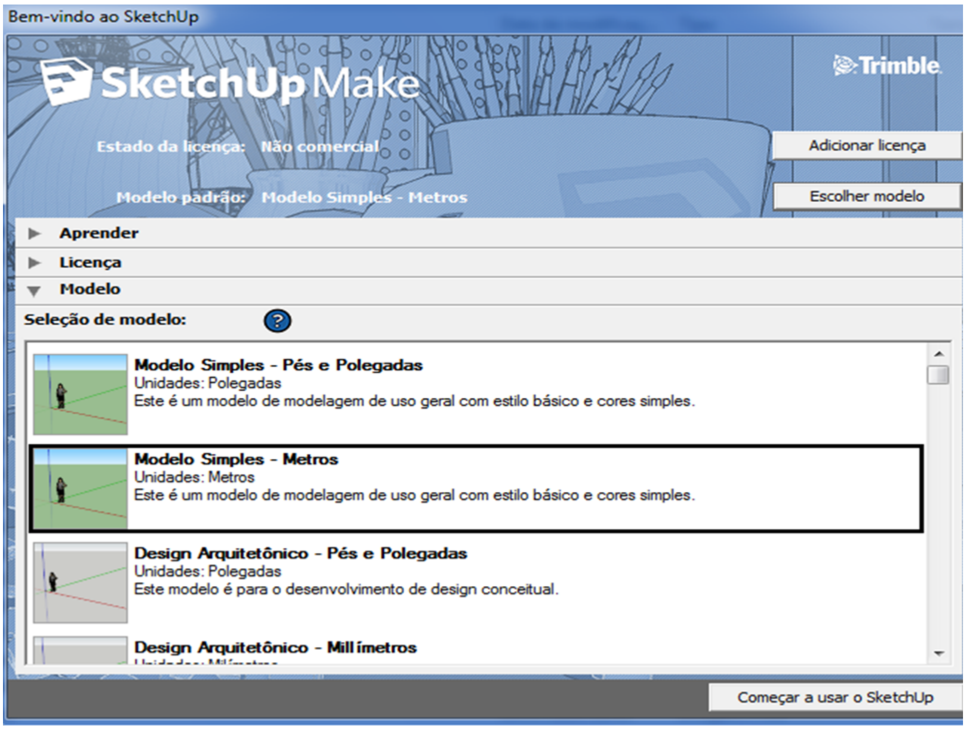


Figura 36 – Pagina inical SketchUp
Fonte: Elaboração própria

Em seguida, aparecerá a tela (Figura 37), a qual tem as ferramentas dos primeiros passos do SketchUp.

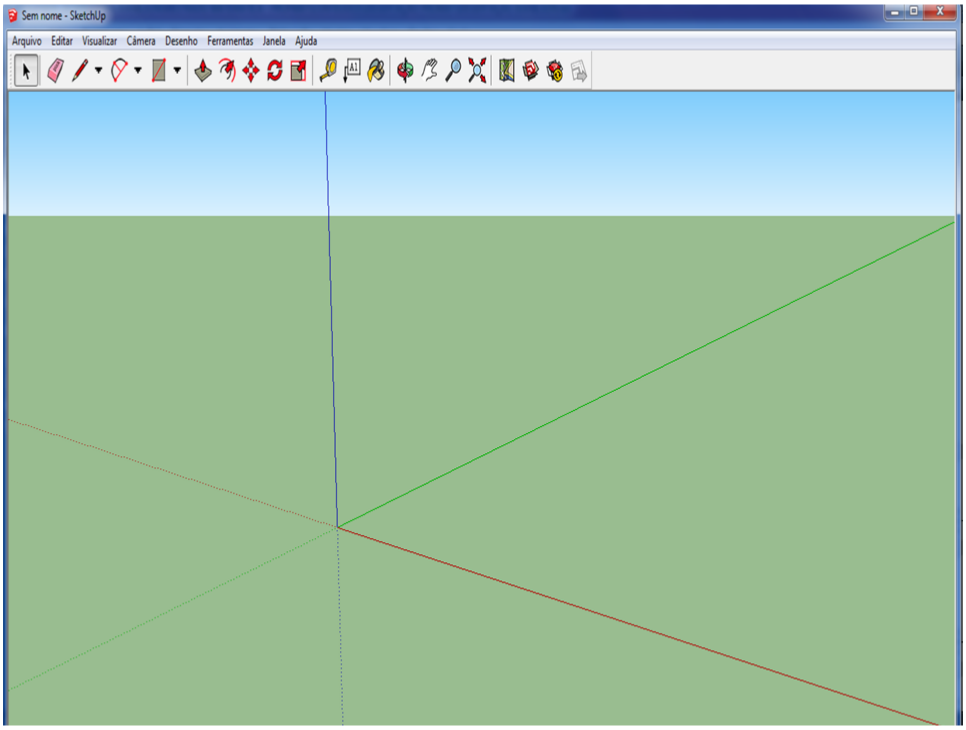


Figura 37 – Configurações inicais do SketchUp
Fonte: Elaboração própria

4.1.1 Ferramentas do SketchUp

O programa disponibiliza 21 ferramentas, chamadas de “primeiros passos”, conforme Figura 38. Todas elas possuem um nome. Quando o cursor fica parado em cima, o correspondente nome aparece. Na parte inferior da tela, o programa explica sua função. Ele também disponibiliza “conjunto grande de ferramentas’: na parte superior da tela, basta clicar em visualizar; aparecerá a barra de ferramentas; clicando nesse ícone, escolha toolbars; logo aparecerão várias opções de escolha das ferramentas.

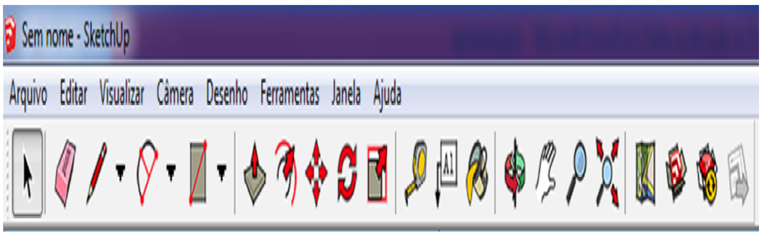


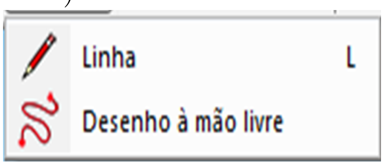
Figura 38 – Ferramenta primeiros passos do SketchUp
Fonte: Elaboração própria

Em relação à Figura 38, da esquerda para a direita, serão apresentados agora os comandos da barra de ferramentas, que são os mais importantes para o trabalho com a Geometria Espacial. Eles serão apresentados a partir de seus nomes. Para ver esses nomes e também a própria apresentação que o software faz, pode-se utilizar o comando “?” da barra de rodapés e clicar sobre o comando. Outra forma é utilizar a barra de menus, na qual os comandos aparecem conforme estão descritos abaixo. Observe também que, a partir da barra de menus, é possível identificar as teclas de atalho, que são as letras que aparecem à frente dos comandos. Acione as guias na barra de menus e veja todos os comandos do SketchUp e suas opções de atalho. Por exemplo, ao clicar na guia ferramentas, à frente do comando borracha, está a letra “E”, que é a tecla de atalho.

Selecionar  - Seleciona os objetos para apagar, estender ou outras tarefas. Observe que para selecionar usando o arraste da esquerda para a direita é necessário contemplar todo o objeto na seleção, enquanto que da direita para a esquerda, basta envolver uma pequena parte do objeto que a seleção contempla todo ele. O uso de um dos métodos depende da necessidade da seleção. A seleção também pode ser feita, dando um clique ou dois cliques rápido na parte da figura que se deseje selecionar.

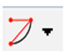
Borracha  - É o comando para apagar, embora a tecla delete também possa ser utilizada para tal fim.

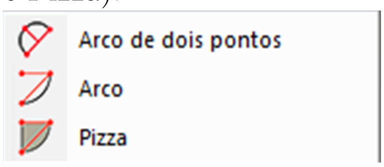
Linha  - Clique na seta para trocar as ferramentas de linha (Linha e Desenho à mão livre).



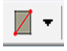
Linha - Este comando permite traçar linhas ortogonais na tela. Observe que esse comando pode ser utilizado para estender uma linha poligonal aberta ou fechada. Quando se fecha uma linha poligonal, o software apresenta a região delimitada. Enquanto ela estiver aberta, aparecerá apenas a linha.

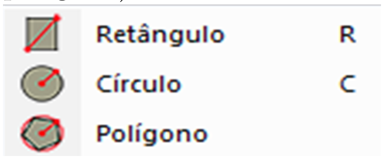
Desenho à mão livre - Este comando permite traçar linhas livres na tela, ou seja, permite fazer desenhos diversos. Funciona igual ao comando “Linha”.

Arco  - Clique na seta para trocar as ferramentas de arco (Arco de dois pontos, Arco e Pizza).



Construção de um arco. Observe que, se houver necessidade de construir um sólido usando o arco, deve-se usar um segmento de reta para fechar a região, com exceção da pizza que já é um arco fechado.

Formas  - Clique na seta para trocar as ferramentas de forma (retângulo, círculo e polígono).



Retângulo - Permite a construção de um retângulo que já vem com a parte interna colorida, por ser uma poligonal fechada. Desenha faces retangulares de canto a canto. Só clicar, arrastar e clicar. Há também a opção de digitar valores para as dimensões do seu retângulo, localizada no canto esquerdo. Depois do valor digitado, dê um “Enter”, que a figura se formará sozinha.

Círculo - Construção de um círculo. Clique onde será o centro e, em seguida, desloque o mouse para dimensionar o raio. Observe que, como o software trabalha em três dimensões, dependendo de onde está localizada a circunferência, ela muda de plano. Há também a opção de digitar um valor para o raio do círculo, localizada no canto esquerdo. Depois do valor digitado, dê um “Enter", que a figura se formará sozinha.

Polígono - Construção de um polígono de seis lados (a quantidade de lados pode ser modificada), bastando, para isso, clicar em cima da figura e, com o botão direito do mouse, escolher “Informações da entidade”; em seguida, clique no polígono de modo que todas as suas linhas fiquem marcadas de azul; nesse momento, aparecerão, nas informações, o raio e segmentos que podem ser alterados, bastando, para isso, digitar os valores e dar “Enter". Igualmente para o círculo.

Empurrar/Puxar  – Este comando deve ser ressaltado, pois ele é o responsável por dar a terceira dimensão às superfícies. Ao aproximá-lo de uma superfície, observe que ele fará com que essa região fique toda cheia de pontos; quando a região estiver dessa forma, use o arraste para construir os sólidos.

Equidistância  – Este comando efetua a equidistância de arestas selecionadas em um plano.

Mover  – Este comando move, prolonga, copia e serializa entidades selecionadas. Entretanto, quando se deseja mover objetos inteiros deve-se fazer a seleção completa dos mesmos.

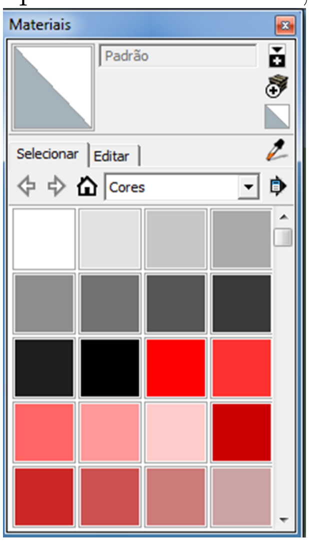
Rotar  – Este comando gira, prolonga, copia e serializa entidades selecionadas sobre um eixo. Com a tecla SHIFT pressionada, corresponde a alinhar com a face.

Escala  – Este comando ajusta a escala e prolonga entidades selecionadas.

Fita métrica  – Este comando mede distâncias, cria linhas ou pontos-guia ou ajusta a escala de um modelo inteiro. Para utilizá-la, selecione um ponto até o qual irá medir, ou digite um valor. A tecla CTRL ativa ou desativa a criação de guias. Observe que esse comando vai apresentar as medidas de acordo com a padronização das unidades feitas a partir do primeiro comando mostrado. Se houver necessidade de efetuar as medições antes da construção do desenho, pode-se usar esse comando efetuando medições de afastamento dos eixos. Nesse caso, o software deixa uma reta tracejada indicando as medidas e sua localização no plano.

Texto  – Este comando desenha etiquetas de texto.

Pintura  – Este comando aplica cor e material a entidades do modelo. Clicando nesse ícone, o software apresenta outro quadro com diferentes cores e texturas para escolher e aplicar no seu modelo, como mostra o quadro a seguir.



Orbitar  – Este comando orbita a visão da câmera sobre o modelo. Arraste para orbitar. Caso queira movimentar esse modelo apenas para os lados e em profundidade, pode-se pressionar o botão do meio, segurá-lo e então clicar no botão esquerdo também. Outra maneira de fazer isso é segurar o botão do meio + Shift e arrastar o mouse. Para aproximar ou afastar o zoom, é só usar o scroll do mouse. Pode-se também utilizar algum dos botões no topo da tela, sendo que o botão "orbit" faz a movimentação em 360º.
É um dos mais importantes recursos de visualização. É o comando que permite o giro da tela para que o usuário tenha a possibilidade de visualizar o sólido em outros ângulos diferentes do que foi criado. Às vezes, é necessário que o sólido seja girado durante a construção para facilitar essa tarefa. Ele é executado apenas pelo arraste do mouse sobre a tela.

Panorâmica  – Este comando desloca a vista da câmera vertical ou horizontalmente. Só clicar e arrastar.

Zoom  – Este comando amplia ou reduz a visão da câmera. Arraste o cursor para ampliar ou reduzir o zoom: para cima, aproxima; para baixo, distancia. Caso queira mudar o campo de visão, só clicar em Shift.

Modelo centralizado  – Este comando amplia ou reduz a visão da câmera para mostrar o modelo inteiro.

Outros comandos importantes do SketchUp para o ensino de Geometria Espacial.

Figura 39 – Ferramentas construção do SketchUp
Fonte: Elaboração própria

Dos comandos da Figura 39, o que mais interessa para o nosso estudo é o segundo, chamado *dimensões.*  – Este comando permite fazer as medições deixando indicado no desenho as medidas lineares das arestas.

A Figura 40 apresenta as ferramentas *e*stilos do SketchUp, as quais descreveremos a seguir.

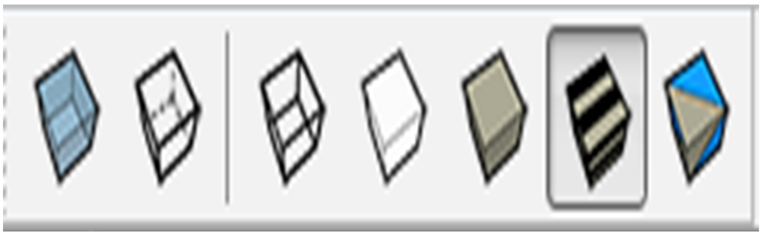


Figura 40 – Ferramentas estilos do SketchUp
Fonte: Elaboração própria

Raios X  – Este comando exibe o modelo com as faces totalmente transparentes.

