Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Um Estudo sobre a Função Exponencial

Rafael Henrique de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2015

517 O48e

Oliveira, Rafael Henrique de
Um Estudo sobre a Função Exponencial/ Rafael Henrique de Oliveira- Rio Claro: [s.n.], 2015.
73 f., il., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Cálculo. 2. Análise. 3. Função de uma Variável. 4. Função Exponencial. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Rafael Henrique de Oliveira
UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Profa. Dra. Selma Helena de Jesus Nicola
CCT / UFSCar / São Carlos (SP)

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

Rio Claro, 30 de Janeiro de 2015

Eu dedico este trabalho à toda minha família, destacando os meus irmãos, Camila e Vítor, e de uma maneira especial à memória de meu pai José, conhecido como "Zé Bandeira", que se não fosse a luta dele trabalhando dia e noite, eu não teria chegado até aqui; e também à minha mãe Lúcia que desde os meus sete anos de idade lutou junto comigo para que eu aprendesse a estudar.

Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar à minha professora orientadora, Dra. Marta Cilene Gadotti, que teve paciência para esperar o meu tempo de trabalho e me ajudou na elaboração desta dissertação. Também quero agradecer a dois grandes professores que conheci, o professor Dr. José Carlos de Souza Kiihl, que me mostrou os "caminhos"que eu devia tomar para obter o chamado "amadurecimento matemático", onde aprendi a lidar com a didática de demonstrar os resultados na matemática; e ao meu amigo professor Paulo Henrique Zerbinatti, que foi um grande exemplo e amigo nas viagens até Rio Claro. Por último devo um agradecimento especial à CAPES, que financiou este mestrado, possibilitando minhas viagens e a conclusão do estudo com mais tranquilidade.

O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento,
pois aquele que a ignora não pode conhecer
as outras ciências ou as coisas do mundo.

Roger Bacon

Resumo

Realizamos um estudo sobre a função exponencial, analisando as principais propriedades desta função e a construção de seu gráfico. Para isso, foi realizada uma pesquisa detalhada sobre alguns subconjuntos dos números reais, servindo de base para compreendermos as propriedades envolvidas na potenciação de um número real. Ao final do trabalho, destacamos algumas aplicações da função exponencial, que podem servir de motivação para se iniciar o ensino de tal função na educação básica do Brasil.

Palavras-chave: Cálculo, Análise, Função de uma Variável, Função Exponencial.

Abstract

We conducted a study of the exponential function, analysing the main properties of this function and the construction of its graph. For this, a detailed research on some subset of the real numbers was carried out, providing the basis for understanding the properties involved in the potentiation of a real number. At the end of the work, we highlight some applications of the exponential function, which can serve as motivation to start teaching this in basic education in Brazil.

Keywords: Calculus, Analysis, Function of a Variable, Exponential Function.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Este trabalho vai tratar especificamente da função exponencial, mostrando as suas propriedades, o gráfico que a representa e algumas de suas aplicações. O leitor à quem desejamos direcionar este estudo são os professores e estudantes de matemática ou áreas de exatas, que irão lidar com o estudo de funções de uma variável. Mais precisamente os docentes do ensino médio no Brasil, com o intuito de que este trabalho possa lhes auxiliar no tratamento da função exponencial. Para isso, tivemos uma grande preocupação de mostrar algumas interrogações que surgem no trabalho do docente na sala de aula, como por exemplo: "Por que todo número elevado a zero dá um?"Logicamente essa não é a única pergunta que surge quando estamos falando de potenciação, pois muitas outras surgem desde o sexto ano do ensino fundamental da educação básica brasileira. Portanto caro leitor, tentamos sempre nos posicionar no lugar de um estudante de matemática na escola, indagando sobre qual o significado de tais propriedades.

Para compreendermos tudo isso e entender melhor a função exponencial, foi necessário um breve estudo sobre alguns subconjuntos dos números reais. Então o Capítulo 2 lida justamente com esta parte, onde analisamos basicamente os números naturais, os números inteiros, os números racionais, os números irracionais e finalmente os números reais. Neste capítulo iremos falar também sobre sequências numéricas, pois as mesmas serão de grande utilidade no entendimento dos números irracionais como também na ideia de limites. No Capítulo 3, iremos tratar da operação de potenciação, onde destacaremos as suas principais propriedades que servirão de base para definir a função exponencial. Já no Capítulo 4, definiremos a função exponencial, analisaremos as suas propriedades e construíremos o gráfico dessa função.

Na segunda seção do Capítulo 4, trabalharemos com algumas aplicações importantes da função exponencial, como o estudo do Carbono 14, onde é possível estimar a idade de um fóssil. Com essas aplicações, procuramos dar uma sugestão de aula para os docentes de matemática do ensino médio que irão trabalhar com a função exponencial. O intuito principal dessa seção é que o professor consiga motivar seus alunos a aprender mais sobre o assunto. Como você pode ter notado, leitor, a nossa preocupação é a de que você entenda e se sinta mais seguro para trabalhar com a função exponencial, pois a matemática não pode ser exclusividade de uma pequena parcela de estudantes, mas que seja sim atrativa a todos os olhares daqueles que tentam estudar essa ciência imprescindível em todas as áreas da sociedade moderna.

2 Conjuntos Numéricos

Neste capítulo introduziremos os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Usaremos a teoria presente neste capítulo nos capítulos seguintes; na descrição de potência e na definição da função exponencial. O objetivo central é mostrar que o conjunto dos números reais tem estrutura de corpo com a propriedade de ser completo.

2.1 Números Naturais

Os números naturais surgiram principalmente com a finalidade de se trabalhar com a contagem de objetos, nesse caso estamos falando da aplicação dos naturais como números cardinais. Depois o homem passou a aplicar os números naturais como números ordinais se referindo a ideia de posicionamento. Na escola aprendemos a lidar com esses números para podermos contar objetos, mas nunca tivemos uma forma de diferenciar o conjunto dos números naturais dos outros conjuntos que compõem os números reais. Nesta seção utilizaremos a referência [1] para aprofundarmos mais nosso conhecimento sobre esse conjunto.

Vamos definir os números naturais conforme os "Axiomas de Peano"[1]:

1. Todo número natural n possui um sucessor que é um número natural e números diferentes possuem sucessores diferentes.

2. Existe um número natural 1 (um) que não é sucessor de nenhum outro número natural.

3. Se um conjunto X contém o número 1 e os sucessores de seus elementos, então X conterá todos os números naturais.

O Axioma 3 refere-se a um método de demonstração na matemática utilizado para mostrar que uma certa propriedade é válida para os números naturais. Esse método é conhecido como "indução", sendo que ele será muito utilizado em algumas demonstrações nesse trabalho. Já a palavra "sucessor" significa aquele que vem depois. Colocando o número 1 como o primeiro elemento do conjunto dos números naturais, utilizaremos a

[1]Giuseppe Peano: matemático italiano (1858 - 1932).

letra $\mathbb{N}$ para representar esse conjunto, enquanto os seus elementos serão representados conforme a forma a seguir:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

O sucessor de um número natural n será representado pela forma $s_1(n)$. Com essa escrita, podemos definir $s_2(n)$ como o sucessor de $s_1(n)$, da mesma forma $s_3(n)$ será o sucessor de $s_2(n)$ e assim por diante.

Vamos definir as operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ da seguinte forma:

Definição 2.1. *Sejam m, n números naturais então:*

1. $n + 1 = s_1(n)$.

2. $m + n = s_n(m)$.

3. $m \cdot 1 = m$.

4. $m \cdot n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \text{ vezes}}.$

Na forma $m+n$, m é a primeira parcela, n é a segunda parcela, enquanto o resultado da adição é chamado soma. Já em $m \cdot n$ temos que m é o primeiro fator, n é o segundo fator, enquanto o resultado da multiplicação é chamado produto.

Sendo $m, n, p \in \mathbb{N}$, através da ideia de sucessão, podem ser verificadas as seguintes propriedades entre números naturais:

associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p), \quad m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p.$

distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$

comutatividade: $m + n = n + m, \quad m \cdot n = n \cdot m.$

lei do cancelamento: $m + n = m + p \Rightarrow n = p, \quad m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p.$

Agora podemos introduzir a noção de ordem entre os naturais. Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, escreveremos as notações $m < n$ e $p > q$ quando existirem $k, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = m + k$ e $p = q + r$, respectivamente. Diremos no primeiro caso que m é menor que n, enquanto no segundo caso teremos que p é maior que q. Também são comuns os casos $m \leq n$ e $m \geq n$ que significam m é menor que ou igual a n e m é maior que ou igual a n, respectivamente.

Proposição 2.1. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}, a > b$ e $c > d$ então*

$$a + c > b + d.$$

Demonstração. Como $a > b$ e $c > d$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a = b + m$ e $c = d + n$. Assim, $a + c = (b + m) + (d + n) = (b + d) + (m + n)$, ou seja, $a + c > b + d$. □

Definição 2.2. ***(Paridade).*** *Um número natural é par se ele pode ser escrito na forma $2n, n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, ele será considerado ímpar.*

A seguir enunciaremos dois resultados segundo a referência [2].

Proposição 2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então $a < b$ se, e somente se, $a + 1 \leq b$.*

Demonstração. Se $a < b$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + k$. Se $k = 1$, teremos $b = a + 1$. Agora se $k \neq 1$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $k = s_1(q) = q + 1$. Logo

$$b = a + k = a + (q + 1) = (a + 1) + q \Rightarrow b \geq a + 1.$$

Reciprocamente, se $a + 1 \leq b$, então

$$a < s_1(a) = a + 1 \leq b \Rightarrow a < b.$$

□

Teorema 2.1. ***(Princípio da Boa Ordenação).*** *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} | n \leq x, \ \forall \ x \in S\}$. Se $1 \in S$, então este será o menor elemento de S. Caso contrário, $1 \in M$. Como $S \neq \emptyset$, existe $s \in S$. Então $s + 1 \notin M$, pelo fato de $s + 1$ ser maior que s. Logo, $M \neq \mathbb{N}$. Como $1 \in M$ e $M \neq \mathbb{N}$, deve existir algum $m \in M$ tal que $m + 1 \notin M$, caso contrário, pelo Princípio de Indução, $M = \mathbb{N}$.

Afirmamos que m é o menor elemento de S. Como $m \in M$, então $m \leq x$, para todo $x \in S$. Agora falta provarmos que $m \in S$. Suponhamos, por absurdo, que $m \notin S$. Então $m < x$, para todo $x \in S$. Pela proposição anterior, teríamos $m+1 \leq x$, para todo $x \in S$, onde $m + 1 \in M$, em contradição com a escolha de m. Portanto $m \in S$. □

2.2 Números Inteiros

Definição 2.3. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m > n$ e $m = n + c$ com $c \in \mathbb{N}$, então a diferença entre m e n será igual a c e usaremos a notação $m - n = c$.*

Proposição 2.3. *Sendo $a, b, c, d \in \mathbb{N}, a > b$ e $c > d$ então*

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Demonstração. Suponhamos que $a - b = m$ e $c - d = n$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então pelo que acabamos de definir sobre diferença, teremos $a = b + m$ e $c = d + n$. Agora pela Proposição 2.1 e pela definição de diferença entre números naturais, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(a + c) - (b + d) = p$. Logo

$$(a + c) - (b + d) = p \Rightarrow (b + m) + (d + n) - (b + d) = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(b + d) + (m + n)] - (b + d) = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+d)+(m+n)=(b+d)+p.$$

Pela lei do cancelamento, temos $p = m+n$ que, por sua vez, representa o resultado de $(a-b)+(c-d)$. Logo

$$m+n=p \Rightarrow (a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

□

Mas se $m \leq n$, o que deveremos fazer? Nas séries iniciais da educação básica, os professores falam da importância da condição imposta pela desigualdade $m > n$ ao se falar de subtração entre dois números naturais. A partir do sétimo ano do ensino fundamental começa um novo ciclo envolvendo os chamados números negativos que são extremamente importantes em Economia e conceitos da Física como temperatura e força. Portanto a partir do próximo parágrafo abordaremos a construção dos números inteiros, onde utilizaremos a referência [2].

