Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Leandro Machado Godinho

Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série

Rio de Janeiro

2014

Leandro Machado Godinho

Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Coorientador: Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S585 Godinho, Leandro Machado.
Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série / Leandro Machado Godinho. – 2014.
88 f.

Orientador: Claudia Ferreira Reis Concordido.
Coorientador: Augusto César de Castro Barbosa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Cálculo diferencial – Estudo e ensino- Teses. 2. Ensino médio- Teses. I. Concordido, Claudia Ferreira Reis. II. Barbosa, Augusto César de Castro. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.22 (07)

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_______________________________ _______________________________

Assinatura Data

Leandro Machado Godinho

Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de abril de 2014.

Banca Examinadora:

____
Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____
Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____
Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

À minha amada esposa Mariana. Aquela que mais me incentivou a começar novamente um mestrado. Aquela que teve enorme paciência com minha ausência nos momentos finais de maior dedicação. Aquela que levou muito a sério a frase “na saúde e na doença”, cuidando de mim e me botando para cima após duas cirurgias quase consecutivas em plena reta final do mestrado. Aquela a quem agradeço por todo o seu amor.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Roberto e Ozélia, por todo o amor e confiança depositados em mim por toda a vida. Em particular, pelo sacrifício feito, em tempos difíceis, para me manter em uma boa escola e aumentar minhas chances de sucesso acadêmico.

À minha família, em especial, minha avó Jandyra, que não teve tempo aqui na Terra de me ver matemático, mas teve tempo de me dar a chance de ter duas mães, meu tio Ricardo pelas sempre inspiradoras conversas científicas e minha irmã Tielle e minhas tias Jane, Conceição Maria e Janete por todo o amor e cumplicidade.

A todos os grandes amigos que fiz, ainda garoto, por conta do CEFET-RJ, e que insistem em continuar meus amigos tão próximos mesmo após décadas, casamentos, filhos e cabelos brancos.

Aos gênios Zico, Guga, Hetfield, Mustaine e Gauss.

Aos professores Mauricio Alejandro Vilches e Sílvio Pinha, da UERJ, cujas palavras de incentivo nos tempos da graduação, cada um à sua maneira, jamais vou esquecer.

Aos educadores Carmelita Azevedo, Paulo Rodolfo Magalhães, André Luiz Barreto e Irmã Márcia Santiago por toda a amizade e apoio profissional que me concederam a honra de receber: meu crescimento como professor teve tudo a ver com eles.

Ao grande amigo e professor Francisco Linhares, que, com seu conhecimento e experiência ímpares, soube me guiar por uma nova e gratificante atividade na Matemática.

Aos professores de Matemática do Campus São Cristóvão III do Colégio Pedro II, em especial à coordenadora Maria Helena Baccar, por toda a ajuda nesses dois anos de mestrado.

Aos meus orientadores Cláudia Ferreira Reis Concordido e Augusto César de Castro Barbosa por sua inestimável ajuda neste trabalho. Sempre solícitos e incentivadores, contribuíram muito com inúmeras sugestões e correções, em revisões invariavelmente cuidadosas do texto.

Ao douto membro da Banca Examinadora Victor Augusto Giraldo, por certamente engrandecer a importância deste trabalho com sua presença.

À CAPES pelo apoio financeiro ao longo desta empreitada.

Por fim, à minha esposa e maior incentivadora Mariana, que, ainda na falta dos filhos, é a principal razão pela qual eu ainda quero fazer coisas significativas na vida.

If the future's looking dark, we're the ones who have to shine. If there's no one in control, we're the ones who draw the line.

Neil Ellwood Peart

RESUMO

GODINHO, Leandro Machado. *Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série.* 2014. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Este trabalho traz uma proposta de atividades, a serem desenvolvidas em sala de aula, com o objetivo de introduzir o conceito de derivadas para os alunos da primeira série do Ensino Médio. Antes das atividades, estão presentes algumas breves pesquisas. O histórico da presença de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Brasil, assim como a análise de alguns livros didáticos, serve para mostrar como o assunto já foi e está sendo tratado no país. Também são exibidos aspectos sobre o Ensino Médio na Alemanha e nos Estados Unidos, países onde o cálculo está presente na Escola Secundária, embora de formas bastante diferentes. Um capítulo sobre a preparação adequada para as aulas também foi incluído, uma vez que a simples inserção da derivada poderia causar problemas de tempo para o cumprimento do cronograma e não trazer os resultados esperados. São necessários algum grau de adequação dos conteúdos ministrados e de cooperação com professores de Física. As atividades visando o ensino dos conceitos iniciais de derivada são motivadas por um problema físico de movimento. O foco é dado na intuição e na visualização de gráficos, para que haja uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. A utilização de um *software* de geometria dinâmica é requerida em boa parte do tempo, como importante ferramenta de apoio pedagógico.

Palavras-Chave: Cálculo no ensino médio. Velocidade instantânea. Linearidade local. Taxa de variação. Reta tangente. Derivada. *Software* de geometria dinâmica.

ABSTRACT

GODINHO, Leandro Machado. *Calculus at high school: a proposal for teaching derivatives at the first grade*. 2014. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

This paper presents a proposal of activities to be developed in the classroom, with the goal of introducing the concept of derivative for students in the first grade of secondary school. Before the activities, some brief researches are presented. The historical presence of the topics of Differential and Integral Calculus in brazilian High Schools, as well as the analysis of some textbooks, serves to show how it has been and is being treated in the country. Aspects of the High School are also shown in Germany and the United States, countries where the calculus is present in High School, though in quite different ways. A chapter about the proper preparation for these classes was also included, since the simple insertion of the derivative could cause problems for meeting the schedule and could not bring the expected results. Some degree of adequacy of the contents and cooperation with Physics teachers are needed. The activities aiming at teaching the initial concepts of derivatives are motivated by a physical problem of motion. The focus is given on intuition and visualization of graphs, so there is a better understanding of the concepts involved. The use of a dynamic geometry software is required for much of the time, as an important tool for pedagogical support.

Keywords: Calculus in high school. Instant speed. Local linearity. Rate of change. Tangent line. Derivative. Dynamic geometry software.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática, infelizmente, é muitas vezes uma pedra no sapato do estudante. O exercício contínuo do magistério ensina a nós, professores da Educação Básica, que a maioria dos jovens não se afeiçoa à nossa disciplina, que temos que dar o nosso melhor em troca de uma boa aceitação e que devemos lutar muito para conseguir obter bons resultados. Para nossa tristeza, são um tanto raras as turmas em que uma certa resistência à Matemática não ocorre e onde quase tudo dá certo, desde o gosto natural dos alunos pela nossa matéria até um bastante desejado bom aproveitamento. Diante dessa realidade, é quase uma obrigação do professor de Matemática tentar encontrar novos caminhos que possam levar a uma melhor compreensão, por parte dos alunos, do que lhes é ensinado.

E foi olhando por esse ângulo, o da tentativa de promover uma experiência diferente do que é o padrão estabelecido atualmente, e visando uma melhoria no ensino, ainda que em um campo de tamanho bem modesto, que surgiu este trabalho, que se propõe a incluir tópicos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio brasileiro, mas de forma bastante sutil e sem grandes alterações curriculares. Ressaltamos, portanto, que a proposta deste não é, em absoluto, incentivar a volta massiva do conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral (nos referimos tão somente a limites, derivada e integral) ao currículo do Ensino Médio. Embora não vejamos o total retorno do Cálculo como algo essencialmente ruim, não compartilhamos da opinião de que isso seria tremendamente benéfico. Se, por um lado, a total inclusão do Cálculo facilitaria a vida de quem fosse seguir alguma carreira onde o Cálculo estivesse presente, por outro lado, acrescentaria mais assuntos com pouca aplicabilidade no currículo do Ensino Médio, além de ser apenas mais um transtorno na vida daqueles que forem frequentar um curso universitário sem a presença do Cálculo. Estudar limites mais a fundo e resolver integrais não ajudará tanto em outros tópicos do Ensino Médio, ao contrário do que acreditamos ocorrer com a derivada. Vendo por esse prisma, nossa intenção é apenas introduzir algumas noções de derivada que consideramos importantes na compreensão de conceitos básicos de Física e Matemática, com os quais os estudantes terão contato ainda na 1ª série do Ensino Médio.

Diferentemente do que é habitualmente feito nos cursos universitários de Cálculo, aqui a preparação prevista para o aluno receber os conceitos iniciais sobre derivada não inclui um estudo detalhado dos limites. Este é também um dos motivos pelos quais a resistência à volta do Cálculo à Matemática escolar é grande: o tempo necessário para ensinar derivadas seria, supostamente, grande demais, dada a extensa lista de pré-requisitos, incluindo um bom estudo de limites. Entretanto, somos partidários da opinião do professor Geraldo Ávila (1933 – 2010), quando diz que

> "há também uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o Ensino Médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário." (ÁVILA, 2006)

Que fique bem claro que o contexto para as opiniões acima é o do Cálculo aplicado ao Ensino Médio; não se deseja sugerir a mesma mudança no ensino do Cálculo dado nas Universidades. É bastante claro para nós que, sem uma compreensão mais profunda de limites, o ensino de derivadas ficará com algumas lacunas[1] a serem preenchidas e que deveremos apelar para a intuição em alguns momentos. Isso pode parecer um aspecto muito ruim aos "olhos matemáticos", mas não é muito diferente da maneira como tratamos outros assuntos presentes na Matemática Básica – o que está longe de ser o ideal, mas é como se apresenta possível de ser feito com a extensa grade que temos que cumprir atualmente. Por exemplo, lidamos com somas dos termos de progressões geométricas infinitas sem antes ensinar limites. Os números irracionais são, por vezes, definidos por professores em sala de aula e tratados nos livros didáticos sem os devidos cuidado e rigor; a consequência disso, mesmo sem que o aluno perceba, é que números irracionais acabam sendo um exercício de "fé".

Assim, levaremos a cabo a ideia de apresentar um conjunto de atividades que vemos como suficiente para a absorção das ideias iniciais de derivada pelo alunado. A intenção é que essas atividades sejam desenvolvidas ainda durante a primeira série, aproveitando todo o contexto de funções nessa série. Elas são baseadas em gráficos e têm abordagem tão intuitiva quanto possível, sem a utilização de conceitos formais de limites. Durante o correr dessas atividades, sugerimos a utilização, como apoio pedagógico, do *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra – que pode obviamente ser substituído por outro que faça suas vezes –, a fim de tornar a exposição mais rápida e precisa, além de possibilitar uma rápida resposta a prováveis questionamentos e uma apresentação muito mais variada de exemplos para cada situação. Não obstante, o uso da informática não se torna algo obrigatório para o sucesso da apresentação de todas as atividades, já que é perfeitamente possível desenvolver muitas das ideias sem a utilização da tecnologia.

Também, antes do capítulo com as atividades, vamos apresentar alguns aspectos históricos da presença do Cálculo no ensino secundário, assim como exemplos de suas

[1] Essas lacunas somente devem ser consideradas segundo um ponto de vista estritamente formal no estudo das derivadas. Segundo Giraldo (2014), "a ordem na qual os conceitos estão estabelecidos na matemática contemporânea nem sempre fornece a melhor forma de ensinar".

aplicações e propostas de implementação. Levando-se todos esses aspectos em consideração, esse trabalho ficou estruturado essencialmente em duas partes: na primeira, vêm os três primeiros capítulos, responsáveis pela parte histórica e breve pesquisa sobre alguns aspectos da aplicação do Cálculo ao Ensino Médio atualmente. O primeiro capítulo propõe-se a mostrar o vaivém histórico do Cálculo como parte integrante dos programas regulares do Ensino Médio brasileiro. Em seguida, mostramos um breve panorama do que vem sendo feito atualmente no Brasil a respeito do Cálculo em livros didáticos voltados para o Ensino Médio. O terceiro capítulo dá mostras de como é feita a inclusão dos tópicos do Cálculo no Ensino Médio em dois outros países: Alemanha e Estados Unidos[2]. A segunda parte, a partir do quarto capítulo, versa sobre a nossa proposta em si. O capítulo 4 sugere a preparação necessária para a implementação das ideias aqui propaladas, para, finalmente, no quinto capítulo, mostrarmos como imaginamos ver as noções de derivada sendo efetivamente apresentadas aos estudantes secundaristas.

[2] Esses países foram escolhidos por razões distintas. Os Estados Unidos pela facilidade com a língua; o inglês é indispensável atualmente e tornou-se uma língua estrangeira “amigável”. Já a Alemanha foi escolhida por conta do acesso relativamente fácil do autor a educadores da Escola Alemã Corcovado, no Rio de Janeiro.

1 BREVE HISTÓRICO

Há muitos anos a incorporação do Cálculo Diferencial e Integral ao currículo do Ensino Básico vem sendo discutida no Brasil. Mas esse não é um assunto de nosso tempo apenas, uma vez que o Cálculo já foi incluído e excluído diversas vezes ao longo da história de nossa educação. Não obstante, desde sua primeira introdução oficial, em 1890, estamos passando pelo maior período de tempo desde a sua última exclusão: já se vão em torno de 50 anos desde a última reforma que o retirou dos programas.

1.1 1890 – 1901: Reforma Benjamin Constant e Código Epitácio Pessoa

A primeira vez que o Cálculo fez parte dos programas oficiais foi com aquela que ficou conhecida como Reforma Benjamin Constant – promovida pelo então Ministro e Secretário de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, Benjamin Constant (1833 – 1891) –, levada a cabo pelo Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1890[3]. Nessa lei, são impostas ao terceiro ano da escola secundária as seguintes cadeiras relacionadas à Matemática, com suas respectivas cargas horárias semanais:

> **1ª cadeira** - Geometria geral e o seu complemento algébrico. Cálculo Diferencial e Integral, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita: 6 horas.
> **2ª cadeira** - Geometria descritiva. Teoria das sombras e perspectiva. Trabalhos gráficos correspondentes: 3 horas. (BRASIL, 1890)

Com a estrutura escolar sugerida pelo decreto (BRASIL, 1890), os alunos deveriam cursar essas disciplinas por volta dos 17 ou 18 anos de idade, o que corresponde atualmente às idades com que eles chegam ao final do Ensino Médio.

Porém, o currículo voltado para as ciências e com “fisionomia enciclopédica” (Palmas Filho, 2005), introduzido por Benjamin Constant teve um freio já em 1901, com a reforma promovida por Epitácio Pessoa (1865 – 1942), que ficou conhecida como Código Epitácio

[3] Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=65346>. Acesso em: 15 fev. 2014.

Pessoa[4]. Aqui, um caráter mais humanista volta a predominar na educação básica e alguns conteúdos deixam de ser ministrados no Ensino Médio, entre eles o Cálculo.

1.2 **1929 – 1932: Reforma Francisco Campos**

Algumas reformas, nacionais e estaduais, se passam antes do Cálculo voltar a ser parte dos programas secundários. O assunto somente ganha força novamente em 1929, com as inovações curriculares que foram introduzidas pelo professor de Matemática Euclides Roxo (1890 – 1950) no Colégio Pedro II, instituição da qual ele era o então diretor. Ele aderiu às ideias propaladas pela ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), então presidida pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925), que iniciou estudos sobre o ensino da Matemática na Escola Secundária em vários países.

> As ideias de Euclides Roxo diziam respeito basicamente à fusão dos diferentes ramos da Matemática, interligando-os em uma única disciplina à reestruturação de todo o currículo em torno do conceito de função e à introdução de noções de Cálculo Diferencial e Integral para todos os alunos do secundário. (SOARES, DASSIE, ROCHA, 2004, p.8)

Observe que, até este momento, a Matemática era subdividida em várias cadeiras isoladas e, somente a partir de então, passou a existir uma única disciplina chamada Matemática. Em 1931, baseada nessas ideias, surge a reforma implementada por Francisco Campos (1891-1968) através do Decreto n. 19.890, de 18 de abril de 1931[5]; posteriormente, outro decreto, o de n. 21.241 de 4 de abril de 1932[6] dá linhas finais à reforma. Esses decretos não versam explicitamente sobre os conteúdos que serão ministrados nas escolas secundárias, mas sim que "o Ensino Secundário oficialmente reconhecido será ministrado no Colégio Pedro II e em estabelecimentos sob regime de inspeção oficial". Além disso,

> os programas do Ensino Secundário, bem como as instruções sobre os métodos de ensino, serão expedidos pelo Ministério da Educação e Saúde Pública e revistos, de

---

[4] Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=60451>. Acesso em 15 fev. 2014.

[5] Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=40440>. Acesso em: 15 fev. 2014.

[6] Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=32229>. Acesso em: 15 fev. 2014.

> três em três anos, por uma comissão designada pelo ministro e à qual serão submetidas as propostas elaboradas pela Congregação do Colégio Pedro II. (BRASIL, 1931)

1.3 **Anos 1960: Matemática Moderna**

Portanto, o Cálculo estava de volta à sala de aula secundarista, situação que perduraria até a chegada do movimento chamado Matemática Moderna, iniciado nos anos 1950 e consolidado nos anos 1960. Este movimento, que foi um dos mais importantes no que tange à área da Educação Matemática (segundo Soares et al. (2004), "pode-se dizer com certeza que o Movimento da Matemática Moderna foi a que se tornou mais conhecida"), pregava que o ensino desta deveria ter ênfase nas estruturas matemáticas, com uma forte valorização do estudo dos conjuntos e do rigor no uso da simbologia. Apesar da força do movimento, seus objetivos não foram atingidos. A preparação necessária para os professores não foi feita adequadamente, de forma que muitos tiveram dificuldades em se adaptar aos novos conceitos. Para Soares et al. (2004) "a reforma deixou de considerar que aquilo que se propunha estava fora do alcance dos alunos e dos professores. Estes, obrigados a ensinar uma matemática por cujos métodos não foram preparados, ministravam um ensino deficiente e só agravaram os problemas". O excesso de rigor exigido tornou alguns assuntos quase inviáveis de serem bem trabalhados no ensino médio, entre eles o Cálculo, que demandaria, de acordo com os novos padrões, quase um curso de Análise Matemática para que fosse desenvolvido a contento. Dessa forma, uma vez mais, oficializado por reformas feitas nos anos 1960[7], o Cálculo sai da Matemática secundarista.

Desde então, o Cálculo está presente em apenas parte da bibliografia disponível, assim como é ensinado antes da universidade em poucos estabelecimentos de ensino, principalmente naqueles voltados à preparação para vestibulares que cobram o Cálculo em seus programas, que em grande parte são as escolas militares superiores. Atualmente, muitos professores estão fazendo seu trabalhos de conclusão de curso no PROFMAT, no país inteiro, voltados para o assunto, com focos bastante variados[8].

[7] Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm >. Acesso em: 16 fev. 2014.

[8] Ver Apêndice B – Lista com alguns trabalhos do PROFMAT voltados para o ensino do Cálculo no Ensino Médio.

2 **LIVROS DIDÁTICOS**

Este capítulo trata de analisar brevemente uma pequena lista de livros didáticos de Ensino Médio, desde obras atuais a outras mais antigas. A ideia é traçar uma espécie de linha do tempo e perceber qual foi o foco dado pelos livros em relação ao Cálculo e se houve alguma mudança de abordagem com o passar dos anos. Os títulos analisados foram escolhidos dentre os disponíveis na biblioteca da sala de Matemática do *Campus* São Cristóvão III do Colégio Pedro II. Nessa escolha, houve o cuidado de se evitar, apenas entre os mais antigos, que fossem escolhidos livros com publicações em anos muito próximos. Os comentários tecidos eventualmente apontam virtudes ou defeitos nesses livros, sempre sob a ótica do presente trabalho. Ou seja, os comentários serão baseados sob o ponto de vista do que gostaríamos de ter em um livro didático: noções de derivada apresentadas ainda na primeira série do Ensino Médio, sem uma introdução formal e extensa sobre limites (que apareceriam de forma intuitiva apenas como ferramenta) e sem menção ao cálculo integral.

Essa comparação é importante para nossos objetivos, pois temos a intenção de avaliar se algum livro poderia ser adotado por aqueles que se disponham a seguir as sugestões passadas neste trabalho.

2.1 **Os livros**

I) Ano 1976 – Iezzi et al.[9]

Este livro, de 3ª série, apresenta um capítulo sobre limites e três capítulos sobre derivadas e suas aplicações. No capítulo de limites, embora se use certa dose de intuição e se omitam várias provas, a abordagem é bastante direta e sem qualquer contextualização, incluindo a “definição por épsilons e deltas”, limites fundamentais e a ideia de continuidade de funções. Os autores, no prefácio, ressaltam que a parte de limites foi reduzida em função da maior atenção que seria dada à parte de derivada.

No estudo da derivada, ela é apresentada como taxa de variação, sendo mostrado seu significado geométrico e sua aplicação na cinemática, como velocidade e aceleração. Em

[9] IEZZI, G. et al. *Matemática: 3ª série, 2º grau*. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1976.

seguida são mostradas algumas regras de derivação, assim como derivação de funções compostas e inversas e derivadas sucessivas. Por fim, o último capítulo fala sobre crescimento e decrescimento, além de máximos e mínimos.

II) Ano 1990 – Iezzi et al.[10]

Este é o mesmo livro comentado anteriormente, apenas em uma edição 14 anos mais recente. A mesma estrutura se manteve nos capítulos dedicados ao Cálculo: um para limites e três para derivadas, com os mesmos focos da edição anterior em cada um deles.

III) Ano 1996 – Gentil et al.[11]

O livro apresenta um capítulo para limites, um para derivadas e um para integrais. De todos os livros avaliados neste trabalho, este é o único que tem uma parte dedicada à integral. A parte de limites é feita de forma intuitiva, sem definições formais, onde são apresentados propriedades e limites fundamentais, assim como a noção de continuidade de funções.

O capítulo de derivadas faz um estudo bastante extenso, começando com taxas de variação e chegando a derivadas de ordem superior. Entretanto, muitos dos tópicos são apresentados de forma bastante superficial e "com pressa", dando a nítida impressão de que o assunto foi incluído por obrigação e não tem tanta importância. Inclusive, discute-se a derivada de uma função em um ponto em curvas que sequer poderiam representar gráficos de funções.

A parte que diz respeito às integrais é bastante breve. Começa mostrando apenas do que se trata uma integral indefinida e, já na terceira página, uma lista de integrais é exibida juntamente com uma lista de regras de derivação. Em seguida, é apresentada a integral definida, como sendo a área entre o eixo x e uma curva, com uma justificativa subsequente. Nenhuma aplicação é mostrada.

IV) Ano 2003 – Barreto Filho & da Silva[12]

Aqui há um capítulo sobre limites e outro sobre derivadas. Na parte de limites, os autores optaram por fazer uma introdução baseada em uma situação prática, mas com contextualização forçada, o que não oferece muita motivação para a introdução do tema. Em seguida, há uma

[10] IEZZI, G. et al. *Matemática: 3ª série, 2º grau*. 9. ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

[11] GENTIL, N. et al. *Matemática para o 2º grau*: Volume 3. 5. ed. São Paulo: Ática, 1996.