Arestas posteriores  – Este comando exibe o modelo com as arestas posteriores tracejadas.

Grades de linha  – Este comando exibe apenas arestas no modelo.

Linha oculta  – Este comando oculta todas as arestas posteriores e cores de face no modelo.

Sombreado  – Este comando exibe o modelo com faces coloridas sólidas.

Sombreado com texturas  – Este comando exibe o modelo com as faces texturizadas.

Monocromático  – Este comando exibe o modelo apenas com as faces dianteira e posterior coloridas.

Além desses comandos, um outro necessário para o estudo da Geometria Espacial, principalmente para a construção do cone e da esfera, é o comando *siga-me*. Para obter esse comando, vá ao menu ferramentas e clique-o.

Siga-me  – Este comando segue um caminho com uma face selecionada.

4.2 PROPOSTA DIDÁTICA DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O SKETCHUP

A presente proposta não aborda definições e conceitos geométricos, pois tem por objetivo enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, enfatizando o desenvolvimento da habilidade visual e da abstração por meio do software SketchUp Make. Tal proposta não substitui o uso de outros recursos, como por exemplo, o livro didático, o qual, muitas vezes, é um instrumento de apoio que o docente utiliza para apresentar aos alunos as definições e conceitos geométricos, mas, pelo contrário, essa proposta deve ser acrescentada aos recursos já utilizados pelo professor.

O docente deverá utilizar as etapas da proposta respeitando o tempo de aprendizagem e a apropriação do conhecimento geométrico pelos alunos.

Em um primeiro momento, o professor deve observar se os alunos já adquiriram algumas habilidades necessárias ao aprendizado da Geometria Espacial. Fazem parte desses pré-requisitos o uso do Teorema de Pitágoras, habilidades referentes à Geometria Espacial Posicional, a noção de Geometria Plana: áreas das principais figuras planas e suas propriedades, diagonal, apótema etc. Se for preciso, o professor deve fazer uma revisão desses pré-requisitos para garantir o entendimento dos alunos e facilitar o desenvolvimento da proposta.

Os livros didáticos do Ensino Médio costumam dividir o ensino dos sólidos em cinco grupos: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. O professor poderá aplicar a proposta separadamente para cada um desses grupos, possibilitando que o aluno aprenda de forma gradativa e sem uma excessiva carga de informação. Não será definida uma quantidade exata de aulas para cada etapa, pois se entende que o tempo varia de acordo com a realidade de cada turma e de aulas que o professor tem à sua disposição para desenvolvê-lo.

A primeira etapa tem por objetivo desenvolver a visualização geométrica e o cálculo da área em relação aos elementos do sólido e, para isso, o professor pode utilizar o software ScketchUp, se possível, por meio da sala de informática ou do data show, de acordo com a sequência a seguir, na qual é construído cada um dos sólidos geométricos.

Na segunda etapa, o professores deve pedir aos alunos que construam cada um dos sólidos geométricos, respeitando o tempo de cada aula, como foi mencionado anteriormente, e dividindo esses sólidos nos cinco grupos e também calculando as suas áreas.

Para finalizar a etapa, o professor deve sugerir uma situação-problema, de forma que o aluno faça um esboço de cada um dos sólidos geométricos, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, e utilize os cálculos matemáticos para obter a solução de tal situação-problema. No momento da correção dos exercícios, pode-se criar um debate analisando se houve uma melhora na localização e utilização dos elementos do sólido e na sua associação às fórmulas matemáticas.

A seguir, será apresentada a sequência didática para construção dos principais sólidos geométricos, bem como os cálculos das áreas desses sólidos.

4.2.1 Construção de Prismas

Construção de um *prisma triangular regular* e cálculo de sua área total.

1º Passo: selecione o botão formas e escolha polígono, que faz desenhos de polígonos regulares, e desenhe, no espaço que surgirá, um hexágono regular (observe a Figura 41);

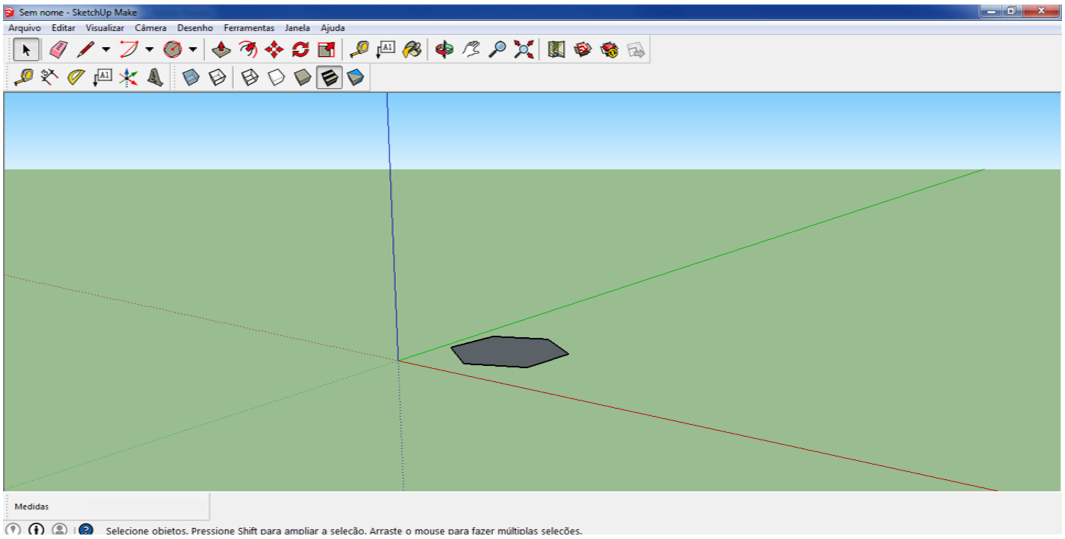


Figura 41 – Construção da base do prisma triangular

Fonte: Elaboração própria

2º Passo: clique, em seguida, em cima da linha poligonal com o botão direito do mouse (observe a Figura 42);

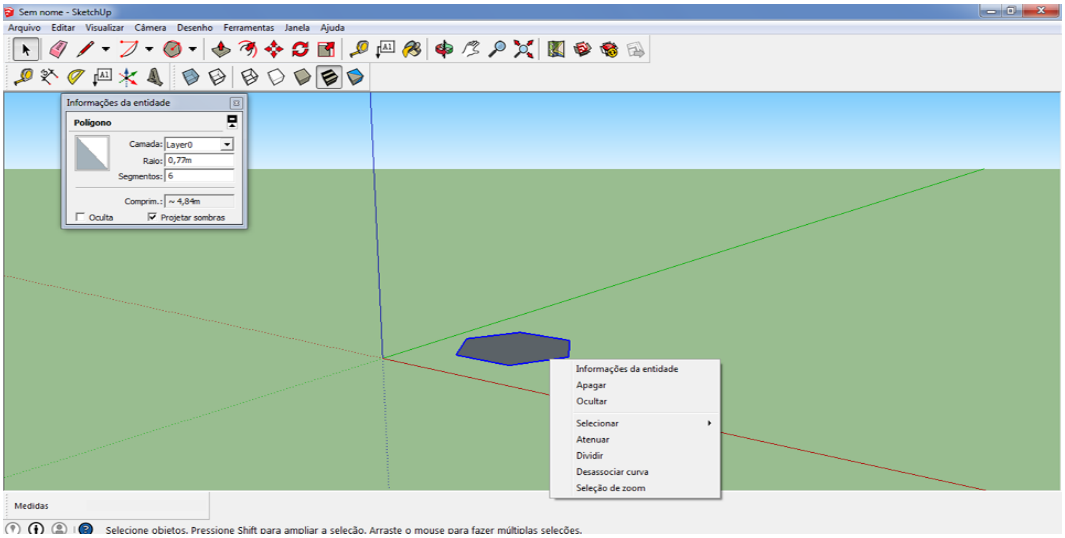


Figura 42 – Construção da base do prisma triangular mudança de polígono

Fonte: Elaboração própria

3º Passo: selecione informações da entidade e digite o número 3 na linha de segmentos; com isso, altera-se para 3 lados, conforme Figura 43;

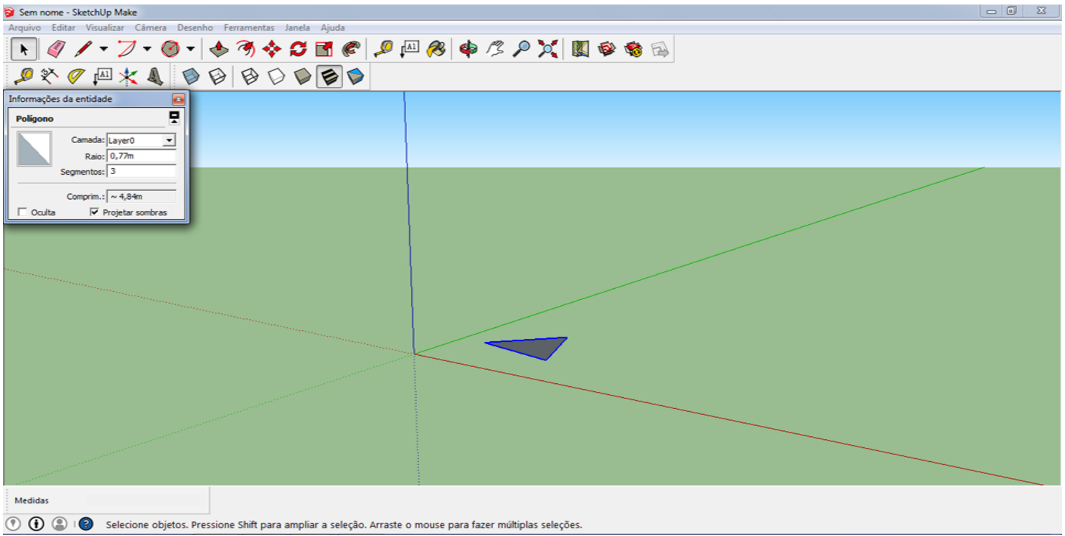


Figura 43 – Construção da base do prisma triangular; mudança de hexágono para triângulo
Fonte: Elaboração própria

4º Passo: depois, clique no botão empurrar/puxar, e leve para o triângulo construído;

5º Passo: clique em cima do polígono, segure e arraste para cima até a altura desejada: construiu-se, dessa forma, um prisma triangular regular, conforme a Figura 44. Para fazer qualquer medição de aresta, altura, apótema, etc., é só utilizar o comando dimensões.

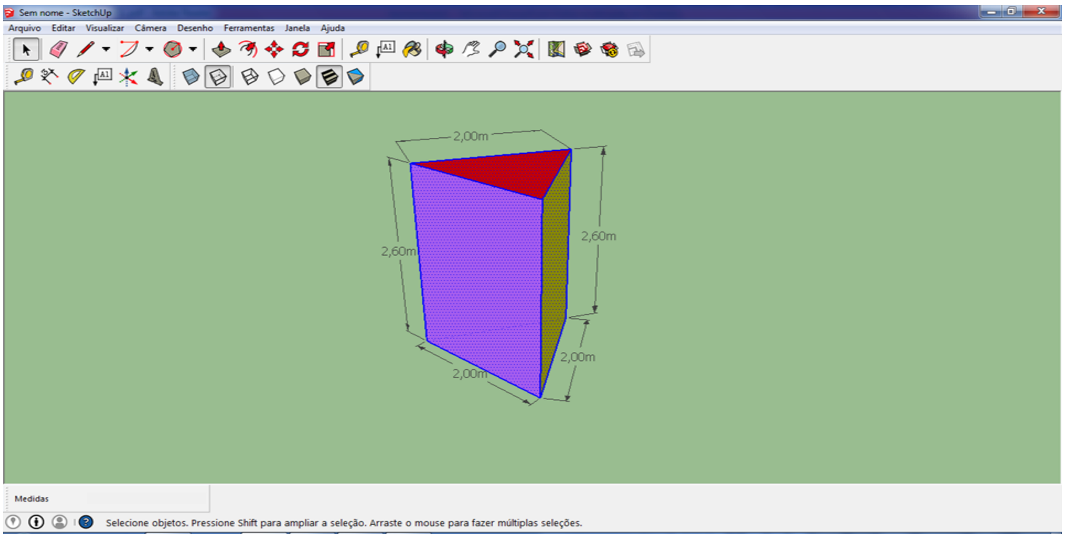


Figura 44 – Construção do prisma triangular regular
Fonte: Elaboração própria

6º Passo: para calcular a área total do prisma, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha todas conectadas: as faces do prisma aparecerão todas marcadas de azul. Então, novamente com o botão direito do mouse, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área total do prisma (observe a Figura 45).

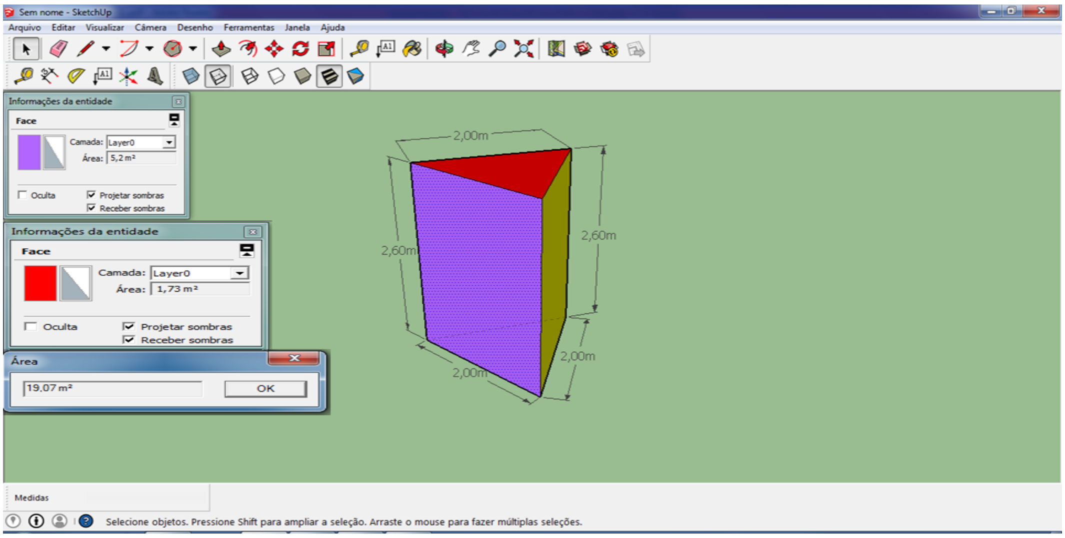


Figura 45 – Área total do prisma triangular regular

Fonte: Elaboração própria

Para construir o prisma quadrangular e hexagonal regular, com sua área total, conforme a Figura 46, aplica-se o mesmo raciocínio usado para construir o prisma triangular regular.