Definição 2.4. *Seja a relação $\sim$ em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida por $(a,b)\sim(c,d)$ quando $a+d=b+c$.*

A relação anterior satisfaz as três condições de uma relação de equivalência conforme a seguir:

Reflexividade: $(a,b)\sim(a,b)$, pois $a+b=b+a$(Comutatividade em $\mathbb{N}$).

Simetria: $(a,b)\sim(c,d)\Rightarrow(c,d)\sim(a,b)$, pois $a+d=b+c\Rightarrow c+b=d+a$.

Transitividade: $(a,b)\sim(c,d)$ e $(c,d)\sim(m,n)\Rightarrow(a,b)\sim(m,n)$, pois se $a+d=b+c$ e $c+n=d+m$ então somando os membros da primeira e da segunda igualdade por n e b respectivamente, obtemos

$$a+d+n=b+c+n \;\text{ e }\; c+n+b=d+m+b \Rightarrow d+(a+n)=d+(m+b)\Rightarrow a+n=b+m.$$

Agora seja $\overline{(a,b)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (x,y)\sim(a,b)\}$.

Exemplo 2.1. $\overline{(4,2)}=\{(3,1),(5,3),(6,4),\cdots\}$.

A ideia intuitiva de definirmos a relação anterior é de que o conjunto $\overline{(a,b)}$ representa a diferença $a-b$. E o que devemos falar a respeito da soma $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}$? Se $a>b$ e $c>d$, temos pela Proposição 2.3 que

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

Para preservarmos a igualdade anterior nos demais casos, deveremos definir a operação $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$. Através de argumentos análogos à ideia da soma, a multiplicação $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}$ deve ser formulada de modo que $(a-b)\cdot(c-d)=ac+bd-(bc+ad)$. Assim podemos fazer uma definição formal dessas duas operações conforme a seguir.

Definição 2.5. *Definimos as operações de adição e multiplicação no conjunto de todos os elementos da forma* $\overline{(a,b)}$ *da seguinte forma:*

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}.$$

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}.$$

A partir daqui, vamos utilizar uma nova forma de escrita para representar os números da relação definida anteriormente conforme a seguir:

$$\overline{(2,1)} = 1; \overline{(1,2)} = -1; \overline{(3,1)} = 2; \overline{(1,3)} = -2; \cdots ; \overline{(n+1,1)} = n; \overline{(1,n+1)} = -n,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Para terminarmos a nossa construção, se tivermos um número escrito da forma $\overline{(n,n)}$, então chamaremos esse valor de zero[2]. Logo teremos um novo conjunto chamado de conjunto dos Números Inteiros representado pela letra $\mathbb{Z}$ que provém da palavra "zalh"que significa número em alemão. Já a relação de ordem nos inteiros será feita de modo que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ sempre que $a - b \leq c - d$. Somando o primeiro membro e o segundo membro por $b + d$, temos a justificativa para a definição a seguir.

Definição 2.6. *Dados dois números inteiros* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$*, então* $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ *quando* $a + d \leq b + c$.

Assim,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Nesse novo contexto, teremos os números positivos escritos à direita do zero, e os números negativos escritos à esquerda de zero. A partir daqui iremos falar sobre divisibilidade e números primos, onde nos basearemos na referência [3].

Definição 2.7. *Sejam* a *e* b *inteiros. Dizemos que* a *divide* b *(ou ainda* a *é um divisor de* b*) se existir um inteiro* q *tal que* $b = a \cdot q$.

Usaremos a notação $a \mid b$ para dizer que a divide b. Também podemos dizer que b é um múltiplo de a sempre que $a \mid b$.

Exemplo 2.2. $8 \mid 24$, ou seja, 8 é divisor de 24, pois $24 = 8 \cdot 3$.

Proposição 2.4. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$. *Se* $a \mid b$ *então* $0 < a \leq b$.

Demonstração. Se $a \mid b$ então existe $q \geq 1$ (pois a e b são positivos) tal que $b = aq$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $q \geq 1$ por a obtemos

$$b = aq \geq a > 0.$$

$\square$

[2] A critério de cada autor, o zero (denotado por 0) pode ser considerado natural, onde ele seria o menor elemento desse conjunto, ou pode ser considerado a partir da definição de números inteiros.

Sendo $a \in \mathbb{Z}$, usaremos a notação $|a|$, para representar o $\max\{-a, a\}$.

Teorema 2.2. ***(Divisão Euclidiana).*** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, então existem únicos inteiros q e r tais que*

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < |a|.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$S = \{b - ay; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Existência: Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-a) > -b$, logo $b - na > 0$, assim $S \neq \emptyset$. Como $S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ segue pelo Princípio da Boa Ordenação que S possui um menor elemento $r \geq 0$. Assim $r \in S \Rightarrow r = b - aq, q \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que $r < |a|$. Suponhamos, por absurdo, que $r \geq |a|$. Então existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |a| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de que r é o menor elemento de S, pois $s = b - (q \pm 1)a \in S$, com $s < r$.
Unicidade: Suponhamos que existam outros r_1 e q_1 tais que

$$b = aq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < |a|.$$

Então

$$-|a| < -r \leq r_1 - r \leq r_1 < |a|.$$

Logo

$$|r_1 - r| < |a|.$$

Mas também

$$b = aq + r = aq_1 + r_1 \Rightarrow |a| > |r - r_1| = |q_1 - q||a|.$$

Isso só é possível quando $q_1 = q$ e consequentemente $r = r_1$. □

No teorema anterior q e r são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de b por a.

Sendo $b, n \in \mathbb{N}$, usaremos a notação b^n para representar o produto $\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$.

Corolário 2.1. ***(Bases Numéricas).*** *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, então existem únicos números naturais $r_0, r_1, \cdots, r_n$ tais que*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

Demonstração. Aplicando sucessivamente a Divisão Euclidiana, temos:

$$a = bq_0 + r_0, \quad r_0 < b.$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b.$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b.$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$q_{n-1} = bq_n + r_n, \quad r_n < b.$$

Como $a > q_0 > q_1 > \cdots > q_{n-1}$, teremos um $q_{n-1} < b$, onde $q_n = 0$. Das igualdades anteriores resultam

$$a = bq_0 + r_0.$$
$$bq_0 = b^2q_1 + br_1.$$
$$b^2q_1 = b^3q_2 + b^2r_2.$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$b^nq_{n-1} = b^{n+1}0 + b^nr_n.$$

Agora somando todas essas últimas igualdades obteremos

$$a = r_nb^n + r_{n-1}b^{n-1} + \cdots + r_1b + r_0.$$

A unicidade dos r_i segue da unicidade dos restos na Divisão Euclidiana. □

O Corolário 2.1 mostra que existem vários sistemas de numeração. Na antiguidade temos vários exemplos como os maias que adotavam um sistema de base 20 e os mesopotâmios que adotavam um sistema de base 60. No nosso caso, estamos trabalhando com o sistema numérico de base 10 onde um natural a poderá ser escrito da forma:

$$a = r_n10^n + r_{n-1}10^{n-1} + \cdots + r_110 + r_010^0, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.8. ***(Máximo Divisor Comum).*** *Sejam a e b números inteiros não nulos. O máximo divisor comum entre a e b é o número d que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$d \mid a$ e $d \mid b$;*
2. *d é o maior inteiro positivo com a propriedade 1.*

Denotaremos o máximo divisor comum entre a e b por $d = mdc(a, b)$.

Teorema 2.3. ***(Teorema de Bachet-Bézout).*** *Se $d = mdc(a, b)$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, então existem números inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$.*

Demonstração. Seja $C = \{ax + by, \text{ com } x, y \in \mathbb{Z}\}$. Verificamos que C contém números positivos, negativos e o zero quando $x = y = 0$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, podemos escolher x_0 e y_0 tais que $\lambda = ax_0 + by_0$ seja o menor número positivo pertencente a C. Afirmamos que $\lambda \mid a$ e $\lambda \mid b$, pois, caso contrário, se $\lambda \nmid a$ (significa λ não divide

a), então pela Divisão Euclidiana, segue que existem inteiros q e r tais que $a = \lambda q + r$ com $0 < r < \lambda$. Logo

$$r = a - \lambda q = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - qx_0) + b(-qy_0) \in C.$$

Assim $r < \lambda$, o que contraria o fato de λ ser o menor elemento de C. O caso $\lambda \mid b$ é provado de modo análogo. Agora basta provarmos que $\lambda = d$. Se $d = mdc(a, b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$, onde existem $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = da_1, b = db_1$. Logo

$$\lambda = ax_0 + by_0 = d(a_1x_0 + b_1y_0).$$

Esse resultado mostra que $d \mid \lambda$. Assim, pela Proposição 2.4, segue que $d \leq \lambda$. Mas $d < \lambda$ é impossível pois $d = mdc(a, b)$, ou seja, chegamos à conclusão de que $d = \lambda$. □

Corolário 2.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $c \mid ab$ e $mdc(b, c) = 1$, então $c \mid a$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, existem inteiros x_0 e y_0 tais que

$$bx_0 + cy_0 = 1.$$

Agora multiplicando a igualdade anterior por a obtemos

$$abx_0 + acy_0 = a. \tag{2.1}$$

Pela hipótese de que $c \mid ab$, existe um inteiro q tal que $ab = cq$. Substituindo esse resultado em (2.1) temos

$$cqx_0 + acy_0 = c(qx_0 + ay_0) = a.$$

Portanto $c \mid a$. □

Definição 2.9. *Um inteiro positivo $n \geq 2$ é primo se os únicos divisores que ele tem são 1 e o próprio n. Se designarmos por P o conjunto dos números primos, teremos:*

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}.$$

Proposição 2.5. *Um inteiro positivo p é primo se, e somente se, goza da seguinte propriedade:*

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Suponhamos que p seja primo e que $p \nmid b$, então $mdc(p, b) = 1$. Pelo Corolário 2.2, temos que $p \mid a$. Reciprocamente, suponhamos que a propriedade (2.2) seja válida e suponhamos, por absurdo, que p não seja um número primo. Então,

$$p = d_1d_2, \quad \text{com} \quad 1 < d_1 < p, \quad 1 < d_2 < p, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

De (2.2) segue que $p \mid d_1$ ou $p \mid d_2$. Pela Proposição 2.4, temos

$$p \leq d_1, \quad \text{ou} \quad p \leq d_2.$$

Mas esse resultado contradiz as desigualdades expressas em (2.3). □

Teorema 2.4. ***(Teorema Fundamental da Aritmética).*** *Todo número natural n maior que 1 pode ser escrito de modo único como um produto*

$$n = p(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_m,$$

onde $m \geq 1$ é um número natural e os p_i são números primos, com $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$.

Demonstração. Vamos provar esse teorema por indução em n na decomposição de $p(n)$ indicando que o mesmo é escrito de modo único como produto de fatores primos. Para $p(2) = 2$ é verdadeiro, pois 2 é primo. Agora suponhamos, por indução, que a afirmação do teorema seja válida para $p(k)$ para qualquer inteiro k com $2 \leq k \leq n$. Agora provemos o caso $p(n+1)$. Se $n+1$ for primo, então o teorema já estará provado. Agora se $n+1$ não for primo, então existem α e β com

$$2 \leq \alpha \leq n \text{ e } 2 \leq \beta \leq n, \text{ tais que } n+1 = \alpha \cdot \beta.$$

Pela indução, o teorema é verdadeiro para α e β, onde eles se escrevem de modo único como produto de números primos. Logo $n+1$ se escreve como produto de números primos. Agora provaremos que essa fatoração é escrita de modo único. Suponhamos que $n+1$ possa ser escrito de duas maneiras diferentes em decomposição de fatores primos conforme a seguir:

$$n+1 = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_m. \tag{2.4}$$

Como p_1 é primo, pela Proposição 2.5, segue que p_1 divide algum q_i, que por sua vez também é primo, onde chegamos à conclusão de que $p_1 = q_i \geq q_1$. De modo análogo verificamos que existe um j tal que $q_1 = p_j \geq p_1$. Portanto, $p_1 = q_1$. Dividindo ambos os membros da equação (2.4) por p_1 obteremos $p_2 \cdot \cdot p_k = q_2 \cdots q_m \leq n$. Pela indução teremos que $k = m, p_2 = q_2, \cdots, p_m = q_m$. □

2.3 Números Racionais

Os números racionais surgiram com a finalidade de se realizarem medições. Na Grécia, durante o século IV a.C., os números conhecidos eram os racionais e aceitava-se que dois segmentos quaisquer eram comensuráveis. Isto é, dados dois segmentos u e v, u podia ser dividido em q segmentos congruentes $u_1, u_2, ..., u_q$ de modo que cada um destes coubesse exatamente p vezes em v. Assim, tomando-se u como unidade de comprimento, os segmentos $u_i \subset u, i = 1, 2, .., q$ teriam comprimento $\dfrac{1}{q}$ e o comprimento de v seria o número racional $\dfrac{p}{q}$. Em outras palavras, acreditava-se que dados dois segmentos quaisquer, o comprimento de um era sempre um múltiplo racional do comprimento do outro. Atribuiu-se a um dos discípulos de Pitágoras a descoberta de que o comprimento $\sqrt{2}$ da diagonal do quadrado unitário não se exprime como uma fração $\frac{p}{q}$. Assim, o número $\sqrt{2}$ na reta real não tem representante na reta racional.