[12] BARRETO FILHO, B.; DA SILVA, C. X. *Matemática aula por aula: 3ª série*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003.

definição formal de limites, com o estudo prosseguindo com suas propriedades, continuidade de funções e limites fundamentais.

O capítulo de derivadas começa diretamente com a definição da derivada de uma função em um ponto, não apresentando qualquer motivação para tal. E prossegue mostrando significado geométrico da derivada, função derivada, regras de derivação e variação de funções.

É importante ressaltar que nestes capítulos dedicados ao Cálculo não há um só exemplo de aplicação prática dos conhecimentos passados, nem mesmo da derivada, muito embora o primeiro parágrafo do capítulo de derivadas ressalte a importância do Cálculo para uma compreensão melhor dos fenômenos físicos.

V) Ano 2010 – Smole & Diniz[13]

Este livro, de todos os que foram analisados neste trabalho, é o que mais se aproxima da apresentação do Cálculo que julgamos ser mais conveniente para o Ensino Médio, pois existe apenas um capítulo sobre derivadas, sem haver um grande, exaustivo e desnecessário capítulo sobre limites precedendo-o.

A derivada é apresentada como taxa de variação instantânea de uma função, com um breve comentário sobre limites entremeando a explanação. Segue-se sua interpretação na cinemática, derivada como função, estudo do sinal da derivada e problemas de máximos e mínimos. Em todos os momentos há exercícios contextualizados.

VI) Ano 2010 – Dante[14]

O presente livro também apresenta uma proposta que consideramos boa, pois não há apresentação isolada de limites, que aparecem apenas como ferramenta para o cálculo de derivadas. A teoria apresenta taxas de variação média e segue para a determinação de derivadas. Em seguida, encontram-se derivadas de funções, propriedades, aplicações em cinemática, interpretação geométrica, reta tangente e crescimento e decrescimento. Não há discussão sobre máximos e mínimos. A contextualização é feita apenas no âmbito da cinemática.

---

[13] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática: ensino médio: volume 3*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[14] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações: volume 3*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

VII) Ano 2013 – Paiva[15]

A parte de Cálculo começa com uma abordagem sobre retas tangentes e taxas de variação. Porém, em seguida, há um extenso capítulo com detalhamento, a nosso ver, desnecessário sobre limites e continuidade.

As derivadas são apresentadas com detalhes, passando pelas regras de derivação, regra da cadeia, derivação da função inversa e derivadas sucessivas. As aplicações em cinemática são mostradas apenas no final do capítulo.

2.2 **Comentários**

Na biblioteca da sala de Matemática do *Campus* São Cristóvão III do Colégio Pedro II há diversos livros de matemática básica, sendo, quase na sua totalidade, livros de Ensino Médio[16]. Aproximadamente metade dos livros didáticos consultados possuía uma parte dedicada ao Cálculo. Sete desses livros foram escolhidos para fazer parte desta análise. Destes, a maioria apresentava capítulos sobre limites e derivadas, dois apenas sobre derivadas e apenas um mostrava também conceitos de integral. No final deste capítulo há um quadro comparativo com diversos aspectos dos livros analisados.

Porém, um aspecto foi repetido em todos eles: o Cálculo apenas é apresentado na 3ª série do Ensino Médio[17]. E dessa forma, infelizmente, o ganho dos estudantes fica limitado, pois a parte de funções e gráficos já foi estudada há muito tempo. Também a cinemática – que seria a principal aplicação de derivadas em Física no Ensino Médio, fato evidenciado pelos recorrentes apelos à contextualização usando esse assunto – já deve ter sido estudada em séries anteriores. Portanto, mesmo com aqueles livros em que a forma de exposição se alinha à proposta desse trabalho – com a apresentação apenas da derivada, sem ênfase em limites e sem qualquer menção à integral – existe esse problema de incompatibilidade temporal, pois nosso desejo é apresentar os conceitos ainda na 1ª série. Assim, o profissional que desejar

[15] PAIVA, M. *Moderna Plus: Matemática: Volume 3,* 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[16] O Campus São Cristóvão III do Colégio Pedro II atende apenas a turmas de Ensino Médio.

[17] Nenhum livro no formato *volume único* possuía capítulos sobre Cálculo.

trabalhar com diretrizes próximas às desse trabalho deverá sempre preparar seu próprio material.

A apresentação do Cálculo sempre nos últimos capítulos dos livros de 3ª série sugere algumas coisas. A sua inclusão é tratada como um mero complemento aos demais conhecimentos já oferecidos nos outros volumes. Isso é perfeitamente justificável, uma vez que o Cálculo não faz parte dos programas secundaristas oficiais no Brasil. Esse posicionamento do conteúdo apenas informa o estudante sobre o assunto, de forma que esse conhecimento seja aproveitado em algum concurso que cobre noções de Cálculo ou mesmo como preparação para um curso de Cálculo na Universidade.

A proposta desse trabalho diverge, em muitos casos, da postura adotada pelos autores dos livros analisados em relação ao conteúdo ministrado. Mas esse é um problema menor, uma vez que bastaria ignorar as partes com as quais não se deseja trabalhar. Porém, há outro problema: o momento de aplicação dos conceitos. E, infelizmente, este não pode ser superado, pois obrigaria os alunos a possuírem o livro da 3ª série enquanto ainda cursam a 1ª, apenas para aproveitar a parte de derivadas. Portanto, nossa conclusão é que nenhum deles poderia ser adotado como livro-texto por quem se dispusesse a usar as ideias aqui propaladas.

A tabela a seguir mostra um resumo das características de cada livro. Os textos grifados em verde são considerados positivos sob a ótica deste trabalho.

Quadro 1 - Resumo da análise dos livros

Autor(es)	Ano	Limites: Capítulo Exclusivo	Limites: Contexto Introdutório	Derivada	Derivada: Contexto Introdutório	Derivada: Aplicações	Integral	Série
Iezzi et al.	1976	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada; variação das funções	Não	3ª
Iezzi et al.	1990	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada; variação das funções	Não	3ª
Gentil et al.	1996	Sim	Gráficos e aproximações	Sim	Taxa de variação e limite	Reta tangente; cinemática (somente em exercícios); máximos e mínimos	Sim	3ª
Barreto Filho & da Silva	2003	Sim	Exemplo forçado	Sim	Taxa de variação e limite	Máximos e mínimos (sem contexto)	Não	3ª
Smole & Diniz	2010	Não	Taxa de variação instantânea	Sim	Reta tangente	Cinemática; função derivada; máximos e mínimos	Não	3ª
Dante	2010	Não	Taxa de variação instantânea	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada	Não	3ª
Paiva	2013	Sim	Taxa de variação instantânea	Sim	Taxa de variação e limite	Cinemática; reta tangente; função derivada	Não	3ª

Fonte: O autor, 2014.

3 OUTROS PAÍSES

Este capítulo é dedicado a mostrar como dois outros países, a Alemanha e os Estados Unidos, lidam com a presença do Cálculo no Ensino Médio. Conforme já citado na introdução, a Alemanha foi escolhida pela proximidade do autor com profissionais da Escola Alemã Corcovado e os Estados Unidos, por conta da facilidade com a língua inglesa.

3.1 Como é feito na Alemanha

Antes de discutir a presença do Cálculo no Ensino Básico na Alemanha, vamos fazer uma introdução sobre como funciona o sistema educacional no país[18]. Na Alemanha, a educação formal é obrigatória: lá é ilegal um cidadão educar seu filho em casa ou deixá-lo fora da escola. A organização do sistema é feita majoritariamente pelos estados, que decidem desde os currículos das disciplinas até os tipos de escolas que são oferecidas, cabendo ao governo federal pouca jurisdição sobre a matéria.

Basicamente, após o Ensino Primário (*Grundschule*), que se estende até uma idade de 10 anos[19], em média, cada criança será encaminhada para um diferente tipo de escola. Tradicionalmente esse encaminhamento é feito pelos professores, baseado na performance dos estudantes durante os anos letivos prévios, mas em alguns estados os pais participam da decisão. Em muitos casos, esse momento pode ser um problema, pois dependendo do caminho a ser trilhado pelo estudante, suas opções educacionais futuras ficam mais limitadas ou dificultadas.

Os tipos de escola disponíveis na maioria dos estados são: *Hauptschule*, *Realschule* e *Gymnasium*[20]. Na *Hauptschule*, os estudantes fazem um curso com duração de cinco anos, com ênfase na preparação para o mercado de trabalho. Na *Realschule*, são seis anos de curso e o tipo

---

[18] As informações sobre o sistema educacional alemão foram extraídas das seguintes fontes: <http://www.ukgermanconnection.org/schools-german-education-system>, acesso em 19 mar. 2014 e <http://www.siemens.de/jobs/schulabsolventen/information-parents/Documents/TextEltern_EN.pdf>, acesso em 19 mar. 2014.

[19] A *Grundschule* dura 4 anos na maioria dos estados, com exceção de alguns, como *Berlin* e *Brandenburg*, em que dura 6 anos.

[20] Há ainda outros tipos de escola na Alemanha. Em algumas regiões está disponível a *Gesamtschule*, que combina fatores dos três tipos tradicionais de escola. A *Gesamtschule* e as três mais importantes, citadas no texto, foram responsáveis por 86,7% das matrículas no nível pós-primário em 2011, segundo a KMK (*Kultusminister Konferenz*, órgão oficial ligado à educação na Alemanha): <http://www.kmk.org>, acesso em 19 mar. 2014.

de educação é mais abrangente do que a fornecida na *Hauptschule*, com a presença de uma segunda língua estrangeira, por exemplo. Na *Realschule*, é esperado dos estudantes que tenham mais iniciativa na aprendizagem do que aqueles da *Hauptschule*, apesar de ainda prover uma educação mais orientada para aspectos práticos do que a do *Gymnasium*.

O curso *Gymnasium* dura oito anos e seus últimos três anos correspondem aproximadamente ao Ensino Médio brasileiro. O foco aqui é dado mais na parte científica, com a presunção de que os estudantes seguirão seus estudos em uma Universidade, ou ainda tomarão parte em um programa dual de estudos, com parte teórica ministrada em uma universidade e parte prática aprendida trabalhando em uma empresa. Ao final de todos os tipos de escola, os estudantes podem obter diferentes certificados de conclusão, sendo, de todos, o mais importante o *Abitur*, que é concedido àqueles que finalizam o *Gymnasium* e passam no exame correspondente. O *Abitur* é uma espécie de vestibular na Alemanha, que funciona como um certificado de aptidão para o ensino superior e, em casos de alta demanda por determinado curso, o grau obtido serve para classificar os estudantes e determinar aqueles que conseguirão as vagas. Fazer um paralelo entre o *Abitur* alemão e o ENEM brasileiro é algo bastante pertinente.

Quanto aos currículos, segundo o professor de Matemática alemão Markus Häder, da Escola Alemã Corcovado, no Rio de Janeiro, não existe um programa de Matemática unificado na Alemanha, cabendo a cada estado decidir os tópicos que serão ensinados em cada tipo de escola e em cada série. Ainda segundo Häder, o Cálculo faz parte da grade curricular em vários tipos de escola, dependendo do estado. No caso particular da Escola Alemã Corcovado, o ensino é baseado nos parâmetros curriculares do estado de *Baden-Württemberg*. Durante todos os três anos finais, equivalentes ao Ensino Médio brasileiro, os alunos têm contato com o Cálculo. Eles aprendem limites e derivadas na turma 10 (1ª série) e integral na turma 11 (2ª série), além de terem contato com vários desses conceitos também na turma 12 (3ª série).

Apesar de todo esse conteúdo a mais em relação ao nosso currículo, o professor Häder frisou que diversos conteúdos abordados no Brasil não pertencem aos currículos secundaristas na Alemanha. Por exemplo, os números complexos não são estudados no Ensino Médio. As sequências numéricas, como progressões aritméticas e geométricas, são opcionais, uma vez que não fazem parte do conteúdo do *Abitur*. O estudo de conjuntos e estruturas algébricas deixou de ter importância há muitos anos. A análise combinatória também não faz parte do conteúdo; por outro lado, a probabilidade está presente em quase todas as séries desde os anos de Ensino Fundamental e a geometria analítica ocupa papel fundamental na turma 12.

No estado da Bavária[21], o currículo do *Gymnasium* é um pouco diferente. Segundo dados colhidos com o *Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung* (ISB)[22], no 8º ano os alunos já têm contato com a ideia de função, que no Brasil só começa no 9º ano do Ensino Fundamental ou até mesmo na 1ª série do Ensino Médio. No 9º ano, já aprendem conceitos sobre prisma, cilindro, pirâmide e cone, o que normalmente, no Brasil, é visto somente nos anos finais do Ensino Médio. A seguir são apresentados os conteúdos das últimas três séries na Bavária (com suas séries equivalentes no Brasil).

a) **Turma 10 (Alemanha) / 1ª Série (Brasil)**
   - Funções: crescimento exponencial, logaritmo, expansão da teoria da função (incluindo limites).
   - Probabilidade: probabilidade condicional.
   - Trigonometria: ciclo trigonométrico.
   - Geometria Espacial: esfera.

b) **Turma 11 (Alemanha) / 2ª Série (Brasil)**
   - Cálculo: funções racionais (análise gráfica e assíntotas), diferenciação local e global, aplicações da primeira derivada, regras de derivação, aplicações do cálculo diferencial.
   - Probabilidade: noção abstrata de probabilidade.
   - Álgebra Linear: sistema de coordenadas cartesianas no espaço tridimensional, vetores, produtos escalar e vetorial, cálculo de áreas e volumes.

c) **Turma 12 (Alemanha) / 3ª Série (Brasil)**
   - Cálculo: integral definida, teorema fundamental do Cálculo, cálculo de áreas, relações entre gráficos derivadas e integrais de funções, pontos de inflexão, aplicações do cálculo.
   - Estatística: coeficiente binomial, distribuição binomial.
   - Geometria Analítica: equações de retas e planos, posições relativas, distâncias e ângulos, aplicações.

[21] Ou Baviera (*Bayern*, em alemão).

[22] *Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung* (Instituto Estadual de Qualidade Escolar e Pesquisas Educacionais). Disponível em: <http://www.isb.bayern.de>. Acesso em: 20 mar. 2014.
Sítio com informações curriculares resumidas de cada série disponível em:<http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26378>. Acesso em 20 mar. 2014.

É importante ressaltar que as escolas na Alemanha usualmente possuem carga horária próxima à praticada na maioria das escolas brasileiras, com os alunos começando o dia letivo por volta de 7h e terminando-o por volta das 13h. Desta forma, é bastante fácil perceber que o modelo alemão (em relação ao Cálculo no Ensino Médio) só poderia ser aplicado no Brasil com uma das duas providências a seguir (ou com uma combinação equilibrada delas):

a) aumentar substancialmente o tempo de permanência do aluno na escola, incrementando bastante a carga horária de Matemática;
b) diminuição significativa dos demais conteúdos ministrados em Matemática.

3.2 **Como é feito nos Estados Unidos**

Nos Estados Unidos é diferente, o aluno opta por fazer as matérias de Cálculo ou não, conforme as suas intenções futuras. Existe um programa chamado AP, sigla para *Advanced Placement*[23], coordenado pela *College Board*[24], cujos cursos têm todos a mesma característica essencial: são cursos optativos, que oferecem adiantadamente ao estudante o conhecimento de disciplinas que são oferecidas nas universidades. As vantagens de se fazer um curso AP são, basicamente, o fato de que muitas universidades levam em conta no seu processo seletivo o desempenho do estudante no exame e o interesse demonstrado ao cursá-lo e, além disso, notas altas podem garantir os créditos correspondentes e a consequente isenção de cursar a disciplina, no caso de algumas universidades.

Existe uma extensa gama de cursos AP, passando por disciplinas vinculadas às Artes, Inglês, História e Ciências Sociais, Matemática, Ciências e línguas[25]. Ligados à Matemática, há quatro cursos AP: Estatística, Ciência da Computação, Cálculo AB e Cálculo BC.

O curso de Cálculo AB aproxima-se bastante de um semestre de Cálculo I, conforme usualmente é ministrado nas Universidades brasileiras, com as noções de limite, derivada e

---

[23] Significa algo como “Colocação Avançada”.

[24] Instituição que fomenta atividades pré-universitárias nos EUA. Sítio oficial disponível em: <http://www.collegeboard.org>. Acesso em: 25 fev. 2014.

[25] Uma relação completa de cursos AP está disponível em: <https://apstudent.collegeboard.org/apcourse>. Acesso em: 25 fev. 2014.

integral. O programa completo, que pode ser encontrado no sítio da *College Board*, é o seguinte[26]:

a) Funções, Gráficos e Limites:

- Análise de gráficos;
- Limites de funções (incluindo limites laterais);
- Comportamento assintótico e ilimitado;
- Continuidade como propriedade de funções.

b) Derivadas:

- Conceito de derivada;
- Derivada em um ponto;
- Derivada como função;
- Derivadas segundas;
- Aplicações de derivadas;
- Cálculo de derivadas.

c) Integrais:

- Interpretações e propriedades de integrais definidas;
- Aplicações de integrais;
- Teorema Fundamental do Cálculo;
- Técnicas de antidiferenciação;
- Aplicações de antidiferenciação;
- Aproximações numéricas para integrais definidas.

Já o AP Cálculo BC cobre toda a extensão do Cálculo AB, com a adição dos seguintes tópicos[27]:

a) Funções paramétricas, polares e vetoriais

b) Conceito de séries, séries numéricas, séries de Taylor.

---

[26] Disponível em: <https://apstudent.collegeboard.org/apcourse/ap-calculus-ab/course-details>. Acesso em: 26 fev. 2014.

[27] Disponível em: <https://apstudent.collegeboard.org/apcourse/ap-calculus-bc/course-details>. Acesso em: 26 fev. 2014.

A *College Board* sugere o Cálculo AB como preparação para 48 cursos universitários, que podem levar a 139 carreiras diferentes[28]; já o Cálculo BC é um preâmbulo para 38 cursos, com 107 carreiras associadas[29]. Ambos os Cálculos AB e BC são recomendados para vários cursos, mas alguns enfatizam a recomendação em um deles. Por exemplo, para a maioria da Engenharias qualquer um dos Cálculos serve, mas para algumas recomendam apenas o Cálculo BC, como Engenharias Biomédica ou Ambiental, assim como Matemática e Física aplicadas. Para outros cursos, como Arquitetura, Biologia Marinha ou Marketing, recomendam apenas o Cálculo AB.

A seguir mostramos algumas estatísticas que podem ajudar a entender melhor o papel do programa AP nos Estados Unidos. O professor David Bressoud, da *Macalester College* em *Saint Paul*, *Minnesota*, apresenta diversos estudos feitos pela *Mathemathical Association of America* (MAA)[30] com alguns dados relevantes sobre a atuação dos cursos AP de Cálculo. Em um deles[31], na página 4, Bressoud mostra uma pesquisa onde se vê que 61% dos estudantes que iniciaram o curso de Cálculo I durante o outono de 2010 tiveram contato com o Cálculo ainda no Ensino Médio. Destes, 69% fizeram um curso AP de Cálculo, o que representa 42% dos estudantes de Cálculo I. Na página 21, ele revela que "estudantes que obtiveram grau 3 ou superior[32] no exame de Cálculo AB e escolheram refazer Cálculo I tiveram pior desempenho em Cálculo II do que aqueles que foram diretamente para o Cálculo II".

Em outro estudo[33], Bressoud mostra gráficos comparativos com as performances dos estudantes divididos nos seguintes grupos: os que tiveram ou não contato com o Cálculo no Ensino Médio, os que prestaram ou não um exame AP de Cálculo e os que foram bem ou não no exame AP de Cálculo.

---

[28] Disponível em: <https://apstudent.collegeboard.org/exploreap/ap-and-your-future/apcourse/ap-calculus-ab>. Acesso em: 26 fev. 2014.

[29] Disponível em: <https://apstudent.collegeboard.org/exploreap/ap-and-your-future/apcourse/ap-calculus-bc>. Acesso em: 26 fev. 2014.

[30] Sítio oficial disponível em: <http://www.maa.org/>. Acesso em: 26 fev. 2014.

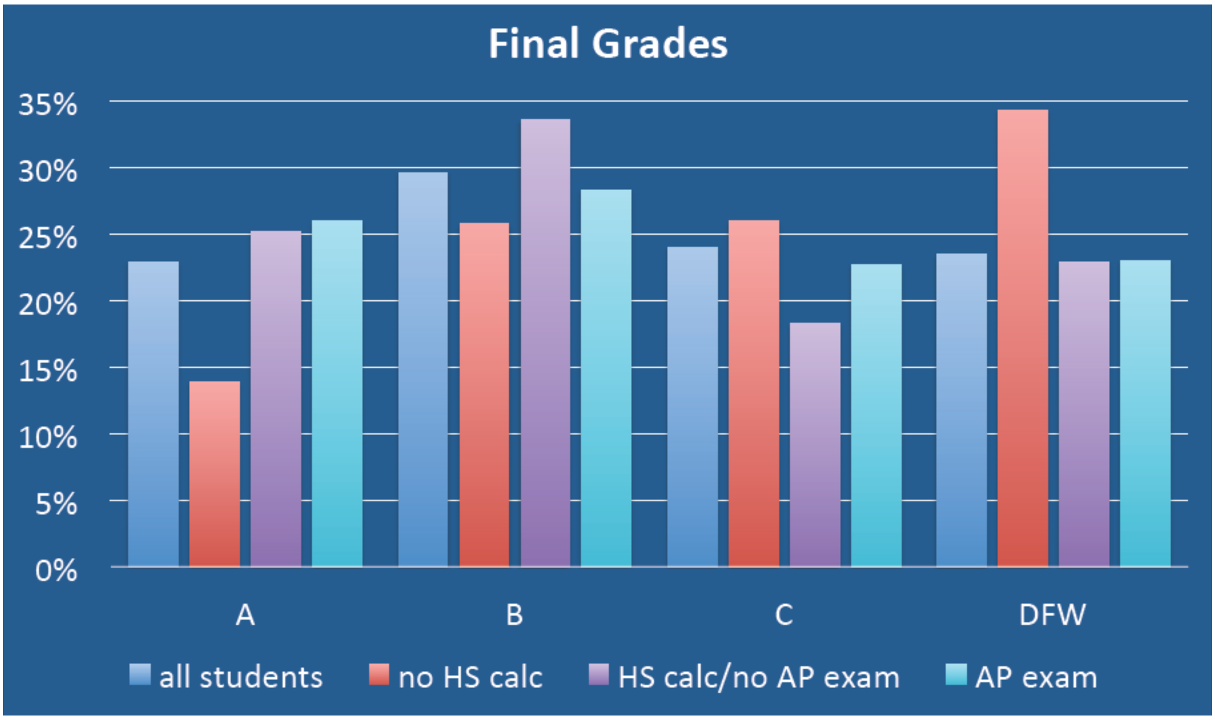
[31] Disponível em: <http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2012/MSU-APCalc.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2014.

[32] Os graus do exame AP variam de 1 a 5, sendo 5 o grau mais alto. O grau 3 é o primeiro considerado satisfatório.

[33] Disponível em: <http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2013/CSPCC-CB.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2014.