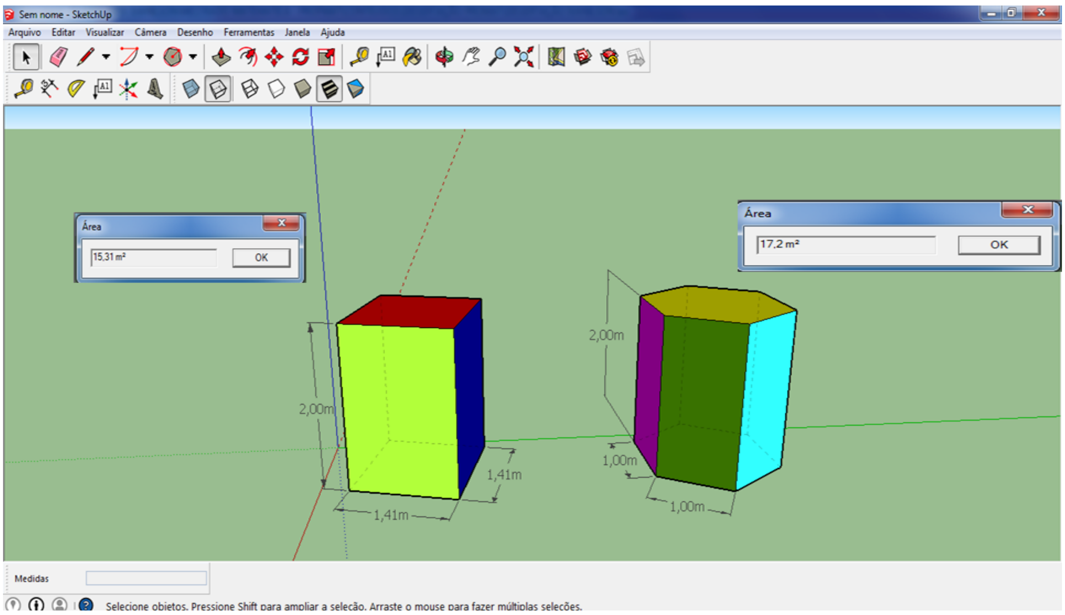


Figura 46 – Prisma quadrangular e hexagonal com sua área total

Fonte: Elaboração própria

4.2.2 Construção de Pirâmides

Construção de uma *pirâmide quadrangular regular* e cálculo de sua área total.

1º Passo: selecione o botão polígono;

2º Passo: repita o mesmo processo usado para construir o prisma;

3º Passo: em seguida, selecione o botão linha e o leve para o centro do polígono;

4º Passo: puxe uma linha para cima, até a altura desejada;

5º Passo: depois, ligue esse ponto acima com os vértices do polígono da base; dessa forma, construiu-se uma pirâmide, conforme Figura 47.

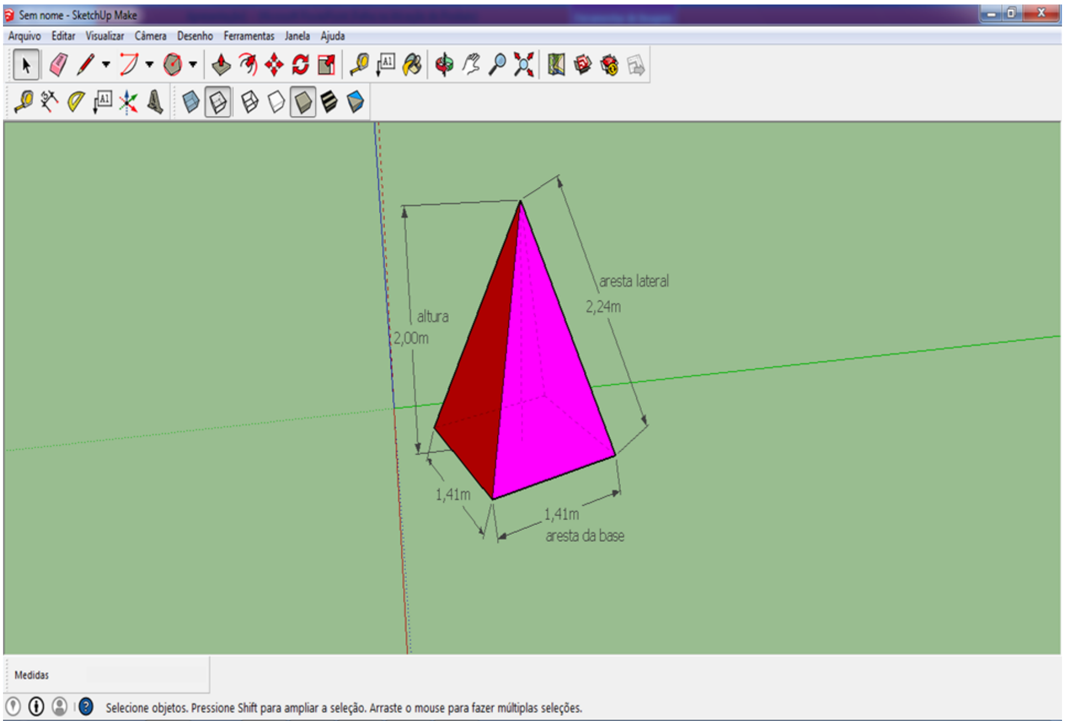


Figura 47 – Construção da pirâmide quadrangular regular
Fonte: Elaboração própria

6º Passo: para calcular a área total da pirâmide, repete-se o mesmo procedimento usado para construir o prisma. Na Figura 48, tem-se a área total do prisma quadrangular.

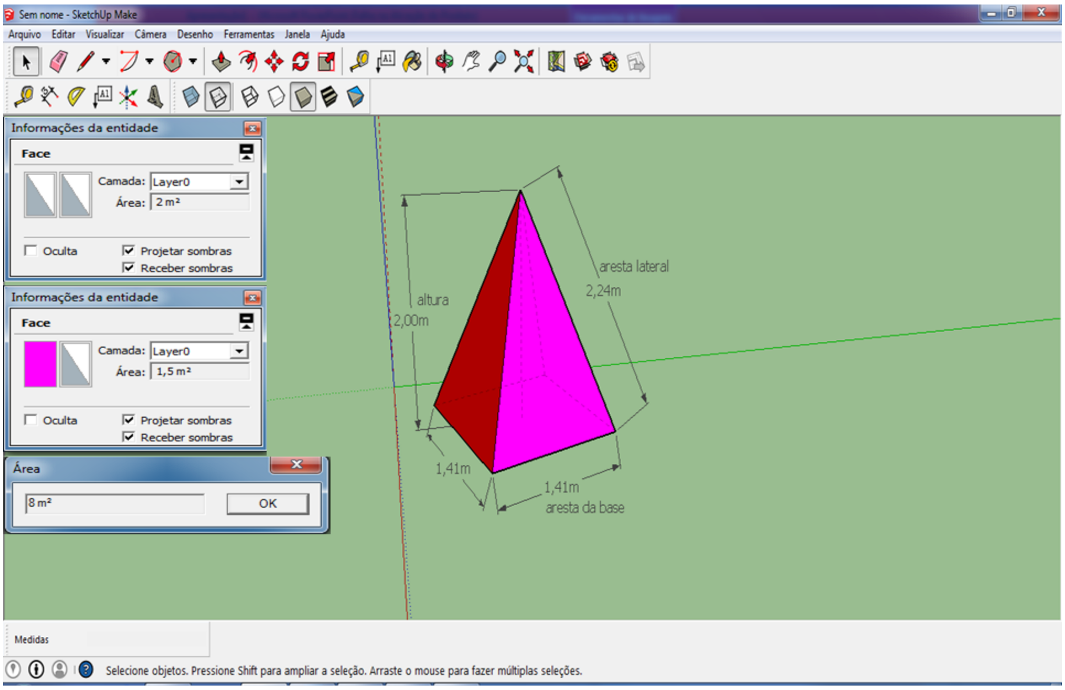


Figura 48 – Pirâmide quadrangular com sua área total

Fonte: Elaboração própria

Para construir a pirâmide hexagonal e triangular regular, com sua área total, conforme a Figura 49, aplica-se o mesmo raciocínio usado para construir a pirâmide quadrangular regular.

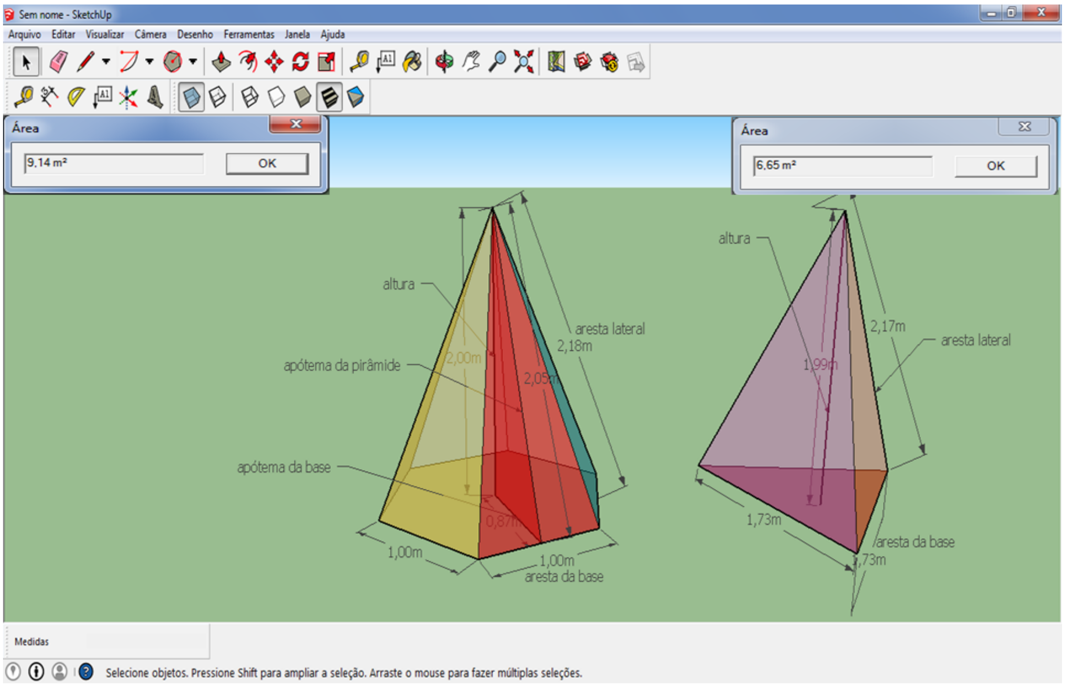


Figura 49 – Pirâmide hexagonal e triangular com sua área total

Fonte: Elaboração própria

4.2.3 Construção do Cilindro

Construção do *cilindro* e cálculo de sua área total.

O *cilindro* é construído usando-se os seguintes passos:

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo na tela, de acordo com o raio desejado, conforme Figura 50;

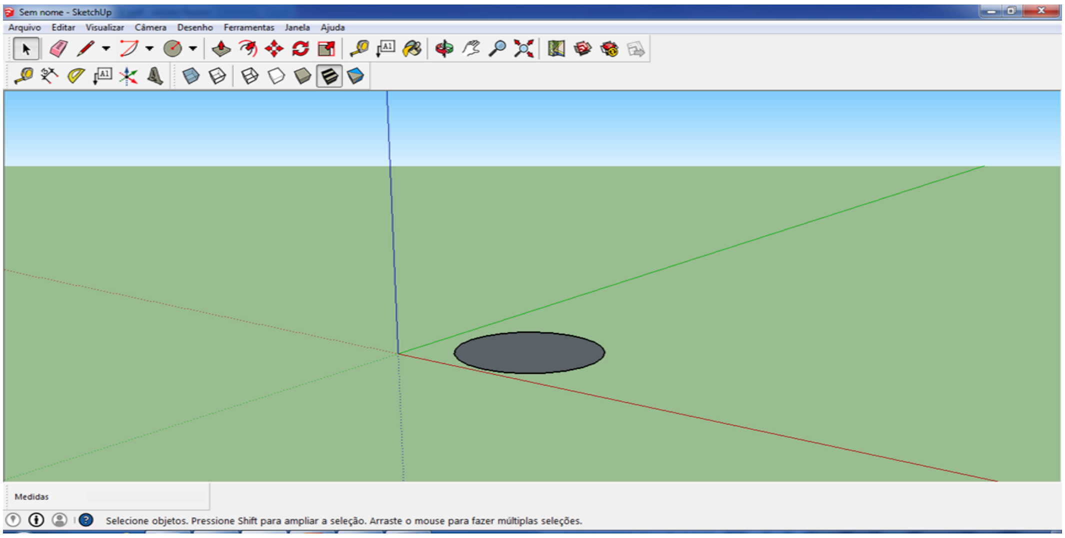


Figura 50 – Construção da base do cilindro

Fonte: Elaboração própria

2º Passo: depois, seleciona-se o botão empurrar/puxar clicando em cima do círculo construído e puxando para cima até a altura desejada, conforme Figura 51.

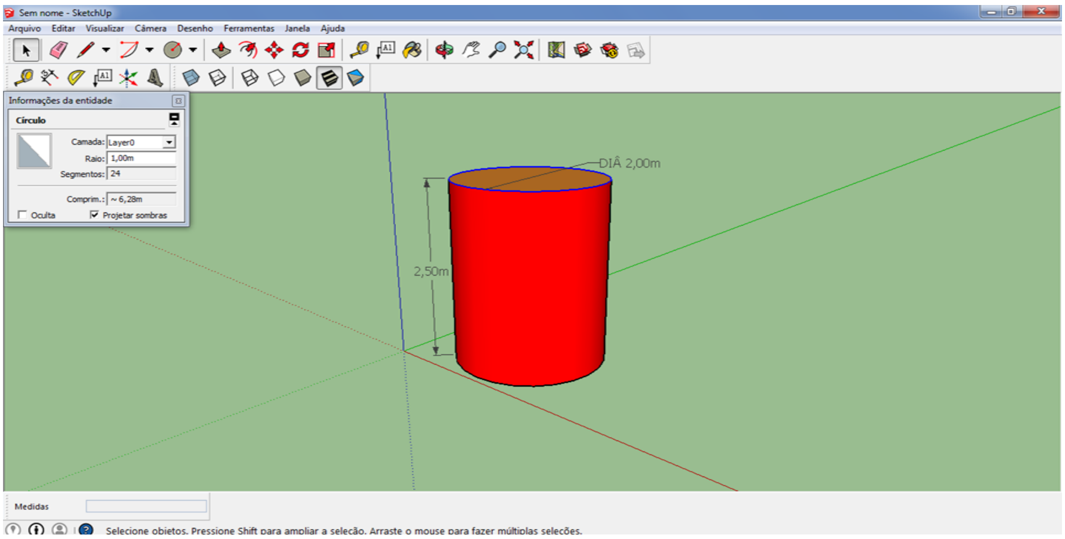


Figura 51 – Construção do cilindro

Fonte: Elaboração própria

3º Passo: para calcular a área total do cilindro, seleciona-se a figura e com o botão direito do mouse, escolhe-se "selecionar" e, depois, "todas conectadas" volta a figura novamente com o botão direito do mouse; escolhe-se, agora, área e, em seguida, seleção. Assim, aparecerá o valor da área total do cilindro, conforme Figura 52.