O fato relatado acima nos mostra dois novos conjuntos: os racionais, que serão o tema dessa seção, e os irracionais que abordaremos nas próximas seções. Para a construção dos racionais, iremos utilizar novamente a referência [2], onde utilizaremos uma outra relação de equivalência dada na próxima definição.

Definição 2.10. *Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, defina-se a relação: $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$.*

A relação anterior também é de equivalência, pois satisfaz as três condições a seguir:

Reflexividade: $(a, b) \sim (a, b)$ pois $ab = ba$.

Simetria: $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$, pois $ad = bc \Rightarrow cb = da$.

Transitividade:$(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (m, n) \Rightarrow (a, b) \sim (m, n)$, pois se $ad = bc$ e $cn = dm$ com $b, d \neq 0$, então multiplicando o primeiro e o segundo membro por n e b, respectivamente obtemos $adn = bcn$ e $bcn = bdm$, onde $adn = bdm$. Como d é comum aos dois membros, teremos $an = bm$. Assim definamos

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Ressaltamos que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ e os valores a e b são chamados respectivamente de numerador e denominador.

Exemplo 2.3. $(2, 4) \in \frac{1}{2}$

A relação de equivalência anterior nos sugere a ideia de frações equivalentes, onde uma fração é equivalente a outra sempre que elas representarem um mesmo número. Para isso temos que preservar a igualdade $ad = bc$ que pode ser verificada através da divisão euclidiana sempre que quisermos mostrar a equivalência de duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Assim podemos representar os números racionais como um conjunto representado pela letra $\mathbb{Q}$ que significa quociente (resultado de uma divisão).

Definição 2.11. *Definimos o conjunto dos números racionais conforme a seguir:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Para formalizarmos as operações de adição e multiplicação entre dois números racionais, devemos ter em mente o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, se quisermos examinar a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, podemos comparar as duas frações como medidas de uma mesma parte inteira como no desenho a seguir.

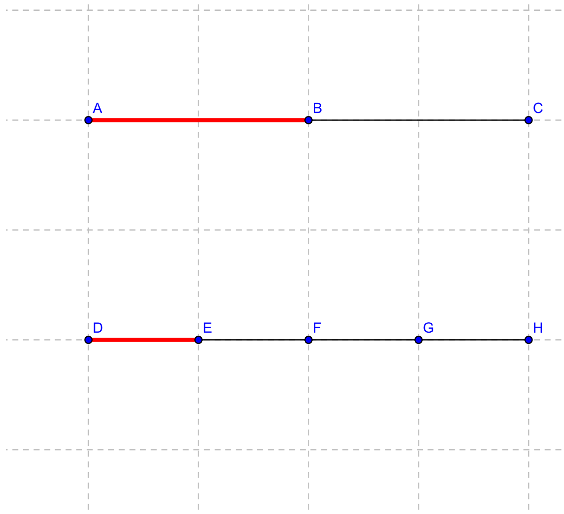

Figura 2.1: Adição de frações

Na Figura 2.1, temos dois segmentos de mesma medida, onde no segmento AC temos marcado de vermelho a medida da fração $\frac{1}{2}$, enquanto no segmento DH temos marcado de vermelho a medida da fração $\frac{1}{4}$. Observando os dois segmentos, notamos facilmente que a fração $\frac{1}{2}$ poderia ser substituída pela fração $\frac{2}{4}$. Logo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

O exemplo anterior nos dá uma ideia de como devemos definir a soma entre duas frações, que consiste na comparação entre duas ou mais frações. Já a multiplicação é consequência da adição, por representar soma de uma quantidade de parcelas de um mesmo valor numérico. Essa análise nos inspira a definir as operações de adição e multiplicação entre frações como a seguir.

Definição 2.12. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais. Definimos as operações de adição e de multiplicação respectivamente por:*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad e \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Definição 2.13. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b, d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$.*

A justificativa pela definição anterior pode ser verificada quando multiplicarmos os membros da desigualdade por bd.

Definição 2.14. *A fração $\frac{a}{b}$ será dita irredutível quando $mdc(a, b) = 1$, ou seja, a e b são primos entre si. Exemplos: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{8}$.*

Como foi visto na seção dos números inteiros, o nosso sistema de numeração é decimal (base 10), onde podemos trabalhar com os números racionais como uma expressão decimal ao invés de uma fração. Isso é muito eficiente para se efetuar cálculos numéricos. Essa ideia nos estimula a trabalhar com a seguinte definição segundo a referência [4].

Definição 2.15. *Uma expressão decimal é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

onde a_0 *é um inteiro, enquanto* $a_1, \cdots, a_n, \cdots$ *são dígitos tais que* $0 \leq a_n \leq 9$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *e ainda*

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots.$$

Exemplo 2.4. $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{5}{10} = 1,5.$

A Definição 2.15 mostra que um número racional está associado a uma expressão decimal. Nesse contexto vale observarmos que se uma expressão decimal possui uma quantidade finita de dígitos do lado direito da vírgula, ela será considerada uma expressão decimal finita. Agora se houver infinitos dígitos do lado direito da vírgula, ela será considerada uma expressão decimal infinita. É fácil verificarmos que uma expressão decimal finita representa um número racional, mas no caso da expressão decimal infinita, só será considerada como um número racional, somente se houver uma expansão infinita e periódica, como o número $0,999\cdots$. Esse tipo de número é chamado de "dízima periódica". No capítulo 3, iremos retomar esse assunto, com a finalidade de provarmos que uma dízima periódica representa um número racional.

2.4 Números Reais

Como comentado na seção anterior, nem sempre dois segmentos são comensuráveis. Essa situção foi observada em Crotona, sul da Itália, onde um dos discípulos de Pitágoras provou que a medida da diagonal de um quadrado de lado um era incomensurável com a medida de seu lado. Daí houve a necessidade de se ampliar ainda mais os conjuntos numéricos, levando a construção do conjunto dos números irracionais que não podem ser expressos como divisão de dois números inteiros. A seguir temos uma proposição que mostra que o número $\sqrt{2}$ não é racional.

Proposição 2.6. $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}. \tag{2.5}$$

Para facilitar, suponhamos que $\frac{a}{b}$ seja irredutível. Elevando ao quadrado os membros da equação (2.5), temos

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

O segundo membro dessa equação é par, nos levando a conclusão de que a^2 é par, onde a também é par. Logo existe um inteiro c tal que

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2.$$

Analogamente, concluímos que b é par. Mas isso é uma contradição, pois no início da prova, a e b eram primos entre si. Logo $\sqrt{2}$ é irracional. □

Designaremos pelo símbolo I_R o conjunto dos números irracionais e definiremos a seguir o conhecido conjunto dos números reais representado pela letra $\mathbb{R}$.

Definição 2.16. *O conjunto numérico $\mathbb{R}$ é definido por*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I_R.$$

A partir daqui serão trabalhadas as principais propriedades envolvendo os números reais, onde utilizaremos a referência [1].

2.4.1 $\mathbb{R}$ é um Corpo

Queremos manter as mesmas propriedades apresentadas pelos números naturais, inteiros e racionais, onde definimos as operações de adição e multiplicação, sendo fechadas nesses conjuntos. $\mathbb{R}$ ser um corpo significa que dados $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, então a adição $x + y$ pertence a $\mathbb{R}$, a multiplicação $x \cdot y$ pertence a $\mathbb{R}$ e além disso devem satisfazer os seguintes axiomas:

1. Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

2. Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

3. Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

4. Inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

5. Distributividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Definição 2.17. *A soma $x + (-y)$ será indicada por $x - y$ (diferença entre x e y). Se $y \neq 0$, o produto $x \cdot y^{-1}$ será indicado por $\frac{x}{y}$ (quociente de x por y).*

2.4.2 $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado

Definição 2.18. *Existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:*

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos.

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \cdot y \in \mathbb{R}^+.$$

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$ então:

$$x = 0, \text{ ou } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } -x \in \mathbb{R}^+.$$

Indicaremos por $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$.

Por P1, da definição anterior, segue que se $x \in \mathbb{R}^+$ então $x \cdot x$ (indicado por x^2) é um elemento de $\mathbb{R}^+$. Esse critério é muito útil para provar que um certo número real é positivo.

Definição 2.19. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, então $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}^+$.*

Proposição 2.7. *Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$, valem as seguintes afirmações:*

01. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

02. Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$ então $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.

03. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$ tem-se $x + z < y + z$.

04. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

Demonstração.

01. As desigualdades $x < y$ e $y < z$ significam que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Por P1 da Definição 2.18 temos $(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $x < z$.

02. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos, por P2 da Definição 2.18, que $y - x = 0$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou $y - x \in \mathbb{R}^-$. No primeiro caso temos $x = y$, no segundo $x < y$, enquanto no terceiro temos $y < x$.

03. Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$, onde $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $x + z < y + z$.

04. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$. Por P1 da Definição 2.18 temos $(y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow yz - xz \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $xz < yz$. Se $x < y$ e $z < 0$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$, donde $xz - yz = (y - x)(-z) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $yz < xz$. □

Exemplo 2.5. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 < x < y$, vamos provar que $y^{-1} < x^{-1}$.

Notemos que $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$. Da mesma forma temos $y^{-1} > 0$. Agora multiplicando a desigualdade $0 < x < y$ por $x^{-1}y^{-1} > 0$, obtemos

$$0 \cdot x^{-1}y^{-1} < x \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} < y \cdot y^{-1}x^{-1} \Rightarrow 0 < 1 \cdot y^{-1} < 1 \cdot x^{-1} \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}.$$

Definição 2.20. *O valor absoluto (ou módulo) de um número real x é definido por:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Também vale $|x| = max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Teorema 2.5. *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x+y| \leq |x| + |y|$.*

Demonstração. Pela Definição 2.20 $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$. Somando membro a membro essas desigualdades, teremos $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ (resultados obtidos pela Definição 2.20) resulta em $|x| + |y| \geq -(x+y)$. Portanto $|x| + |y| \geq |x+y| = max\{x+y, -(x+y)\}$. □

Corolário 2.3. *Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ temos $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.*

Demonstração. Verificamos que $x - z = (x-y) + (y-z)$. Agora pelo teorema anterior, teremos $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$. □

A seguir, usaremos notações para representar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$, chamados intervalos:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$,
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$,
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$,
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$.

Teorema 2.6. *Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$. Tem-se $|x-a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.*

Demonstração. Temos $|x-a| = max\{x-a, -(x-a)\} < \delta$ que implica em $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a aos membros das desigualdades, obtemos $x < a + \delta$ e $x > a - \delta$, ou seja, $a - \delta < x < a + \delta$. A recíproca é provada de modo análogo. □

O Teorema 2.6 nos diz que x pertence ao intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ se, e somente se, $|x-a| < \delta$.

2.4.3 $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existir um número $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Analogamente, o conjunto X é limitado inferiormente quando existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. No primeiro caso b é uma cota superior de X, enquanto a é uma cota inferior de X. Já um conjunto X é dito limitado se existir $k > 0$ tal que para todo $x \in X$, $|x| \leq k$, ou seja, x pertence ao intervalo $[-k, k]$.