Observe o gráfico 1 a seguir.

Gráfico 1 – Comparação dos aproveitamentos em Cálculo I.

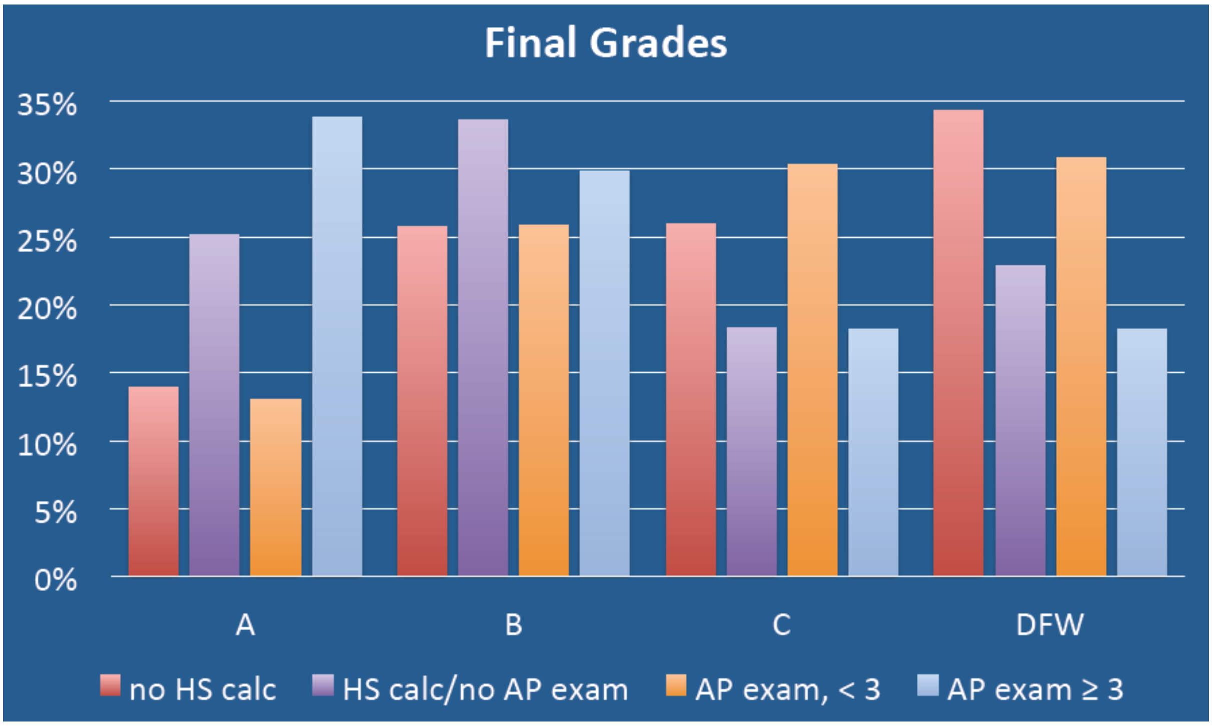


Legenda: *Final Grades* são conceitos finais; *A*, *B* e *C* são graus obtidos; *DFW* comtempla os graus D e F e os que desistiram; *all students* é o conjunto de todos os estudantes; *no HS calc* são os estudantes que não tiveram contato com o Cálculo no Ensino Médio; *HS calc/no AP exam* são os que tiveram contato com Cálculo mas não fizeram o exame AP e *AP exam* são aqueles que prestaram o exame AP.
Fonte: <http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2013/CSPCC-CB.pdf >

Há uma informação já esperada nesse gráfico: estudantes que não tiveram contato com Cálculo no Ensino Médio performaram de maneira notadamente pior do que aqueles que tiveram. Por outro lado, efetivamente fazer o exame AP não parece ter tido um reflexo positivo sobre aqueles que tiveram contato com o Cálculo no Ensino Médio, uma vez que entre os de conceitos B e C, o melhor desempenho foi dos que não prestaram o exame AP (entre os graus A, D, F e desistentes os desempenhos dos dois grupos foram praticamente iguais).

O gráfico 2, a seguir, nos mostra outra perspectiva do mesmo estudo.

Gráfico 2 – Outra comparação.



Legenda: As legendas são as mesmas do gráfico 1, com exceção de *AP exam < 3*, que são os alunos que obtiveram grau menor que 3 no exame AP e *AP exam ≥ 3*, que são os que obtiveram grau maior ou iguala a 3 no exame AP.
Fonte: <http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2013/CSPCC-CB.pdf>

Neste gráfico, os estudantes que fizeram o exame AP foram divididos entre os que se saíram bem (com graus maiores ou iguais a 3) e os que foram mal (com graus menores que 3). Fica bastante claro que os estudantes que tiveram melhor desempenho no curso AP tendem a se sair melhor em Cálculo I na Universidade. Todavia, neste mesmo gráfico, um importante dado é revelado: o aproveitamento daqueles que não tiveram Cálculo no Ensino Médio e o daqueles que foram mal no exame AP de Cálculo é muito parecido. Isso sugere que o puro e simples contato prévio com o Cálculo não foi capaz de melhorar tanto o desempenho da maioria dos estudantes que já não tinham propensão a se saírem bem na disciplina.

Apesar dos cursos AP serem largamente difundidos e oficialmente incentivados nos Estados Unidos, como toda política educacional eles têm seus detratores. Se por um lado há números que sugerem um melhor desempenho na Universidade dos estudantes que fizeram tais cursos, por outro lado há estudos que, focando em diversos outros aspectos da vida acadêmica, tentam mostrar que a situação não é tão diferente entre os que fazem ou não os cursos AP. Klopfenstein e Thomas (2010) dizem que após fazer um filtro por currículo de Ensino Médio, família e características escolares, conclui-se que os estudantes AP não são mais propensos que os estudantes não-AP, de forma geral, a retornar para o segundo ano do curso universitário. Isso ocorre porque os cursos AP servem como um indicativo de grande habilidade e motivação, mas não indicam, por si só, uma capacidade superior de leitura das demandas acadêmicas. Klopfenstein e Thomas (2010) acrescentam que parte do problema está na rápida expansão que o programa sofreu a partir de 1990, o que ocasionou uma perda de qualidade. Muitos críticos também reclamam do excesso de atenção dado aos cursos AP, já que se vê uma tendência das escolas secundárias a implantá-los preferencialmente, em detrimento de outras formas importantes de aprofundamento dos estudos.

De qualquer forma, o contato do aluno secundarista com limites, derivadas e integrais não é a ideia por trás do presente trabalho, o que nos faz reforçar o objetivo não de produzir um lastro para os estudantes enfrentarem melhor o Cálculo na Universidade, mas sim de melhorar a apresentação e a compreensão de alguns tópicos que já são ministrados em nossas salas de aula.

4 **PREPARAÇÃO**

A seguir, trataremos da preparação, em vários aspectos, necessária para que se possa implantar de forma eficaz a proposta em questão.

4.1 **Pré-requisitos do aluno**

Primeiramente, devemos explicitar o momento em que as noções de derivada seriam passadas aos alunos: na 1ª série do Ensino Médio, após a conclusão do estudo da função quadrática. Dessa forma, seguindo o programa usualmente ministrado em Matemática nessa série, na ponta da álgebra, o aluno já terá tido contato com:

a) conjuntos;
b) conjuntos numéricos;
c) relações e funções;
d) gráficos de funções;
e) função afim;
f) função quadrática.

Esses são os pré-requisitos exigidos do aluno e nesse momento do programa estaremos prontos para começar o conjunto de atividades sobre derivada.

4.2 **Onde ganhar tempo**

Há ainda outros aspectos importantes a serem considerados. Um deles é que essas atividades levarão em torno de um mês sendo trabalhadas, de maneira que devemos prover esse tempo de alguma forma. Não há mágica a ser feita, logo um ou mais assuntos deverão ser trabalhados com menos ênfase ou até mesmo suprimidos. Estamos alinhados com a opinião de Ávila (1991), que defendeu bastante o retorno do Cálculo aos programas secundaristas, quando afirma que “a ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados”.

Partindo desse pensamento, podemos investigar quais tópicos poderiam ser menos valorizados em detrimento da inclusão da noção de derivada. O programa completo de Matemática da 1ª série costuma contemplar, na parte algébrica, além dos pré-requisitos já mencionados anteriormente, os seguintes assuntos:

a) funções e equações modulares;
b) funções e equações exponenciais;
c) logaritmos;
d) funções e equações logarítmicas.

O primeiro tópico que pode ter a duração de sua apresentação bastante reduzida é o de funções e equações modulares. Uma justificativa bastante plausível está na ausência desse conteúdo no programa do ENEM[34], que há alguns anos tornou-se a principal porta de entrada das Universidades federais, além de diversas outras Universidades públicas e particulares. Obviamente, não podemos nos pautar apenas pelo ENEM para a definição de currículos, uma vez que o Ensino Médio deve ser pensado como uma etapa terminal. Porém, por suas aplicações não tão abundantes, apresentar a definição de módulo e ensinar a resolução de equações modulares elementares pode ser suficiente dentro do contexto proposto.

Outro tópico que pode ter sua apresentação reduzida na 1ª série é o estudo inicial das funções. Aqui, concordamos novamente com Ávila (1991), quando ele diz que:

> “Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura – contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva – num esforço de poucos resultados práticos. É antipedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da disciplina. E se o professor seguir esta salutar orientação, ele não precisará, por bom tempo, de nenhum dos conceitos mencionados.”

De fato, é bastante comum o mau hábito de, às vezes, ensinar-se assuntos que são usados de forma isolada em determinado momento somente para, mais tarde, quando precisarmos realmente deles, termos que fazer uma revisão desse tópico antes de iniciar o novo assunto que efetivamente necessita do conhecimento do primeiro. A pergunta que devemos nos fazer é: por que não deixar para ensinar tal conteúdo apenas no momento em que ele for necessário? Ensinar duas vezes evidentemente gasta mais tempo do que ensinar uma vez só.

---

[34] As Matrizes de Referência e os objetos de conhecimento (conteúdos) associados a elas estão disponíveis no sítio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/conteudo-das-provas>. Acesso em: 05 fev. 2014.

4.3 **Cooperação com a Física**

A terceira preocupação que se deve ter é em relação ao conteúdo de Física que será usado como uma das motivações para a introdução da noção de derivada. Conforme já citado anteriormente, a primeira aplicação que utilizaremos nesse trabalho é a cinemática, e a intenção é, entre outras, a de facilitar a compreensão do assunto por parte do estudante quando este estiver aprendendo tal tópico em Física. Porém, um problema surge nesse momento: a cinemática é normalmente um dos primeiros assuntos a serem abordados na 1ª série, de forma que, sem haver uma colaboração entre os professores de Matemática e de Física, o ganho que a derivada traria ficaria bastante limitado, uma vez que a nossa ideia é que os conceitos de derivada sejam passados aproximadamente na metade do ano letivo. Felizmente, a cinemática não é pré-requisito para os demais tópicos de Física na 1ª série e, portanto, ela pode ser deslocada dentro do programa de Física de maneira a contemplar os nossos objetivos. Nesse sentido, é fundamental haver um planejamento conjunto dos professores responsáveis pelas respectivas pontas de Matemática e Física envolvidas.

Em suma, a ideia é ensinar as noções de derivada após função quadrática, utilizando o tempo que será diminuído da apresentação do início de funções e de funções modulares, e em colaboração com o professor de Física responsável por ministrar as aulas de cinemática, para que esta não seja ensinada antes da derivada.

4.4 **Uso da tecnologia**

A última etapa de nossa preparação envolve o uso da tecnologia como recurso didático. Conforme foi dito no início do trabalho e será recorrente no prosseguimento dele, algumas das atividades propostas fazem uso quase primordial de um *software* de geometria dinâmica. Neste trabalho foi usado o programa GeoGebra, mas é possível substituí-lo por qualquer outro que possa executar as atividades propostas. Também é ressaltado que algumas atividades podem perfeitamente abrir mão deste recurso; entretanto, mesmo naquelas em que é possível fazer uma boa apresentação das ideias sem o *software*, recomendamos fortemente que ele seja usado. Os motivos são muitos, é claro, e listando apenas alguns, temos:

a) a apresentação fica muito mais rápida e limpa;
b) os gráficos ficam muito mais precisos do que os feitos à mão, sem a necessidade de se determinar muitos pontos dele para que tenham o aspecto desejado;
c) é muito mais fácil mostrar exemplos não previstos nas atividades;
d) é possível produzir animações para tornar a apresentação muito mais dinâmica e interessante para os estudantes.

As vantagens pedagógicas são muitas: com maior agilidade, os alunos terão contato com uma gama muito maior de exemplos, que são fundamentais para a compreensão de novos conceitos. Também poderão ver as variações nos gráficos ocorrendo de forma dinâmica, o que certamente trará uma compreensão maior dos conceitos envolvidos. E também poderão ganhar em maturidade matemática, ao poderem, eles próprios, investigarem situações sobre as quais tenham curiosidade ao eventualmente manipularem o *software*.

É óbvio que, para utilizá-lo, o professor deverá ter um domínio razoável sobre o *software* escolhido, sob pena de não conseguir executar as tarefas a contento. Caso não possa usar a tecnologia ou o professor prefira, por qualquer motivo, não usá-la, recomendamos que as atividades sejam adaptadas para uma apresentação tradicional, apenas com o quadro. Além disso, é bom ressaltar que, apesar das atividades estarem baseadas no uso do GeoGebra, a ideia é que o quadro tradicional seja livremente usado pelo docente de forma concomitante ao uso da tecnologia, para que possam ser feitas as observações que o professor julgar pertinentes no momento. Uma aula nunca é igual a outra, e o debate pode tomar caminhos completamente diferentes dependendo dos questionamentos feitos pelos alunos de cada turma.

Gostaríamos de frisar que não é a intenção desse trabalho promover treinamento na utilização de *softwares* do tipo que recomendamos. Para aqueles professores que não têm domínio do assunto, ou para aqueles que apenas desejam aprender mais, indicamos o sítio oficial do GeoGebra[35], onde é possível fazer o *download* gratuito do programa, assim como ter acesso a diversas utilidades, como tutoriais básicos e avançados e materiais já programados.

[35] Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR>. Acesso em: 10 fev. 2014.

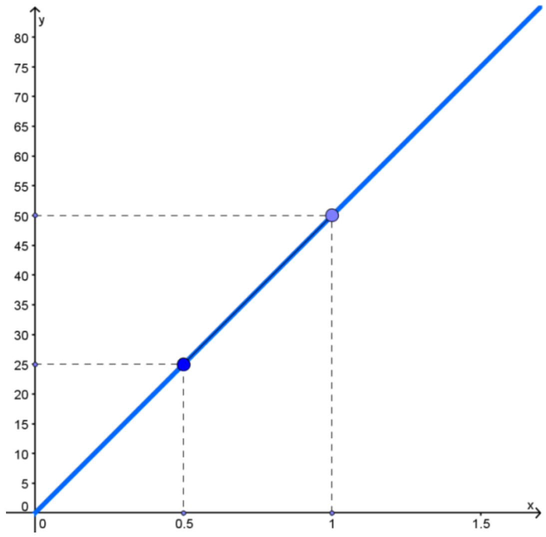
5 ATIVIDADES

Este é o capítulo principal dentro do trabalho, pois aqui estão expostas as atividades a serem executadas em sala de aula. Primeiramente, começamos com a apresentação de uma motivação para este estudo: um problema físico relevante é mostrado para justificar a busca por respostas a certas perguntas, as quais surgem naturalmente. Esta motivação recebeu o nome de Atividade Zero pois não faz parte exatamente do conteúdo que desejamos expor. Em seguida, os tópicos relacionados à derivada são expostos em outras atividades.

5.1 Atividade Zero: Uma motivação

Imaginemos um móvel que se desloca com velocidade constante, a 50 km/h, por exemplo. Isso significa que a cada hora, esse móvel se desloca 50 km, ou que se desloca 100 km a cada 2 horas, ou ainda, 25 km a cada meia hora. O gráfico que indica o deslocamento total em função do tempo é bastante simples de ser obtido e tem o seguinte aspecto:

Figura 1 – Deslocamento ($\boldsymbol{y}$) × tempo($\boldsymbol{x}$)



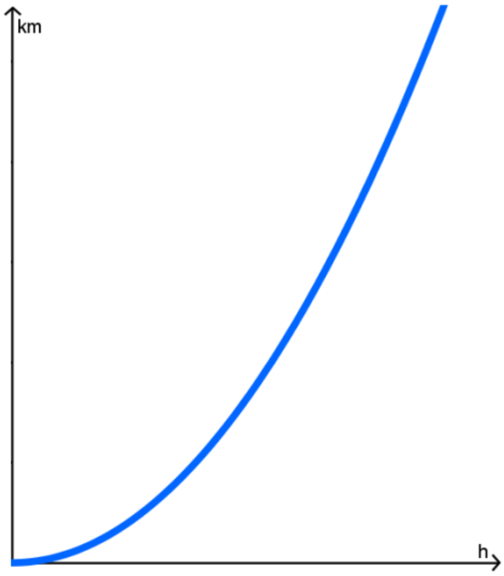
Fonte: O autor, 2014.

É bastante fácil, nesse caso, saber a velocidade que o móvel tem em qualquer instante, afinal ela é constante e igual a 50 km/h. A velocidade média, conforme sabemos, é calculada ao se dividir o deslocamento (ΔS) pelo tempo (Δt). Se considerarmos os dois pontos indicados no gráfico, veremos que o móvel deslocou-se da posição 25 km até a posição 50 km, ou seja, deslocou-se 50 – 25 = 25 km. O tempo necessário para esse deslocamento foi de 0,5 h (desde o instante 0,5 h até o instante 1h). Portanto, a velocidade média desse móvel foi a seguinte:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{25\ km}{0{,}5\ h} = 50\ km/h. \tag{1}$$

Como se pode perceber, quando a velocidade é constante (movimento uniforme) tudo fica bastante simples. Porém, o problema aumenta bastante a sua dificuldade quando a velocidade deixa de ser constante. Imaginemos uma situação onde um automóvel está parado em um sinal fechado e, quando o sinal abre, ele parte do repouso. Digamos que esse carro vá atingir a velocidade de 100 km/h. Sabemos que, obviamente, a velocidade de 100 km/h não será atingida imediatamente; o processo é gradativo, mediante uma aceleração. O gráfico *deslocamento* × *tempo* não é mais como o apresentado no exemplo anterior, dessa vez não teremos mais uma linha reta. Suponhamos que o automóvel se desloque de forma que o gráfico de seu deslocamento em função do tempo seja a seguinte parábola (Figura 2):

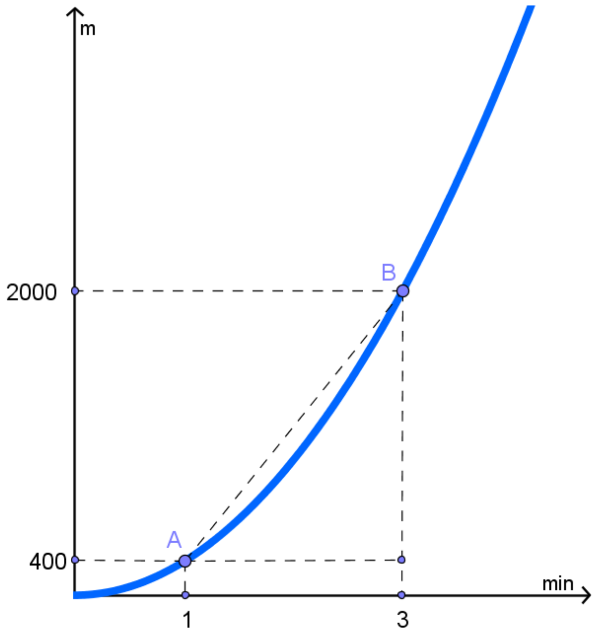
Figura 2 – Deslocamento × tempo



Fonte: O autor, 2014.

Ainda assim, seremos capazes de calcular a velocidade média desse automóvel em certo intervalo de tempo. Essa velocidade média é precisamente a taxa de variação média da função no intervalo considerado. Vejamos o gráfico com mais detalhes (Figura 3):

Figura 3 - Deslocamento × tempo (detalhes)



Fonte: O autor, 2014.

Podemos observar que o móvel, do ponto A até o ponto B do gráfico, fez um deslocamento de 2000 – 400 = 1600 metros em um tempo de 2 minutos (do instante 1 min ao instante 3 min). Sua velocidade média nesse período pode ser facilmente calculada:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1600\,m}{2\,min} = 800\,m/min. \qquad (2)$$

Isto equivale a 800×60 = 48000 m/h, ou 48 km/h. Entretanto, como a velocidade não foi constante em todo o percurso, e conforme descrito, ela foi aumentando desde o ponto A até o ponto B, sabemos que houve momentos em que ela foi menor ou maior nesse intervalo de tempo. Particularmente, algumas perguntas não podem ainda ser respondidas de forma imediata:

1) Qual era a velocidade do móvel 1 minuto após a partida do sinal (ponto A)?

2) Qual era a velocidade do móvel 3 minutos após a partida do sinal (ponto B)?

3) Qual era a velocidade do móvel em qualquer instante após a partida?

Essas perguntas importantes ganharão resposta após o estudo da noção de derivada, que surgirá do conceito de taxa de variação média e do conceito de reta tangente ao gráfico de uma função. As derivadas possuem inúmeras aplicações, sendo que algumas são bastante acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Portanto, finalmente, a partir de agora apresentaremos o conjunto de atividades que acreditamos ser suficiente para que os alunos da 1ª série do Ensino Médio possam absorver o assunto pretendido. A presente escolha de estruturar a proposta de forma que a divisão seja feita por atividades, e não por aulas, ocorreu para que o planejamento não fique engessado e torne-se mais fácil para o professor adaptá-lo às especificidades de suas turmas. O texto foi escrito na forma de orientações para os prezados colegas que desejarem adotar a ideia.

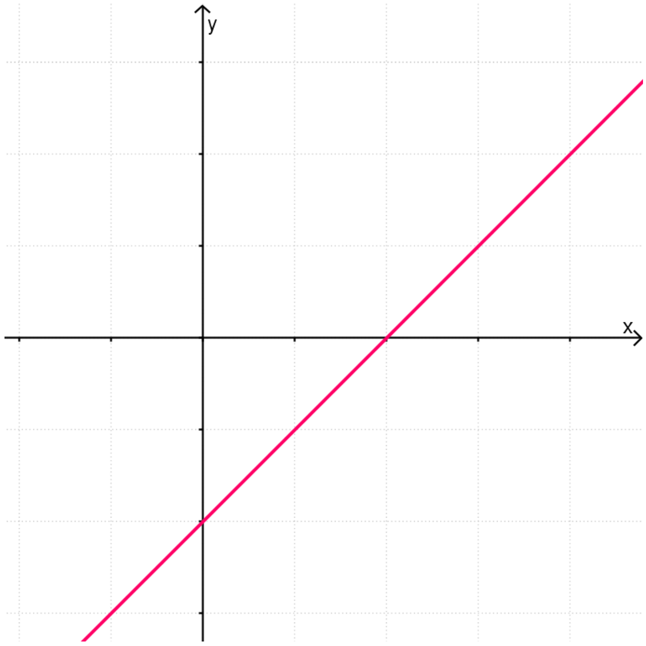
O professor que desejar pode utilizar a lista sugerida no APÊNDICE A (p. 77) para relembrar com os alunos a ideia de taxa de variação média de uma função. Tal lista é reduzida, servindo apenas para dar ideias aos professores que desejarem elaborar uma lista própria com mais atividades.