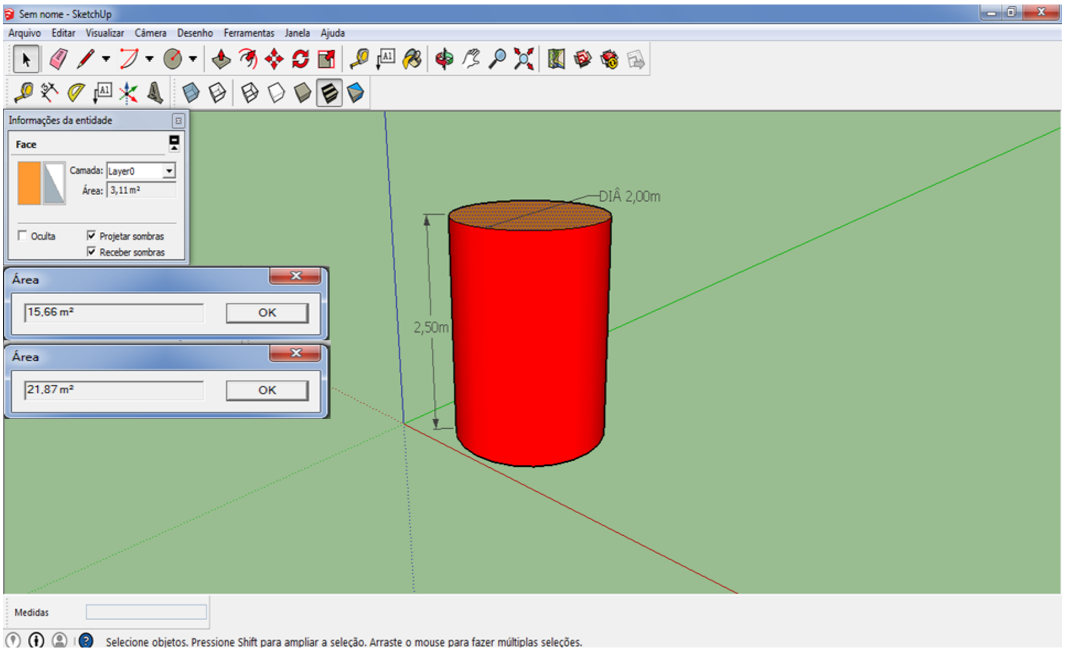


Figura 52 – Cilindro com sua área total

Fonte: Elaboração própria

4.2.4 Construção do Cone

Construção do *cone* e cálculo de sua lateral.

O cone pode ser construído usando-se os seguintes passos:

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo na tela;

2º Passo: seleciona-se o botão linha e o leve para o centro do círculo;

3º Passo: puxa-se uma linha do centro para cima da figura plana, até a altura desejada;

4º Passo: agora, liga-se esse ponto de cima com um ponto da circunferência, e liga-se este até o centro do círculo (observe a Figura 53);

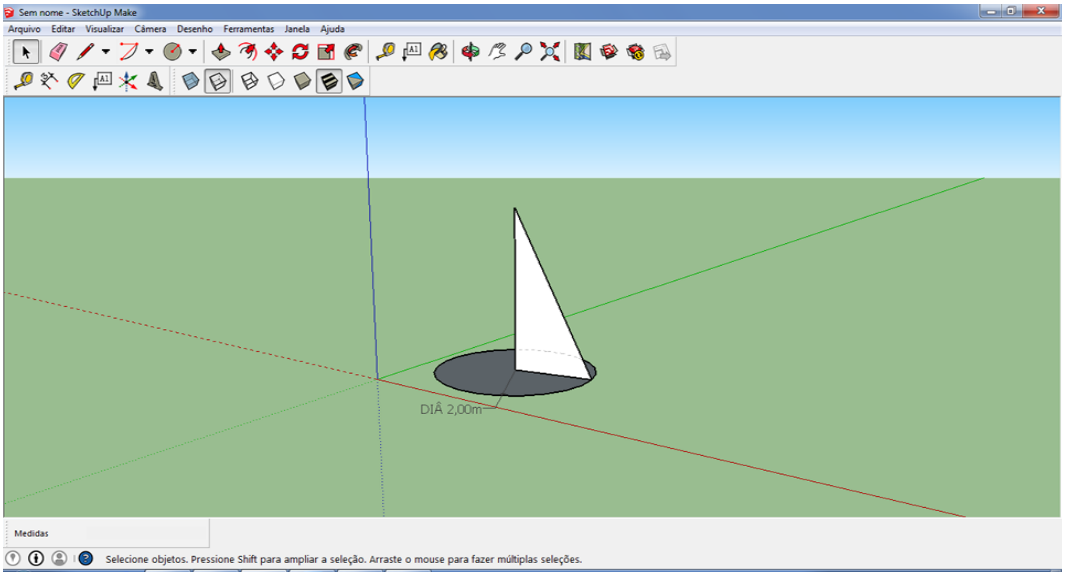


Figura 53 – Construção do cone
Fonte: Elaboração própria

5º Passo: depois disso, selecione o círculo da base com o botão selecionar;

6º Passo: clique no botão siga-me;

7º Passo: clique em cima do triângulo que se formou. Dessa forma, obtém-se o cone (observe a Figura 54).

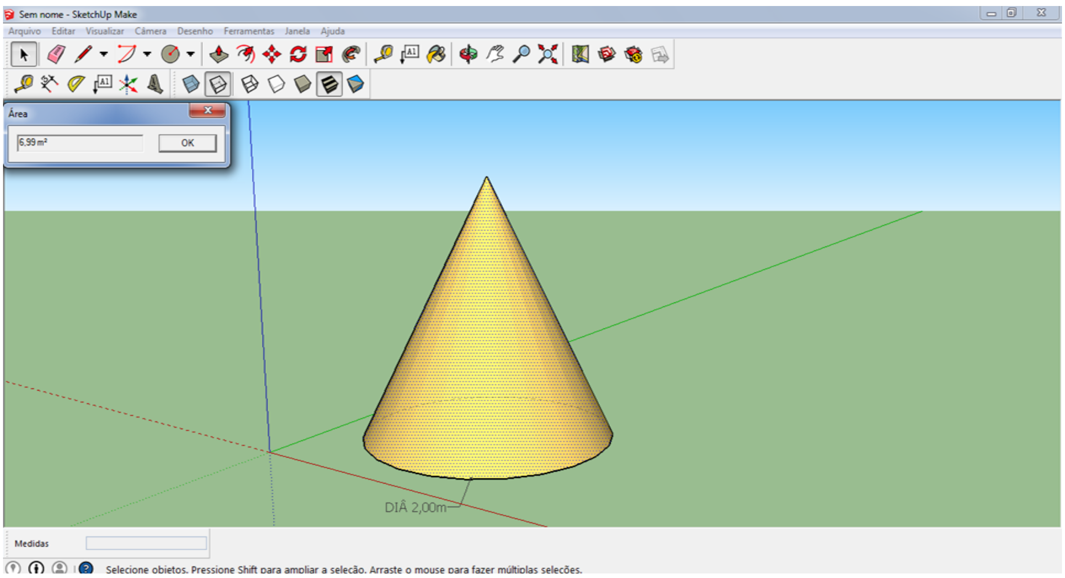


Figura 54 – Cone com sua área lateral
Fonte: Elaboração própria

8º Passo: para calcular a área lateral do cone, faz-se o mesmo procedimento usado para calcular a área do cilindro. A Figura 54 mostra o cone com sua área lateral.

4.2.5 Construção da Esfera

Construção da *esfera* e cálculo de sua área total.

A esfera pode ser construída usando-se os seguintes passos:

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo no centro do eixo tridimensional;

2º Passo: seleciona-se o botão orbitar para girar a tela e visualizar melhor o eixo vertical; em seguida, faz-se outro círculo menor que o anterior em cima desse eixo, conforme Figura 55.

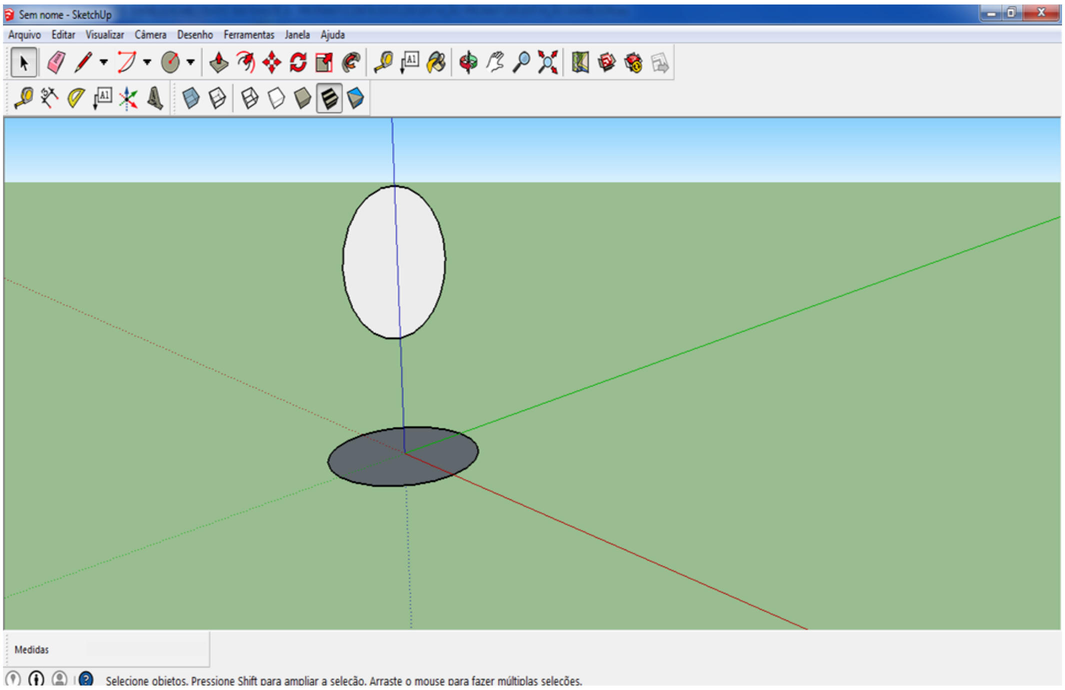


Figura 55 – Construção dos círculos da esfera
Fonte: Elaboração própria

3º Passo: escolhe-se o botão selecionar e seleciona-se o círculo da base;

4º Passo: clica-se no botão siga-me;

5º Passo: clica-se em cima do círculo menor que está na vertical e, assim, obtém-se uma esfera, conforme Figura 56.

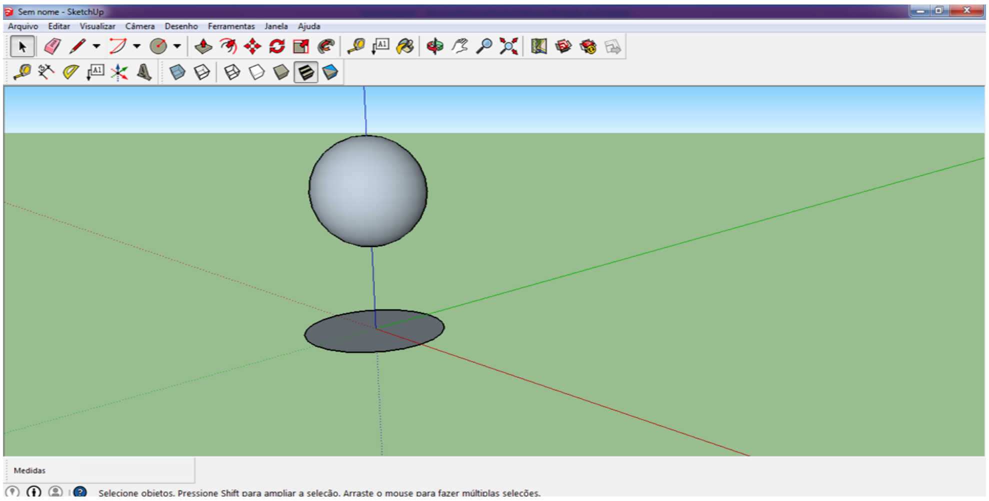


Figura 56 – Construção da esfera

Fonte: Elaboração própria

6º Passo: para retirar o círculo abaixo da esfera da Figura 56, com o botão *selecionar* dá-se um clique em cima desse círculo, de modo que a circunferência fique azul; a seguir, aperta-se a tecla delete, e o círculo será apagado. Esse procedimento pode ser feito quando se deseja apagar uma face ou aresta de uma figura.

7º Passo: para calcular a área da esfera, seleciona-se a figura e, com o botão direito do mouse, escolhe-se área, de modo que logo aparecerá o valor da área total da esfera, conforme Figura 57.

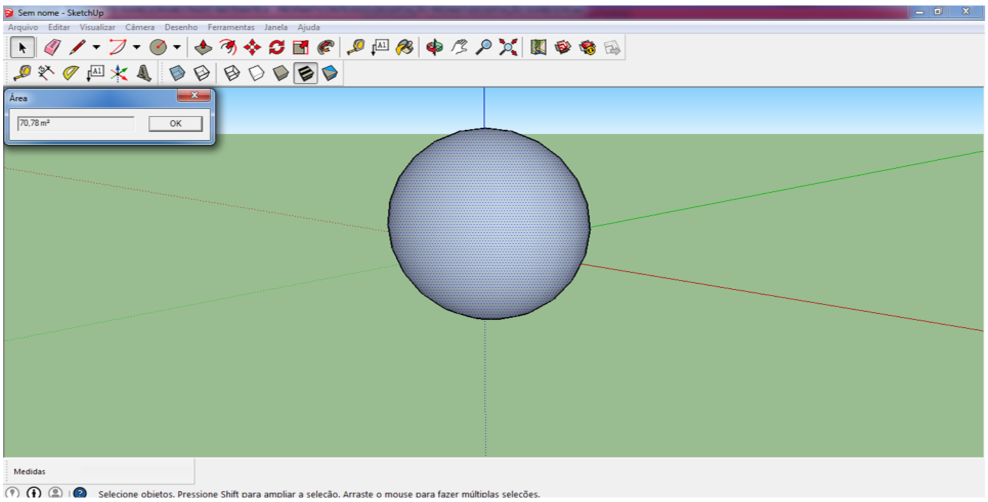


Figura 57 – Esfera com sua área total

Fonte: Elaboração própria

8º Passo: para alterar o tamanho da esfera, seleciona-se e clica-se no botão escala, que aparecerá um cubo ao seu redor e se obterá condições de alterar suas dimensões (observe a Figura 58).

