



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Um novo olhar sobre o cálculo de distância

Abias Rodrigues da Cruz

Teresina - 2015

Abias Rodrigues da Cruz

Dissertação de Mestrado:

Um novo olhar sobre o cálculo de distância

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática .

Orientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

Teresina - 2015

A148n Rodrigues da Cruz, Abias

Um novo olhar sobre o cálculo de distância/ Abias Rodrigues da Cruz- Teresina: [s.n.], 2015.

49 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Pós Graduação em Matemática.

Orientador: Jurandir de Oliveira Lopes

1. Distância. 2. Ensino básico. 3. Espaços métricos. 4. Métricas.

I. Título

CDU: 515.124

TERMO DE APROVAÇÃO

Abias Rodrigues da Cruz

UM NOVO OLHAR SOBRE O CÁLCULO DE DISTÂNCIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes
Presidente

Prof. MSc. Mario Gomes dos Santos
Membro Inteno - UFPI

Prof. MSc. Ronaldo Campêlo da Costa
Membro Externo - IFPI

Teresina - 2015

A Deus, pois sem ele nada seria;

Agradecimentos

Aos meus pais, Francisco e Socorro, por terem sempre dado o melhor de si para me proporcionarem a melhor educação.

A minha esposa, Sônia, que sempre esteve presente nos momentos bons e ruins, dando-me apoio para vencer todas as barreiras, me fazendo acreditar que os sonhos são possíveis.

Aos nossos filhos Davi e Moisés, por terem compreendido em diversos momentos que não pude acompanhá-los nas descobertas e brincadeiras.

Aos professores da UFPI que tive contato neste curso, que com seus ensinamentos tornaram mais fácil a caminhada.

Ao professor Dr Jurandir de Oliveira Lopes, por suas valiosas contribuições e que com muita maestria me orientou na realização deste trabalho.

A todos os grandes amigos que conquistei ao longo da realização deste curso.

A todos os alunos e professores do IFMA-Campus Codó, em especial, meu grande amigo Alvaro Itauna Schalcher Pereira, por sua valiosas contribuições.

Agradeço a CAPES pelo apoio.

Gostaria que você soubesse que existe dentro de si uma força capaz de mudar sua vida, basta que lute e aguarde um novo amanhecer. (Margaret Thatcher)

Resumo

O homem, ao longo do tempo, tem se deparado com muitos problemas no seu dia-a-dia, dentre eles, destacamos o cálculo de distâncias. O problema do cálculo de distância está presente na demarcação de terras, na construção civil, no dia-a-dia dos taxistas, no planejamento de viagens, no cálculo da distância de pontos inacessíveis entre outros. Neste trabalho, recorreremos ao estudo dos Espaços Métricos com o intuito de aprofundarmos nossos conhecimentos sobre este tema, mostrando, através de diferentes métricas, outras formas para se calcular distâncias em matemática nas séries do Ensino Básico.

Palavras-chave: Distância, Ensino básico, Espaços métricos, Métricas.

Abstract

Man, over time, has been faced with many problems in their day-to-day, among them, as calculation of distances. The problem of distance calculation is present in the demarcation of land, construction, day-to-day taxi drivers, planning trips, the calculation of the distance inaccessible points among others. In this work, we turn to the study of Metric Spaces in order to deepen our knowledge on this subject, showing through different metrics, other ways to calculate distances in mathematics in basic education series.

Keywords: Distance, basic Education, Metric spaces, Metrics.

Lista de Figuras

1	Construção das Pirâmides	10
2	Estrutura Atômica	10
3	Métrica do taxi	12
1.1	Maurice Fréchet	13
1.2	Métrica usual em \mathbb{R}	15
1.3	Representação gráfica da solução	16
1.4	Representação gráfica da solução	16
1.5	Métrica Euclidiana	17
1.6	Representação gráfica da solução	19
1.7	Representação gráfica da solução	19
1.8	Representação gráfica da solução	21
1.9	Representação gráfica da solução	21
1.10	Métrica da Soma	22
1.11	Representação gráfica da solução	23
1.12	Representação gráfica da solução	23
1.13	Representação gráfica da solução	25
1.14	Representação gráfica da solução	25
2.1	Representação gráfica da solução	27
2.2	Representação gráfica da solução	28
2.3	Representação gráfica da solução	30
2.4	Representação gráfica da solução	31
3.1	Representação gráfica da solução	33
3.2	Representação gráfica da solução	34
3.3	Representação gráfica da solução	35
3.4	Representação gráfica da solução	35
3.5	Representação gráfica da solução	36
3.6	Representação gráfica da solução	37
3.7	Representação gráfica da solução	38
3.8	Representação gráfica da solução	39