5.2 **Atividade 1: Noção de linearidade local**

O objetivo desta atividade é introduzir a noção de linearidade local. Utilizaremos um computador, com o *software* GeoGebra instalado, conectado a um projetor. Para esta atividade o uso do software é essencial, uma vez que não há como simular com precisão, no quadro, as aproximações e afastamentos que serão feitos no gráfico.

Segundo Tall (1991), a ideia intuitiva de derivada pode melhor ser passada “usando a noção de ‘linearidade local’ – que uma função derivável é precisamente uma que ‘parece linear’ quando uma pequena parte do gráfico é magnificada”. Serão apresentados diversos gráficos, e o objetivo maior da atividade é que, após a revelação das escalas em que eles são inicialmente mostrados, possamos começar a construir o conceito de reta tangente a uma curva. Sem ser feita uma grande introdução (diga aos alunos apenas que será feita uma atividade com gráficos), pode-se iniciar abrindo-se o GeoGebra para mostrar o gráfico da Figura 4, que já deve ser aberto com esse aspecto; caso contrário, toda a linha de raciocínio proposta perde o sentido. A ideia é dar o gráfico sem revelar as escalas usadas nem a lei da função, uma vez que exatamente isso deverá ser explorado pelos alunos.

Figura 4 – Função quadrática com aproximação.



Fonte: O autor, 2014.

Esse deve ser o gráfico da função quadrática definida pela expressão

$$y = 0{,}5x^2 + 0{,}999x - 0{,}001, \qquad (3)$$

com a devida magnificação para que fique com esse aspecto. A lei nem a natureza da função devem ser reveladas aos estudantes antes do momento propício.

Em seguida, as seguintes perguntas podem ser feitas:

1) Esse gráfico representa algum tipo de função que já estudamos?

A intenção dessa pergunta é propositalmente instigá-los a associar o gráfico a uma função afim, que deve ter sido estudada há pouco tempo. De fato, com uma aproximação muito grande, o gráfico realmente se parece com uma linha reta e essa provavelmente será a resposta mais frequente. Inclusive, é uma prática comum, e totalmente aceitável, desenharmos gráficos de funções afins à mão livre no quadro e *desejarmos* que os alunos o identifiquem como tal. A presença das linhas de grade no gráfico se justifica justamente para reforçar a falsa percepção de que se trata de uma reta.

2) Qual é a lei da função aqui representada?

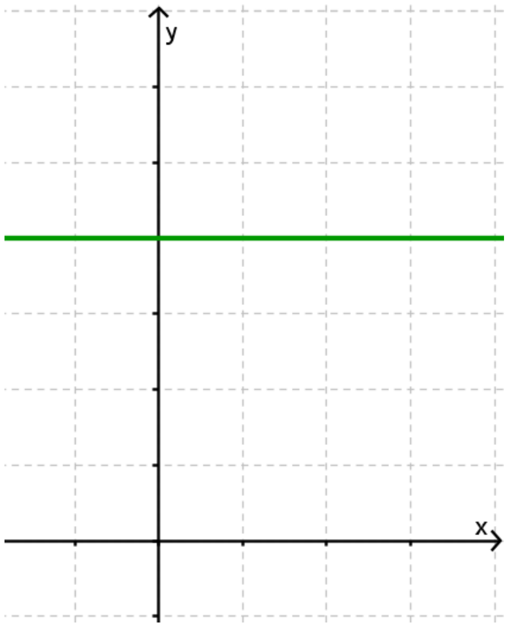
As respostas a essa pergunta são certamente muito mais imprevisíveis do que as da pergunta anterior. Primeiramente, é algo impossível de ser respondido com as informações dadas. Em segundo lugar, mesmo que se soubessem informações sobre alguns dos pontos do gráfico e que se tratasse mesmo de uma função afim, esse problema envolveria uma parte computacional e as respostas dificilmente seriam imediatas. Alguns podem tentar associar as linhas de grade com unidades, mas a intenção é que alguns alunos sejam capazes de perceber que não é possível responder a essa pergunta sem que se saiba em que escala os eixos coordenados estão.

Continuamos a mostrar gráficos para reforçar. Dessa vez trabalharemos com o gráfico da função definida pela lei

$$y = x^3 + 0{,}002, \qquad (4)$$

e, novamente, o aspecto mostrado inicialmente deve ser algo como a próxima figura (Figura 5), com uma grande aproximação para que passe a impressão de ser uma linha reta.

Figura 5 – Função polinomial do 3º grau com aproximação.

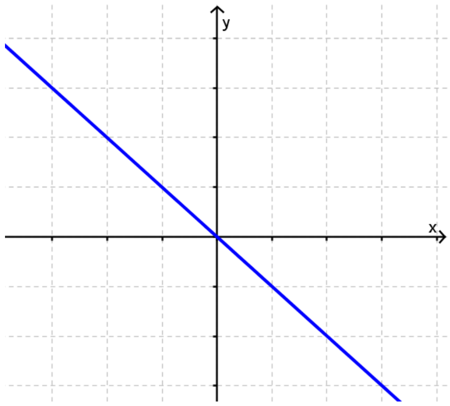


Fonte: O autor, 2014.

As mesmas perguntas feitas anteriormente podem ser repetidas neste segundo caso, em que o gráfico se assemelha ao de uma função constante.

Pode ser interessante também incluir o gráfico de uma verdadeira função afim, e repetir as perguntas, antes de retirar a aproximação. Por exemplo, a função definida pela lei $y = -x$ presta-se bem para a situação (Figura 6).

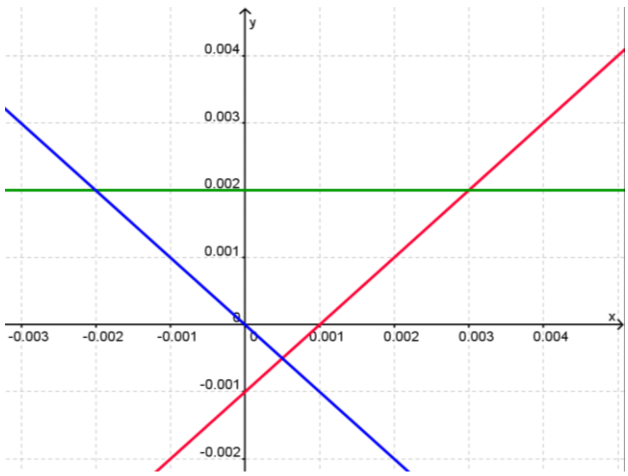
Figura 6 – Gráfico de $\boldsymbol{y = -x}$.



Fonte: O autor, 2014.

Feita essa introdução, os três gráficos podem ser mostrados juntos, ainda com grande aproximação. Entretanto, as escalas dos eixos devem ser reveladas.

Figura 7 – Os três gráficos juntos.



Fonte: O autor, 2014.

Nesse ponto, pode-se perguntar aos alunos se as leis das funções podem ser encontradas. Depois de conduzida uma discussão a respeito, as leis das funções cujos gráficos foram mostrados podem ser reveladas:

$$y = 0{,}5x^2 + 0{,}999x - 0{,}001 \tag{5}$$

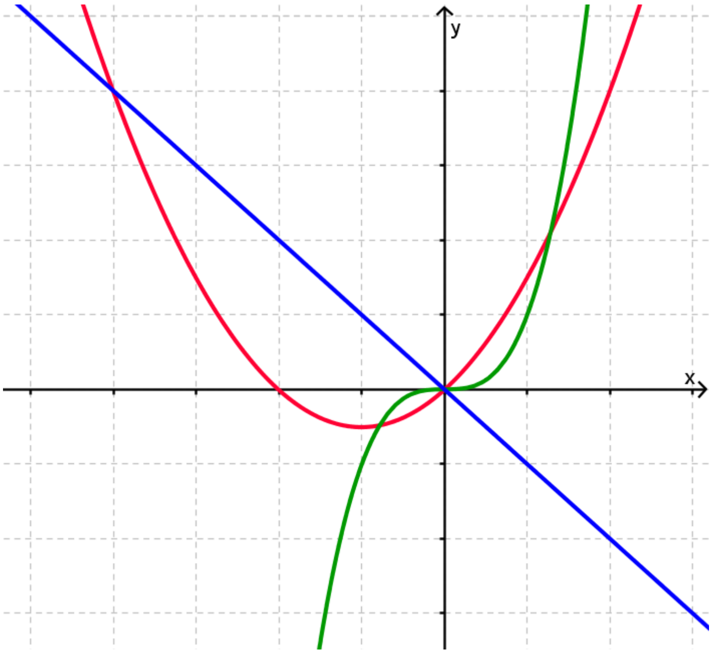
$$y = x^3 + 0{,}002 \tag{6}$$

$$y = -x \tag{7}$$

As funções polinomiais de terceiro grau ainda não foram vistas por eles, mas as funções quadráticas foram o último assunto visto antes dessas aulas sobre derivada e, portanto, é de se esperar certo espanto por parte de alguns alunos, pois nenhum dos gráficos realmente se parece com uma parábola; pelo menos não com aquelas que eles provavelmente estão acostumados a ver. Caso ninguém levante a questão, chame a atenção para o fato da graduação dos eixos estar de 0,001 em 0,001. Recuse-se ainda a retirar a aproximação, caso seja solicitado, pois não se poderia tirar proveito do próximo passo.

Agora, vamos mostrar a seguinte figura:

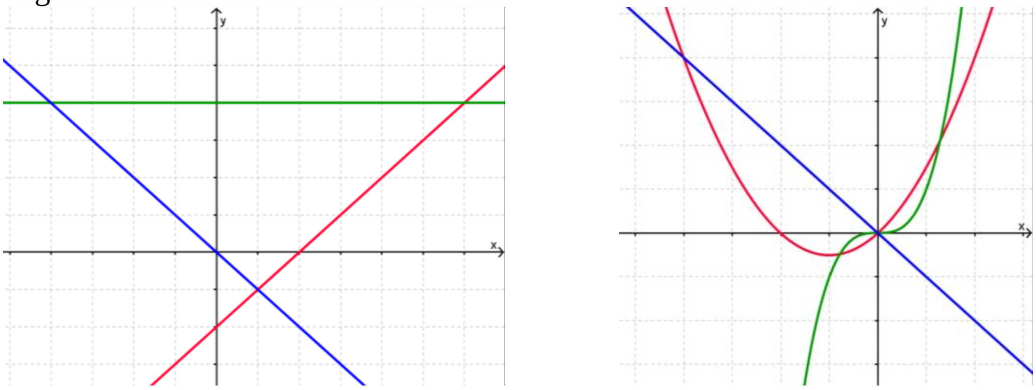
Figura 8 – Três gráficos juntos sem aproximação.



Fonte: O autor, 2014.

São os mesmos gráficos mostrados anteriormente, porém não estão mais tão aproximados. Esta tela deve ser mostrada também já a partir dessa visão, sem tanto *zoom*. Seria interessante, em seguida, colocar os três gráficos, com muita e com pouca aproximação, em janelas posicionadas lado a lado para que os estudantes pudessem compará-los.

Figura 9 – Gráficos lado a lado.



(a) (b)

Legenda: (a) – com zoom; (b) – sem zoom.

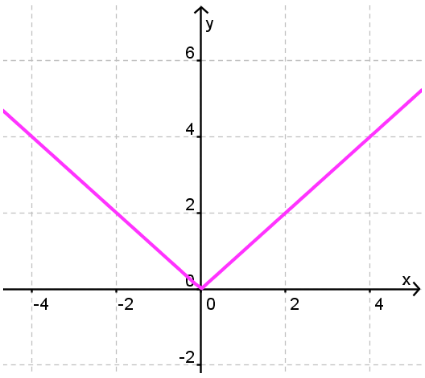
Fonte: O autor, 2014.

Neste ponto, cremos já haver excelentes condições de algum aluno afirmar que se tratam dos mesmos gráficos, apenas com diferença nas aproximações. Caso isso não tenha acontecido até agora, podemos revelar essa informação e manipular a aproximação do GeoGebra no gráfico da esquerda até que ele fique com um aspecto parecido com o do gráfico da direita.

A ideia é, após essa atividade com os gráficos, podermos passar aos alunos que muitas funções têm gráficos com essa característica: segundo Tall (1981), "se uma parte suficientemente pequena de um gráfico for fortemente aumentada, a *maioria dos gráficos familiares parecem (localmente) lineares*" (grifo do autor). É importante ressaltar também que isso não é uma realidade universal, pois há casos em que isso simplesmente não acontece. É interessante exemplificar esses casos.

Sugerimos como exemplo a função modular definida por $y = |x - 0{,}001| + 0{,}001$.

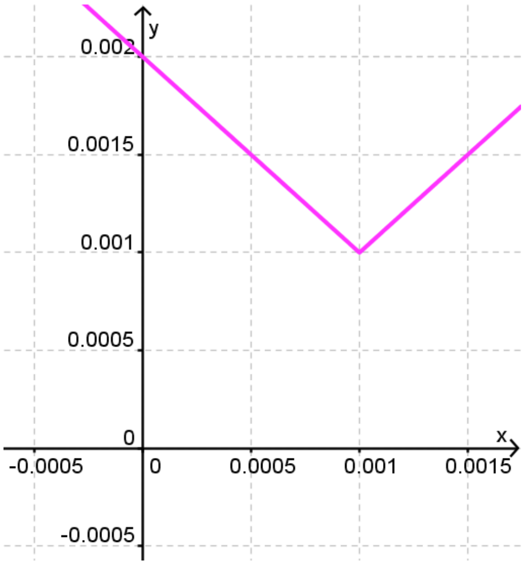
Figura 10 – Função modular.



Fonte: O autor, 2014.

Após mostrar o gráfico dessa maneira, pode-se aproximar cada vez mais para mostrar (sugerir, na verdade) que, não importa o quanto se chegue perto, o "bico" estará sempre ali (Figura 11).

Figura 11 – Função modular com aproximação.



Fonte: O autor, 2014.

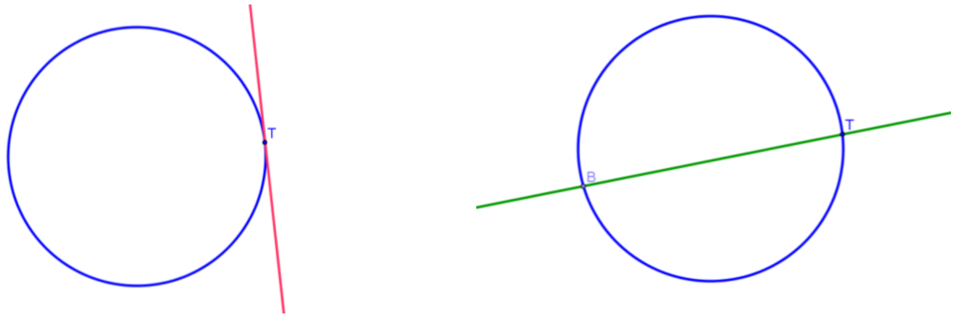
O professor que desejar pode utilizar a pequena lista sugerida no APÊNDICE A (p. 79) para reforçar os conceitos abordados nessa atividade.

5.3 **Atividade 2: Conceito de reta tangente**

O objetivo desta atividade é introduzir o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto. Utilizaremos um computador, com o *software* GeoGebra instalado, conectado a um projetor.

Podemos iniciar a atividade lembrando aos alunos do que se trata uma reta tangente a uma circunferência: é qualquer reta que toca a circunferência em um único ponto. Caso uma reta corte a circunferência em dois pontos ela é chamada de reta secante à circunferência. Observe os exemplos a seguir (Figura 12).

Figura 12 – Retas tangente e secante a uma circunferência.

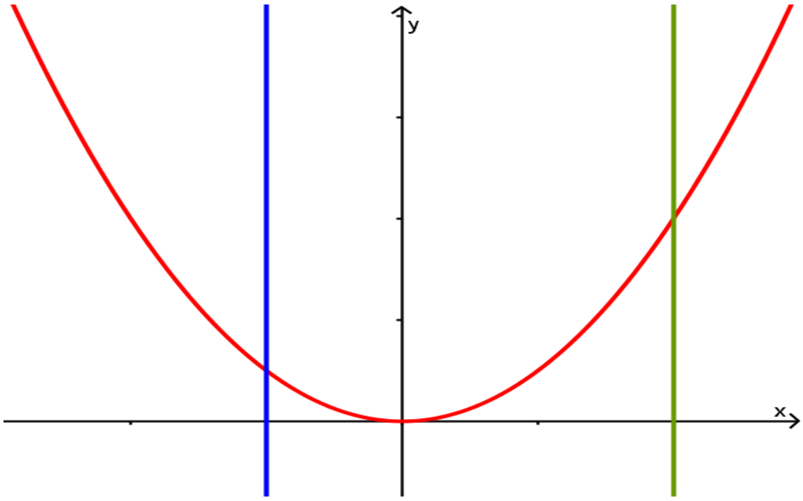


(a) (b)

Legenda: (a) – reta tangente; (b) – reta secante.
Fonte: O autor, 2014.

Porém, o que vamos fazer a partir de agora é um pouco mais complexo: vamos chegar ao conceito de reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Em particular, trabalharemos com gráficos de funções, que são nosso objeto de estudo. O problema aumenta bastante nesse momento, pois a definição de reta tangente a uma circunferência que é mais conhecida pelos estudantes – aquela que foi apresentada no início da atividade – não se presta para gráficos de funções. Por exemplo, nenhuma reta vertical é tangente a qualquer que seja a parábola, apesar de sempre cortá-las em um único ponto (Figura 13).

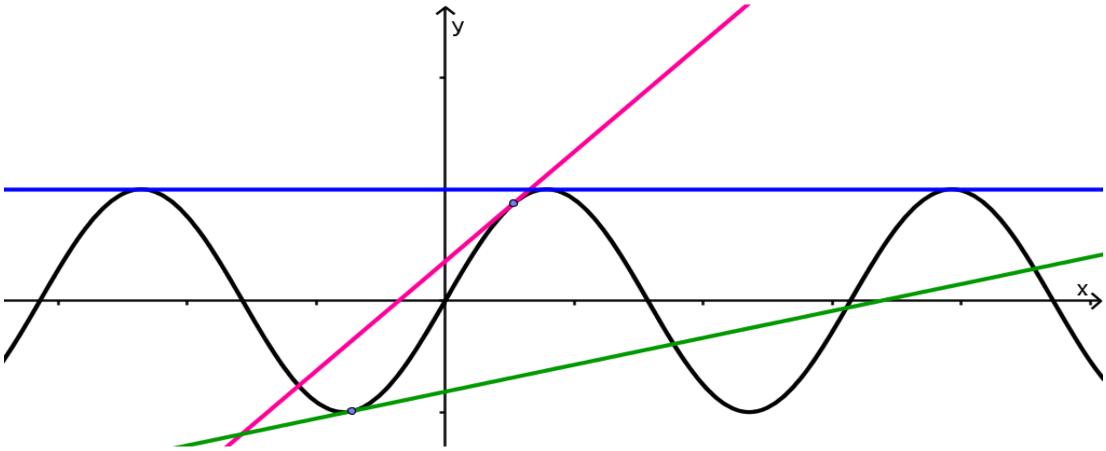
Figura 13 – Retas que cortam o gráfico em apenas um ponto, mas não são tangentes.



Fonte: O autor, 2014.

Como exemplo para outra situação, podemos usar a função seno: uma reta tangente em um ponto pode tocar o gráfico em um[36], dois, em vários ou até mesmo em infinitos pontos (Figura 14).

Figura 14 – Retas que cortam o gráfico em mais de um ponto, mas são tangentes.



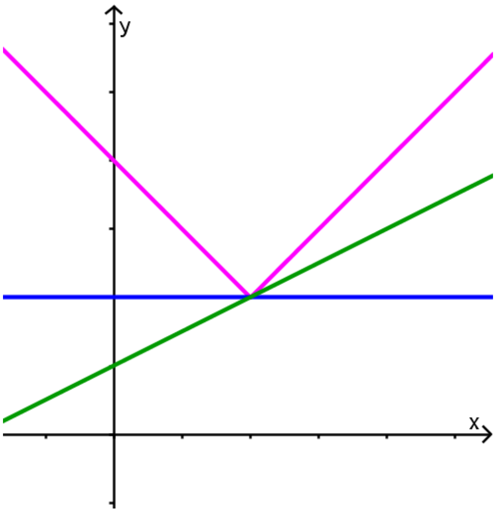
Fonte: O autor, 2014.

Nossa ideia é mostrar que o conceito de reta tangente a um gráfico de função em um ponto está intimamente associado a uma vizinhança desse ponto; tal conceito é estritamente local.

O próximo passo é lembrar algo que foi visto na Atividade 1: muitos gráficos, quando devidamente aproximados, aparentam ser uma linha reta. Com isso, seremos capazes de fazer uma consideração sobre retas tangentes a um gráfico em um ponto: elas são, efetivamente, retas que tocam a curva apenas no ponto em questão (desde que o gráfico *não seja uma linha reta* numa vizinhança desse ponto), mas devemos considerar apenas uma vizinhança bastante pequena desse ponto (na verdade, tão pequena quanto for necessário). Entretanto, isso não encerra a questão e não pode ser considerado como definição para reta tangente. Basta lembrar o caso da função modular visto na Atividade 1: naquele "bico" não há reta que possa ser considerada tangente ao gráfico (Figura 15); adiante veremos o porquê.

[36] Este caso não aparece no gráfico para não carregar demais a figura. Seria o caso de uma tangente no ponto (0,0), por exemplo.

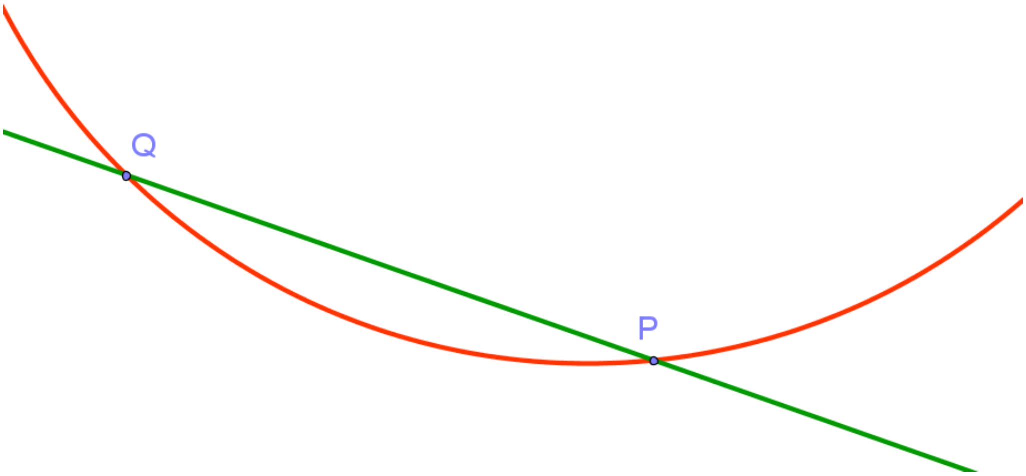
Figura 15 – Não há tangente no “bico”.