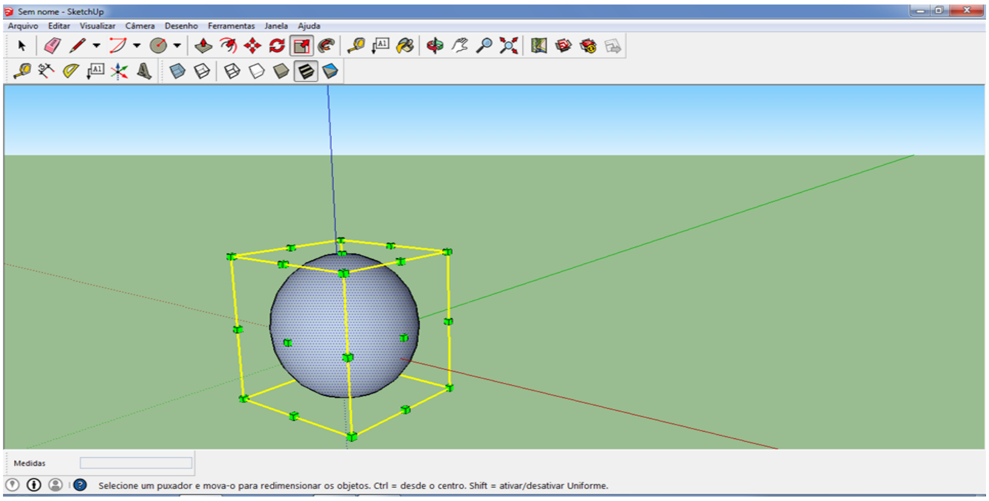


Figura 58 – Esfera inscrita no cubo

Fonte: Elaboração própria

4.3 AULAS PRÁTICAS DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O SKETCHUP

4.3.1 Atividade 1 - Prisma

Construa um prisma quadrangular regular, cuja aresta da base mede 2m e a aresta lateral mede 4m, determine a área de uma base, a área de uma face lateral e área total.

1º Passo: selecione o botão fita métrica e meça nos eixos verde e vermelho a medida 2m e em seguida complete o quadrado fazendo as medidas paralelas aos eixos verde e vermelho. (observe a Figura 59);

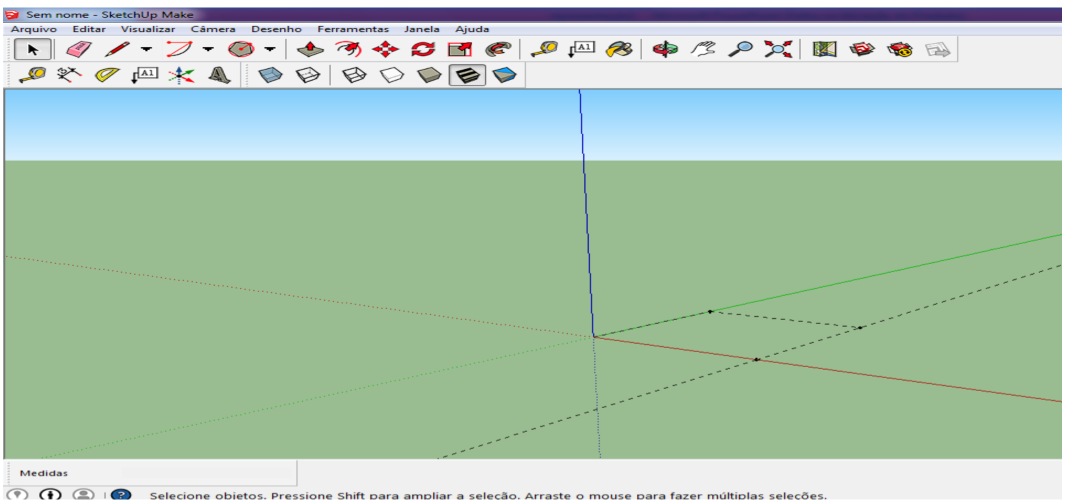


Figura 59 – Construção dos lados da base do prisma quadrangular

Fonte: Elaboração própria

2º Passo: selecione o botão linha e passe em cima das linhas tracejadas as quais ficaram cheias, formando assim o quadrado da base completo, em seguida, clique no botão mover e afaste o quadrado dos eixos, depois com o botão borracha apague todas as linhas tracejadas, finalmente com o botão dimensões clique nos cantos do quadrado e faça as medidas de 2m, conforme mencionado no problema.(observe a Figura 60);

3º Passo: para o cálculo da área da base, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha informações da entidade, assim aparecerá o valor da área da base; outra maneira de calcular a área da base do prisma é: clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área da base do prisma, $A_b = 4m^2$.(observe a Figura 60).

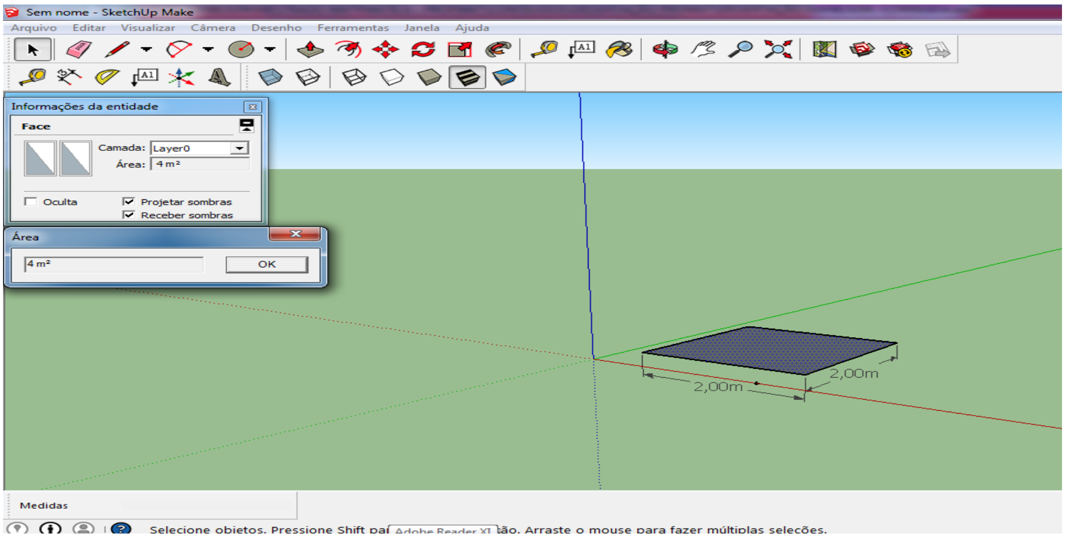


Figura 60 – Construção da base do prisma quadrangular com sua área

Fonte: Elaboração própria

4º Passo: depois, clique no botão empurrar/puxar, e leve para o quadrado construído;

5º Passo: clique em cima do polígono, segure e arraste para cima até a altura de 4m, essa medida pode ser obtida, clicando no botão dimensões e colocando do lado da aresta lateral, construiu-se, dessa forma, um prisma quadrangular regular. Para fazer o cálculo da área de uma face lateral, faz se o mesmo procedimento aplicado no cálculo da área da base, com o comando de informações da entidade já aberto, basta clicar em cima de qualquer face que aparecerá o valor da área dessa face, $A_f = 8m^2$.(observe a Figura 61).

6º Passo: para calcular a área total do prisma, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha área e camada, de modo que logo aparecerá o valor da área total do prisma quadrangular, $A_t = 40m^2$. (observe a Figura 61).

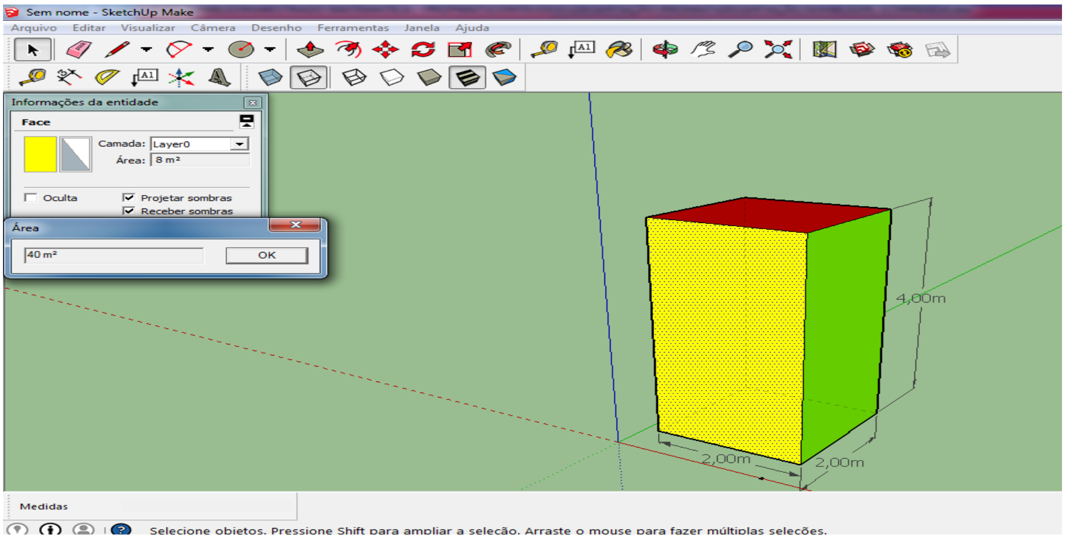


Figura 61 – Construção do prisma quadrangular com a área de uma face e área total
Fonte: Elaboração própria

Agora peça para os alunos fazer os cálculos das áreas, da base, de uma face e total, dessa figura utilizando as fórmulas matemáticas do prisma quadrangular e compare com as do software.

O professor pode pedir para os alunos também calcular o volume desse prisma, pois, já tem o valor da área da base e a altura, basta multiplicar os valores, ou seja, $V = 4.4 = 16m^3$.

4.3.2 Atividade 2 - Paralelepípedo retângulo

Construa um paralelepípedo retângulo, de dimensões, 5m de comprimento, 3m de largura e 2m de altura, determine a medida de sua diagonal, área de cada face e sua área total.

1º Passo: selecione o botão fita métrica e meça no eixo vermelho 5m e no eixo verde 3m e em seguida complete o retângulo fazendo as medidas paralelas aos eixos vermelho e verde. (observe a Figura 62);

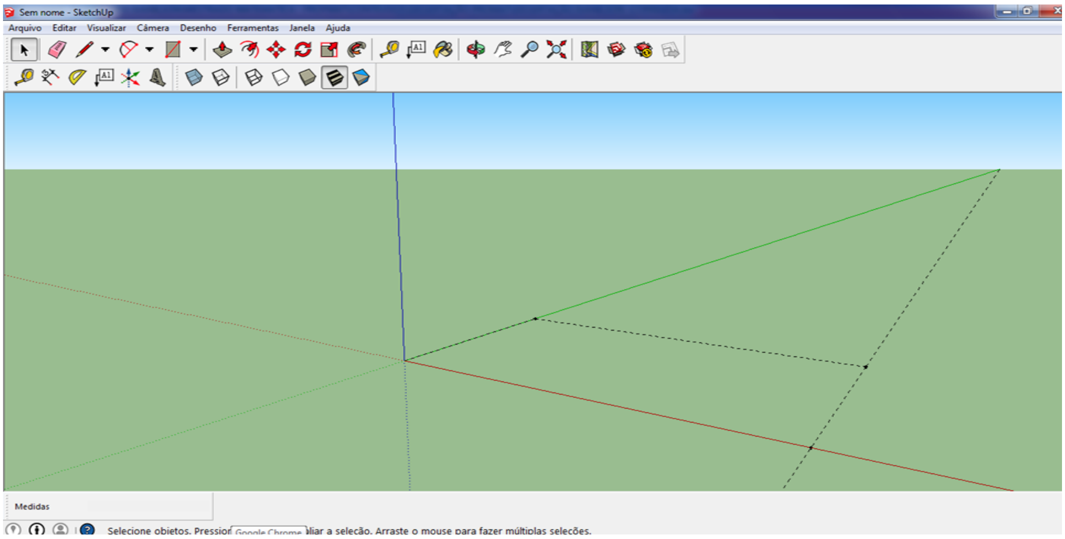


Figura 62 – Construção dos lados da base do paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaboração própria

2º Passo: selecione o botão linha e passe em cima das linhas tracejadas as quais ficaram cheias, formando assim o retângulo da base completo, em seguida, clique no botão mover e afaste o retângulo dos eixos, depois com o botão borracha apague todas as linhas tracejadas, finalmente com o botão dimensões clique nos cantos do retângulo e faça as medidas de 5m do comprimento e 3m da largura, conforme mencionado no problema.(observe a Figura 63);

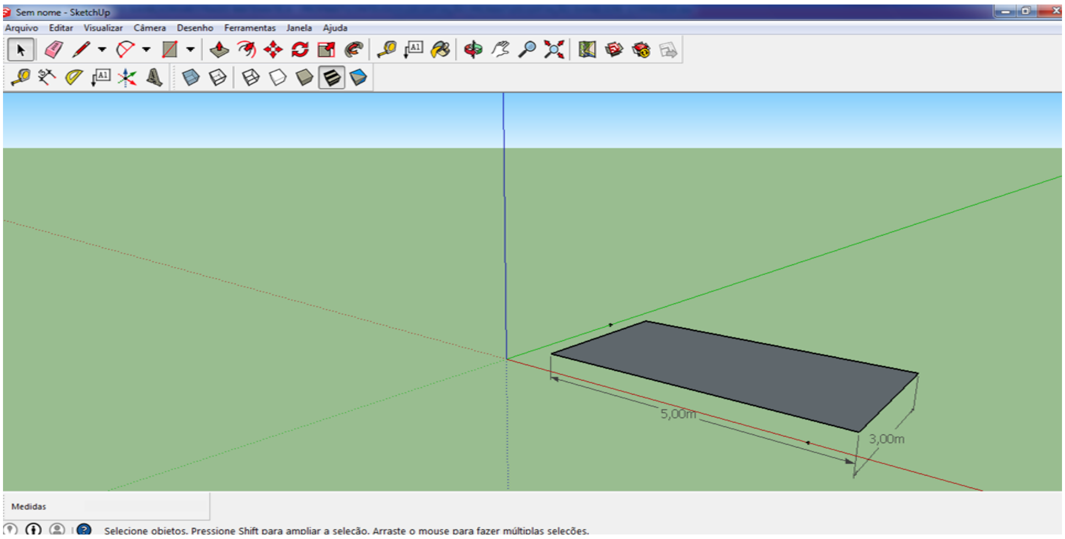


Figura 63 – Construção da base do paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaboração própria

3º Passo: depois, clique no botão empurrar/puxar, e leve para o retângulo construído;

4º Passo: clique em cima do polígono, segure e arraste para cima até a altura de 2m, essa medida pode ser obtida, clicando no botão dimensões e colocando do lado da aresta lateral, construiu-se, dessa forma, o paralelepípedo retângulo mencionado no problema.(observe a Figura 64).