Sumário

Introdução	10
1 Espaços Métricos	13
1.1 Definição de Espaços Métricos	14
1.2 Exemplos de Espaços Métricos	15
1.2.1 Métrica Usual em \mathbb{R}	15
1.2.2 Métrica usual em \mathbb{R}^2	17
1.2.3 Métrica Zero - Um	20
1.2.4 Métrica da Soma em \mathbb{R}^2	22
1.2.5 Métrica do Máximo \mathbb{R}^2	24
2 Construção de Novos Espaços Métricos	26
3 Atividades de Aplicação	32
3.1 Aplicação 1	32
3.2 Aplicação 2	34
3.3 Aplicação 3	36
4 Conclusão	40
5 Desigualdade Triangular	42
6 Módulo de um número real	45
Referências	48

O homem, ao longo do tempo, tem se deparado com problemas que envolvem o cálculo de distância nas diferentes áreas do conhecimento. Entre eles podemos citar alguns:

Na Agrimensura, encontramos registros que datam por volta do ano 2.000 a.C, através da demarcação de terras pelos egípcios, visando a cobrança de tributos e sua utilização na construção de pirâmides. Sobre a construção das pirâmides e outros templos, registros nos mostram que elas foram projetadas e posteriormente construídas por engenheiros daquela época e ainda estão imponentes no nosso tempo (SEOLIN; ANDRADE, 2010).

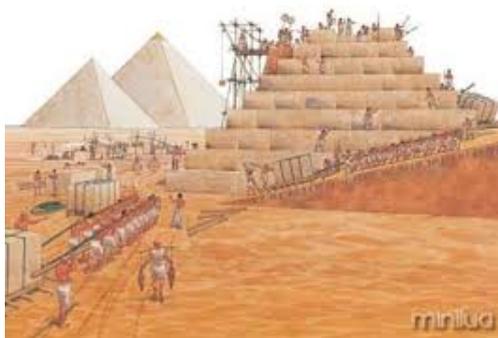


Figura 1: Construção das Pirâmides
Fonte: <http://minilua.com/fim-misterio-das-piramides/>

Na Química, através do cálculo das dimensões das partículas constituintes do átomo. No que diz respeito ao conceito de átomo, para Tolentino e Rocha Filho (1996), na tentativa de compreender a estrutura da matéria, os antigos filósofos Gregos criaram as bases para as grandes descobertas e invenções que a humanidade tem presenciado nos últimos séculos.

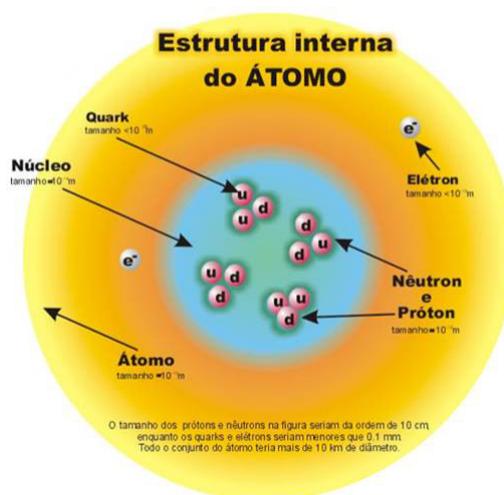


Figura 2: Estrutura Atômica
Fonte: <http://tiapaulabiologa.blogspot.com.br/>

Na Astronomia, na realização do cálculo da distância entre planetas.

Na Matemática, com o cálculo da distância de objetos inacessíveis, bem como, cálculo da distância entre conjuntos.

Na Física com a determinação do comprimento de uma onda, cálculo da força, estudo do movimento dos corpos.

Existe uma grande aplicabilidade da temática e algumas das competências ao serem alcançadas pelo discente do Ensino Básico de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais são:

Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.(BRASIL, 2002, p. 116).