Fonte: O autor, 2014.

Passemos agora à tarefa de definir o que é a reta tangente a um gráfico em um dado ponto P. Para uma melhor análise, devemos primeiramente observar um gráfico (Figura 16) e uma reta secante a ele, passando por P e por um outro ponto Q:

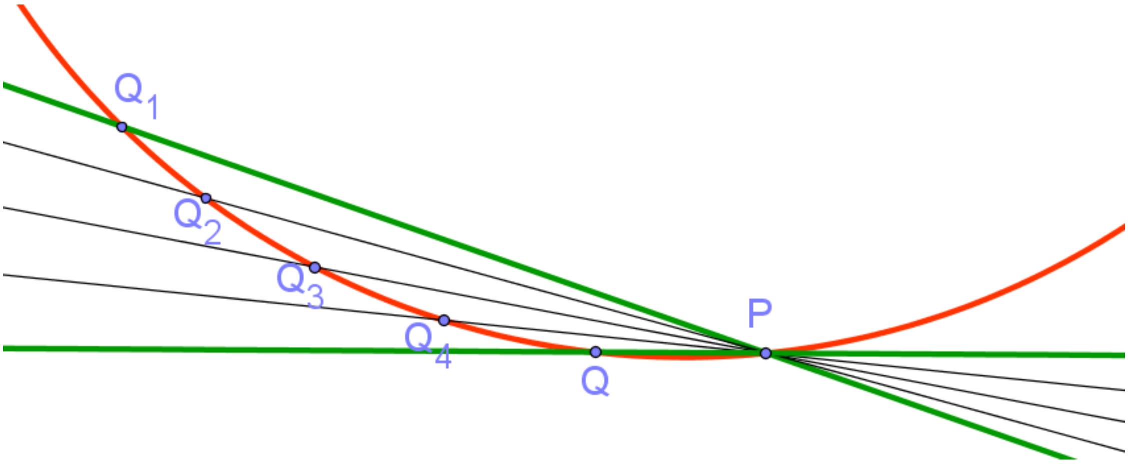
Figura 16 – Reta secante ao gráfico.



Fonte: O autor, 2014.

Imaginemos, agora, que tomemos pontos cada vez mais próximos do ponto P (é possível fazer os estudantes imaginarem o ponto Q “movendo-se” para as proximidades do ponto P). Teremos sequencialmente algo como a Figura 17.

Figura 17 – Sequência de pontos.



Fonte: O autor, 2014.

Podemos tomar pontos tão próximos do ponto P quanto desejarmos. De fato, queremos aproximar *muito* esses pontos de P, de forma que a reta pretendida será aquela que surge no *limite* de quando essa sequência de pontos (Q_n) *tende* ao ponto P.

Caso o professor julgue ser conveniente, pode fazer uma explanação sobre limites de funções, a título de analogia com a presente situação. Um breve exemplo encontra-se ao final desta atividade, na seção 5.3.1 Limite de uma função.

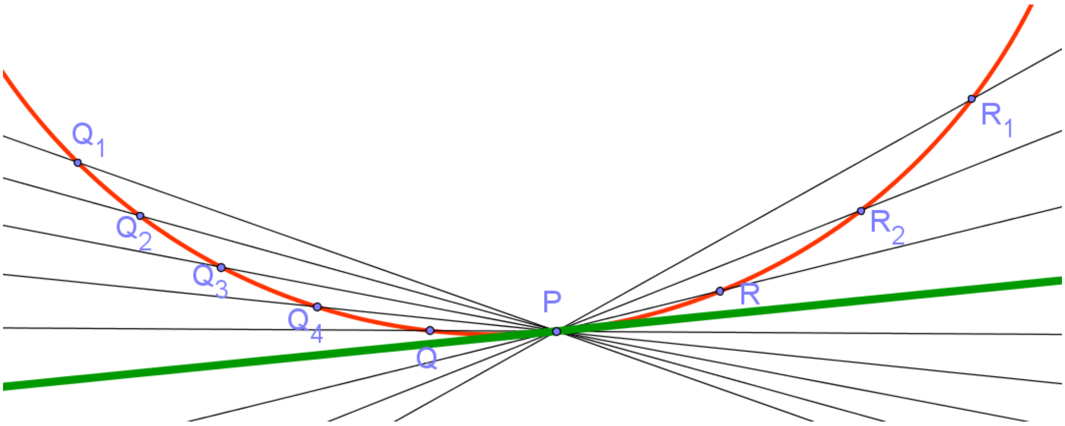
Prosseguindo com a questão da reta tangente, já dissemos que ela seria a reta "limite" obtida quando a sequência de pontos (Q_n) tende ao ponto P. Porém, há ainda duas condições a serem satisfeitas para que tal reta seja realmente a reta tangente procurada:

a) tal reta deve coincidir com a reta obtida por processo idêntico feito pelo outro lado do ponto P, com uma sequência de pontos (R_n) se aproximando indefinidamente do ponto P;

b) o ponto P deve efetivamente fazer parte do gráfico da função em questão; não existe reta tangente a uma curva em um ponto que não faz parte da curva.

Dito isso, vejamos o gráfico com o processo completo a seguir, com a reta tangente em destaque (Figura 18).

Figura 18 – Tangente em destaque.



Fonte: O autor, 2014.

Buscando enriquecer essa experiência, é bastante interessante mostrar o processo acontecendo de forma animada, utilizando o GeoGebra: os professores com mais experiência no uso do *software* podem mover o ponto Q para mostrar o efeito desejado.

Para finalizar, um comentário a respeito do exemplo da função modular. Já dissemos que a presença do “bico” no gráfico da função (Figura 11) fazia com que não existisse uma reta tangente naquele ponto. De fato, não é possível obter a mesma reta limite fazendo as aproximações por um lado e por outro. Pelo lado esquerdo, todas as retas serão representações de funções afins decrescentes, já pelo lado direito, todas serão crescentes.

O professor que desejar pode utilizar a pequena lista sugerida no APÊNDICE A (p. 81) para reforçar os conceitos abordados nessa atividade.

5.3.1 **Limite de uma função**

Aqui segue um breve comentário acerca da ideia intuitiva de limite de uma função. Vamos tomar como exemplo a função $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}. \qquad (8)$$

Observe que esta expressão pode ser reescrita como segue, para todo $x \neq 1$ (x não pode ser igual a 1, pois, nesse caso, teríamos uma divisão por zero):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} = 2x + 1. \tag{9}$$

Portanto, para todo valor de x diferente de 1, a função f se comporta como a expressão $y = 2x + 1$. Observemos, agora, uma tabela com os valores de $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez mais de 1, tanto por valores menores quanto por valores maiores que 1.

Tabela 1 – Aproximações para $\boldsymbol{y = 2x + 1}$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2x + 1}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2x + 1}$
0	1	2	5
0,4	1,8	1,6	4,2
0,8	2,6	1,2	3,4
0,9	2,8	1,1	3,2
0,94	2,88	1,06	3,12
0,98	2,96	1,02	3,04
0,99	2,98	1,01	3,02
0,992	2,984	1,008	3,016
0,994	2,988	1,006	3,012
0,996	2,992	1,004	3,008
0,998	2,996	1,002	3,004
0,999	2,998	1,001	3,002
0,9999	2,9998	1,0001	3,0002

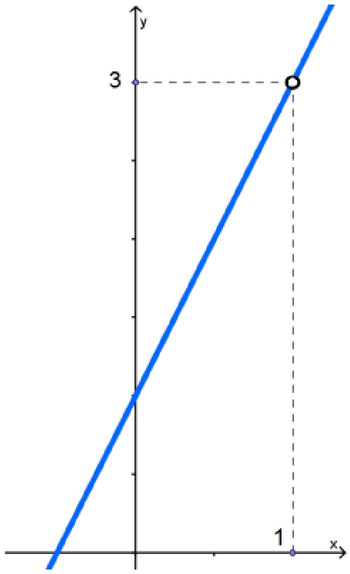
Fonte: O autor, 2014.

Podemos perceber que, apesar de não termos tomado $x = 1$, pois isso não é permitido nessa função, quando tomamos valores cada vez mais próximos de 1, o valor de $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 3, tanto por valores de x maiores que 1, quanto por valores menores que 1. Nesse caso, dizemos que 3 é o limite da função f quando x tende a 1, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3. \tag{10}$$

Vimos que o limite em um ponto pode existir mesmo que o valor da função não exista nesse ponto. Para ilustrar, o gráfico da função f utilizada é o seguinte (o ponto (1,3) não faz parte dele):

Figura 19 – Limite de função.



Fonte: O autor, 2014.

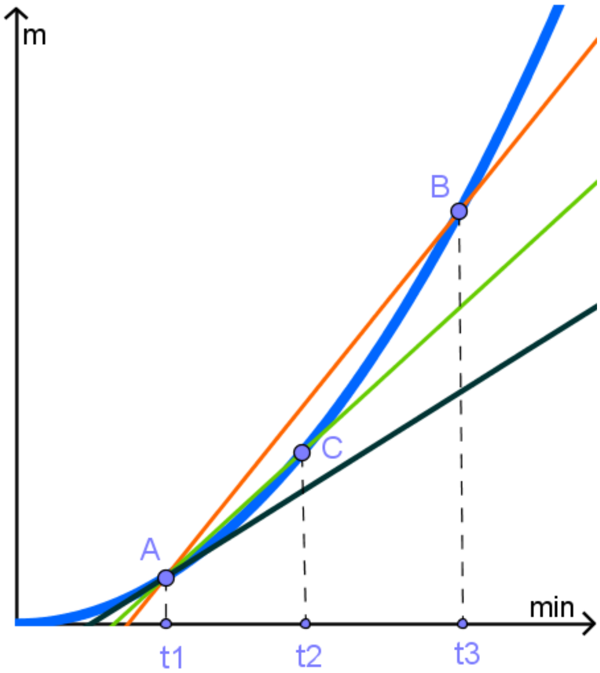
5.4 **Atividade 3: A derivada**

O objetivo desta atividade é finalmente chegar à noção que é o objetivo principal deste trabalho: a derivada. Pode ser utilizado um computador, com o *software* GeoGebra instalado, conectado a um projetor. Porém, o uso da tecnologia nesta parte não é essencial. Os gráficos podem ser feitos à mão, caso seja necessário.

Na Atividade 2 chegamos ao conceito de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. Isto nos conecta ao problema inicialmente proposto como motivação para esse estudo: o cálculo da velocidade instantânea de um móvel que se desloca com velocidade não constante. Como foi visto naquela introdução, a velocidade média pode ser calculada em qualquer intervalo de tempo com facilidade, uma vez que ela nada mais é do que a taxa de variação média da função no intervalo considerado. Pode-se observar que, para tal cálculo, é necessário traçar uma reta secante ao gráfico da função.

Neste momento, uma pergunta pode ser feita aos alunos: ***que procedimento devemos seguir para calcular a velocidade em determinado instante?*** O gráfico da Figura 20 pode ser mostrado aos estudantes.

Figura 20 – Velocidades.



Legenda: A reta secante AB leva à velocidade média de t1 a t3. A reta secante AC leva à velocidade média de t1 a t2. A reta tangente à curva em A leva à velocidade exata no instante t1.
Fonte: O autor, 2014.

Seria interessante tentar induzi-los a chegar a conclusões cada vez mais próximas da resposta para o problema: a velocidade instantânea será obtida levando-se ao limite o processo desenvolvido para se obter a reta tangente ao gráfico dado. Ou seja, como a velocidade média é dada por $\Delta S/\Delta t$, a velocidade instantânea é o limite da taxa de variação $\Delta S/\Delta t$, quando Δt tende a zero. Note que essa taxa de variação instantânea será exatamente a inclinação da reta tangente no ponto em questão.

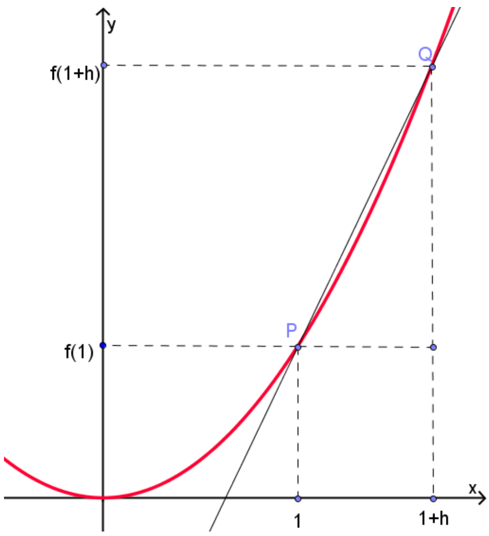
Respondida essa pergunta, podemos passar aos estudantes a definição de derivada. A ***derivada*** de uma função em um ponto P de seu gráfico é exatamente a inclinação da reta tangente ao gráfico, se ela existir, nesse ponto P.

Quando uma função f possui derivada em um ponto P de ordenada a, dizemos que ela é ***derivável*** em $x = a$. Nesse caso, indicamos a derivada de f em $x = a$ com a notação $f'(a)$.

(Também é conveniente ao Ensino Médio a notação y' para a derivada de $y = f(x)$). Podemos passar agora ao cálculo da derivada de uma função em determinado ponto.

Este trabalho se atém a derivadas de funções polinomiais, por terem cálculo fácil e por serem importantes para algumas aplicações pertinentes ao Ensino Médio. Tomemos como exemplo inicial, por questão de simplicidade, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Vamos calcular $f'(1)$, ou seja, a derivada dessa função para $x = 1$. Em outras palavras, vamos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(1,1)$, que é o ponto do gráfico de abscissa 1. Para tal, vamos também considerar um número positivo h e o ponto Q do gráfico, com abscissa $1 + h$. Uma visão geométrica pode ajudar bastante (Figura 21).

Figura 21 – Cálculo da derivada.



Fonte: O autor, 2014.

Nesse ponto, o professor pode associar a inclinação de cada reta secante ao seu gráfico. Após chamar bastante atenção a esse fato, pode calcular a taxa de variação média dessa função do ponto P até o ponto Q, que é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} \quad (11)$$

Observe que, ao trazer o ponto Q para as proximidades do ponto P, a reta secante PQ torna-se mais próxima da reta tangente ao gráfico no ponto P. O que deve ser feito para tal é diminuir o valor de h. De fato, queremos diminuir tanto o valor de h que vamos fazê-lo tender a zero. Como a derivada $f'(1)$ é a inclinação da reta tangente em P, a inclinação da reta tangente em P é o limite do quociente $\Delta y/\Delta x$ quando Δx tende a zero e $\Delta x = h$, então, podemos escrever o seguinte:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} \tag{12}$$

Na expressão anterior o que está sendo calculado é um limite quando h tende a zero. O fato de h tender a zero significa, entre outras coisas, que h não assume o valor zero, embora possa se aproximar desse valor tanto quanto desejarmos. Dessa forma, a expressão $\frac{h(2+h)}{h}$ pode ser simplificada e é igual a $2 + h$. Portanto, o limite procurado é igual a $\lim_{h \to 0}(2 + h)$ e tal expressão se aproxima de 2 quando h tende a zero. Logo, temos que

$$f'(1) = 2. \tag{13}$$

Esse exemplo mostra que pode ser simples calcular a derivada de uma função em certo ponto. É importante ressaltar para os alunos que isso nem sempre é uma verdade, que existem funções cujas derivadas são bastante difíceis de serem calculadas, mas que tais funções não fazem parte dos objetivos dessas aulas. Também pode ser importante repetir que nem todas as funções são deriváveis em todos os pontos e que devem ser respeitadas as condições para a existência da reta tangente (ver Atividade 2, p. 43).

Dado esse exemplo, é a hora de exercitar, inicialmente junto com os estudantes, o cálculo de derivadas de algumas funções em determinados pontos (ver sugestão de lista de exercícios no APÊNDICE A, p. 82, exercícios de 1 a 3).

Agora, vamos mostrar a ideia de função derivada, o que vai gerar algumas regras para facilitar os cálculos. A princípio, foi visto como calcular a derivada de uma função em um determinado ponto. Porém, esse processo pode tornar-se muito trabalhoso caso seja necessário calcular as derivadas de uma mesma função em diversos pontos. Para diminuir esse problema, podemos trabalhar com a variável x diretamente nos cálculos, em vez de usar $x = a$ várias vezes. Assim, teremos o valor da derivada de uma função, para qualquer x onde a função seja derivável, simplesmente substituindo x pelo valor desejado em uma expressão pré-determinada. Em suma, encontraremos uma lei $f'(x)$ para a função derivada de f.

Algumas demonstrações fáceis e rápidas podem ser apresentadas. É importante que os alunos tenham contato com algumas contas mais formais, ainda que simples, além de toda a parte intuitiva envolvida neste trabalho. Sugerimos as seguintes:

Proposição 1) A derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ é $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \tag{14}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} \tag{15}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \tag{16}$$

Proposição 2) A derivada de $\boldsymbol{f(x) = k}$, $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$, é $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

Aqui, mostraremos que a derivada de toda função constante é nula. Claro, se a função é constante, sua taxa de variação é nula. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0 \tag{17}$$

Proposição 3) A derivada de $\boldsymbol{f(x) = ax}$ é $\boldsymbol{f'(x) = a}$.

Aqui, cabe fazer uma pergunta, antes de fazer as contas, que pode estimular o raciocínio dos alunos: *qual deve ser a derivada da função linear $f(x) = ax$*? A ideia é que eles possam lembrar que a derivada é a taxa de variação instantânea da função e que a função linear tem taxa de variação constante. É importante explorar esse aspecto intuitivamente com os alunos antes de se mostrar os cálculos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-ax}{h} \tag{18}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ax+ah-ax}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a \tag{19}$$

Proposição 4) A derivada de $\boldsymbol{g(x) = k.f(x)}$, $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$, é $\boldsymbol{g'(x) = k.f'(x)}$.

De fato,

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k.f(x+h) - k.f(x)}{h} \tag{20}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k[f(x+h) - f(x)]}{h} = \lim_{h \to 0} k.\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \tag{21}$$

$$= k.\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.f'(x) \tag{22}$$

Duas últimas regras, importantíssimas, podem convenientemente ter suas demonstrações omitidas dos alunos[37]. A primeira por solicitar conhecimentos ainda não adquiridos na 1ª série, como o Teorema Binomial, ou ainda por, em demonstração por outro caminho, fazer uso de uma identidade que pode "assustá-los" por conta de seu formato. A segunda é omitida para não carregar demais a explanação. De qualquer forma, o professor sabe melhor qual nível de maturidade sua turma tem e pode escolher apresentar ou não essas demonstrações. As regras são as seguintes:

Proposição 5) A derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ é $\boldsymbol{f'(x) = n.x^{n-1}}$.

Proposição 6) A derivada de $\boldsymbol{H(x) = f(x) + g(x)}$ é $\boldsymbol{H'(x) = f'(x) + g'(x)}$.

O que foi exposto acima é suficiente para que se possa calcular a derivada de qualquer função polinomial. Como exemplo, segue o cálculo da derivada da função definida por $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$. Podemos, como visto, calcular as derivadas de cada parcela e somá-las. Portanto, a derivada desejada é

$$f'(x) = 2.3.x^2 - 4.2.x + 5 + 0, \tag{23}$$

ou melhor,

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5. \tag{24}$$

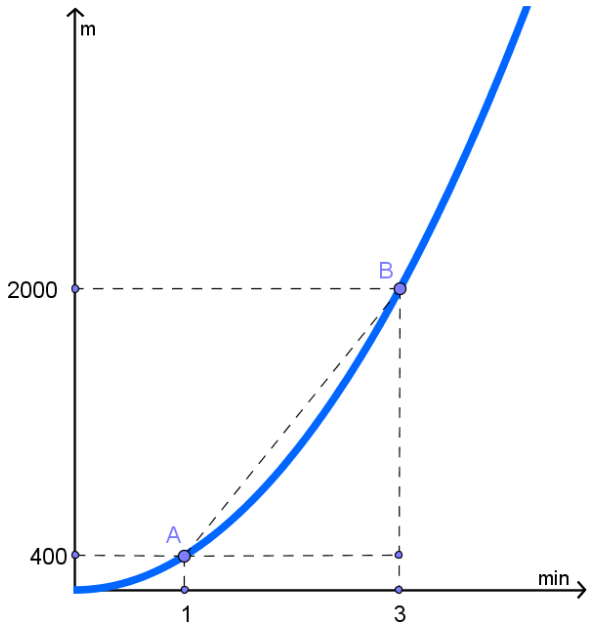
[37] As demonstrações estão disponíveis no APÊNDICE C.

Novamente, devemos exemplificar mais e resolver exercícios com os alunos (ver lista no APÊNDICE A, p. 82, exercício 4 em diante). A próxima subseção se propõe a resolver um problema do tipo que foi proposto como motivação para o estudo das derivadas.

5.4.1 **Respostas às perguntas da Atividade Zero**

Suponhamos que um automóvel tenha sua posição dada pelo gráfico que foi exposto na Atividade Zero, que é mostrado novamente a seguir.

Figura 22 – Cálculo da velocidade instantânea.



Fonte: O autor, 2014.

Conforme foi calculado naquela seção, a velocidade média dele do instante 1 min até o instante 3 min foi igual a 48 km/h. Naquele momento não tínhamos ainda condições de calcular sua velocidade exata nos instantes 1 min e 3 min, mas agora, com o conhecimento básico sobre derivadas, isso já é possível. As velocidades nos instantes 1 min e 3min são nada mais do que as derivadas da função nesses pontos, respectivamente.

Há uma pequena dificuldade inicial nesse problema, pois a lei da função cujo gráfico foi apresentado não foi dada, embora o enunciado tenha dito que se trata de uma parábola. Para facilitar a notação, vamos utilizar $y = f(x)$ e x para os eixos vertical e horizontal, em vez de S

e t, respectivamente. Para a determinação dessa lei, que é um passo necessário pois é através dela que poderemos calcular a derivada, começamos observando que em $f(x) = ax^2 + bx + c$, já sabemos que $c = 0$, pois a parábola corta o eixo y em zero. Daí, a lei da função é do tipo $f(x) = ax^2 + bx$. Substituindo as coordenadas do pontos dados no gráfico na lei da função, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a + b = 400 \\ 9a + 3b = 2000 \end{cases}, \tag{25}$$

que, resolvido, nos dá $a = 400/3$ e $b = 800/3$. Portanto, a lei da função exposta no gráfico é

$$f(x) = \frac{400}{3}x^2 + \frac{800}{3}x. \tag{26}$$

Agora, voltemos às perguntas que foram feitas no final da Atividade Zero.