Definição 2.21. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando for a menor das cotas superiores de X, denotado por $b = \sup X$. Se b é o supremo de X então ele deve satisfazer as duas condições:*

1. *$b \geq x$, para todo $x \in X$;*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $b - \epsilon < x_\epsilon$.*

Definição 2.22. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não vazio. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se o ínfimo do conjunto X quando for a maior das cotas inferiores de X, denotado por $\inf X$. Se a é o ínfimo de X então ele deve satisfazer as duas condições:*

1. *$a \leq x$, para todo $x \in X$;*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $x_\epsilon < a + \epsilon$.*

Exemplo 2.6.
1. O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$ é limitado inferiormente e possui $\inf A = 3$.
2. O conjunto $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado superiormente e inferiormente. Portanto ele é limitado e possui $\sup B = 1$ e $\inf B = 0$. Nesse caso, $\sup B \in B$ e $\inf B \notin B$.
3. Seja $X = \mathbb{Q} \cap [1, \sqrt{2}]$. O número $\sqrt{2}$ é a menor das cotas superiores de X, portanto é supremo de X, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ou seja, $\sup X \notin X$, neste caso.

Axioma 2.1. ***(Axioma da Completeza).*** *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado superiormente, então existe $b = \sup X \in \mathbb{R}$.*

Proposição 2.8. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado inferiormente, então existe $a = \inf X \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como X é limitado inferiormente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L \leq x$ para todo $x \in X$. Agora consideremos o conjunto $Y = \{(-x); x \in X\}$. Então $-L \geq -x$ para todo $x \in X$, mostrando que Y é limitado superiormente. Logo pelo Axioma da Completeza, Y possui um supremo designado por $\sup Y = -a$. Usando a definição de supremo, são válidas para todo $-x \in Y$ as desigualdades

1. $-x \leq -a, \ \forall \ (-x) \in Y$.
2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $-x_\epsilon \in Y$ tal que $-x_\epsilon > -a - \epsilon$.

   Logo, temos

1'. $x \geq a, \ \forall \ x \in X$.

2'. Para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $x_\epsilon < a + \epsilon$.

   Por $(1')$ e $(2')$, X possui um ínfimo, que no caso seria $\inf X = a$. □

A completeza de $\mathbb{R}$ gera algumas consequências, as quais, selecionamos algumas importantes, segundo [5], para prosseguimento desse estudo.

Proposição 2.9. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Então existe $c = \sup \mathbb{N}$, com $c - 1$ não podendo ser cota superior de $\mathbb{N}$, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ com $c - 1 < n \Rightarrow c < n + 1$. Logo c não é cota superior de $\mathbb{N}$ em contradição com a hipótese de que ele seja limitado superiormente. □

Corolário 2.4. *Dado qualquer $\epsilon > 0$, com $\epsilon \in \mathbb{R}$, existe um natural $n_\epsilon > \dfrac{1}{\epsilon}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a afirmação do corolário não seja verdadeira, isto é, existe ϵ_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $n \leq \dfrac{1}{\epsilon_0}$. Mas isto seria uma contradição com a proposição anterior, pois neste caso, $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente por $\dfrac{1}{\epsilon_0}$. □

Corolário 2.5. *Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.9, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b}{a}$. Então $na > b$. □

Proposição 2.10. *Sendo $x \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$, existe um racional r tal que $|r - x| < \epsilon$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.4, existe um natural n tal que $n > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \epsilon$. Agora para terminarmos a demonstração, basta obtermos um r tal que $|r - x| < \dfrac{1}{n}$. Isso será realizado em dois casos:

1. $x \geq 0$.

   Consideremos o conjunto $M = \{m \in \mathbb{N}; m > nx\}$. Temos $M \neq \varnothing$, pois se $m \leq nx$ para todo $m \in \mathbb{N}$, chegaríamos a contradição de que $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente. Pelo Princípio da Boa Ordenação, M contém um menor elemento m_0. Assim $m_0 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq m_0 - 1$ e $m_0 - 1 \notin M$. Usando esses resultados e os fatos de que $x \geq 0$ e $m_0 > nx \Rightarrow \dfrac{m_0}{n} > x$, vale

   $$m_0 - 1 \leq nx \Rightarrow \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} \leq x \Rightarrow 0 < \frac{m_0}{n} - x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\frac{m_0}{n} - x\right| \leq \frac{1}{n}.$$

2. $x < 0$.

   Temos $(-x) > 0$, e pelo primeiro caso existe r' tal que

   $$|r' - (-x)| < \epsilon \Rightarrow |x - (-r')| < \epsilon.$$

   Chamando $r = (-r')$, o caso está provado.

□

Corolário 2.6. *Em todo intervalo (a, b) onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ existe um número racional c tal que $a < c < b$.*

Demonstração. Chamamos $x = \frac{1}{2}(a + b)$ e $\epsilon = \frac{1}{2}(b - a)$. Basta usarmos esses valores na proposição anterior, onde obtemos

$$\left|c - \frac{1}{2}(a + b)\right| < \frac{1}{2}(b-a) \Rightarrow \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(b - a) < c < \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a) \Rightarrow a < c < b.$$

□

2.5 Sequências de Números Reais

Na seção anterior não foram tratadas as operações elementares de adição e multiplicação entre os números irracionais, simplesmente afirmamos que essas operações são fechadas nos números reais. Portanto nessa seção iremos introduzir de uma maneira elegante como essas operações são entendidas em $\mathbb{R}$. O foco principal dessa seção será o estudo das sequências de Cauchy que nos trarão uma ferramenta eficaz para se tratar de números irracionais. Nesse contexto continuaremos utilizando a referência [1] para introdução de sequências e de limites. Já para o estudo de sequências de Cauchy, iremos utilizar a referência [6].

Definição 2.23. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou ainda (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.*

Exemplo 2.7.

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Uma sequência (x_n) se diz limitada superiormente (respectivamente inferiormente) quando existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada quando for limitada superiormente e inferiormente. Em outras palavras, existe um $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No Exemplo 2.7, a sequência (x_n) é limitada superiormente por 1 e limitada inferiormente por 0, portanto é limitada.

Definição 2.24. *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Podemos escrever $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar uma subsequência de (x_n).*

Exemplo 2.8. Sejam a sequência $(a_n) = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ e o conjunto $\mathbb{N}' = \{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ onde $n \in \mathbb{N}$. Então podemos formar uma subsequência de (a_n) definida por $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ representando os números ímpares.

Definição 2.25. ***(Limite de uma Sequência).*** *Dizemos que um número real a é limite de uma sequência (x_n) quando, para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos os termos x_n com índice $n > n_0$ implica em $|x_n - a| < \epsilon$. Quando uma sequência possuir limite, diremos que ela é convergente, caso contrário, ela será divergente. Representando o limite de x_n por $\lim x_n$, podemos escrever a definição acima da seguinte maneira:*

$$a = \lim x_n \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Também podemos utilizar a representação $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, que significa o limite de x_n quando n tende ao infinito.

Usando o Teorema 2.6, a Definição 2.25 significa que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, isto é, x_n pertence ao intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, para $n > n_0$.

Teorema 2.7. ***(Unicidade do Limite).*** *Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim x_n = a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1$ implica em
$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Da mesma maneira existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2$ implica em
$$|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, teremos $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $n > n_0$. Logo
$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
Como ϵ é arbitrário, segue que $a = b$. □

Proposição 2.11. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Então $\lim x_n = 0$ se, e somente se, $\lim |x_n| = 0$.*

Demonstração. Se $\lim x_n = 0$, então para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - 0| < \epsilon \Rightarrow |x_n| < \epsilon, \quad \text{para} \quad n > n_0.$$

Logo
$$||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n| < \epsilon,$$

para todo $n > n_0$, provando $\lim |x_n| = 0$. Reciprocamente, se $\lim |x_n| = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n|| < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Então

$$|x_n| = ||x_n|| < \epsilon, \quad \text{para} \quad n > n_0.$$

Portanto $\lim x_n = 0$. □

Note que se $\lim x_n = L \neq 0$, então $\lim |x_n| = |L|$, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, se $x_n = (-1)^n$, então $|x_n| \to 1$, mas (x_n) é divergente.

Proposição 2.12. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, então ela possui $\lim x_n = a$. Sendo $\epsilon = 1$, pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Sejam b e c respectivamente o menor elemento e o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Portanto todos os termos da sequência (x_n) estão contidos no intervalo $[b, c]$, e (x_n) é limitada. □

A recíproca da Proposição 2.12 não é verdadeira, pois se considerarmos como exemplo a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e não é convergente.

Definição 2.26. *Uma sequência (x_n) é dita monótona quando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo todo $n \in \mathbb{N}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, dizemos que (x_n) é monótona não-decrescente e, no segundo, (x_n) é monótona não-crescente. Agora se $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência é crescente (respectivamente decrescente).*

Teorema 2.8. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona não-decrescente e limitada. Escrevendo os termos da sequência dada como um conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, então ele possui um supremo denotado por $a = \sup X$. Dado $\epsilon > 0$, o número $a-\epsilon$ não é cota superior de X, pois a é a menor das cotas. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq a$. Portanto, $n > n_0 \Rightarrow a-\epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a+\epsilon$, onde $\lim x_n = a$. De modo análogo prova que se (x_n) for não-crescente então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n. □

Corolário 2.7. ***(Teorema de Bolzano-Weierstrass).*** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Começamos escrevendo que um termo x_n de uma sequência limitada é destacado sempre que $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é destacado. Se D for infinito com $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n\in D}$ será monótona não-crescente. Agora se D for finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Novamente temos que x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Continuando esse raciocínio, teremos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. Pelo teorema anterior temos que (x_n) possuirá uma subsequência convergente. □

Definição 2.27. *Uma sequência (x_n) é chamada sequência de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ sempre que $n, m > n_0$.*

Teorema 2.9. ***(Critério de Convergência de Cauchy).*** *Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, (x_n) for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos que a sequência (x_n) converge para um limite L. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \text{ e } m > N \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |x_m - L| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{com } n, m \in \mathbb{N}.$$

Logo, se $m, n > N$ tem-se

$$|x_n - x_m| = |(x_n - L) + (L - x_m)| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$. Considere $m = N + 1$. Então

$$\text{para } n > N \Rightarrow x_{N+1} - \epsilon < x_n < x_{N+1} + \epsilon.$$

Tomemos

$$\alpha = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} - \epsilon, x_{N+1} + \epsilon\} \text{ e}$$

$$\beta = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, x_{N+1} - \epsilon, x_{N+1} + \epsilon\}.$$

Então

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \, \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Logo (x_n) é limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um número L. Com o mesmo ϵ fixado e tomando k suficientemente grande para termos simultaneamente, $|x_{n_k} - L| < \epsilon$ e $n_k > N$, então

$$n > N \Rightarrow |x_n - L| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - L)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Assim chegamos à conclusão de que a sequência (x_n) é convergente. □

Exemplo 2.9. Como obter o valor de $\sqrt{2}$?

Os livros didáticos do ensino médio nos mostram que esse cálculo pode ser obtido através de aproximações, que não é nada mais e nada menos do que uma sequência de Cauchy. Para isso deveremos utilizar a definição de radiciação que ainda iremos formalizar no próximo capítulo. Então começamos obtendo aproximações por falta de $\sqrt{2}$ conforme sequência abaixo:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \cdots)$$

Agora podemos construir uma tabela com esses dados, veja Tabela 2.1.

$x_{n+1} - x_n$	**Resultado**
`1,4 - 1`	0,4
`1,41 - 1,4`	0,01
`1,414 - 1,41`	0,004
`1,4142-1,414`	0,0002
...	...

Tabela 2.1: Aproximações de $\sqrt{2}$

Notamos que a diferença $|x_{n-1} - x_n|$ é cada vez menor. Utilizando o Critério de Cauchy, chegamos à conclusão de que a sequência (x_n) converge para um número real c que chamaremos de $\sqrt{2}$.

Esse exemplo ilustra que um número irracional pode ser identificado como o limite de uma sequência de Cauchy. Agora devemos formalizar as operações entre números irracionais, onde iremos trabalhar com limites de uma sequência. Antes, apresentaremos alguns resultados envolvendo limites e desigualdades que podem ser encontrados na referência [1].