Apesar da grande importância, percebemos, por intermédio da prática docente, que quase a totalidade dos livros didáticos, adotados no Ensino Básico, utilizam apenas o modo Euclidiano de calcular distâncias, não chegam a citar que existem outras formas de se realizar o cálculo da distância, como exemplo vejamos a situação seguinte que ilustra essa diversificação : Suponhamos que alguém queira se deslocar em um taxi do ponto A ao ponto B, separados por uma esquina, e que o ponto B esteja a uma distância de quatro unidades para a direita e três unidades abaixo do ponto A, conforme ilustração.

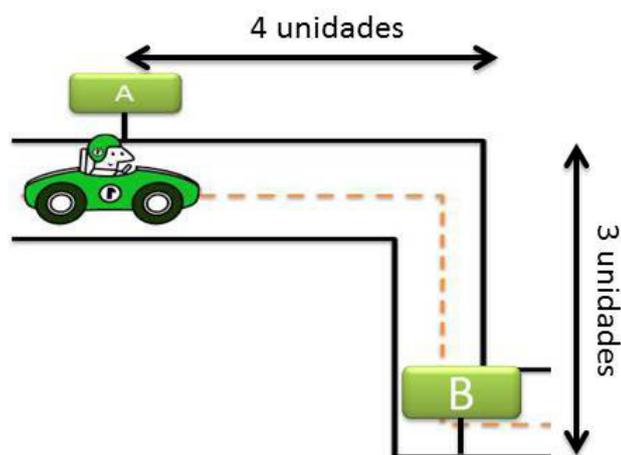


Figura 3: Métrica do taxi

A partir da ilustração, verificamos que existem duas distâncias entre os pontos A e B. A que é a mais justa para o taxista, $4 + 3 = 7$ e a que seria mais econômica para o passageiro (em linha reta) igual a 5. Obtida através da aplicação do teorema de Pitágoras.

Em diferentes situações do dia-a-dia nos deparamos com problemas como o descrito acima. Com o intuito de aprofundarmos nosso conhecimento sobre a temática, este trabalho está dividido em três capítulos:

No primeiro, apresentamos a definição de Espaços Métricos e utilizamos diferentes métricas para o cálculo de distâncias, de acordo com [4], [6], [7], [9] e [13].

No segundo, utilizamos a definição de métrica para criarmos novas métricas a partir de métricas existentes. A fundamentação teórica deste capítulo encontramos em [5], [10], [12] e [13].

Já no terceiro capítulo, fazemos aplicações da temática estudada, reforçando o conteúdo exposto demonstrando que se faz necessária a adoção de novos olhares sobre o cálculo de distâncias por parte dos professores e alunos do Ensino Básico.

1 Espaços Métricos

Para que possamos medir a distância entre dois elementos em um conjunto e/ou verificarmos qual de dois pontos x e y está mais próximo de um ponto a , todos pertencentes a um conjunto X deve-se existir a noção de distância já previamente definida neste conjunto. Logo, só tem sentido falar de distância entre pontos em um conjunto se este se apresenta como um espaço topológico. Mais o que isto significa? significa que devam ser verificados os conceitos de continuidade e convergência. Dizemos que uma aplicação $g : X \Rightarrow Y$ definida em um conjunto X tomando-se valores em um outro conjunto Y , é contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a . Já em relação a convergência, diz-se que uma sequência de pontos $(x_n), n = 1, 2, 3, 4, \dots$ pertencentes a um conjunto X , converge para um ponto $a \in X$ quando é possível tornar (x_n) arbitrariamente próximo de a desde que se tome n suficientemente grande. Conjuntos onde esses conceitos são verificados, com os quais são possíveis obtermos a distância entre dois pontos são denominados **Espaços Métricos**.

A conceituação e a definição de espaço métrico que daremos a seguir foi introduzida em 1906, pelo matemático francês Maurice Fréchet quando da publicação de sua tese de doutorado.



Figura 1.1: Maurice Fréchet
Fonte:<http://en.wikipedia.org/wiki/MauriceRenC3A9FrC3A9chet>

1.1 Definição de Espaços Métricos

O Dicionário Escolar da Academia Brasileira de Letras (2012) define distância como sendo o Espaço ou período de tempo compreendido entre dois pontos ou acontecimentos.

A Matemática traz a seguinte definição de distância.