1) Qual era a velocidade do móvel 1 minuto após a partida do sinal (ponto A)?

2) Qual era a velocidade do móvel 3 minutos após a partida do sinal (ponto B)?

3) Qual era a velocidade do móvel em qualquer instante após a partida?

Por tudo que foi exposto, sabemos que as respostas são, respectivamente, $f'(1)$, $f'(3)$ e $f'(x)$. Nesse caso, é muito mais prático responder primeiramente à pergunta 3 e, então, as respostas das perguntas 1 e 2 serão quase automáticas. Calculando a derivada, temos:

$$f'(x) = \frac{400}{3}.2x + \frac{800}{3}, \tag{27}$$

ou ainda,

$$f'(x) = \frac{800}{3}x + \frac{800}{3}. \tag{28}$$

Portanto, a velocidade em qualquer instante a pode ser calculada simplesmente substituindo-se x por a na lei de $f'(x)$. Respondendo a pergunta 1:

$$f'(1) = \frac{800}{3}.1 + \frac{800}{3} = \frac{1600}{3}, \tag{29}$$

logo, a velocidade após 1 minuto é igual a

$$\frac{1600}{3} m/min = \frac{1600}{3} \times \frac{60}{1000} = 32\ km/h. \tag{30}$$

Analogamente, temos que

$$f'(3) = \frac{800}{3}.3 + \frac{800}{3} = \frac{3200}{3}, \tag{31}$$

logo, a velocidade após 3 minutos é igual a

$$\frac{3200}{3} m/min = \frac{3200}{3} \times \frac{60}{1000} = 64\ km/h. \tag{32}$$

Com o conhecimento das derivadas, problemas semelhantes agora poderão ser resolvidos usando-se o mesmo procedimento.

5.5 **Atividade Extra: Máximos e mínimos**

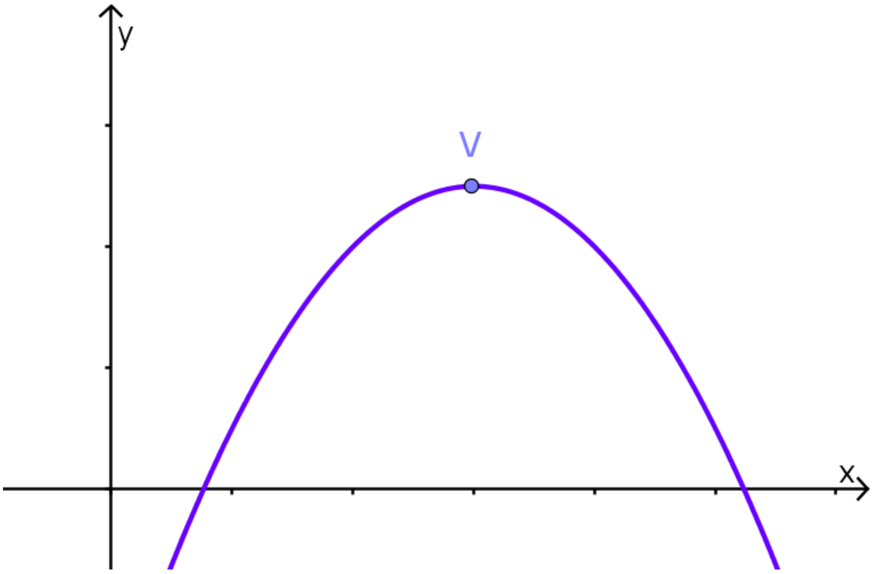
Para aqueles professores que porventura tenham uma disponibilidade maior de tempo, acrescentamos esta atividade extra, sobre máximos e mínimos. É aconselhável que, ao decidir incluir esse tópico, o docente tenha certeza sobre o tempo de que dispõe, por ser esta atividade mais demorada que as demais.

O conteúdo é perfeitamente aplicável na 1ª série do Ensino Médio e se relaciona com o que já foi ministrado sobre funções quadráticas. Dessa forma, servirá, por exemplo, para dar ao aluno uma nova visão sobre o significado do vértice de uma parábola, mostrando, entre outras coisas, o porquê da sua existência em todas elas, assim como ampliará o seu entendimento sobre problemas de máximos e mínimos, de uma forma geral.

Nesta atividade, utilizaremos um computador, com o *software* GeoGebra instalado, conectado a um projetor. Porém, é perfeitamente viável a obtenção de bons resultados sem os recursos tecnológicos. Os gráficos podem ser feitos à mão, sem perda de qualidade na explanação. O tempo de exposição é que será maior.

Para iniciar, a seguinte parábola pode ser mostrada aos alunos.

Figura 23 – Parábola e seu vértice.



Fonte: O autor, 2014.

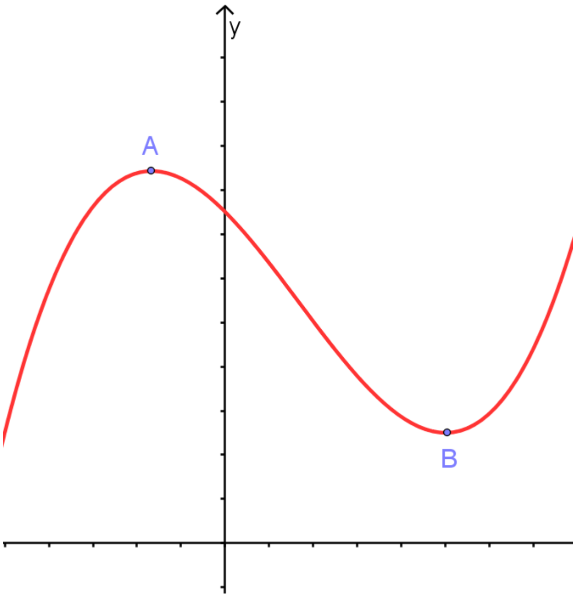
As coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ de uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ podem ser facilmente calculadas através das usuais expressões

$$x_V = -\frac{b}{2a} \tag{33}$$

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{34}$$

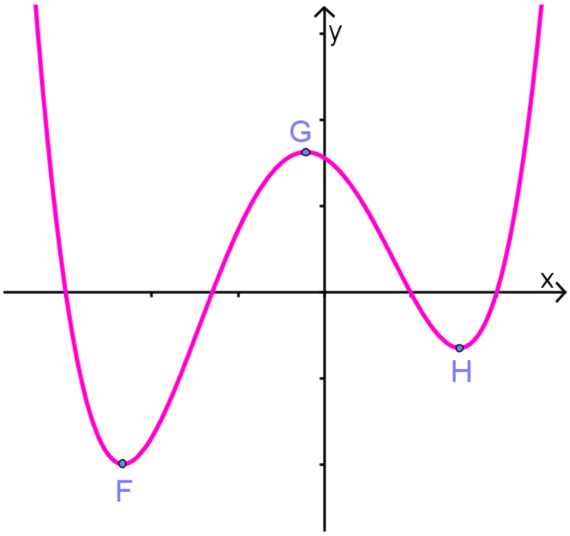
Em seguida, outros gráficos podem ser mostrados.

Figura 24 – Um máximo e um mínimo.



Fonte: O autor, 2014.

Figura 25 – Um máximo e dois mínimos.



Fonte: O autor, 2014.

A Figura 24 mostra o gráfico de uma função polinomial do terceiro grau e a Figura 25, de uma do quarto grau. É importante frisar para os alunos que o conceito de máximos e mínimos é um conceito local da função. Pode haver máximos e mínimos globais, mas nem sempre isso é uma verdade, como no caso do gráfico da Figura 24. Uma pergunta que pode surgir naturalmente, por causa da semelhança gráfica dos pontos assinalados com o vértice de um parábola, é a seguinte: é possível calcular as coordenadas dos pontos A e B, na Figura 24 e F, G e H, na Figura 25? A resposta é sim, e ela vem diretamente da ideia de derivada.

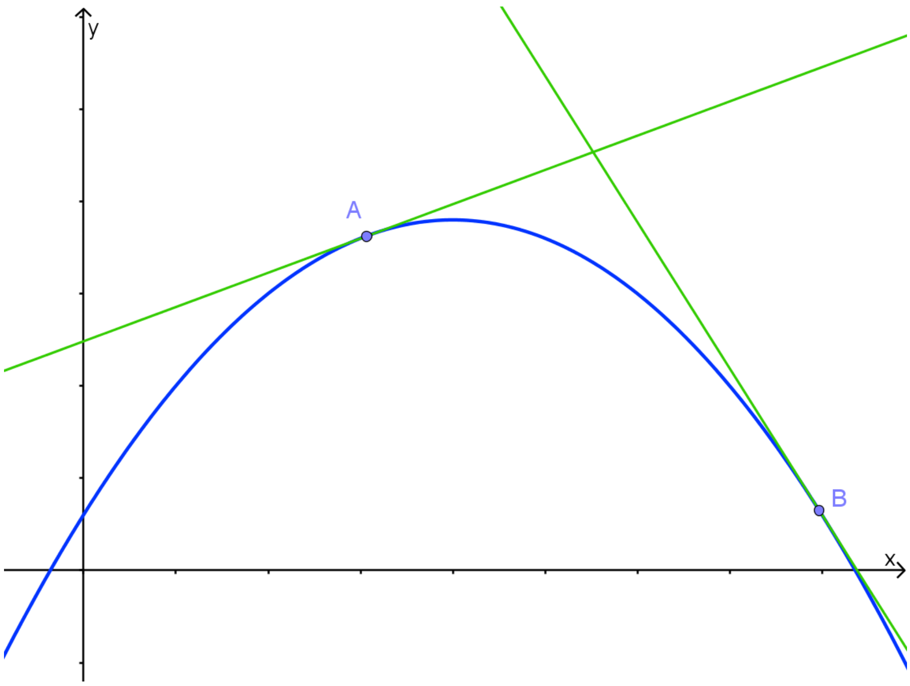
Primeiramente, lembremos que a derivada de uma função em um ponto é exatamente a inclinação da reta tangente à curva naquele ponto. Neste momento, uma ideia intuitiva deve ser passada aos alunos:

a) se a derivada $f'(a)$ é positiva, então a função é crescente para $x = a$;

b) se a derivada $f'(a)$ é negativa, então a função é decrescente para $x = a$.

Um gráfico pode esclarecer facilmente a situação. No gráfico da Figura 26, a tangente em A é uma reta que representa uma função afim crescente, enquanto em B a tangente representa uma função afim decrescente.

Figura 26 – Tangentes indicando crescimento e decrescimento.

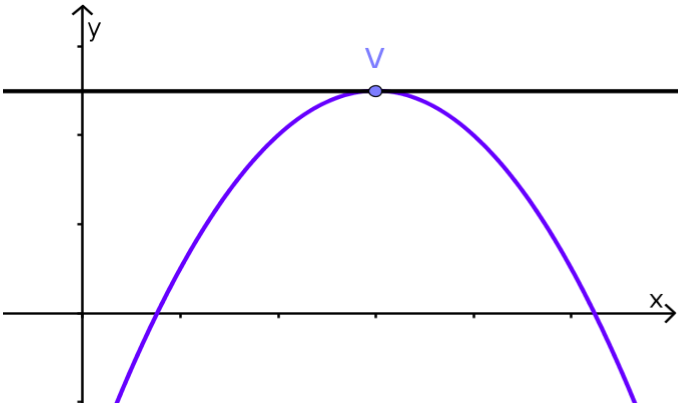


Fonte: O autor, 2014.

E o que faria um ponto ser um máximo ou um mínimo para a função? Uma das razões é exatamente o fato de ter uma derivada nula nesse ponto[38]. Seria interessante mostrar os gráficos já vistos anteriormente com a reta tangente traçada nos pontos de máximo ou mínimo locais deles (Figura 27, Figura 28 e Figura 29).

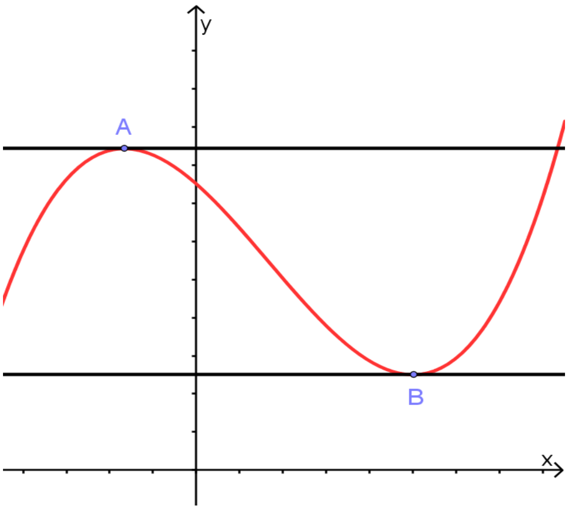
[38] Em funções polinomiais, os máximos e mínimos somente aparecem em pontos com derivada nula. Esse fato não necessariamente é verdadeiro para outros tipos de função.

Figura 27 – Tangente no vértice, com inclinação nula.



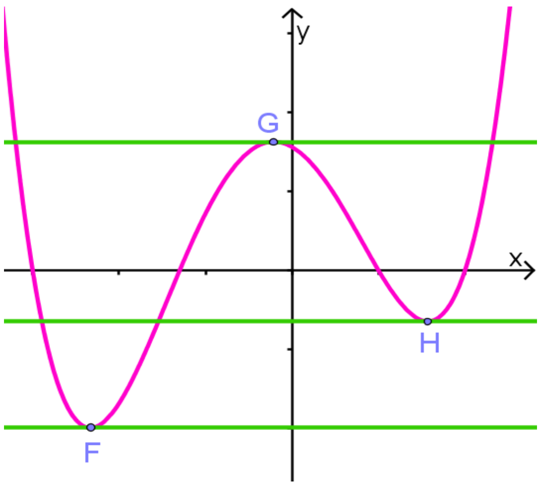
Fonte: O autor, 2014.

Figura 28 – Tangentes com inclinação nula.



Fonte: O autor, 2014.

Figura 29 – Tangentes com inclinação nula.



Fonte: O autor, 2014.

Assim, podemos observar que, para calcular as coordenadas de um ponto em que ocorra um máximo ou um mínimo local, um dos passos é encontrar os pontos em que a derivada é nula. Tais pontos do domínio da função com derivada igual a zero são chamados de ***pontos críticos*** dessa função[39]. Cabem ressalvas importantes:

a) isso é uma verdade para as funções polinomiais, que são o objeto de estudo nesse trabalho;

b) pode haver pontos com derivada nula que não serão máximos nem mínimos locais; esses casos serão descritos adiante.

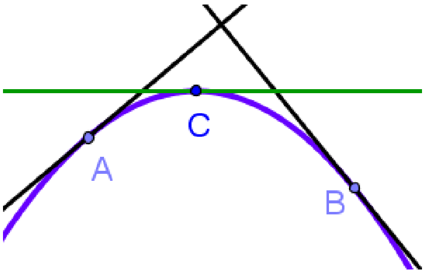
Ainda há, porém, uma questão a responder: como saber se determinado ponto com derivada nula é um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois? Sem entrar em detalhes sobre derivadas de ordem superior, pois não é o objetivo, um critério simples pode ser estabelecido.

1º Passo) Encontram-se os pontos críticos da função, igualando-se sua função derivada a zero e resolvendo a equação encontrada[40].

2º Passo) Calcula-se o valor da derivada da função em um valor de x menor e em outro maior do que o ponto crítico. Existem os quatro seguintes casos para um ponto crítico C de uma função polinomial:

Caso 1) A função é crescente antes de C e *passa a ser decrescente* depois de C, formando assim, um ***ponto de máximo*** (Figura 30).

Figura 30 – Máximo.



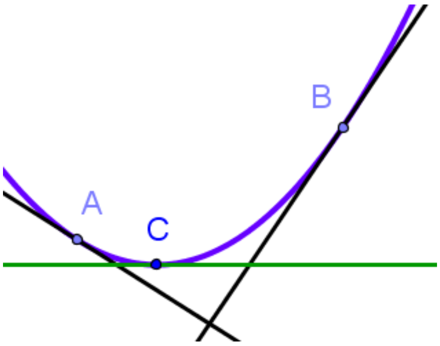
[39] Há pontos críticos que satisfazem a outras condições, porém, nas funções polinomiais eles são apenas os de derivada nula. Esta informação pode ser passada aos estudantes.

[40] Por conta do fato dessas atividades serem apresentadas ainda na 1ª série, as funções polinomiais trabalhadas devem ser limitadas ao grau 3, pois suas derivadas terão grau até 2 e os alunos serão capazes de resolver as equações, no máximo do segundo grau, que surgirem.

Fonte: O autor, 2014.

<u>Caso 2</u>) A função é decrescente antes de C e *passa a ser crescente* depois de C, formando assim, um ***<u>ponto de mínimo</u>*** (Figura 31).

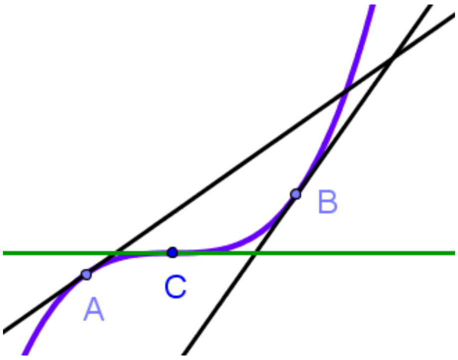
Figura 31 – Mínimo.



Fonte: O autor, 2014.

<u>Caso 3</u>) A função é crescente antes de C e *continua crescente* depois de C, não formando, dessa maneira, um ponto de máximo nem de mínimo[41] (Figura 32).

Figura 32 – Ponto de inflexão.

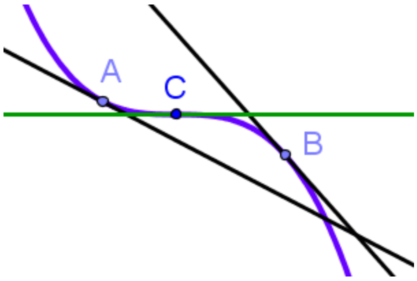


Fonte: O autor, 2014.

<u>Caso 4</u>) A função é decrescente antes de C e *continua decrescente* depois de C, não formando, dessa maneira, um ponto de máximo nem de mínimo (Figura 33).

[41] Nos casos 3 e 4, há a formação do que chamamos de ***<u>ponto de inflexão</u>***, que são aqueles em que a concavidade da curva muda. Cabe ressaltar que existem pontos de inflexão em que a derivada primeira da função não é nula; fica ao critério do professor comentar ou não esse fato com os estudantes.

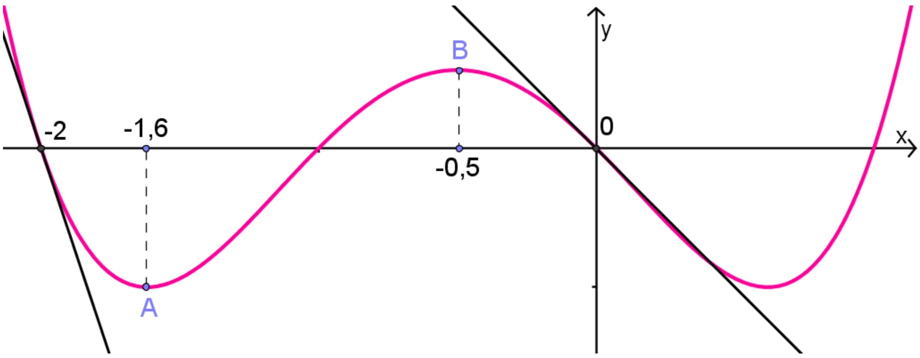
Figura 33 – Ponto de inflexão.



Fonte: O autor, 2014.

Observando os casos mostrados anteriormente, pode-se conjecturar que basta considerar uma vizinhança do ponto crítico em questão e verificar o sinal da derivada antes e depois dele[42]. Entretanto, um grande cuidado deve ser tomado na escolha dos valores de x maiores e menores do que os pontos críticos pois, caso a escolha seja malfeita, as conclusões tiradas podem ser erradas. Como exemplo de erro na escolha, pode-se observar o gráfico da Figura 34.

Figura 34 – Um exemplo de má escolha.



Fonte: O autor, 2014.

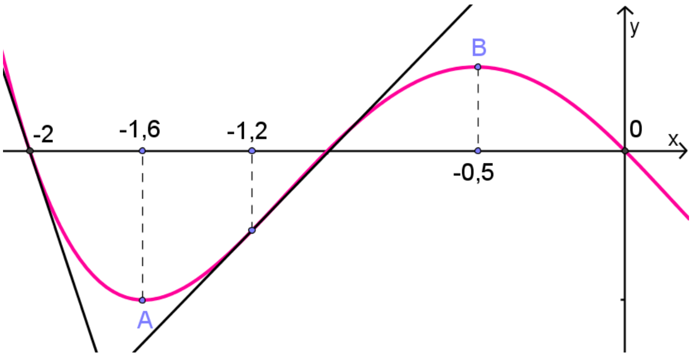
No gráfico anterior, A e B são pontos em que ocorrem um mínimo e um máximo locais, respectivamente. A abscissa de A é $-1{,}6$, portanto devemos escolher um valor menor e outro maior do que $-1{,}6$ para calcular as derivadas nesses pontos e verificar se a função é crescente ou decrescente antes e depois do ponto A. Porém, se os valores escolhidos forem -2 e zero, como ambos possuem derivadas negativas, isso levará à conclusão errônea de que se trata de um ponto de inflexão[43], como no Caso 4 mostrado na página anterior.

[42] Outra forma de fazer esse trabalho é através do estudo do sinal da função derivada, o que também é acessível aos alunos da primeira série.

[43] Atentar ao fato de que para fazer essa análise não é necessário visualizar o gráfico da função. Portanto, cometer esse tipo de erro é um perigo real.

O erro aconteceu pois o zero não deveria ter sido usado como valor maior do que $-1{,}6$, uma vez que zero é *maior do que o próximo ponto crítico*, que é $-0{,}5$. Para que não seja cometido esse tipo de erro, a solução é simples. As escolhas dos valores de x para os quais as derivadas serão calculadas devem ser baseadas nos intervalos entre os valores críticos. Por exemplo, o valor escolhido maior do que $-1{,}6$ deveria ter sido qualquer um no intervalo $]-1{,}6; -0{,}5[$. Desta forma, a conclusão de que o ponto $-1{,}6$ se trata de um ponto de mínimo seria correta (ver Figura 35).