Proposição 2.13. *Sejam (x_n) uma sequência e $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a = \lim x_n$ e $b < a$ então para n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. De modo análogo, se $a < b$, então para n suficientemente grande, tem-se $x_n < b$.*

Demonstração. Sendo $b < a$, consideremos $\epsilon = a - b$, logo $\epsilon > 0$ e $b = a - \epsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \Rightarrow b < x_n$. O caso $a < b$ é provado de modo análogo. $\square$

Corolário 2.8. *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes, isto é, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$, para n suficientemente grande, então $a \leq b$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $b < a$, então pelo Corolário 2.6, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$. Pela proposição anterior, vale $y_n < c < x_n$ para n suficientemente grande, contradizendo a hipótese de que $x_n \leq y_n$. $\square$

Proposição 2.14. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada então* $\lim(x_n y_n) = 0$.

Demonstração. Como (y_n) é limitada, existe $k > 0$ tal que $|y_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\epsilon > 0$ um valor arbitrário. Como $\lim x_n = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \dfrac{\epsilon}{k}$. Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{k} \cdot k = \epsilon \Rightarrow |x_n y_n - 0| < \epsilon \Rightarrow \lim (x_n y_n) = 0.$$

$\square$

Proposição 2.15. ***(Operações com Limites.)*** *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então:*

1. $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim (x_n y_n) = ab$.
3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

Demonstração. 1. Sendo $\epsilon > 0$ um valor arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então

$$n > n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo $\lim (x_n + y_n) = a + b$. O caso $\lim (x_n - y_n)$ é análogo.

2. Analisando a diferença $x_n y_n - ab$, temos

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a).$$

A sequência (x_n) e a sequência constante (b) são convergentes. Pela Proposição 2.12, essas duas sequências são limitadas. Usando a parte 1, obtemos

$$\lim (y_n - b) = \lim y_n - \lim b = b - b = 0 \text{ e } \lim (x_n - a) = \lim x_n - \lim a = a - a = 0.$$

Segue-se da Proposição 2.14 e novamente da parte 1 que

$$\lim (x_n y_n - ab) = \lim [x_n(y_n - b)] + \lim [(x_n - a)b] = 0.$$

Logo

$$\lim (x_n y_n - ab) = \lim (x_n y_n) - \lim (ab) = 0 \Rightarrow \lim (x_n y_n) - ab = 0 \Rightarrow \lim (x_n y_n) = ab.$$

3. Analisando o valor de $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right)$, temos

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim \left(\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right) = \lim (x_n b - y_n a) \cdot \lim \left(\frac{1}{y_n b}\right).$$

Vale $\lim (x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$. Agora se a sequência $\left(\dfrac{1}{y_n b}\right)$ for limitada, teremos pela Proposição 2.14 que

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0 \Rightarrow \lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Chamando $c = \dfrac{b^2}{2}$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim (y_n b) = b^2$, segue da Proposição

2.13 que, para n suficientemente grande, $c < y_n b$. Logo,

$$0 < c < y_n b \Rightarrow 0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{1}{c}.$$

Assim a sequência $\left(\frac{1}{y_n b}\right)$ é limitada, provando a parte 3.

$\square$

As definições que se seguem podem ser encontradas na referência [7].

Definição 2.28. *Uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto contendo a.*

Definição 2.29. *Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $B \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança de a contém um ponto de B distinto de a.*

Definição 2.30. *Dados $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de B, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f em a, quando satisfaz a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in B,\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Denotamos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

A definição anterior diz que é possível tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto desejamos, desde que tomemos $x \in B$ suficientemente próximo, mas diferente de a.

Os resultados e definições que se seguem podem ser encontrados na referência [8].

Definição 2.31. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando L satisfaz a seguinte condição: para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > A$.*

Definição 2.32. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $(-\infty, b)$. Escrevemos, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando L satisfaz a seguinte condição: para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x < -A$.*

Proposição 2.16. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções e x_0 um ponto de acumulação de X, tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$. Então*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2.$$

Demonstração. Provaremos o caso $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$, enquanto o caso $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$ é provado de modo análogo. Tomando $\epsilon > 0$ arbitrário, então existem $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ e $|g(x) - L_2| < \epsilon/2$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2. Então se $0 < |x - x_0| < \delta$, temos $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$ e $|g(x) - L_2| < \epsilon/2$. Logo,

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq$$

$$\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Portanto $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$. □

Segue da referência [7] os seguintes resultados.

Definição 2.33. *Uma função $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in B$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in B, \ \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Proposição 2.17. *Se um ponto a pertence a B e é um ponto de acumulação de B, então uma função $f : B \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Demonstração. Isto é consequência imediata da Definição 2.30. □

Segue da referência [1] a seguinte definição.

Definição 2.34. *Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.*

No próximo capítulo, utilizaremos os resultados deste capítulo para justificar a definição da potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 0, a \neq \pm 1$.

3 Potenciação

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados sobre potenciação e radiciação, de uma forma similar ao que é introduzido no Ensino Médio. Porém faremos as demonstrações dos resultados que são úteis na compreensão dos mesmos para conhecimento dos professores. Neste capítulo utilizaremos a referência [4].

3.1 Potência de Expoente Real

Definição 3.1. ***(Potência de Expoente Natural).*** *Sejam a um número real e n um número natural. Definimos a potência a^n como o produto de n fatores iguais a a, onde convencionamos que a é a base e n é o expoente dessa respectiva potência. Para $n = 1$, colocamos $a^1 = a$, pois há um só fator.*

Proposição 3.1. *Para $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a^{n+1} = a \cdot a^n$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. Para $n = 1$ temos $a^{1+1} = a^2 = a \cdot a = a \cdot a^1$. Suponhamos que $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Então

$$a^{(n+1)+1} = a \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\, vezes} \cdot a = a \cdot a^n \cdot a = a^{n+1} \cdot a = a \cdot a^{n+1}.$$

□

Proposição 3.2. *Sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes propriedades:*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. 1. Vamos provar por indução em n. Para $n = 1$, segue da proposição anterior que $a^m \cdot a^1 = a \cdot a^m = a^{m+1}$. Suponhamos agora que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Então $a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot a \cdot a^n = a^m \cdot a^n \cdot a$. Pela hipótese de indução, temos

$$a^m \cdot a^n \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a \cdot a^{m+n} = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}.$$

2. Temos $(a \cdot b)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdots (ab)}_{\text{n vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{n vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n\, vezes} = a^n \cdot b^n$.

3. $(a^m)^n$ representa o produto de n fatores iguais a a^m. Pelo item 1, temos

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot ... \cdot a^m}_{n\, vezes} = a^{\overbrace{m + m + ... + m}^{n\, vezes}} = a^{m \cdot n}.$$

□

Enunciamos a seguir um resultado que pode ser encontrado em [1].

Lema 3.1. ***(Desigualdade de Bernoulli).*** *Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que a desigualdade seja válida para n. Então multiplicamos os dois membros da desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + nx$ por $1 + x \geq 0$ e encontramos

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

□

Teorema 3.1. *Se $a > 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots)$ é crescente e ilimitada superiormente. Se $0 < a < 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots)$ é decrescente e limitada inferiormente por zero.*

Demonstração. Se $a > 1$ então multiplicamos os membros dessa desigualdade por a^n, com $n \in \mathbb{N}$, e obtemos $a^{n+1} > a^n$ concluindo que a sequência (a^n) é crescente. Para provarmos que a sequência (a^n) é ilimitada superiormente, devemos mostrar que dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$. De fato, escrevendo $a = 1 + d$ com $d > 0$, pela Desigualdade de Bernoulli, temos $a^n \geq 1 + nd$. Agora dado um $c \in \mathbb{R}$, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > (c-1)/d \Rightarrow 1 + nd > c.$$

Portanto, $a^n > c$, provando que (a^n) é ilimitada superiormente. Agora se $0 < a < 1$ multiplicamos essa desigualdade por a^n onde obtemos $a^n > a^{n+1}$ e a sequência (a^n) é decrescente. É fácil ver que a sequência (a^n) é limitada inferiormente, pois como $0 < a < 1$ então $a^n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo 0 é uma cota inferior do conjunto $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$. □

Corolário 3.1. *Sendo $0 < |a| < 1$, a sequência $(a, a^2, \cdots, a^n, \cdots)$ é convergente e seu limite é 0.*

Demonstração. Pelo teorema anterior segue que a sequência $(|a|^n)$ é limitada inferiormente por 0 e superiormente por a, e ainda é decrescente. Como $(|a^n|)$ é monótona e limitada, segue do Teorema 2.8 que a sequência $(|a^n|)$ é convergente. Agora provaremos que $\lim a^n = 0$. Começaremos observando que $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$. Do teorema anterior segue que $\left(\left|\frac{1}{a^n}\right|\right)$ é crescente e ilimitada superiormente. Dado $\epsilon > 0$ é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{a}\right|^{n_0} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |a^{n_0}| < \epsilon.$$

Tomando $n > n_0$ obtemos

$$|a^n - 0| = |a^n| < |a^{n_0}| < \epsilon.$$

Como $|a^n| < |a^{n_0}| < \epsilon$, para todo $n > n_0$, segue que $\lim |a^n| = 0$, e consequentemente pela Proposição 2.11, vale $\lim a^n = 0$. □

Definição 3.2. ***(Radiciação).*** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\begin{cases} \sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b, & \textit{para } n \textit{ ímpar.} \\ \sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b, & \textit{para } n \textit{ par com } a, b \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

O número n é chamado índice, o número b é chamado radicando, enquanto o número a é chamado raiz n-ésima de b. Quando escrevermos $\sqrt{b}$, o índice será 2.

Exemplo 3.1. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

Exemplo 3.2. Analisemos a soma $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Primeiro escrevemos a sequência (y_n) das aproximações, por falta, dos números racionais cujo quadrado é menor do que 3 como abaixo:

$$(1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; 1,73205a_6; \cdots).$$

O dígito a_6 representa o sexto dígito após a vírgula do termo y_6. Assim a escrita $a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ equivale ao n-ésimo dígito após a vírgula do termo y_n. Por exemplo para y_5, temos $a_1 = 7, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 0$ e $a_5 = 5$. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, onde $n = m + p$, então:

$$|y_n - y_m| = |1,73\cdots a_n - 1,73\cdots a_m| =$$
$$= |1,73\cdots a_{m+p} - 1,73\cdots a_m| = 0,00\cdots a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{m+p} =$$
$$= \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{10^{m+p}}.$$

Temos $0 < \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{10^{m+p}} < 1$. Logo fazendo $m \to \infty$ obtemos

$$\lim \left(\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{10^{m+p}}\right) = 0.$$

Então para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$ tal que

$$\left|\left(\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{10^{m+p}}\right) - 0\right| =$$

$$= \left|\frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{10^{m+p}}\right| = |y_n - y_m| < \epsilon.$$

Pelo Critério de Cauchy, (y_n) é convergente, e escrevemos $\lim y_n = \sqrt{3}$. O Exemplo 2.9 nos mostra que podemos considerar $\sqrt{2}$ como o limite de uma sequência (x_n). Pela Proposição 2.15, item 1, temos

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \lim y_n + \lim x_n.$$

A fim de ilustrarmos o caso das dízimas periódicas que representam números racionais, iremos mostrar qual é o significado da expressão decimal $0,999\cdots$. A partir dela fica mais fácil de provarmos que uma dízima periódica é um número racional.

Definição 3.3. *Uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência (a_n) onde o quociente entre um termo (com excessão do primeiro) e o termo anterior é constante. Esse valor constante é chamado de razão da P.G..*

Exemplo 3.3. As sequências $(2, 4, 8, 16, ...)$ e $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$ são progressões geométricas de razão $q_1 = 2$ e $q_2 = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Proposição 3.3. *O termo geral de uma P.G. $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ com razão q é dado por*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução em n.