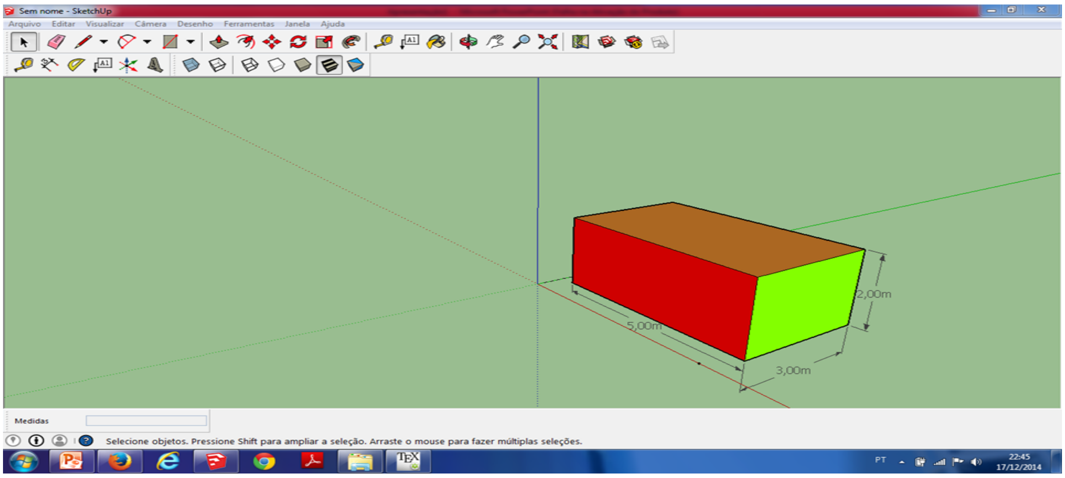


Figura 64 – Construção do paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaboração própria

5º Passo: para construir a diagonal apague todas as faces paralelepípedo, exceto a inferior, depois com o botão linha ligue o canto superior de uma face, com o canto inferior da outra face oposta. Para determinar a medida dessa diagonal, clique com botão dimensões no canto superior e inferior da diagonal, que assim terá a sua medida. Nesse problema, também está determinada a diagonal da base. Faça com que o aluno comprove essas medidas, da diagonal da base e da diagonal do paralelepípedo retângulo, aplicando o teorema de Pitágoras (observe a Figura 65).

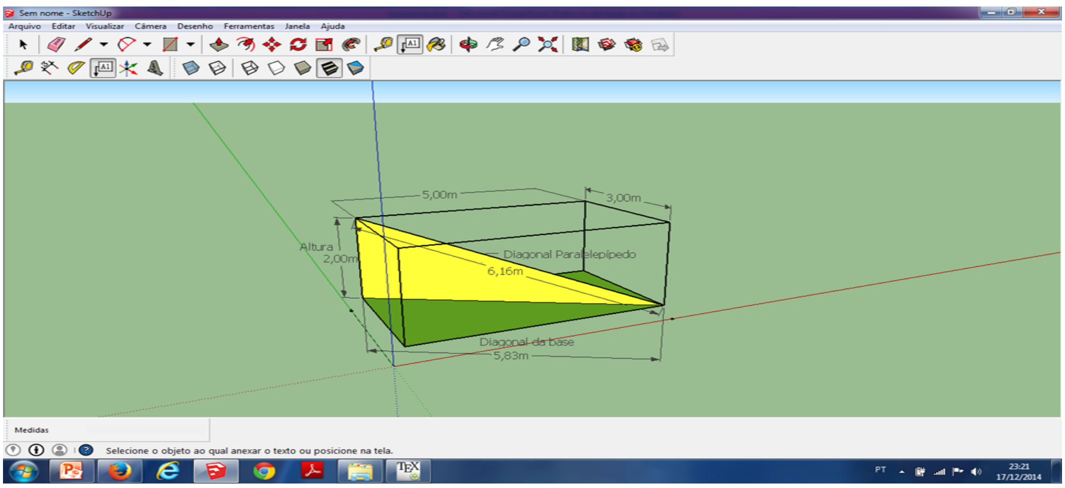


Figura 65 – Construção da diagonal do paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaboração própria

6º Passo: para o cálculo da área de cada face, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha informações da entidade, assim aparecerá o valor da área da face selecionada, para determinar a área das outras faces e só ir clicando em cada uma delas que aparecerá o seu valor; outra maneira de calcular a área de uma face do paralelepípedo é: clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área da face selecionada, $A_{f1} = 15m^2$; $A_{f2} = 10m^2$; $A_{f3} = 6m^2$.(observe a Figura 66).

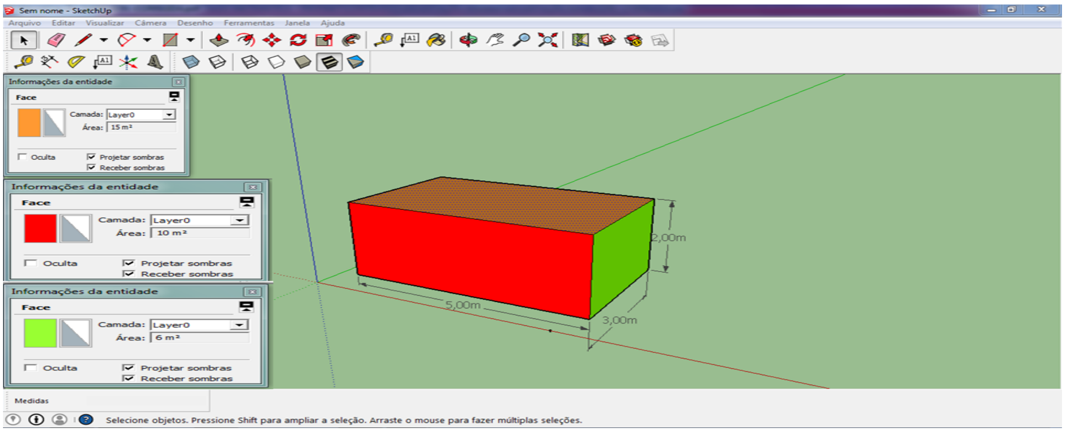


Figura 66 – Área das faces do paralelepípedo retângulo

Fonte: Elaboração própria

7º Passo: para calcular a área total do paralelepípedo retângulo, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha todas conectadas: as faces do paralelepípedo aparecerão todas marcadas de azul. Então, novamente com o botão direito do mouse, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área total do paralelepípedo, $A_t = 62m^2$. (observe a Figura 67).

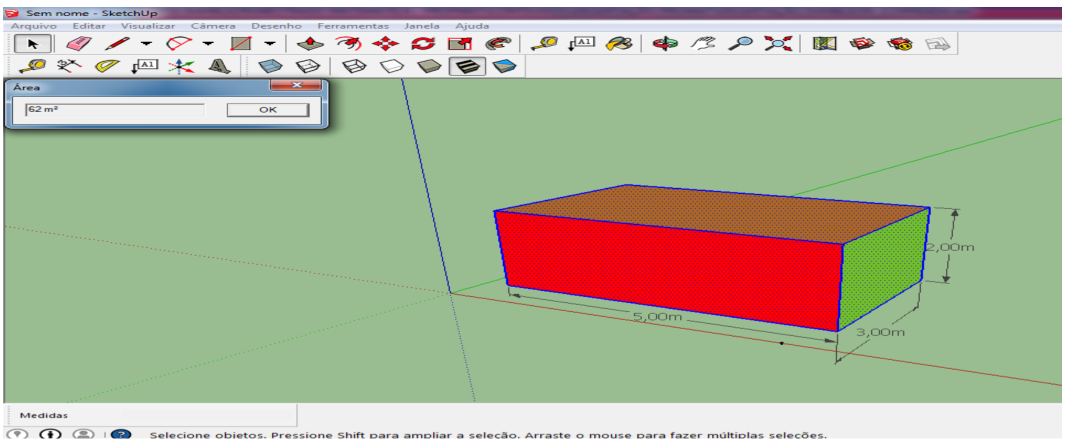


Figura 67 – Área total do paralelepípedo retângulo

Fonte: Elaboração própria

4.3.3 Atividade 3 - Pirâmide

Construa uma pirâmide hexagonal regular, cujo lado do hexágono mede 2m e a altura 5m, determine, a medida do apótema da base, a medida do apótema da pirâmide, a medida da aresta lateral, o valor da área da base, área de uma face e sua área total.

1º Passo: selecione o botão polígono, e desenhe, no espaço que surgirá, um hexágono regular, em baixo onde aparece a palavra raio digite 2m, assim, formará o hexágono regular de lado 2m;

2º Passo: depois, selecione o botão fita métrica e leve para o centro do polígono e meça a altura de 5m;

3º Passo: em seguida, selecione o botão linha e passe em cima da linha tracejada, logo ela ficará cheia e com a altura desejada de 5m;

4º Passo: depois, ligue esse ponto acima com os vértices do hexágono da base; dessa forma, construiu-se pirâmide hexagonal regular, conforme Figura 68.

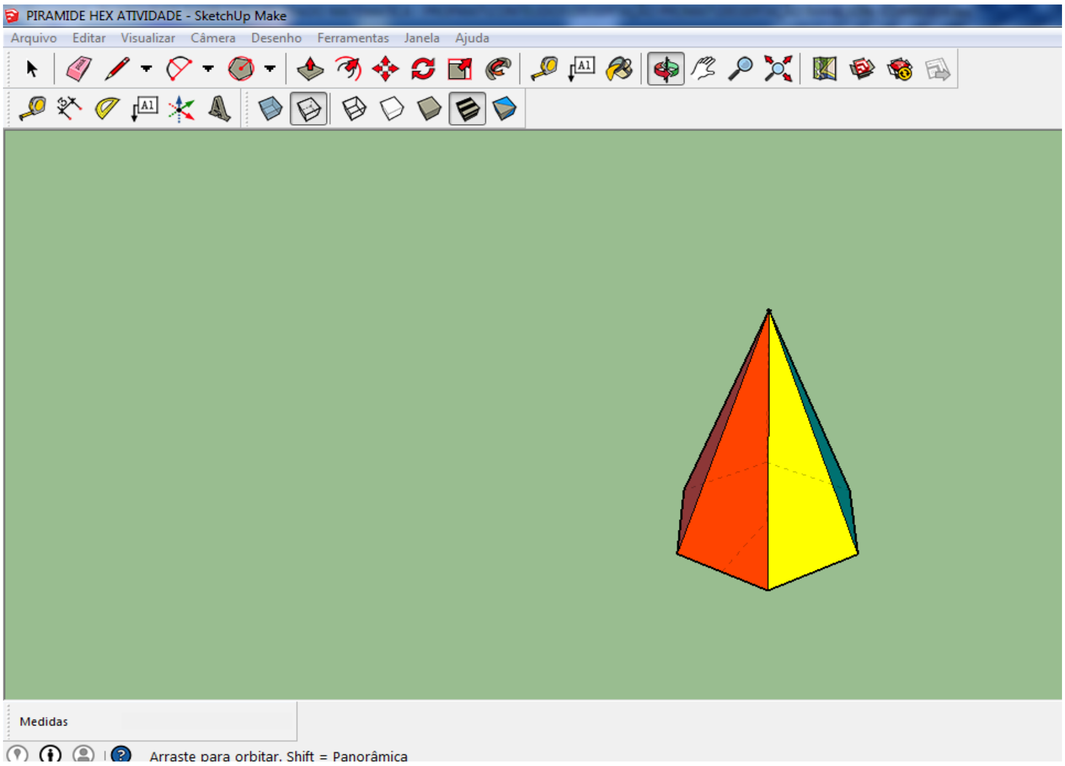


Figura 68 – Construção da pirâmide hexagonal regular
Fonte: Elaboração própria

6º Passo: para determinar a medida do apótema da base (m), a medida do apótema da pirâmide (A_p), a medida da aresta lateral (al), selecione o botão dimensões e clique na linha que deseja medir até que ele fique azul, em seguida araste a mesma que terá a sua medida, outra maneira, é clicar em cada uma das extremidades da linha, que também terá a sua medida; $m = 1,73m$; $A_p = 5,29m$; $al = 5,34m$. (observe a Figura 69). Depois, peça que o aluno comprove essas medidas, utilizando o teorema de Pitágoras

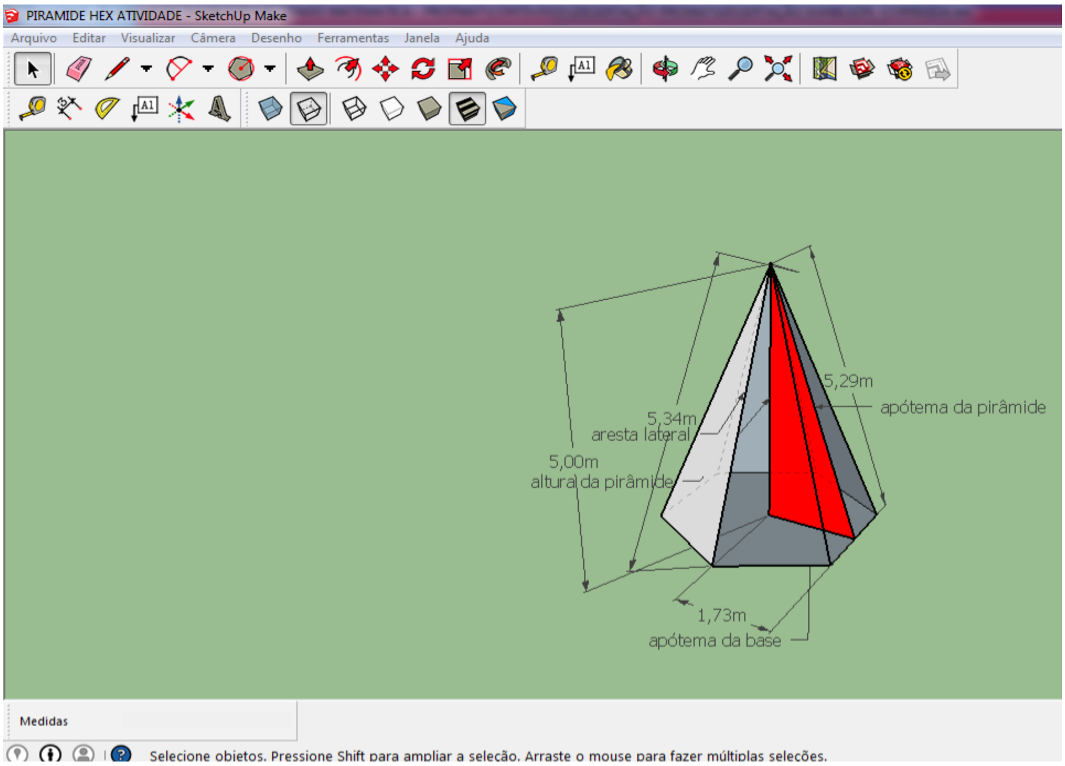


Figura 69 – Pirâmide hexagonal regular com as medidas dos apótemas e da aresta lateral
Fonte: Elaboração própria

7º Passo: para o cálculo da área da base, clique na base da pirâmide e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha informações da entidade, assim aparecerá o valor da área da base; outra maneira de calcular a área da base da pirâmide é: clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área da base da pirâmide, $A_b = 10,39m^2$.(observe a Figura 70).

8º Passo: para o cálculo da área de uma face, faz se o mesmo procedimento aplicado no cálculo da área da base, com o comando de informações da entidade já aberto, basta clicar em cima de qualquer face que aparecerá o valor da área dessa face, $A_f = 5,29m^2$.(observe a Figura 70).

9º Passo: para calcular a área total da pirâmide, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha área e camada, de modo que logo aparecerá o valor da área total da pirâmide hexagonal regular, $A_t = 42,14m^2$. (observe a Figura 70).