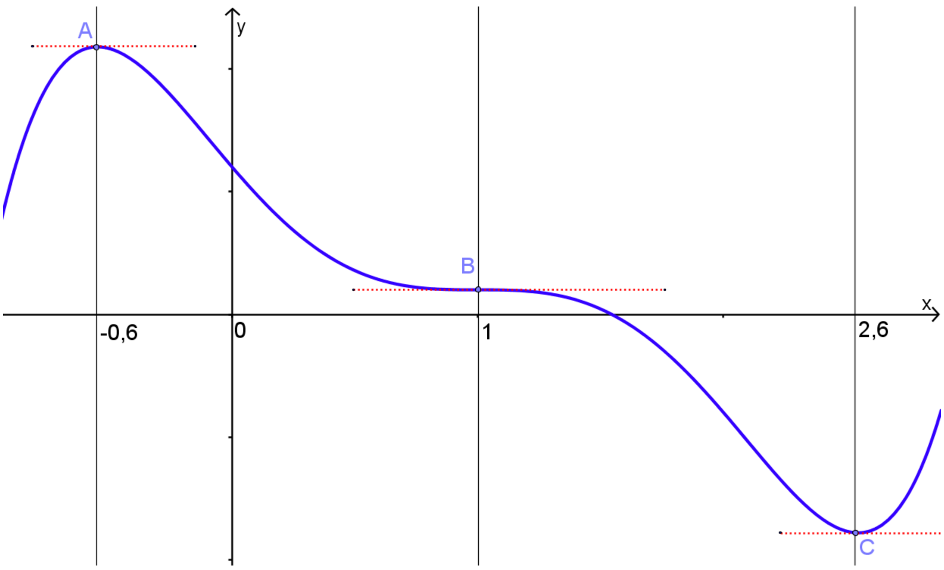
Figura 35 – Um exemplo de escolha correta.



Fonte: O autor, 2014.

Lembrando que o público-alvo deste trabalho está ainda na 1ª série do Ensino Médio, é importante ilustrar as situações com mais exemplos. No gráfico a seguir (Figura 36), com o auxílio das retas verticais pode-se visualizar as escolhas dos valores de x para os quais deve-se calcular as derivadas.

Figura 36 – Escolhendo os intervalos.



Fonte: O autor, 2014.

Para a análise do ponto A, escolhe-se um valor de x menor que $-0{,}6$ e outro entre $-0{,}6$ e 1. Para o ponto B, um valor entre $-0{,}6$ e 1 e outro entre 1 e 2,6. Para o ponto C escolhe-se um valor entre 1 e 2,6 e outro maior do que 2,6. Assim, poder-se-ia concluir corretamente que no ponto A ocorre um máximo, em B, um ponto de inflexão e em C, um mínimo.

Passemos a um exemplo de pesquisa de máximos e mínimos em uma função. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Vamos encontrar os pontos de máximo e mínimo locais dessa função, caso existam.

Primeiramente, deve-se encontrar os pontos críticos dessa função. Para tanto, devemos primeiramente determinar a lei da derivada $f'(x)$ e igualá-la a zero. A derivada de f é a função

$$f'(x) = 3.x^2 - 3. \tag{35}$$

Igualando essa expressão a zero, temos

$$3x^2 - 3 = 0 \tag{36}$$

$$3x^2 = 3 \tag{37}$$

$$x^2 = 1 \tag{38}$$

$$x = -1\ ou\ x = 1. \tag{39}$$

Portanto, os pontos críticos de f são -1 e 1. Portanto, há três intervalos em que tomaremos os valores de x para testar o sinal da derivada: $x < -1, -1 < x < 1$ e $x > 1$. Nessa função, temos que $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$, portanto nomearemos os pontos críticos assim: $A(-1{,}3)$ e $B(1,-1)$.

1) Análise do ponto A.

Calculando as derivadas antes e depois de $x = -1$, temos:

$$f'(-2) = 3.(-2)^2 - 3 = 9 \tag{40}$$

$$f'(0) = 3.0^2 - 3 = -3. \tag{41}$$

Daí, f é crescente antes de $x = -1$ e decrescente após $x = -1$. Então, A é um ponto em que ocorre um máximo local de f.

2) Análise do ponto B.

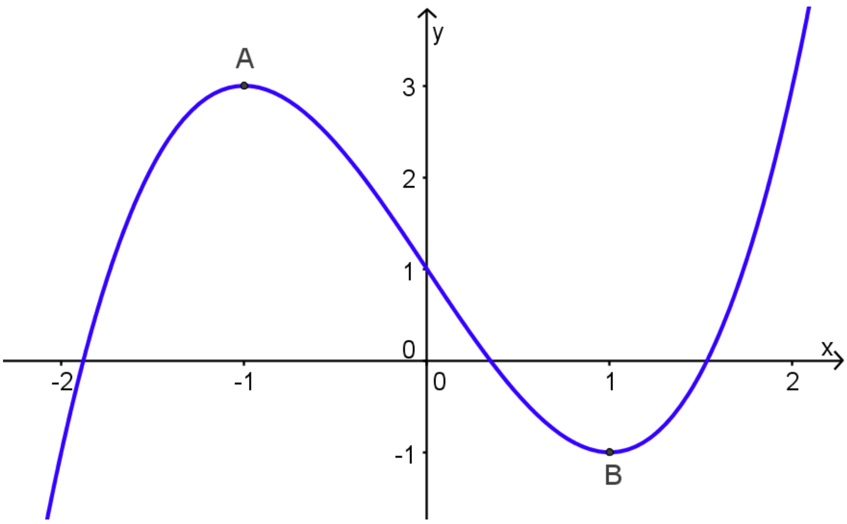
Calculando as derivadas antes e depois de $x = 1$, já sabemos que $f'(0) = -3$, e também:

$$f'(2) = 3.2^2 - 3 = 9. \tag{42}$$

Daí, f é decrescente antes de $x = -1$ e crescente após $x = -1$. Então, B é um ponto em que ocorre um mínimo local de f.

O gráfico da função f do exemplo anterior, com os pontos A e B assinalados, é o seguinte (Figura 37):

Figura 37 – Gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 1}$.



Fonte: O autor, 2014.

Há uma pequena lista com sugestões de exercícios referentes a esta atividade no <u>APÊNDICE A</u> (p. 84).

5.6 **Resumo das atividades**

A seguir, apresentamos um quadro resumindo as atividades apresentadas nesse trabalho.

Quadro 2 – Resumo das atividades

Atividade	**Título**	**Objetivo**
Zero	Uma motivação	Apresentação de um problema que forneça uma motivação para o início do estudo das derivadas.
1	Noção de linearidade local	Mostrar que certos gráficos aparentam ter a forma de uma linha reta, quando suficientemente magnificados.
2	Conceito de reta tangente	Introduzir o conceito de reta tangente a uma curva.
3	A derivada	Introduzir o conceito de derivada de forma intuitiva, sem apresentação formal de limites, utilizando a ideia de reta tangente desenvolvida na atividade anterior.
Extra	Máximos e mínimos	Apresentar uma importante aplicação das derivadas, o cálculo de máximos e mínimos de uma função, sempre em um contexto acessível aos alunos da primeira série do Ensino Médio. (Essa atividade é extra e só deve ser apresentada pelos professores que tiverem tempo disponível.)

Fonte: O autor, 2014.

CONCLUSÃO

É uma conversa recorrente. De tempos em tempos, muitos professores de Matemática percebem-se confabulando entre si – ou ainda com colegas de Física – a respeito de como certos assuntos seriam mais fáceis de se ensinar caso os alunos soubessem um pouco de Cálculo. Vários desses mestres comentam que não são necessárias muitas coisas, que bastaria um pouco de noção de limites aqui ou de derivadas ali para que certos tópicos ficassem mais claros ou muito mais interessantes e enriquecidos. E frequentemente comenta-se também que os conhecimentos necessários não são realmente difíceis e, portanto, acessíveis a todos com um mínimo de base matemática. Depois disso, vêm os sonhos de como seriam suas novas aulas sobre variação de funções, máximos e mínimos, cinemática, progressões, movimento harmônico, Matemática Financeira, energia etc.

Entretanto, seria tudo lindo se realmente houvesse tempo para tal. Uma proposta no sentido de incluir tantas aplicações do Cálculo no Ensino Médio demandaria um tempo que não está disponível. Os sonhos, como descritos no parágrafo acima, não poderiam se tornar realidade sem uma reformulação drástica. Quando citamos o professor Ávila, na seção 4.1, onde ele opina sobre a má estruturação dos programas de Matemática, não tínhamos a intenção de sugerir uma revolução no currículo. De fato, pensando no Ensino Médio como um todo, e não nos atendo apenas à 1ª série, nossa visão é a de que alguns tópicos poderiam ter seus tempos de exposição reduzidos, como o estudo de funções trigonométricas inversas, determinantes ou números complexos. Por exemplo, em uma pesquisa feita nos livros didáticos analisados no capítulo 2, encontramos somente dois exercícios contextualizados sobre números complexos. Eles estão presentes no livro do professor Dante[44] e ambos têm o mesmo contexto sobre corrente elétrica alternada, mas aplicado a um caso que não é estudado normalmente na educação básica. É claro que o tópico tem suas aplicações, mas o fato de praticamente não haver problemas com contexto deixa bastante evidente o seguinte: as aplicações de tal tema não são geralmente acessíveis ao Ensino Médio.

Portanto, pensando em fazer algo realmente viável pelo ensino da Matemática é que a presente proposta não contempla todos os sonhos descritos no primeiro parágrafo dessa conclusão. Para o professor cegamente apaixonado por sua disciplina pode parecer fazer todo sentido incluir mais e mais assuntos em suas aulas, mas para o estudante e para os objetivos da

---

[44] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações: volume 3*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

formação básica isso não é uma verdade. Por conta disso, o foco deste trabalho foi uma inclusão do Cálculo na Matemática secundarista, mas de forma bastante introdutória e intuitiva. Mirou-se apenas em alguns aspectos importantes para a melhor compreensão de certos assuntos e procurou-se usar o bom senso na hora de escolher o que é realmente aplicável de forma simples ao Ensino Médio. Consideramos que a maior parte do Cálculo é formada por conhecimentos avançados demais para o Ensino Médio e, mesmo nos casos em que o conteúdo não seja difícil, terá pouca aplicabilidade para o estudante.

Ao longo do texto, foi visto que a inclusão do Cálculo já foi uma realidade no Brasil. Na última vez em que foi excluído, por ocasião do movimento da Matemática Moderna, os fatos claramente apontam para erros como excesso de formalização da Matemática, o que deixou muitos tópicos com extensão exagerada. Esses erros deixaram uma lição importante: de fato, seria inviável ensinar Cálculo nessas condições em um nível adequado à escola básica. Já as entradas e saídas do Cálculo no currículo servem mais como registro histórico do que como uma demonstração de que é possível incluí-lo. Cada época tem suas necessidades e, portanto, deve-se pensar com total ênfase no que é mais ou menos adequado à educação nos dias de hoje.

E, apesar do Cálculo não pertencer aos programas oficiais, já é algo animador que parte dos livros didáticos dediquem espaço a ele. Muito embora consideremos a abordagem equivocada em relação ao momento, a apresentação do conteúdo agrada na maioria dos casos recentes analisados: apenas derivadas, bastante pouco de limites e nada de integrais. A nosso ver, um ganho importante poderia ser conseguido com a troca da 3ª série pela 1ª série como hora da apresentação dos conceitos. É uma pena que tais livros não possam ser adotados com a intenção de se utilizar o Cálculo dentro da visão desse trabalho. Com a troca para a 1ª série, ganharia o professor de Matemática e ganharia o professor de Física.

Quanto às experiências relatadas na Alemanha e nos Estados Unidos, elas também nos fornecem subsídios importantes para algumas conclusões. Na Alemanha, a presença do Cálculo no currículo secundarista regular é uma regra, embora cada estado possa decidir suas grades curriculares. Nos dois estados pesquisados, *Bayern* (Bavária) e *Baden-Württemberg*, o aluno estuda limites, derivadas e também integrais, assuntos estes que estão espalhados por todo o curso secundário. Porém, para que isso seja possível, o currículo aponta a falta de vários dos tópicos comumente ministrados no Brasil, incluindo alguns aos quais damos bastante importância, como análise combinatória e progressões aritméticas e geométricas. Isso mostra que a inclusão de todos os itens do que seria o Cálculo I da Universidade demandaria uma revolução em nossos programas de Matemática. Muita coisa deveria ser retirada para a entrada do Cálculo.

Dos Estados Unidos, o recado que vem é outro. Como estudar Cálculo é opcional no Ensino Médio, praticamente só tem contato com ele o estudante que pretende seguir alguma carreira onde esse conhecimento é necessário. As pesquisas e considerações mostradas ao longo do presente texto apontam para o fato de que estudantes que têm contato prévio com o Cálculo costumam se sair melhor na universidade, ao cursar a disciplina, do que aqueles que não têm contato.

Isso parece ecoar com aquilo que pregam os defensores de que o Cálculo deveria estar presente no Ensino Médio para que o desempenho na Universidade fosse melhor. Todavia, uma coisa é melhorar o desempenho futuro de alguns que seguirão uma carreira com essa necessidade específica. Outra coisa é conseguir essa melhoria de desempenho às custas da retirada de outros assuntos de maior relevância e às custas de se inserir vários assuntos potencialmente pesados e difíceis para a maioria dos estudantes – que efetivamente não precisarão de tais conhecimentos aprofundados. Muito melhor para tais objetivos seria se fossem ofertados cursos opcionais de Cálculo em escolas básicas, se o estudo de funções fosse mais cuidadoso ao longo do Ensino Médio ou se mais Universidades disponibilizassem um curso sério de pré-Cálculo.

Sem a intenção de comparar qualitativamente os dois modelos apresentados, o modelo americano de oferta de Cálculo nos parece muito *mais adequado à realidade brasileira* do que o alemão. No Brasil, o aproveitamento em Matemática nas séries inferiores ainda é muito deficiente. Os resultados no *Programme for International Student Assessment* (PISA[45]) indicam que, nesse quesito, o desempenho da Alemanha é muito superior ao do Brasil[46]. Dessa forma, é bastante razoável supor que o desempenho em Cálculo na escola secundária também vá ser deficiente por aqui. Enquanto não melhorar significativamente a qualidade da educação básica em nosso território, especialmente em Matemática, não vemos possibilidade de ensinar muitos tópicos de Cálculo nesse nível. E, infelizmente, todos os pontos de Cálculo I devem ainda ser oferecidos apenas àqueles que desejam estudá-los.

E assim surgiu a ideia de introduzir a derivada na 1ª série do Ensino Médio. Na verdade, essa ideia veio antes e foi sendo cada vez mais reforçada pelos fatos pesquisados. Vimos que

[45] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português.

[46] Em um ranking com 65 países ou regiões elaborado para o PISA 2012, com os desempenhos dos estudantes em matemática, o Brasil ocupou a 58ª posição, enquanto a Alemanha ficou em 16º lugar. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2013/resultados_pisa_2000_2012.pdf>. Acesso em 9 mar. 2014. Uma interessante ferramenta para comparar os desempenhos dos países em vários quesitos e com vários filtros está disponível em: <http://www.compareyourcountry.org/chart?project=pisa>. Acesso em: 9 mar. 2014.

era mesmo muito difícil inserir todo o Cálculo e vimos que tinha pouca influência no crescimento do estudante colocá-lo no apagar das luzes da escola. Vimos que o ganho em Física pode acontecer – um sonho antigo! –, bastando haver uma coordenação de ações entre os professores das disciplinas envolvidas. Escolhemos também trabalhar as aulas com a ajuda da tecnologia, ainda que tenhamos sido cuidadosos para não fazer dela uma condição *sine qua non* do processo de ensino. Segundo o professor Häder (2014), na Alemanha sequer se cogita trabalhar Matemática sem calculadoras científicas e formas eletrônicas de se fazer gráficos. Esperamos que um dia isso possa ser assim também no Brasil e que essa preocupação possa desaparecer.

As aulas de derivada, organizadas em atividades, foram expostas da forma mais intuitiva possível. Foi feito um esforço para que tudo ficasse bastante simples e de fácil assimilação. Não é a intenção sujeitar os alunos a um estudo pesado e detalhado. Isso eles farão na universidade, caso se decidam por um caminho que cruze o do Cálculo. É claro que essas atividades são somente sugestões, um pontapé inicial, para aqueles professores que se disponham a trabalhar dessa maneira. Mas acreditamos que é possível fazer assim.

As atividades podem, e devem, ser modificadas de acordo com a necessidade do docente, conforme as especificidades de cada turma ou mesmo por gosto pessoal. Pedimos que sugestões de melhorias e críticas sejam enviadas para o endereço eletrônico godinho4@gmail.com. Elas serão recebidas com atenção.

Por todas essas considerações feitas acima, decidimos formatar o trabalho como foi feito. É pouca proposta de mudança? Sim, mas nada em educação surtirá efeito de uma hora para outra. Todo resultado pedagógico aparece aos poucos, e mudanças também podem ser feitas aos poucos. É um argumento falacioso aquele que apregoa que se algo não vai resolver todos os problemas, então não vale a pena ser feito. Muitas vezes, dentre várias opções de ação, faz-se aquela que se pensa ser a melhor ou aquela que se está com vontade de fazer ou, simplesmente, aquela que se mostra possível de ser executada, muito embora não seja uma solução final. É isso que nos propusemos a fazer: trilhar um caminho que não é perfeito, obviamente, mas que tem sua dose de contribuição para o ensino da Matemática. Não melhora tudo, até porque isso é impossível, mas melhora uma pequena parte que está ao alcance de todos. E caminharemos atrás dessa pequena melhoria a partir de agora.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 18, jan./maio 1991.

______. Limites e derivadas no ensino médio?. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 60, 2006.

BARRETO FILHO, B.; DA SILVA, C. X. *Matemática aula por aula:* 3ª série. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003.

BRASIL. Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=65346>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Decreto n. 3.890, de 1 de janeiro de 1901. Approva o Codigo dos Institutos Officiaes de Ensino Superior e Secundario, dependentes do Ministerio da Justiça e Negocios Interiores. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=60451>. Acesso em 15 fev. 2014.

______. Decreto n. 19.890, de 18 de abril de 1931. Dispõe sobre a organização do ensino secundário. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=40440>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Decreto n. 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. Disponível em: <http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=32229>. Acesso em: 15 fev. 2014.

______. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.htm>. Acesso em: 16 fev. 2014.

BRESSOUD, D. *Calculus in high school:* too much of a good thing?. Palestra apresentada na *Michigan State University*, em 30 maio 2012. Disponível em: <http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2012/MSU-APCalc.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2014.

______. *Selected results from the MAA calculus study*. Relatório apresentado na *CB-MAA Committee on Mutual Concerns*, em 8 jan. 2013. Disponível em: < http://www.macalester.edu/~bressoud/talks/2013/CSPCC-CB.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2014.

COLLEGE BOARD. Apresenta conteúdo da instituição homônima, que tem por objetivo ajudar estudantes na transição do Ensino Médio para a universidade. Disponível em: <https://www.collegeboard.org>. Acesso em: 21 nov. 2013.

COMPARE YOUR COUNTRY. Apresenta informações comparativas entre países em diversos setores como economia, educação, agricultura e outros. Disponível em: <http://www.compareyourcountry.org/index.php>. Acesso em: 21 mar. 2014.

DANTE, L. R. *Matemática:* contexto e aplicações. v. 3. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

GENTIL, N. et al. *Matemática para o 2º grau*. v. 3. 5. ed. São Paulo: Ática, 1996.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Descrições e conflitos teórico-computacionais: o caso da retidão local. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, São Paulo. *Anais*... . São Paulo: SBEM, 2003.

GIRALDO, V. Observações acerca do Trabalho de Conclusão de Curso de Leandro Machado Godinho. Rio de Janeiro, 28 abr. 2014.

HÄDER, M. Entrevista concedida a Leandro Machado Godinho. Rio de Janeiro, 20 mar. 2014.

IEZZI, G. et al. *Matemática:* 3ª série, 2º grau. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1976.

______. *Matemática:* 3ª série, 2º grau. 9. ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

______. *Matemática:* ciência e aplicações, 3: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

INEP. Apresenta informações gerais de estudos, pesquisas e avaliações sobre o Sistema Educacional Brasileiro. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2014.

INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. *GeoGebra*. Versão 4.0.40.0. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 27 ago. 2012.

KLOPFENSTEIN, K.; THOMAS, M. K. *The Advanced placement performance advantage:* fact or fiction?. Artigo apresentado em palestra durante o Encontro Anual da *American Economic Association* (AEA), em 8 jan. 2005. Disponível em: <https://www.aeaweb.org/assa/2005/0108_1015_0302.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2014.

KULTUSMINISTER KONFERENZ. Apresenta informações gerais sobre educação, pesquisa e cultura na Alemanha. Disponível em: <http://www.kmk.org/home.html>. Acesso em: 20 mar. 2014.

PAIVA, M. *Moderna plus:* matemática, v. 3, 3. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PALMA FILHO, J. C. Pedagogia cidadã. *Cadernos de Formação*: história da educação. 3. ed. São Paulo: PROGRAD/ UNESP/ Santa Clara Editora. 2005, p. 49-60

SIEMENS AG. *Information for parents*. Apresenta informações básicas sobre o Sistema educacional na Alemanha. Disponível em: <http://www.siemens.de/jobs/schulabsolventen/information-parents/Seiten/default.aspx>. Acesso em: 19 mar. 2014.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática:* ensino médio, v. 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX: da reforma Francisco Campos à matemática moderna. *Revista Horizontes*. Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004, 2004.

STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT UND BILDUNGSFORSCHUNG. Apresenta informações gerais sobre educação no estado da Baviera, Alemanha. Disponível em: <http://www.isb.bayern.de>. Acesso em: 20 mar. 2014.

STEWART, J. *Cálculo*, v. 1. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SUTCLIFFE, J. T. *Seeing is believing*. Artigo apresentado em palestra durante a *Professional Night*, no *AP Calculus Reading*, em 6 jun. 2004. Disponível em: <http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/courses/teachers_corner/42248.html>. Acesso em: 21 nov. 2013.

TALL, D. *Intuition and rigour*: the role of visualization in the calculus. *Visualization in Mathematics*, M.A.A., Notes No. 19, p. 105-119, 1991. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 12 maio 2014.

UK-GERMAN CONNECTION, *The school system in Germany*, Disponível em: <http://www.ukgermanconnection.org/schools-german-education-system>. Acesso em 19 mar. 2014.

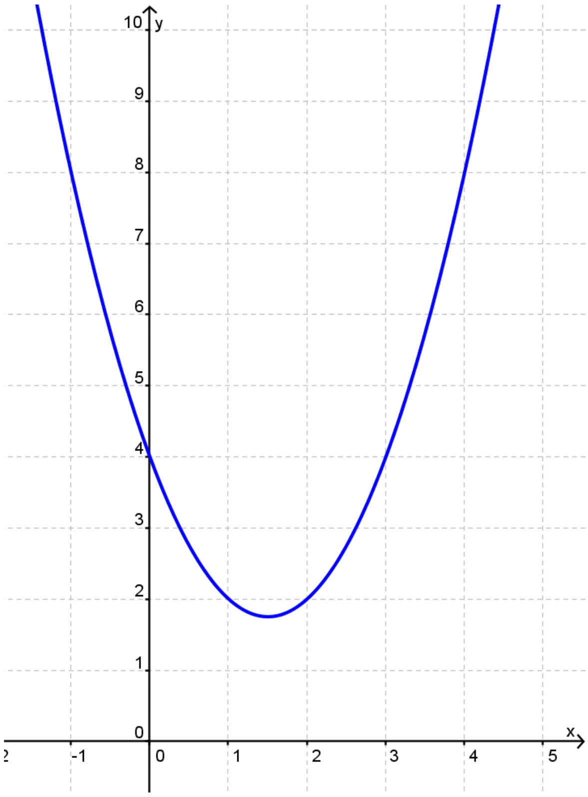
VALENTE, W. R. Euclides Roxo e a história da educação matemática no Brasil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 1, p. 89-94, mar. 2005.