Definição 1. (Espaço Métrico). Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Consideremos uma aplicação $d : A \times A \Rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado $(x, y) \in A \times A$ ao número $d(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$(1) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$(3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Com essas condições, dizemos que d é uma métrica sobre A e que $d(x, y)$ é uma distância do elemento x ao elemento y . Qualquer aplicação $d : A \times A \Rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições anteriores é uma métrica.

O par (A, d) é o que denominamos de espaço métrico.

Vejamus que a condição (1) garante que a distância nunca é negativa e que somente será nula se os pontos forem iguais, reciprocamente, a distância de um ponto a si mesmo deve ser nula.

Já a condição (2) afirma que a distância de x a y é igual a distância de y a x .

A condição (3), também conhecida como desigualdade triangular,¹ originária da geometria plana que demonstra que em qualquer triângulo a medida de qualquer um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois lados.

Observação 1. De acordo com a definição acima podemos ter dentro de um mesmo conjunto diferentes aplicações satisfazendo as três condições. Ou seja, diferentes métricas que permitiram o cálculo da distância entre pontos deste conjunto de diferentes maneiras.

¹Demonstração feita no Anexo

1.2 Exemplos de Espaços Métricos

1.2.1 Métrica Usual em \mathbb{R}

Consideremos o conjunto \mathbb{R} dos números reais. A seguinte função

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$, afirmamos que esta aplicação é uma métrica sobre \mathbb{R} .

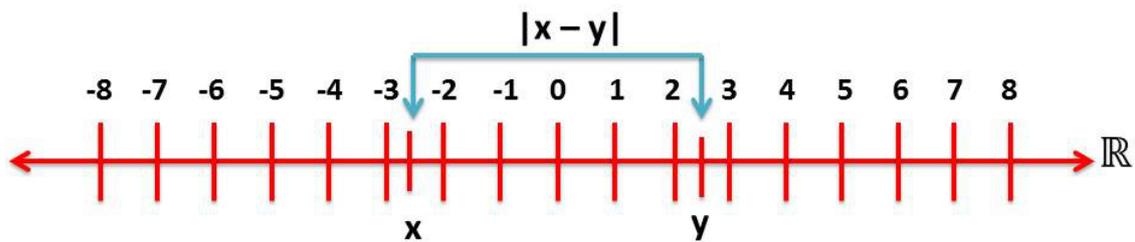


Figura 1.2: Métrica usual em \mathbb{R}

Para realizarmos a demonstração, devemos verificar se a aplicação atende condições da definição de métrica. Para isso, usaremos as propriedades de módulo² ou valor absoluto dos números reais.

1. como $|x - y| \geq 0$, então, $d(x, y) \geq 0$. Por outro lado, $|x - y| = 0 \iff x = y$, logo, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
3. $d(x, z) = |x - z| = |x + y - y - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = |x - y| + |z - y| = d(x, y) + d(z, y)$.

assim, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Portanto, (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico.

²Demonstração feita no Anexo

Exemplo 1.1. Calcule as distâncias abaixo:

(a) $d(6, 2)$

Resolução: $d(6, 2) = |6 - 2| = 4$

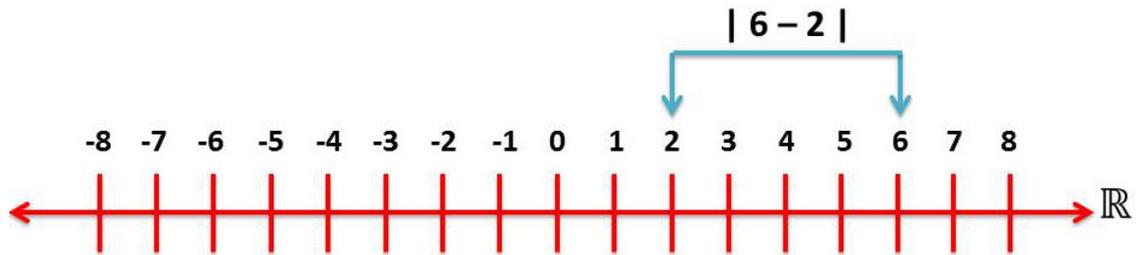


Figura 1.3: Representação gráfica da solução

(b) $d(\frac{5}{2}, -2)$

Resolução: $d(\frac{5}{2}, -2) = |\frac{5}{2} - (-2)| = \frac{9}{2}$

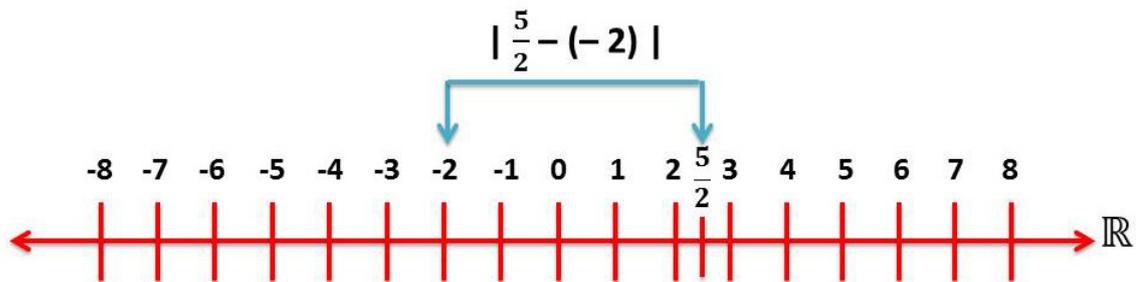


Figura 1.4: Representação gráfica da solução

1.2.2 Métrica usual em \mathbb{R}^2

Dada a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é uma métrica sobre \mathbb{R}^2 , conhecida como métrica Euclidiana sobre \mathbb{R}^2 .

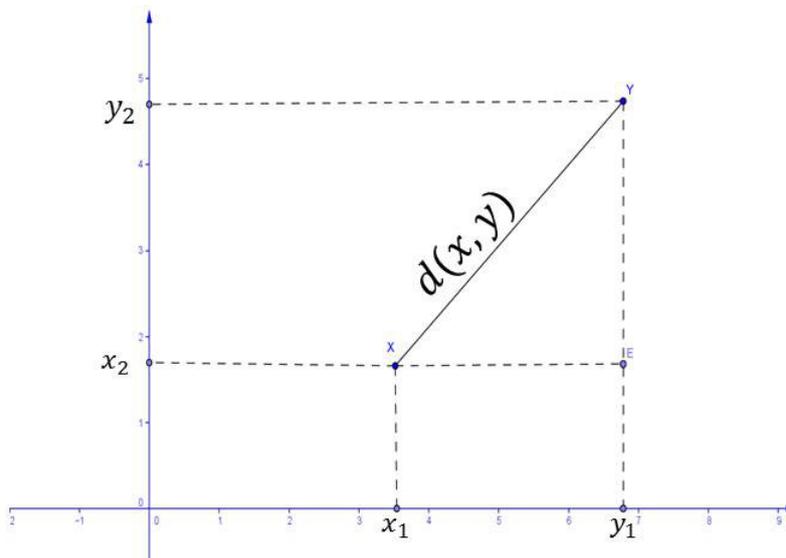


Figura 1.5: Métrica Euclidiana

Demonstração:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$

A $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \iff (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$ como $(x_1 - y_1)^2 \geq 0$ e $(x_2 - y_2)^2 \geq 0$, então, $(x_1 - y_1)^2 = 0$ e $(x_2 - y_2)^2 = 0 \iff x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0$, daí temos, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, implicando que $x = y$, Logo, $d(x, y) = 0$. Por outro lado, se $x_1 - y_1 \neq 0$ ou $x_2 - y_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq y_1$ ou $x_2 \neq y_2$, temos que a $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$

De fato: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y, x)$.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Para provarmos a desigualdade acima, faremos primeiro, a demonstração da desigualdade de Cauchy - Schwarz em \mathbb{R}^n .

Teorema 1. Seja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ números reais arbitrários então:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

Demonstração.

De fato. Consideremos a seguinte desigualdade:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff 2ab \leq a^2 + b^2, \quad (1.2)$$

válida para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$.

Fazendo - se $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, $s = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$, $a = \frac{|x_i|}{r}$ e $b = \frac{|y_i|}{s}$.

Substituindo-se em seguinte em (2.2) obtemos a seguinte desigualdade

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{r} \cdot \frac{|y_i|}{s} \leq \frac{|x_i^2|}{r^2} + \frac{|y_i^2|}{s^2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Somando - se em relação ao índice i teremos,

$$\frac{2}{r \cdot s} \sum |x_i y_i| \leq 1 + 1.$$

Decorre daí que,

$$\sum |x_i y_i| \leq r \cdot s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}. \quad \square$$

Agora demonstraremos a desigualdade triângular.