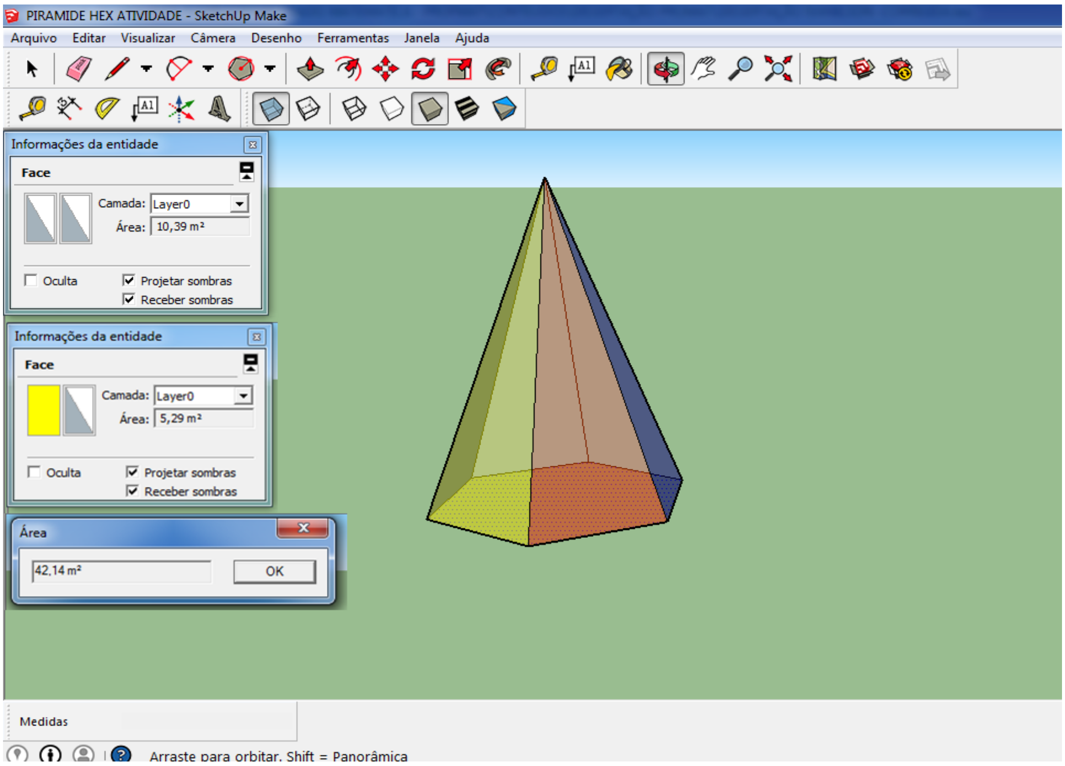


Figura 70 – Pirâmide hexagonal regular com suas áreas
Fonte: Elaboração própria

Agora peça para os alunos fazer os cálculos das áreas, da base, de uma face e total, dessa figura utilizando as fórmulas matemáticas da pirâmide hexagonal regular e compare com as do software.

O professor pode pedir para os alunos também calcular o volume dessa pirâmide, pois, já tem o valor da área da base e a altura, basta multiplicar os valores e dividir o resultado por três, ou seja, $V = \dfrac{(10,39).(5)}{3}$, ou seja, $V = 17,32m^3$.

4.3.4 Atividade 4 - Cilindro

Construa um cilindro circular reto de altura 4m e raio da base 1m, determine, o valor da área da base, da área lateral e da área total.

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo na tela, embaixo, onde aparece o nome raio, digite o valor 1, conforme Figura 71;

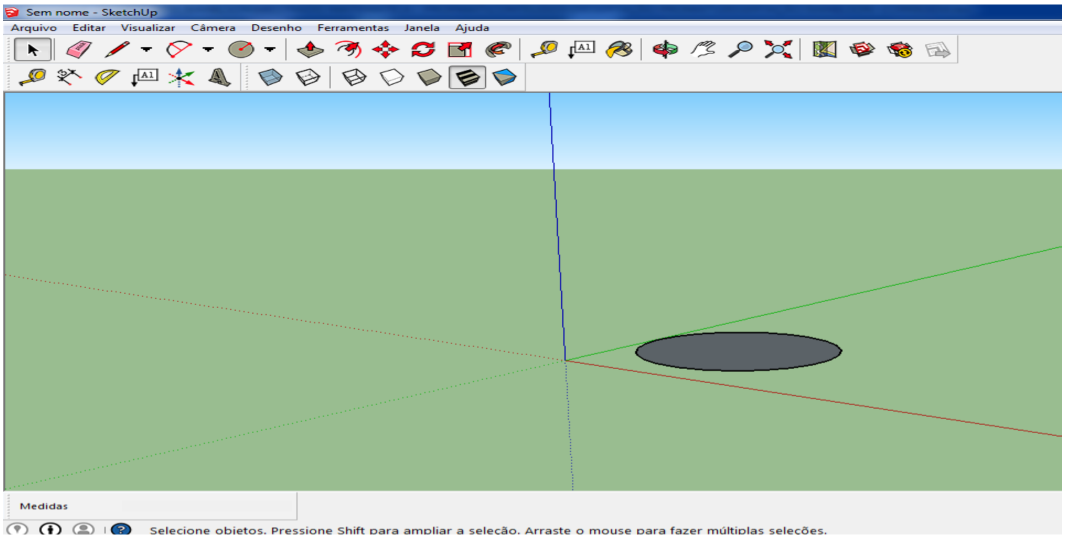


Figura 71 – Construção da base do cilindro
Fonte: Elaboração própria

2º Passo: depois, seleciona-se o botão empurrar/puxar clicando em cima do círculo construído e puxando para cima, embaixo, onde aparece o nome distância, digite o valor 4 e aperte a tecla enter, logo, formará o cilindro de altura 4m, conforme Figura 72.

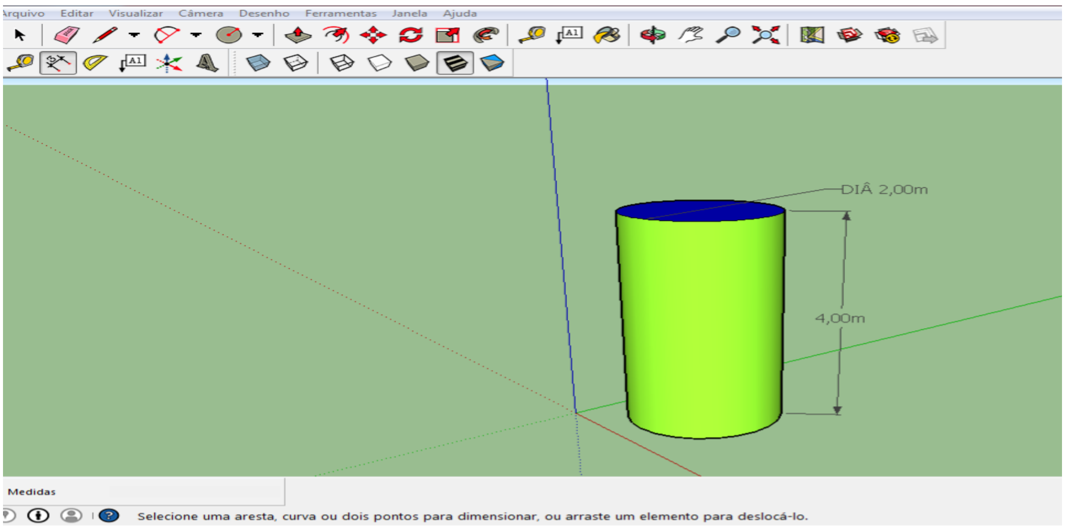


Figura 72 – Construção do cilindro
Fonte: Elaboração própria

3º Passo: para o cálculo da área da base, clique na base do cilindro e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha informações da entidade, assim aparecerá o valor da área da base; outra maneira de calcular a área da base do cilindro é: clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área da base do cilindro, $A_b = 3,11m^2$.(observe a Figura 73).

4º Passo: para o cálculo da área lateral, clique na lateral do cilindro e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área lateral, $A_l = 25,06m^2$.(observe a Figura 73).

5º Passo: para calcular a área total do cilindro, clique na figura e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha área e camada, de modo que logo aparecerá o valor da área total do cilindro circular reto, $A_t = 31,27m^2$. (observe a Figura 73).

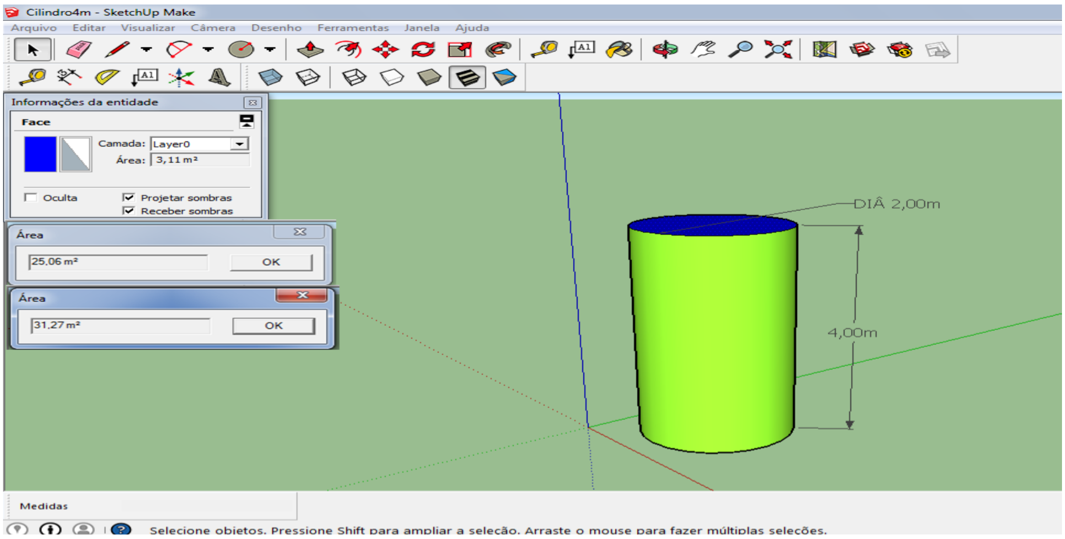


Figura 73 – Cilindro com suas áreas
Fonte: Elaboração própria

Agora peça para os alunos fazer os cálculos das áreas, da base, lateral e total, dessa figura utilizando as fórmulas matemáticas do cilindro circular reto e compare com as do software.

O professor pode pedir para os alunos também calcular o volume desse cilindro, pois, já tem o valor da área da base e a altura, basta multiplicar os valores, ou seja, $V = (3,11).(4)$, ou seja, $V = 12,44m^3$.

4.3.5 Atividade 5 - Cone

Construa um cone circular reto de altura 3m e raio da base 1m, determine, o valor da área da base, da área lateral e da área total.

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo na tela, embaixo, onde aparece o nome raio, digite o valor 1;

2º Passo: depois, selecione o botão fita métrica e leve para o centro do polígono e meça a altura de 3m, conforme Figura 74;

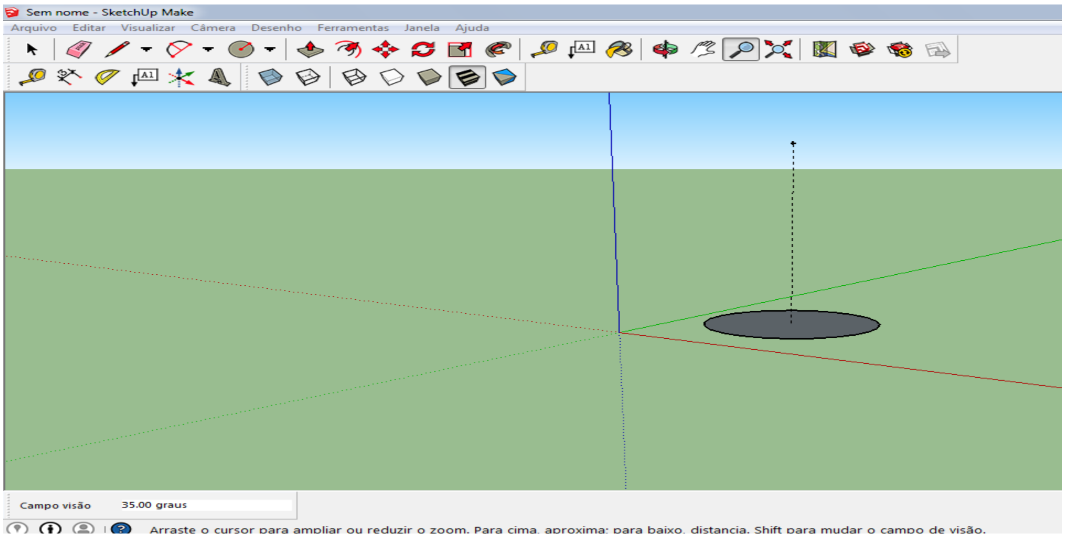


Figura 74 – Construção da base do cone
Fonte: Elaboração própria

3º Passo: em seguida, selecione o botão linha e passe em cima da linha tracejada, logo ela ficará cheia e com a altura desejada de 3m;

4º Passo: agora, liga-se esse ponto de cima com um ponto da circunferência, e liga-se este até o centro do círculo, que formará um triângulo (observe a Figura 75);

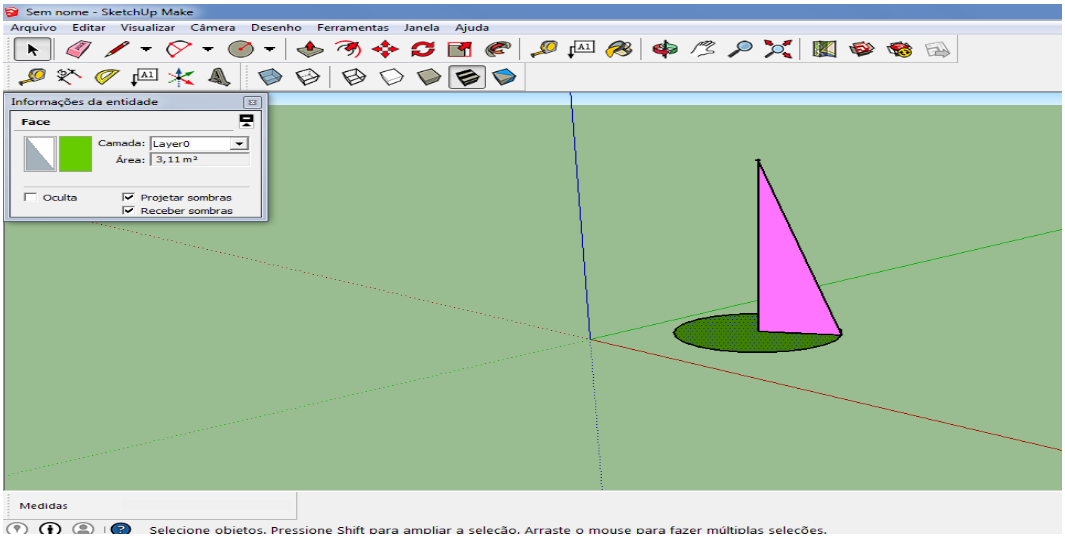


Figura 75 – Construção da base do cone com sua área da base
Fonte: Elaboração própria

5º Passo: depois disso, selecione o círculo da base com o botão selecionar;

6º Passo: clique no botão siga-me;

7º Passo: clique em cima do triângulo que se formou. Dessa forma, obtém-se o cone (observe a Figura 76).