APÊNDICE A – Sugestões de exercícios

Sugestões de exercícios referentes à Atividade Zero: Uma motivação

1) Dados os gráficos de funções a seguir, determine a taxa de variação média de cada uma delas nos intervalos [1,3] e [2,4], traçando nos gráficos as retas secantes à curva que passam pelos pontos correspondentes a cada intervalo.

a)



b)

2) Considere um móvel que se desloca em movimento uniformemente variado, cuja posição é dada pela equação $S = t^2 + t$, em que S representa a posição do móvel, em metros e t representa o tempo, em segundos.:

a) Determine a velocidade média do móvel, em m/s, desde o instante inicial até o instante 5 s.

b) Determine a velocidade média do móvel, em m/s, desde o instante 2 s até o instante 7 s.

c) Esboce o gráfico da função dada e represente a reta secante à parábola que passa pelos pontos de abscissas 0 e 5 e também a reta que passa pelos pontos de abscissas 2 e 7.

Respostas:

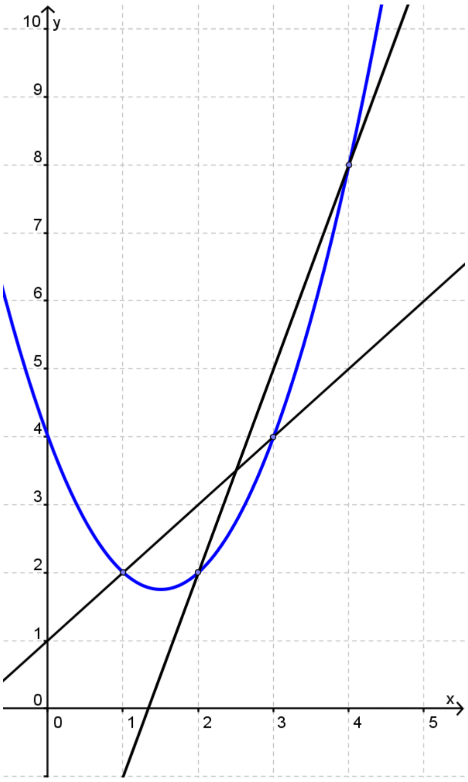
1)

a)

Intervalo [1,3]: 1

Intervalo [2,4]: 3

Retas secantes:

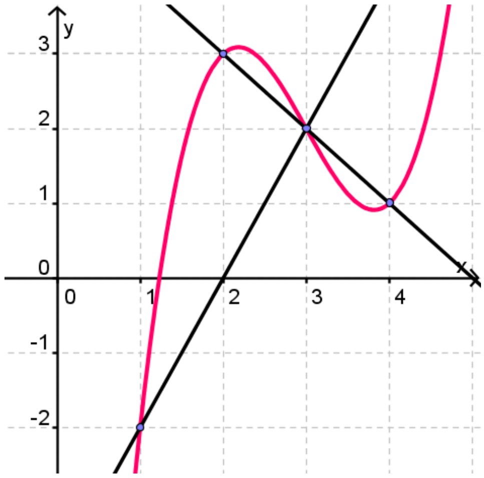


b)

Intervalo [1,3]: 2

Intervalo [2,4]: – 1

Retas secantes:

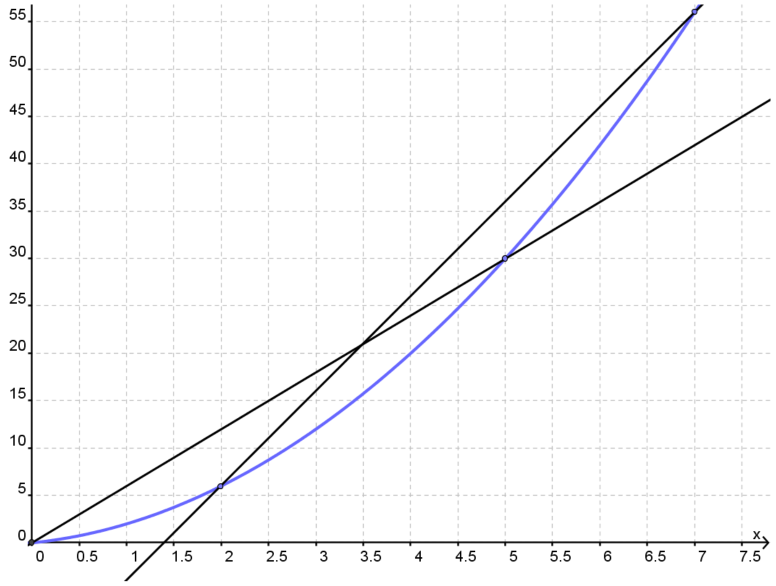


2)

a) 6 m/s = 21,6 km/h

b) 10 m/s = 36 km/h

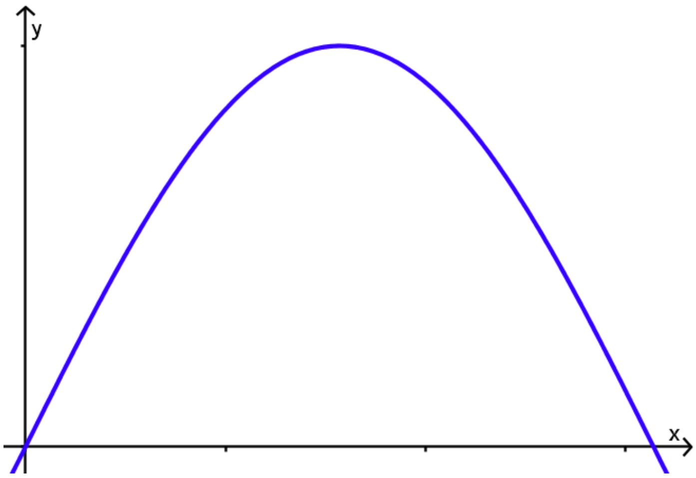
c)

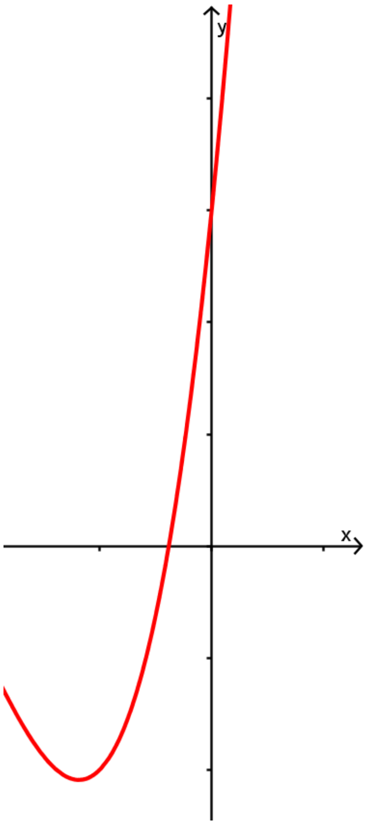


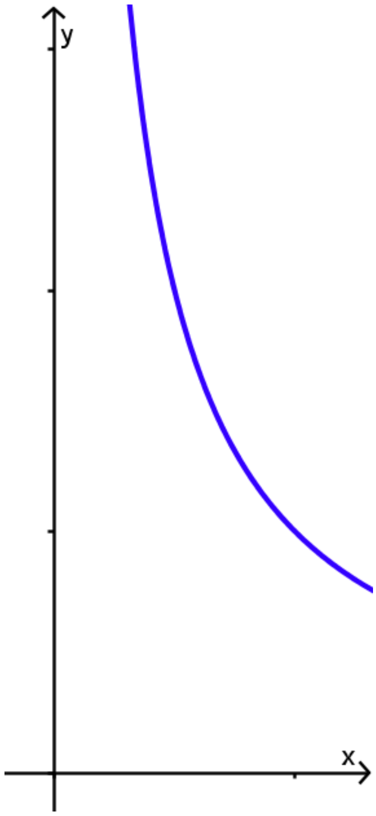
Sugestão de exercício referente à Atividade 1: Noção de linearidade local

Que tipo de função corresponde a cada gráfico mostrado a seguir?

a)



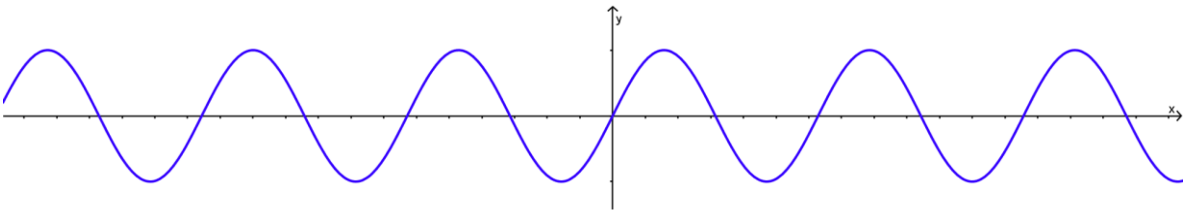
b) 

c) 

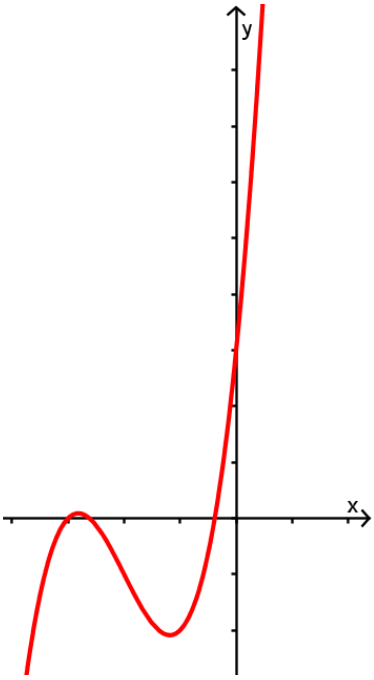
Respostas:

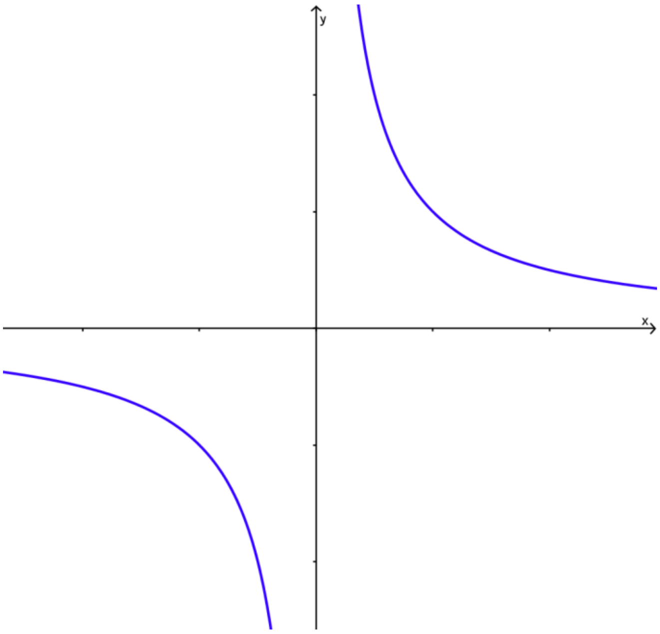
Na verdade, apenas olhando a parte do gráfico que foi mostrada não é possível saber de que tipo de função se trata. Mesmo mostrando uma parte maior do gráfico, nada garante, por conta somente dessa nova visualização, que seus aspectos manter-se-ão da forma apresentada. No presente caso, as funções cujos gráficos foram mostrados são definidas pelas seguintes leis:

a) $y = sen\ x$



b) $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ c) $y = 1/x$

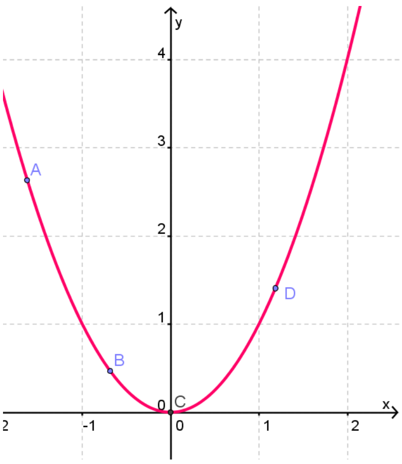




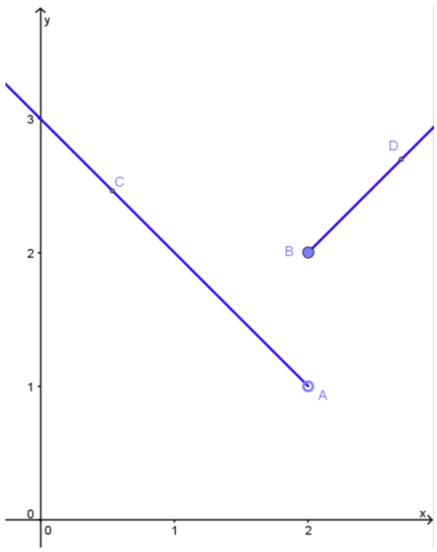
Sugestão de exercício referente à Atividade 2: Conceito de reta tangente

Dados os gráficos a seguir, enumere em quais dos pontos assinalados a função deve possuir uma reta tangente. Justifique a não existência da reta tangente, quando for o caso.

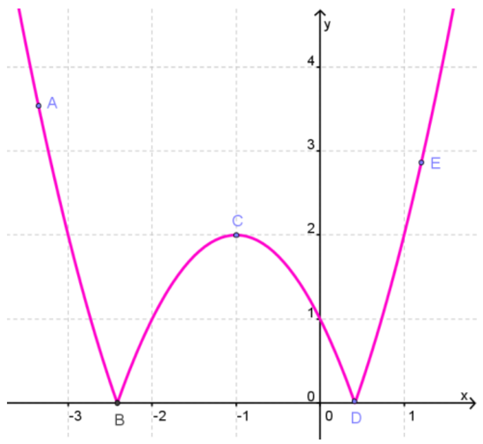
a)



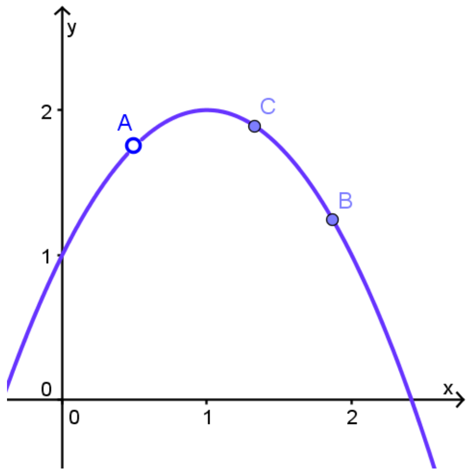
b)



c)



d)



Respostas:

a) A, B, C e D.

b) C e D. O ponto A não pertence ao gráfico, enquanto no ponto B o processo de levar as secantes até o limite só se completaria de um dos lados.

c) A, C e E. Em B e D há a formação de "bicos" no gráfico (as "candidatas a tangente" seriam diferentes em cada um dos lados).

d) B e C. O ponto A não pertence ao gráfico.

Sugestões de exercícios referentes à Atividade 3: A derivada

1) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, determine o valor de $f'(1)$.

2) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2x^2$, determine o valor de $f'(-1)$.

3) Dada a função $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$, determine o valor de $f'(2)$.

4) Determine $f'(x)$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x$

b) $f(x) = -3x^4 + x^2 - 2x + 5$

5) Sendo $f(x) = \frac{3}{x}$, com $x \neq 0$, determine a expressão de $f'(x)$.

6) Determine as equações da retas tangentes ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ nos pontos de abscissas:

a) 1

b) -2

7) A partir de certo instante, a posição S de um móvel é dada pela equação $S = 3 + 4t + t^2$, em que S é dada em metros e t é o tempo, em segundos, passado após o instante inicial. Determine:

a) a velocidade média, em m/s, desenvolvida pelo móvel até o instante 10 s;

b) a velocidade do móvel no instante 10 s;

c) a velocidade inicial do móvel;

d) o tempo necessário para que a velocidade do móvel atinja 15 m/s.

8) Pelos conceitos que foram vistos até agora, a velocidade instantânea de um móvel cuja posição é dada por uma função $S(t)$ pode ser calculada através da derivada $S'(t)$. Com isso, costuma-se dizer que a velocidade é a derivada da posição. Sendo $S'(t)$ uma função derivável, qual é a interpretação física que se pode dar à derivada dessa função $S'(t)$?

Respostas:

1) 3

2) 7

3) – 1/3

4) a) $f'(x) = 6x^2 - 3$

b) $f'(x) = -12x^3 + 2x - 2$

5) $f'(x) = -3/x^2$

6) a) $y = x - 1$

b) $y = -11x - 7$

7) a) 14 m/s

b) 24 m/s

c) 4 m/s

d) 5,5 s

8) Aceleração.

Sugestões de exercícios referentes à Atividade Extra: Máximos e mínimos

1) Determine, usando os conceitos de derivada, os pontos de máximo ou mínimo e pontos de inflexão das seguintes funções polinomiais, quando existirem:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$

b) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

c) $h(x) = x^5 - 8x^3$

2) Determine, usando derivadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas do vértice de uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$.

3) A distância de um móvel, em metros, em relação a um referencial é dada pela expressão $S(t) = 3 + 14t - 2t^2$, em que t está em segundos. Responda:

a) Qual é a posição do móvel após 1 s?

b) Qual é a posição do móvel após 2 s?

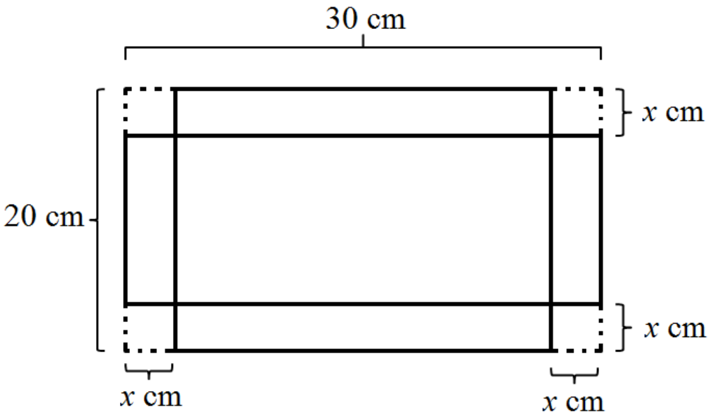
c) Em que instante o móvel está mais distante do referencial?

d) O que acontece com a velocidade do móvel nesse instante em que ele está mais distante do referencial?

e) Qual é a aceleração deste móvel?

4) Uma empresa produz apenas um tipo de produto, cuja produção tem um custo mensal, em reais, dado pela expressão $C(x) = 6000 + 500x - x^2$, em que x representa o número inteiro de dezenas de unidades produzidas, com $0 \leq x \leq 350$. Quanto mais unidades desse produto a empresa vende, menor é o preço de venda de cada unidade, que é dado, em reais, pela expressão $V(x) = 540 - x^2$. Considerando que toda a produção é sempre vendida, determine o número de unidades desse produto que a empresa deve vender para obter lucro máximo.

5) Uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo, sem tampa, será construída a partir de uma placa retangular de papelão, com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura. Em cada canto da placa, um quadrado de lado x cm será cortado, de forma que se possa dobrar o papelão nas linhas contínuas para produzir a caixa (ver figura). Determine a medida aproximada da altura, em milímetros, que faz essa caixa ter seu volume máximo. (Considere a aproximação $\sqrt{7} \cong 2{,}65$.)



Respostas:

1) a) $-3/4$: mínimo.

b) -1: ponto de inflexão.

c) $-4\sqrt{30}/5$: máximo; 0: ponto de inflexão; $4\sqrt{30}/5$: mínimo.

2) A derivada é $y' = 2ax + b$, logo ela se anula em $x = -b/2a$, que é x_v. Calculando $f(-b/2a)$, obtemos $y = (-b^2 + 4ac)/4^{\text{a}} = -\Delta/4a$, que é y_v.

3) a) 15 m

b) 23 m

c) 3,5 s

d) A velocidade é nula.

e) -4 m/s²

4) 40

5) 39 mm

APÊNDICE B – Lista de trabalhos do PROFMAT

A seguir, apresentamos uma lista com alguns trabalhos de conclusão de curso de mestrandos do PROFMAT sobre aplicação do Cálculo no Ensino Médio[47].

1. Algumas aplicações de Física do Ensino Médio a partir do Cálculo Diferencial e Integral (Lucas Cavalcanti Cruz)
2. Cálculo no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do *software* GeoGebra (Jaqueline Molon)
3. Cálculo no Ensino Médio (Bruno Vianna dos Santos)
4. Cálculo no Ensino Médio (Luiz Amorim Goulart)
5. Cálculo no Ensino Médio (Fabio Luis de Brito)
6. Proposta de introdução de Cálculo Variacional no Ensino Médio (Tiago Bandeira Castro)
7. A importância do ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4º ano do Ensino Médio integrado ao técnico de eletromecânica do IFPI, campus de Floriano (André Luiz Ferreira Melo)
8. Uma introdução do Cálculo Variacional no ensino da física (Magno Márcio de Azevedo)
9. Utilização do *software* GeoGebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável (Hugo Leonardo de Moraes)

[47] Uma lista com os trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/134. As buscas foram feitas usando as palavras “cálculo”, “limite”, “derivada” e “integral”. Acesso em: 15 fev. 2014.

APÊNDICE C – Demonstrações

Aqui serão apresentadas as demonstrações das proposições 5 e 6, que foram omitidas do texto inicial ao final da Atividade 3 (p. 55). Na prova da proposição 5 faremos uso do seguinte formato de cálculo para derivada no ponto a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A razão é tornar a demonstração acessível aos alunos da 1ª série, caso o professor resolva apresentá-la.

Proposição 5) A derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ é $\boldsymbol{f'(x) = n.x^{n-1}}$.

Primeiramente, vejamos que a expressão $x^n - a^n$ pode ser fatorada como segue:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

De fato,

$$(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) =$$

$$= x^n + x^{n-1}a + x^{n-2}a^2 + \cdots + x^2a^{n-2} + xa^{n-1} - x^{n-1}a - x^{n-2}a^2 - \cdots - xa^{n-1} - a^n$$

$$= x^n - a^n$$

Portanto, temos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{(x - a)}$$

$$= \lim_{x \to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Como $x \to a$, o limite acima é igual a

$$\underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1}}_{n\ parcelas} = n.\,a^{n-1}$$

Daí, $f'(a) = n.\,a^{n-1}$ e, substituindo a pela variável x, obtemos

$$f'(x) = n.\,x^{n-1}$$

Proposição 6) A derivada de $\boldsymbol{H(x) = f(x) + g(x)}$ é $\boldsymbol{H'(x) = f'(x) + g'(x)}$.

A derivada procurada é igual a

$$H'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$