Se $n = 2$, pela definição de P.G. temos

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{2-1}.$$

Suponhamos que a proposição seja válida para $n \in \mathbb{N}$, onde $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}.$$

Provando assim que a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 3.4. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de razão $q \neq 1$ é*

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right).$$

Demonstração. Temos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Usando a proposição anterior,

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}. \tag{3.1}$$

Agora multiplicando ambos os membros da igualdade (3.1) por $q \neq 1$, obtemos:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \cdots + a_1 q^n. \tag{3.2}$$

Subtraindo as igualdades (3.1) e (3.2) membro a membro, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right).$$

□

Corolário 3.2. *O* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *da soma dos termos de uma P.G.*$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ *de razão* q *com* $-1 < q < 1$ *é*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Demonstração. Segundo a proposição anterior, a soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada pela fórmula

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right). \tag{3.3}$$

Fazendo n tender ao infinito na igualdade (3.3) e usando o Corolário 3.1, obtemos $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1 - 0}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q}.$$

□

Exemplo 3.4. Qual é o valor da soma $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$? Note que

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots \right). \tag{3.4}$$

Consideremos a sequência $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots \right)$. Essa sequência é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{10}$, onde se examinarmos a soma infinita dos termos dessa P.G., segue do Corolário 3.2 que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Usando esse resultado e a igualdade (3.4) temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots\right)=$$
$$=9\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right)=$$
$$=9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=1.$$

O Exemplo 3.4 mostra que a dízima $0,999\cdots$ é igual a 1, tratando-se de um número racional.

Até o presente momento trabalhamos com potência de expoente natural. Uma pergunta que surge é como definir a^{-n}, onde $a\in\mathbb{R}-\{0\}, n\in\mathbb{N}$. Primeiro vamos definir a potência a^0. Para fazermos isso, devemos preservar as propriedades já enunciadas como a do item (1) da Proposição 3.2. Então $a^1\cdot a^0=a^{1+0}=a^1=a\Leftrightarrow a^0=1$. Agora podemos dar um significado para uma potência de expoente inteiro que poderia partir da seguinte multiplicação: $a^n\cdot a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$. Logo a^{-n} só pode ser o número $\frac{1}{a^n}$, para $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ e $n\in\mathbb{N}$.

Definição 3.4. ***(Potência de Expoente Inteiro Negativo).*** *Sejam $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ e $n\in\mathbb{N}$. Então $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.*

Proposição 3.5. *Sejam $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. Então*

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}.$$

Demonstração. Vamos provar a proposição considerando os seguintes casos:

1. Suponhamos que $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Pelo item 1 da Proposição 3.2, vale $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

2. Suponhamos que $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}-(\mathbb{N}\cup\{0\})$. Escrevemos $\alpha=-m$ e $\beta=-n$ com $m,n\in\mathbb{N}$. Então
$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{-m}\cdot a^{-n}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=$$
$$=a^{-(m+n)}=a^{-m+(-n)}=a^{\alpha+\beta}.$$

3. Suponhamos $\alpha=-m$ e $\beta=n$ com $m,n\in\mathbb{N}$ e $m<n$. Então
$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{-m}\cdot a^n=\frac{1}{a^m}\cdot a^n.$$
Como $m<n$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $n=m+k$. Logo
$$a^\alpha\cdot a^\beta=\frac{1}{a^m}\cdot a^n=\frac{a^{m+k}}{a^m}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{m+k\ \text{vezes}}}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\ \text{vezes}}}=$$
$$=a^k=a^{m+k-m}=a^{n-m}=a^{-m+n}=a^{\alpha+\beta}.$$

□

Proposição 3.6. *Sejam $m, p \in \mathbb{Z}$ com $m > p$. Se $a > 1$ então $a^m > a^p$, enquanto se $0 < a < 1$, então $a^m < a^p$.*

Demonstração. Vamos provar a proposição considerando três casos:

1. Suponhamos que $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z} - (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Começamos escrevendo $p = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Se $a > 1$, então $a^m > \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n} = a^p$. Agora se $0 < a < 1$ então $\frac{1}{a} > 1$, onde $a^p = a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n > 1 > a^m \Rightarrow a^m < a^p$.

2. Suponhamos que $m, p \in \mathbb{Z} - (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Denotemos $m = -q$ e $p = -n$ com $n, q \in \mathbb{N}$. Temos $m > p \Rightarrow -q > -n \Rightarrow n > q$. Se $a > 1$, vale $a^m = a^{-q} = \left(\frac{1}{a}\right)^q$ e $a^p = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, pelo Teorema 3.1, tem-se $a^m = a^{-q} > a^{-n} = a^p$. Agora se $0 < a < 1$ tem-se $\frac{1}{a} > 1$, e novamente pelo Teorema 3.1 obtem-se $a^m < a^p$.

3. Suponhamos que $m, p \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.1, vale $a^m < a^p$. Agora se $0 < a < 1$, então $a^m < a^p$. □

Proposição 3.7. *Sejam $b \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{b^n} = b$.*

Demonstração. Observando a Definição 3.2, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{b^n} = c \Leftrightarrow c^n = b^n$. Logo $c = b$. □

Proposição 3.8. *Sejam $b, d \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{bd}$.*

Demonstração. Pela Definição 3.2, existem $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a^n = b$ e $c^n = d$. Logo

$$\sqrt[n]{bd} = \sqrt[n]{a^n \cdot c^n} = \sqrt[n]{(ac)^n} = a \cdot c = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{d}.$$

□

Sejam $a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Procuremos dar um significado para a potência $a^{\frac{m}{n}}$. Se tivermos a potência $(a^{\frac{m}{n}})^n$ e quisermos preservar a propriedade (3) da Proposição 3.2, então devemos ter $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Essa análise explica a definição a seguir.

Definição 3.5. ***(Potência de Expoente Racional).*** *Sejam $a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

A justificativa para usarmos a positivo, se deve à definição 3.2, pois se a for negativo, então n deve ser ímpar. Logo para que a Definição 3.5 atinja todos os $n \in \mathbb{N}$, devemos trabalhar somente com $a \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 3.9. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Demonstração. Pela definição anterior, temos $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Multiplicando a fração $\frac{m}{n}$ por $\frac{p}{p}$ obteremos $\frac{mp}{np}$ que é equivalente a $\frac{m}{n}$. Dessa forma

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

□

Corolário 3.3. *Se $a \in \mathbb{R}^+$, $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$, então:*

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Demonstração. Usando a proposição anterior, temos

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

□

A seguir enunciaremos um lema que pode ser encontrado na referência [3].

Lema 3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Demonstração. Se $b = 1$, consideremos a série

$$s = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}.$$

Multiplicando por a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$as = (a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) + a^n = s - 1 + a^n.$$

Logo, $(a-1)s = a^n - 1$. Assim

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1). \tag{3.5}$$

Agora se $b \in \mathbb{R}^*$, então $a^n - b^n = b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right]$. Usando essa expressão e (3.5), temos

$$a^n - b^n = b^n\left(\frac{a}{b} - 1\right)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right] =$$

$$= b^{n-1}(a-b)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right] =$$

$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

o que prova a igualdade. □

Proposição 3.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a > b$, então $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.*

Demonstração. Denotemos $\sqrt[n]{a} = c$ e $\sqrt[n]{b} = d$. Pela Definição 3.2, valem $c^n = a$ e $d^n = b$, e assim

$$a > b \Rightarrow c^n > d^n \Rightarrow c^n - d^n > 0.$$

Usando o lema anterior, verificamos que

$$c^n - d^n = (c-d)(c^{n-1} + c^{n-2}d + \cdots + cd^{n-2} + d^{n-1}) > 0.$$

Portanto $c - d > 0 \Rightarrow c > d$, ou seja, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. □

Corolário 3.4. *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x > y$. Sendo $a > 1$, então $a^x > a^y$. E se $0 < a < 1$, então $a^x < a^y$.*

Demonstração. Suponhamos que $x = \dfrac{m}{n}$ e $y = \dfrac{p}{q}$, com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Então $\dfrac{m}{n} > \dfrac{p}{q} \Rightarrow mq > pn$. Temos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \text{ e } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

Se $a > 1$, obtemos $a^{mq} > a^{pn}$. Pela proposição anterior, vale

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{pn}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

Agora se $0 < a < 1$, temos $a^{mq} < a^{pn}$, onde $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$. □

Os resultados a seguir, podem ser encontrados na referência [4].

Lema 3.3. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$. Então em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Dado o intervalo $[\alpha, \beta]$ com $0 < \alpha < \beta$, devemos provar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$. Suponhamos que a e α sejam maiores que 1. Pelo Teorema 3.1, as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota fixada. Logo podemos obter $M, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n,$$

pois $1 + \dfrac{\beta - \alpha}{a^M} > 1$. Segue que

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Tomando $m \in \mathbb{Z}$, vale

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Portanto
$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha, \text{ com } \frac{m}{n} \leq M.$$
A sentença anterior nos mostra que as potências
$$a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \cdots, a^M \tag{3.6}$$
são extremos de intervalos consecutivos com comprimento menor que $\beta - \alpha$. Assim $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, onde pelo menos um dos extremos em (3.6), denotado por $a^{\frac{m}{n}}$ está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. Os demais casos são tratados de modo análogo. □

Tudo o que foi visto até agora neste capítulo, pode ser resumido através do estudo de uma função, onde para $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$, existe uma função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = a^x$. Observando todos os resultados apresentados neste capítulo, verificamos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, g apresentará as seguintes propriedades :

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Para definir a potência a^x quando x for irracional, podemos tomar como ponto de partida, manter a propriedade 3 da função g. Em outras palavras, queremos definir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a^x$, onde para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ é válido o resultado:
$$x < y \Rightarrow a^x < a^y, \text{ quando } a > 1 \text{ e } a^x > a^y, \text{ quando } 0 < a < 1.$$
Admitindo o resultado anterior, tomamos $r, s \in \mathbb{Q}$, sendo dois números racionais que se aproximam respectivamente por falta e excesso de x, e suponhamos ainda $a > 1$. Logo
$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$
Se tivermos $0 < a < 1$, então
$$r < x < s \Rightarrow a^s < a^x < a^r.$$

Se $a > 1$, para definirmos a^x, com x irracional, basta tomar a^x como sendo o número real (único) cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x, r \in \mathbb{Q}$ e cujas aproximações por excesso são a^s, com $s \in \mathbb{Q}, x < s$. Se $0 < a < 1$, a^x seria o único número real cujas aproximações por falta são a^s, com $s \in \mathbb{Q}$, $x < s$ e cujas aproximações por excesso são a^r com $r < x, r \in \mathbb{Q}$.

O número a^x está bem definido, pois não existem dois números reais que contemplam a propriedade anterior. Para provarmos isso, suponhamos $a > 1$ (se $0 < a < 1$, a prova é análoga) e que existam dois números reais diferentes A, B, em que
$$r < x < s \Rightarrow a^r < A < B < a^s.$$
Mas essa última desigualdade implica que o intervalo $[A, B]$ não contém nenhuma potência de a com expoente racional, em contradição com o Lema 3.3.

Definição 3.6. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e x irracional. Então a^x é o número que goza da propriedade anterior.*

Assim, definimos a^x para todo $x \in \mathbb{R}$ e podemos agora provar que as propriedades 1, 2 e 3 da Proposição 3.2 continuam válidas para todo $x \in \mathbb{R}$. O resultado a seguir assegura a propriedade 1.

Proposição 3.11. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Então $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.*

Demonstração. Consideremos a sequência (s_n) de números racionais que se aproximam por excesso de x e (t_n) a sequência de números racionais que se aproximam por excesso de y. Assim temos que a^x e a^y são os limites das sequências (a^{s_n}) e (a^{t_n}) respectivamente. Logo a sequência $(s_n + t_n)$ representa os números racionais que se aproximam por excesso de $x + y$. Então

$$a^x \cdot a^y = \lim a^{s_n} \cdot \lim a^{t_n} = \lim \left(a^{s_n} \cdot a^{t_n}\right) = \lim a^{s_n + t_n} = a^{x+y}.$$

□

Vale observar que dado qualquer número real x, pode-se construir uma sequência (r_n) de números racionais que converge para x, como vimos no capítulo anterior. Esse resultado está diretamente ligado ao fato do conjunto $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$.

No próximo capítulo, iremos nos concentrar no estudo da função exponencial, que abrange todos os resultados apresentados neste capítulo.