8º Passo: para o cálculo da área da base, clique na base do cone, quando estiver no 4º passo, e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha informações da entidade, assim aparecerá o valor da área da base; outra maneira de calcular a área da base do cone é: clique na base do cone e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha selecionar; em seguida, escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área da base do cone, $A_b = 3,11m^2$.(observe a Figura 75).

9º Passo: para o cálculo da área lateral, clique na lateral do cone e depois, com o botão direito do mouse, dê outro clique e escolha área e seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área lateral, $A_l = 9,9m^2$.(observe a Figura 76).

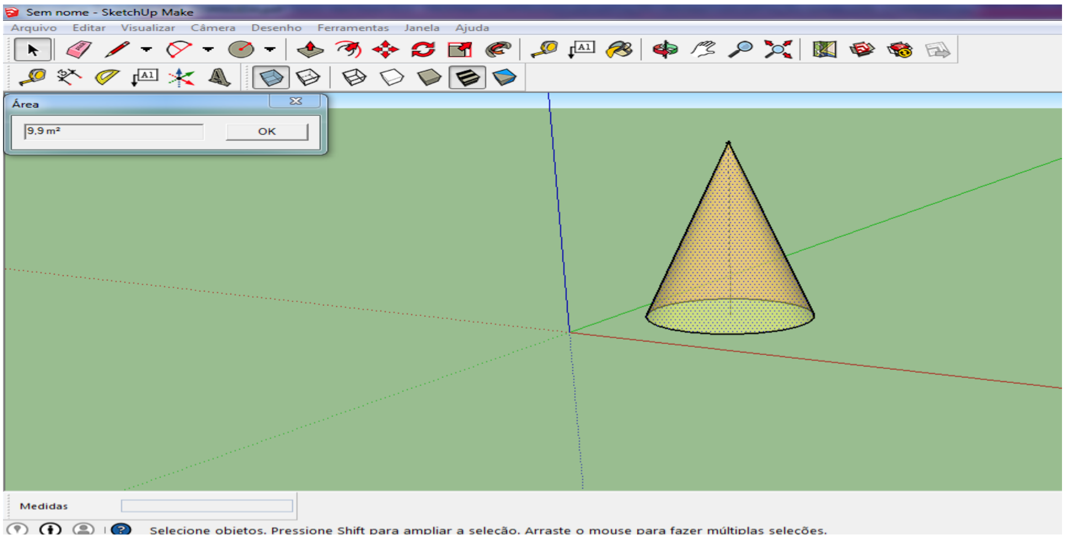


Figura 76 – Cone com sua área lateral
Fonte: Elaboração própria

10º Passo: para calcular a área total do cone, soma-se a área da base com a área lateral, pois o programa entende o cone, sem a base, ou seja, a figura é “oca”, logo o valor da área total do cone circular reto, $A_t = 13,01m^2$.

Agora peça para os alunos fazer os cálculos das áreas, da base, lateral e total, dessa figura utilizando as fórmulas matemáticas do cone circular reto e compare com as do software.

O professor pode pedir para os alunos também calcular o volume desse cone, pois, já tem o valor da área da base e a altura, basta multiplicar os valores e dividir o resultado por três, ou seja, $V = \dfrac{(3,11).(3)}{3}$, ou seja, $V = 3,11m^3$.

4.3.6 Atividade 6 - Esfera

Construa uma esfera de raio 2,5m e determine da área da superfície esférica.

1º Passo: seleciona-se o botão formas e, a seguir, o botão círculo, e desenha-se um círculo no centro do eixo tridimensional;

2º Passo: seleciona-se o botão orbitar para girar a tela e visualizar melhor o eixo vertical; em seguida, faz-se outro círculo em cima desse eixo, para obter o raio pedido no problema, embaixo, onde aparece o nome raio, digite o valor 2,5; assim formará o círculo de raio 2,5m, conforme Figura 77.

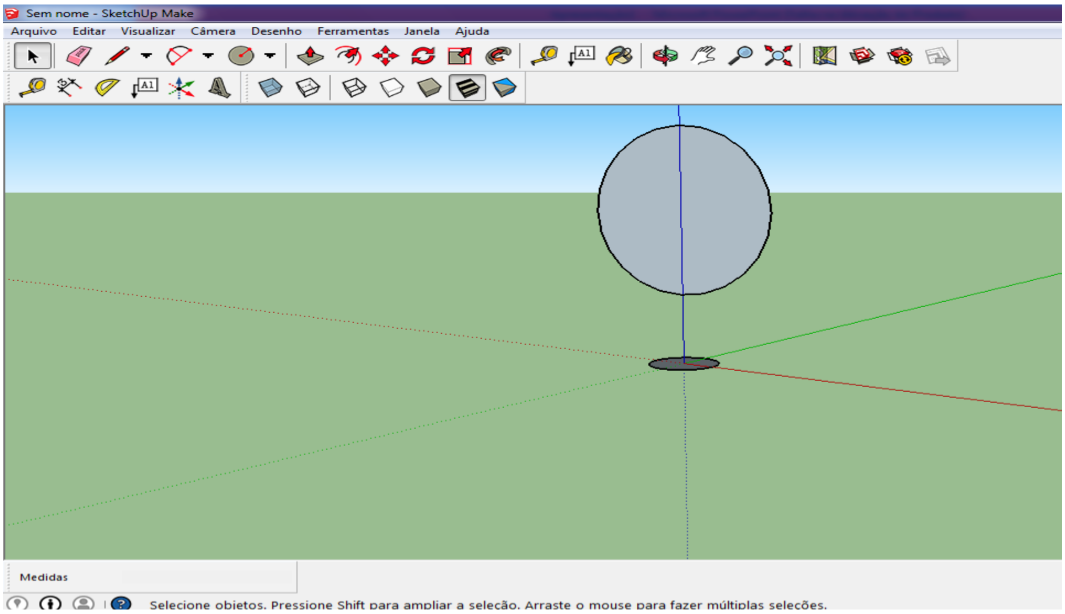


Figura 77 – Construção dos círculos da esfera
Fonte: Elaboração própria

3º Passo: escolhe-se o botão selecionar e seleciona-se o círculo da base;

4º Passo: clica-se no botão siga-me;

5º Passo: clica-se em cima do círculo menor que está na vertical e, assim, obtém-se uma esfera, conforme Figura 78.

6º Passo: para calcular a área da esfera, seleciona-se a figura e, com o botão direito do mouse, escolhe-se área e depois seleção, de modo que logo aparecerá o valor da área superfície da esfera, $A = 78,77m^2$ conforme Figura 78.

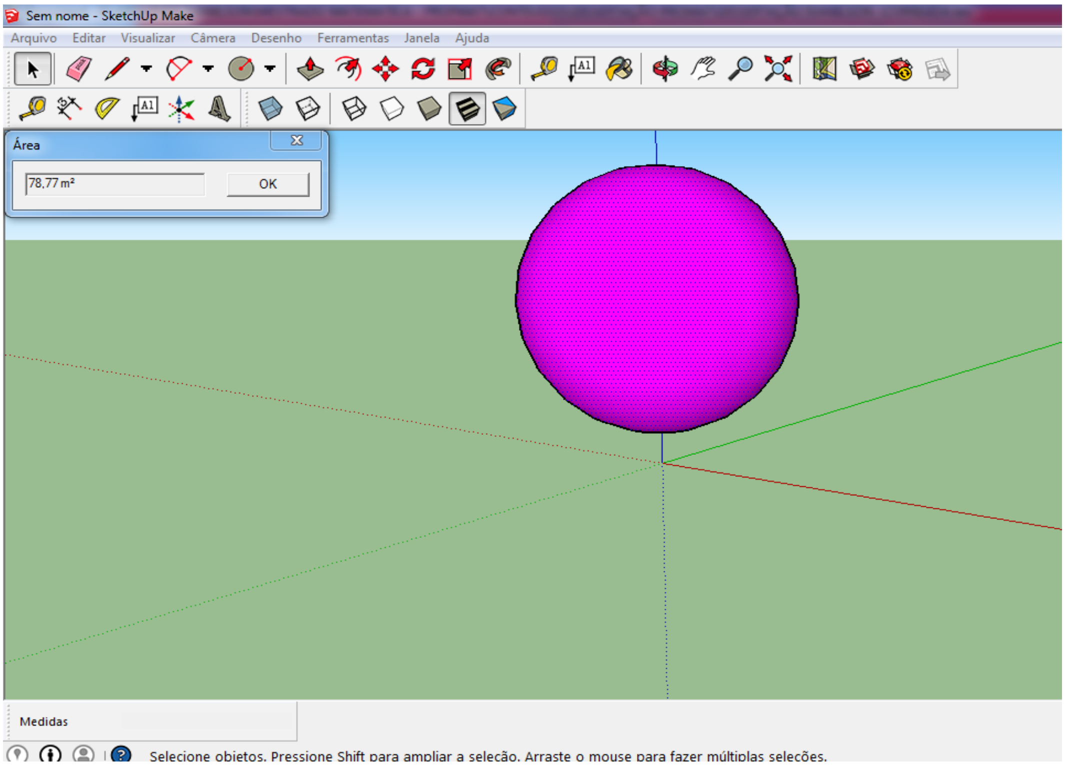


Figura 78 – Esfera com sua área

Fonte: Elaboração própria

Agora peça para os alunos fazer o cálculo da área da superfície da esfera utilizando a fórmula matemática da esfera e compare com as do software.

O professor pode pedir para os alunos também calcular o volume dessa esfera, pois, já tem o valor do raio, basta aplicar a fórmula, $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, ou seja, $V = 65,42m^3$.

4.4 EXERCÍCIOS DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O SKETCHUP

4.4.1 Exercício 1 - Prisma

Construa um prisma hexagonal regular, cuja aresta da base mede 1,5m e a aresta lateral mede 5m, determine a área de uma base, a área de uma face lateral e área total.

4.4.2 Exercício 2 - Paralelepípedo retângulo

Construa um paralelepípedo retângulo, de dimensões, 4,5m de comprimento, 3,5m de largura e 2,5m de altura, determine a medida de sua diagonal, área de cada face e sua área total.

4.4.3 Exercício 3 - Pirâmide

Construa uma pirâmide quadrangular regular, cujo aresta da base mede 1,5m e a altura 3m, determine, a medida do apótema da base, a medida do apótema da pirâmide, a medida da aresta lateral, o valor da área da base, área de uma face e sua área total.

4.4.4 Exercício 4 - Cilindro

Construa um cilindro circular reto de altura 5m e raio da base 2m, determine, o valor da área da base, da área lateral e da área total.

4.4.5 Exercício 5 - Cone

Construa um cone circular reto de altura 4m e raio da base 1,5m, determine, o valor da área da base, da área lateral e da área total.

4.4.6 Exercício 6 - Esfera

Construa uma esfera de raio 1,5m e determine da área da superfície esférica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de a Geometria Dinâmica possibilitar a criação de uma série de problemas mais reais e interessantes, atraindo a atenção e a motivação do usuário, é necessário que se estude novas formas de aplicá-la em sala de aula, para que não seja utilizada apenas para trabalhar em um computador, sem a preocupação com as inúmeras estratégias pedagógicas que podem ser exploradas.

Acredita-se que a utilização de softwares, como o SketchUp, trabalhando a Geometria Dinâmica, oferece novas perspectivas para o ensino de Geometria, tornando as atividades mais ricas e diversificadas. O estudo dos sólidos geométricos pode ser feito em diferentes níveis de rigor e profundidade, mas a compreensão visual é fundamental. Essas construções da proposta constituem apenas uma ferramenta a mais que o professor possa utilizar com seus alunos a fim de melhorar o ensino e a aprendizagem em relação aos sólidos geométricos, mas poderá criar outras atividades ou sugerir que os alunos criem outros sólidos com os conhecimentos que já foram adquiridos.

De acordo com os PCN's (BRASIL, 1997), o Ensino Médio tem por missão "[...] preparar o aluno para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente [...]". Nesse sentido, acredita-se que as atividades propostas buscam colaborar para a formação e o aprofundamento do estudo de Geometria do aluno de Ensino Médio, em especial Geometria Espacial Métrica.

Dessa forma, acredita-se que as atividades propostas apresentam-se como sugestão para serem desenvolvidas em sala de aula, pois podem constituir um poderoso meio de aprendizagem dos conceitos geométricos para os alunos, assim como uma oportunidade de desenvolvimento profissional para o professor, influenciando na sua formação e, consequentemente, em sua prática em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, C. B. **História da matemática**. tradução Helena Castro São Paulo: Blucher, 2012.

[2] BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: EDUSP, 1974.

[3] BRASIL, Secretaria de Educação do Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf Consultado>. Acesso em 20 de maio de 2014.

[4] BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares do Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

[5] CANO, C. A. . **Os recursos da Informática e os contextos de ensino e aprendizagem**. *In*: Sancho, J. M. Para uma tecnologia educacional. Porto Alegre: Artmed, 2001.

[6] CARVALHO, Daniel Santos de. **Uma Aplicação no Ensino dos Poliedros e Corpos Redondos para Turmas do 3º Ano do Ensino Médio Usando Dobraduras e Softwares Livres**. Dissertação de Mestrado. PROFMAT. Palmas-TO, 2013.

[7] DANTE, L.R. **Matemática contexto e aplicações**. v. 2. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[8] EVES, H.; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

[9] FONSECA, M.C.F.R. *et al.* **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[10] GASPAR, João Alberto da Motta. **Google SketchUp Pro 8 passo a passo**. São Paulo: VectorPro, 2010

[11] IEZZI, G. *et al.* **Matemática ciências e aplicações**. v. 2. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[12] NACARATO, Adair M. **A geometria no ensino fundamental: fundamentos e perspectivas de incorporação no currículo das séries iniciais**. *In*: SISTO, Fermino F.; DOBRÁNSZKY, Enid A.; MONTEIRO, Alexandrina (Org.). Cotidiano Escolar: questões de leitura, matemática e aprendizagem. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: USF, 2002.

[13] PAIVA, M. **Matemática Paiva**. v. 2. São Paulo: Moderna, 2009.

[14] PAVANELLO, R. M. **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação , Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

[15] PEREZ, G. **Prática reflexiva do professor de matemática**. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

[16] PONTE, J. P. de. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

[17] RODRIGUES, D.W.L. **Uma avaliação comparativa de interfaces homem-computador em programas de geometria dinâmica**. Dissertação de Mestrado. Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina. 2002.

[18] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V.**Matemática Ensino Médio**. v. 2. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[19] SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. v. 2. São Paulo: FTD, 2013.

[20] TAHAN, M. **O homem que calculava**. 68ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.