4 Função Exponencial

Neste capítulo descreveremos a função exponencial e iremos mostrar os detalhes que norteiam a construção do gráfico dessa função. Na última seção, iremos também dar uma sugestão de aula para alunos do Ensino Médio sobre este tema. O intuito dessa aula será a tentativa de motivar o interesse dos alunos e auxiliar o trabalho do professor. Iniciaremos este capítulo usando a referência [4].

4.1 A Função Exponencial

Definição 4.1. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$. Então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ será chamada função exponencial de base a.*

A função exponencial é um tipo de função onde a variável independente funciona como o expoente de uma base positiva. Como visto no capítulo anterior, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ valem:

1. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
2. $f(1) = a$;
3. Se $a > 1$ então $x < y$ implica $f(x) < f(y)$ e se $0 < a < 1$ então $x < y$ implica $f(x) > f(y)$.

Proposição 4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função exponencial. Então f assume o valor 0, somente se for identicamente nula, ou seja, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se existir um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Logo f deve ser identicamente nula. □

Proposição 4.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função exponencial e que não seja identicamente nula. Então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Para $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, temos

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

$\square$

O resultado da proposição anterior, registra o fato de que o contra-domínio de f pode ser especificado por $\mathbb{R}^+$.

Proposição 4.3. *Dado $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3, todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ contém valores a^r, $r \in \mathbb{Q}$, provando que f cresce sem limites quando $x > 0$ com $a > 1$ e quando $x < 0$ com $0 < a < 1$. $\square$

A proposição anterior reitera o fato de que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \text{ se } a > 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \text{ se } 0 < a < 1.$$

Proposição 4.4. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$. Então $\lim\limits_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$.*

Demonstração. Devemos provar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \epsilon. \tag{4.1}$$

Suponhamos, por absurdo, que existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - a^0| \geq \epsilon_0.$$

Tomando $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, então existe $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x_n - 0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |a^{x_n} - a^0| = |a^{x_n} - 1| \geq \epsilon_0. \tag{4.2}$$

É claro que $x_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Podemos escolher uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) de forma que (x_{n_k}) seja monótona (decrescente ou crescente). Suponhamos, que (x_{n_k}) seja decrescente (caso crescente é análogo). Notemos que $0 \leq x_{n_k}$ e que $1 = a^0 \leq \cdots \leq a^{x_{n_k}} \leq \cdots \leq a^{x_{n_1}}$. Então $(a^{x_{n_k}})$ é monótona decrescente e limitada. Logo ela é convergente, onde segundo o Teorema 2.8, $a^{x_{n_k}} \to y = \inf\limits_k a^{x_{n_k}} = 1$.

Mas como $(a^{x_{n_k}})$ é uma subsequência de (a^{x_n}), segue que vale (4.2) e isso contraria o fato de que $a^{x_{n_k}} \to 1 = \inf\{a^{x_{n_k}},\ k \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Corolário 4.1. *A função exponencial de base a é contínua.*

Demonstração. Note que se a função exponencial é contínua, então para um $x_0 \in \mathbb{R}$, arbitrário, é possível tornar $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequeno quanto desejamos, desde que tomamos um x suficientemente próximo de x_0, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Para provar isto, tome $x = x_0 + h$ para algum $h \in \mathbb{R}$, então

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|.$$

Fazendo $x \to x_0$, então $h \to 0$. Logo

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = \lim_{h \to 0} a^{x_0}|a^h - 1| = \lim_{h \to 0} a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} |a^h - 1|.$$

Usando a proposição anterior, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |1 - 1| = \lim_{h \to 0} a^{x_0} \cdot 0 = 0.$$

Usando a Proposição 2.11, temos

$$\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Portanto a função exponencial é contínua. □

Proposição 4.5. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$. Então f é bijetora.*

Demonstração. A injetividade de f decorre de sua monotonicidade. Se $a > 1$, então

$$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Portanto $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$. De modo análogo chegamos à essa conclusão se $0 < a < 1$. Agora vamos provar que f é sobrejetora, ou seja, que para todo número real $y > 0$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$. O Lema 3.3 garante que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, que pertence ao intervalo $\left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)$. Logo, $|a^{r_n} - y| < \frac{1}{n}$, e assim vale, $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = y$. Suponhamos $a > 1$, e escolhemos potências a^{r_n} que se aproximam por falta de y com a propriedade $a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < y$. Como a função exponencial é ilimitada superiormente, podemos assegurar que existe um $s \in \mathbb{Q}$ tal que $y < a^s$. Usando a monotonicidade de f, verificamos que

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s.$$

Portanto, (r_n) é uma sequência monótona e limitada superiormente por s. Usando o Axioma da Completeza, os valores r_n se aproximam por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. Como f é contínua, obtemos

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = y.$$

Assim f é sobrejetora. O caso $0 < a < 1$ é provado de modo análogo. □

Proposição 4.6. *Sejam* $a \in \mathbb{R}^+$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(x) = a^x$. *Então*

(i) $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ *se* $0 < a < 1$,

(ii) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ *se* $a > 1$.

Demonstração. (i) Temos

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ A > 0;\ \ \forall\ x > A \Rightarrow |a^x - 0| < \epsilon.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, como f é sobrejetora, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $a^A = \epsilon$. Portanto, para todo $x > A$ tem-se

$$a^x < a^A = \epsilon,$$

ou seja,

$$|a^x - 0| < \epsilon,\ \ \forall\ x > A.$$

(ii) O raciocínio é análogo ao item (i). □

A seguir iremos enunciar uma definição segundo a referência [3].

Definição 4.2. *Uma função* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *contínua é convexa, se para quaisquer* $c, d \in [\alpha, \beta]$ *e para todo* $t \in [0, 1]$, *satisfaz a desigualdade*

$$f(tc + (1-t)d) \leq tf(c) + (1-t)f(d).$$

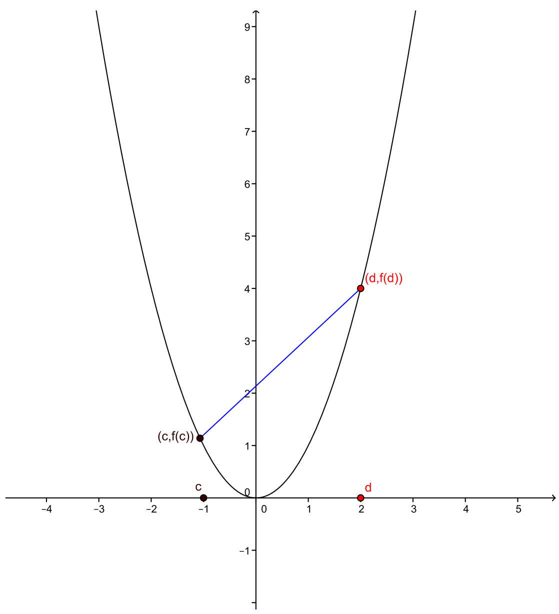

Figura 4.1: Gráfico de uma função convexa.

A Figura 4.1 mostra o exemplo de uma função convexa, onde notamos que a cada par de pontos c e d escolhidos num intervalo $[\alpha, \beta]$, o gráfico da função encontra-se abaixo do segmento de reta secante que passa pelos pontos $(c, f(c))$ e $(d, f(d))$.

Para provarmos que a função exponencial é convexa, podemos utilizar alguns resultados da Análise, em que usamos o conceito de funções deriváveis. A derivada da função exponencial, que no caso envolverá o uso do logaritmo natural (denotado por ln) pode ser encontrada nas referências [1] e [7]. Deixamos para o leitor verificar mais sobre esse assunto. Também nessas mesmas referências, encontra-se o seguinte resultado.

Proposição 4.7. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I, então são equivalentes:*

1. *f é convexa.*
2. *f' é uma função crescente.*
3. *Se $c, x \in I$, então $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$.*

Proposição 4.8. *A função exponencial é convexa.*

Demonstração. Basta observar que se $f(x) = a^x$, então

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad \text{ou seja,}$$

$$f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0.$$

Logo f' é crescente e portanto f é convexa. □

Juntemos todas as propriedades vistas sobre a função exponencial, entre elas: domínio, monotonicidade, continuidade, convexidade, comportamento no infinito e no menos infinito. Então podemos construir o gráfico de tal função, conforme exemplos a seguir:

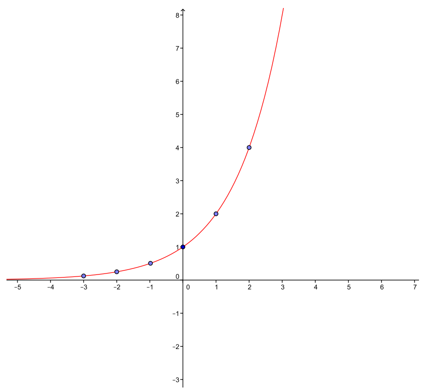

Figura 4.2: $y = 2^x$.

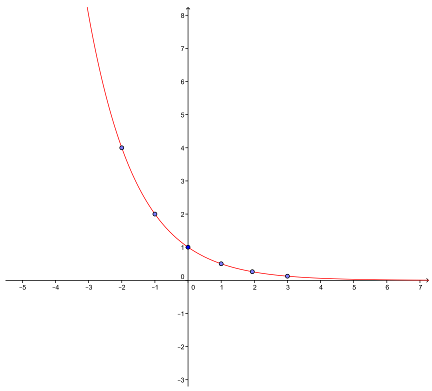

Figura 4.3: $y = (1/2)^x$.

Quando nos deparamos com uma situação-problema, podemos muitas vezes escolher um modelo matemático, como uma função, para solucioná-la. Para efetuarmos esta escolha, "é preciso saber quais as propriedades características de cada tipo de função", segundo a referência [4]. Com a função exponencial não é diferente, onde é possível utilizar algumas propriedades para verficar se um problema é ou não modelado através de uma função exponencial. A seguir enunciaremos o teorema que nos dará essa caracterização.

Teorema 4.1. ***(Caracterização da Função Exponencial.)*** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetora. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2).

Iniciemos provando que a hipótese (1) é válida para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), onde $f(rx) = f(x)^r$. Escrevendo $nr = m$, temos

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Se fixarmos $f(1) = a$, teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Agora suponhamos que f seja crescente. Então $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é provado de modo análogo), então pelo Lema 3.3, existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x \Rightarrow f(x) < f(r) < a^x.$$

Como f é crescente, então $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$. Mas $a^r < a^x \Rightarrow r < x$. Assim temos uma contradição, provando que (1) $\Rightarrow$ (2) quando f for crescente. A prova é análoga se f for decrescente.

(2) $\Rightarrow$ (3).

Seja $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

(3) $\Rightarrow$ (1).

Seja $f(x+y) = f(x) \cdot f(y),\ x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = \underbrace{f(x+x+x+\cdots+x)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n.$$

Agora falta provarmos o caso $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Então

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f(-nx) &= \underbrace{f(-x-x\cdots-x)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f(-x) \cdot f(-x) \cdots f(-x)}_{n \text{ vezes}} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdots \frac{1}{f(x)}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}. \end{aligned}$$

□

A função exponencial está presente em muitas situações problemas, porém na maioria das vezes ela aparece na forma que chamamos de "tipo exponencial". Entre essas situações podemos destacar o montante de uma aplicação a juros compostos em função do tempo, como também a desintegração radioativa. A seguir iremos definir esse tipo de função, como também analisar a sua caracterização, igual ao que fizemos na função exponencial.

Definição 4.3. *Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas.*

A função de tipo exponencial goza das mesmas propriedades da função exponencial, entre elas, a monotonicidade, a injetividade e o fato de ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Teorema 4.2. ***(Caracterização das Funções de Tipo Exponencial).*** *Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial se, e somente se, for monótona e injetora, tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, $g(x+h)/g(x)$ depende apenas de h, mas não de x.*

Demonstração. Seja $g(x) = ba^x$, $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^x} = \frac{ba^x(a^h)}{ba^x} = a^h.$$

Logo $g(x+h)/g(x)$ depende apenas de h e não de x.

Reciprocamente, seja $g(x+h)/g(x) = \varphi(h)$ e definamos $f(x) = g(x)/b$, com $b = g(0)$. Então f é monótona e injetora. Temos

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{g(x+h)/b}{g(x)/b} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = \varphi(h).$$

Observamos que $f(0) = 1$, onde podemos colocar $x = 0$ na igualdade

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)},$$

obtendo

$$\varphi(h) = \frac{f(0+h)}{f(0)} \Rightarrow \varphi(h) = \frac{f(h)}{1} \Rightarrow \varphi(h) = f(h), \; h \in \mathbb{R}.$$

Assim, f cumpre a propriedade $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Segue do Teorema 4.1, que $f(x) = a^x$. Portanto,

$$g(x) = bf(x) = ba^x.$$

□

4.2 Sugestão de Aula

Após estudarmos o comportamento de uma função exponencial, vamos dar uma proposta de trabalho para o docente de matemática do ensino médio que irá introduzir o conceito de função exponencial a seus alunos. Para fazermos isso, iremos trabalhar com dois exemplos, sendo o primeiro um caso de uma função exponencial crescente, e depois um caso de uma função exponencial decrescente.

Exemplo 4.1. Segundo [9], a população do México nos anos 80 crescia conforme a Tabela 4.1:

Ano	**População (milhões)**
1980	67,38
1981	69,13
1982	70.93
1983	72,77
1984	74,66
1985	76,60
1986	78,59

Tabela 4.1: População do México (estimada), 1980 - 1986.

A Tabela 4.1 pode ser utilizada pelo professor em sala de aula como pontapé inicial ao se introduzir a função exponencial. O professor poderia começar solicitando aos seus alunos para obterem a razão entre a população de um ano (com excessão de 1980) com a população do ano anterior. Logo os alunos iriam encontrar os seguintes resultados:

$$\frac{\text{População em 1981}}{\text{População em 1980}} = \frac{69,13 \text{ milhões}}{67,38 \text{ milhões}} = 1,026.$$

$$\frac{\text{População em 1982}}{\text{População em 1981}} = \frac{70,93 \text{ milhões}}{69,13 \text{ milhões}} = 1,026.$$

De modo análogo podemos verificar que as outras razões também resultarão em $1,026$. Temos portanto uma progressão geométrica de razão $q = 1,026$, ou seja, a população está crescendo a uma taxa de $2,6\%$ ao ano. A partir deste problema, o docente pode pedir para os alunos modelarem esse crescimento usando a matemática. Os alunos podem construir uma lei de formação que estabeleça a relação entre o número de pessoas do México em função do tempo em anos. Uma opção para iniciar essa modelagem, seria convencionar que o tempo será 0 a partir do ano de 1980. Então

$$\text{Quando } t = 0, \text{ população} = 67,38 = 67,38(1,026)^0.$$

$$\text{Quando } t = 1, \text{ população} = 69,13 = 67,38(1,026)^1.$$

$$\text{Quando } t = 2, \text{ população} = 70,93 = 67,38,(1,026)^2.$$

$$\text{Quando } t = 3, \text{ população} = 72,77 = 67,38(1,026)^3.$$

Observando os resultados, o aluno deverá chegar a fórmula:

$$P = 67,38(1,026)^t, \tag{4.3}$$

onde P é a população do México, e t é o tempo em anos. Tendo todos esses dados em mãos, o professor pode utilizar o software do GeoGebra (que pode ser facilmente encontrado na internet), para construir o gráfico da função descrita em (4.3).

Para a construção desse gráfico, o professor deverá inicialmente, pedir aos seus alunos para inserirem a função (4.3), no campo "Entrada"e assim obter o gráfico dessa função.

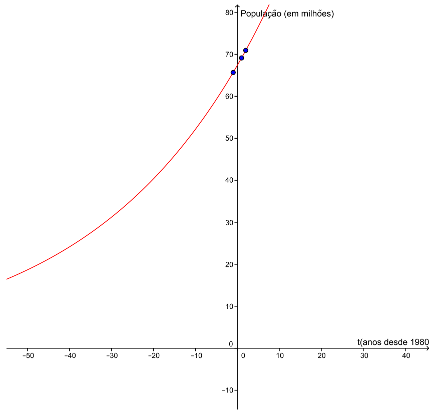

Figura 4.4: $P = 67,38(1,026)^t$.

A partir da obtenção do gráfico, o professor pode fazer alguns questionamentos para explorar o gráfico como:

1. Em 2020, qual seria uma estimativa para a população do México?
2. Em quanto tempo a população triplicará?

Na primeira pergunta, o professor irá trabalhar com a leitura do gráfico, identificando as variáveis dependente e independente da função. Já na segunda pergunta, o aluno pode ter uma estimativa do resultado lendo o gráfico, mas o docente pode começar a falar da aplicação de equações exponenciais simples, e no caso do problema proposto, falar da importância do estudo de logaritmos. Em seguida, o professor pode introduzir o conceito de função exponencial. Também ele pode começar a abordar algumas propriedades como o crescimento infinito e o fato desse exemplo representar uma função crescente. A ideia aqui exposta, mostra uma contextualização, onde ela pode ser colocada antes de falarmos em potenciação, radiciação, etc. A proposta dessa aula está diretamente ligada ao processo de "Modelagem Matemática", onde devemos trazer um problema que pode ser traduzido para a Matemática, e assim, podemos provocar a curiosidade do aluno, despertando o seu interesse para a parte mais técnica.

Logo, podemos começar a explorar situações como o que acontece quando um expoente de uma potência é um número natural ou algum outro subconjunto dos números reais. Por exemplo, podemos investigar no problema referente ao crescimento populacional do México, admitindo que o crescimento tenha sido o mesmo a uns dez anos antes de 1980 e a uns 30 anos depois de 1980, qual seria o valor de P para os seguintes casos:

(a) $t = 27$ (ano de 2007).

(b) $t = -1$ (ano de 1979).

Se $t = 27$ teríamos.

$$P = 67,38(1,026)^{27} \cong 134,76 \text{ milhões}.$$

Agora se $t = -1$ então teríamos de dividir a população do ano de 1980 pela razão $q = 1,026$, conforme a seguir:

$$P = 67,38(1,026)^{-1} \cong 65,67 \text{ milhões}.$$

Como visto, o professor já poderia a partir daqui justificar o conceito de expoente negativo, e depois começar a investigar o caso de um expoente racional, até o caso de um expoente irracional. As justificativas para os casos de expoente racional e irracional podem ser encontradas no Capítulo 3 desta dissertação.

Outra situação interessante para explorar uma função exponencial crescente seria o cálculo de um montante em função do tempo, com regimento de juros compostos. Já para o caso de uma função exponencial decrescente, iremos explorar a idade de um fóssil, sendo um assunto extremamente interessante para os alunos. Por isso convidamos você leitor, a observar o próximo exemplo conforme a referência [10].

Exemplo 4.2. A idade de um fóssil (Vide[1] Figura 4.5) pode ser determinada através de um método chamado de datação radioativa. A radioatividade faz com que os átomos tenham variação em sua massa ou em seu número atômico. Podemos citar o carbono-14 que emite radiação, no qual a metade de sua massa é transformada em carbono-12 a cada 5730 anos em fósseis de seres vivos. Por isso esse tempo é chamado de meia-vida, ou seja, a meia-vida do carbono-14 é de 5730 anos. A meia-vida do carbono-14 é utilizada em fósseis com duração de até 70000 anos. Para obtermos uma idade superior a 70000 anos, podemos usar o potássio-40, cuja meia-vida é de 1,25 bilhão de anos, como o urânio-238, que possui meia vida de 4,47 bilhões de anos.

2.jpg 

Figura 4.5: Fóssil de um dinossauro.

[1]Disponível em [11]. Acesso em 21 nov. 2014.

A partir do Exemplo 4.2, o professor pode explorar algumas perguntas como:

• Sendo m a massa de carbono-14 de um fóssil, qual será sua massa de carbono-14 após 5730 anos? E após 17190 anos?

Resposta: Pelo Exemplo 4.2, teremos que a massa do fóssil após 5730 anos, será $\frac{m}{2}$, enquanto após 17190 anos, a sua será $\frac{m}{8}$.

• Qual é a datação de um fóssil que tem 25 % do carbono-14 original?

Resposta: 11460 anos.

• Suponhamos que m seja a massa original de carbono-14 de um fóssil. Escreva a função de tipo exponencial que expressa a massa f de carbono-14 em função do tempo t, em anos.

Resposta: $f(t) = m \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$.

A partir dessa nova função, o professor pode pedir para que seus alunos observem o gráfico dessa função no GeoGebra, utilizando o comando "Controle Deslizante"na letra m expressa na função, conforme figura a seguir:

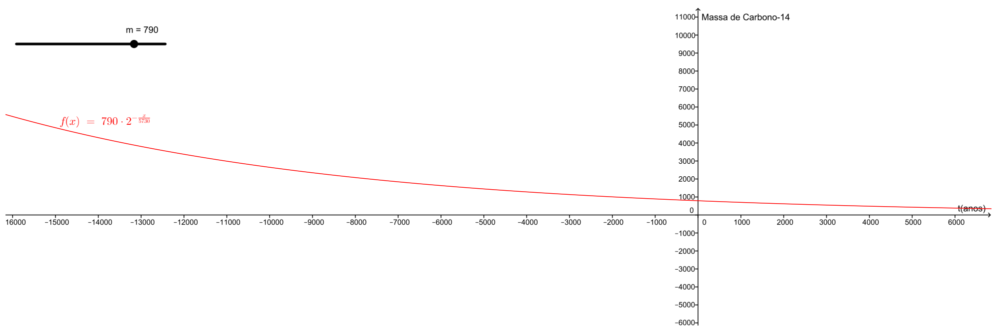

Figura 4.6: Datação de um fóssil usando carbono-14.

5 Conclusão

Como visto a função exponencial tem um papel fundamental em várias situações, desde a obtenção da idade do fóssil de um dinossauro até análise de uma aplicação financeira regida a juros compostos. A contextualização de problemas como os apresentados neste texto, podem ser de grande utilidade no trabalho de um docente de matemática. Os dias de hoje são marcados pelo intenso uso de novas tecnologias e pelas novas exigências do mercado de trabalho. E não muito distante a isso, a educação deve conseguir acompanhar esse ritmo, onde o professor é o mediador do quebra-cabeça envolvendo o que se ensina e a aprendizagem dos alunos.

Esta dissertação procurou justamente superar esses paradigmas, onde buscamos responder diversas perguntas que surgem no cotidiano do professor sobre o assunto desta pesquisa. Interrogações desde o sexto ano do ensino fundamental quando se começa a ver potenciação e radiciação, até o estudo da função exponencial, vistas na maioria das vezes no primeiro ano do ensino médio. Mas o trabalho não se restringiu somente ao seu assunto principal, como também, foram analisados outros temas como os conjuntos numéricos, sequências e limites. Um destaque deste trabalho, com certeza, foram as caracterizações de uma função exponencial e de uma função do tipo exponencial, que podem ser utilizadas na modelagem de um problema. E quando essa modelagem for uma dessas funções, podemos trabalhar com as propriedades apresentadas no Capítulo 3.

Mas não queremos parar por aqui, pois a matemática é uma ciência infinita cheia de paradoxos que devem ser solucionados. Por isso o estudo de uma função exponencial deve ainda ser aprofundado, como por exemplo o estudo de Logaritmos, que possibilitará uma continuidade no estudo do tema que foi explorado nesta pesquisa.

Referências

[1] LIMA, E. L. *Análise Real Funções de Uma Variável - Volume 1*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[2] FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] OLIVEIRA, K. L. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] LIMA, E. L. et al. *A Matemática no Ensino Médio - Volume 1*. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[5] BARRETO, A. C. *Tópicos de Análise*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1971.

[6] ÁVILA, G. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

[7] TÁBOAS, P. Z. *Cálculo em uma Variável Real*. 1. ed. São Paulo: Edusp, 2008.

[8] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

[9] HALLET, D. H. *Calculus*. 1. ed. Toronto: John Wiley Sons, Inc., 1994.

[10] SOUZA, J. R. *Novo Olhar Matemática - Volume 1*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

[11] PICCIN, R. *Fóssil de um dinossauro*. [s.n.]. Disponível em: <http://www.guiadasemana.com.br/turismo/noticia/mes-dos-dinossauros-em-sp>.