Sejam $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ pontos $\in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} [d(x, z)]^2 &= (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = (x_1 - y_1 + y_1 - z_1)^2 + (x_2 - y_2 + y_2 - z_2)^2 \\ &= [(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)]^2 + [(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)]^2 = \\ &= (x_1 - y_1)^2 + 2[(x_1 - y_1)(y_1 - z_1)] + (y_1 - z_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2[(x_2 - y_2)(y_2 - z_2)] + (y_2 - z_2)^2 = \\ &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2 \underbrace{[(x_1 - y_1)(y_1 - z_1) + (x_2 - y_2)(y_2 - z_2)]}_{(I)} + (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy - Schwarz em (I) para $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned} [d(x, z)]^2 &\leq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} [(y_1 - z_1)^2 + \\ &\quad + (y_2 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}} + (y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 = \\ &= [\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}]^2 = [d(x, y) + d(y, z)]^2 \end{aligned}$$

Daí, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Portanto, d é uma métrica em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.2. Calcule a distância entre os pontos X e Y dados abaixo:

(a) $X = (1, 2)$ e $Y = (3, 5)$

Resolução:

$$d(x, y) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Representação gráfica

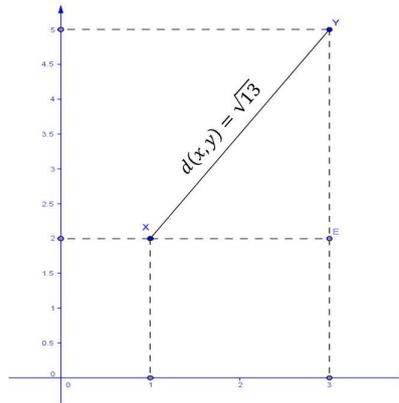


Figura 1.6: Representação gráfica da solução

(b) $X = (-1, 2)$ e $Y = (2, 6)$

Resolução:

$$d(x, y) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Representação gráfica

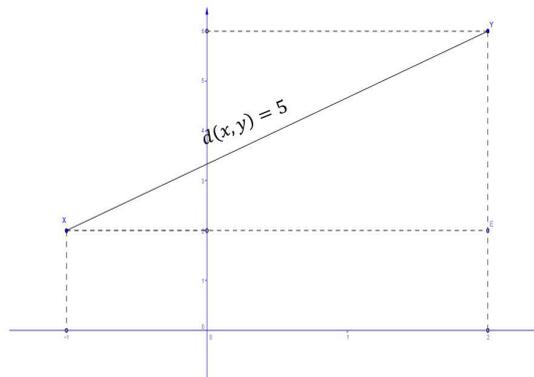


Figura 1.7: Representação gráfica da solução

1.2.3 Métrica Zero - Um

Dado M um conjunto qualquer e $d : M \times M \Rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Então, mostraremos que d assim definida é uma métrica.

Demonstração:

Por definição da aplicação, se $x = y$ temos que a distância entre x e y é igual a zero, ou seja, $d(x, y) = 0$ e se $x \neq y$ então, a distância entre x e y e y e x é igual a 1, decorrendo que $d(x, y) = d(y, x) = 1 \geq 0$. Atendendo assim, as condições (1) e (2) da definição de espaço métrico. Ademais, verificaremos a condição (3), ou seja, devemos mostra que: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in M$.

De fato:

(a) Se $x = z$, $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(b) Se $x \neq z$, então, $d(x, z) = 1$

(b.1) Se $y = x$, então, $y \neq z$. Neste caso, $d(x, z) = 1, d(x, y) = 0$ e $d(y, z) = 1$, então $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(b.2) Se $y = z$, então, $y \neq x$. Nesse caso, $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 0$, então $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(b.3) Se $y \neq x$ e $y \neq z$ então, $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 1$, logo $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$. Do exposto acima, concluímos que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in M$. Portanto, d é uma métrica em M .

Observação 2. A prova feita acima não faz referência à natureza dos elementos de M implicando com isso, que o par (M, d) será um espaço métrico independente de quem seja o conjunto M .

Exemplo 1.3. Calcule as distâncias:

(a) $d(6, 2)$

Resolução: Como $x \neq y$ então $d(6, 2) = 1$.

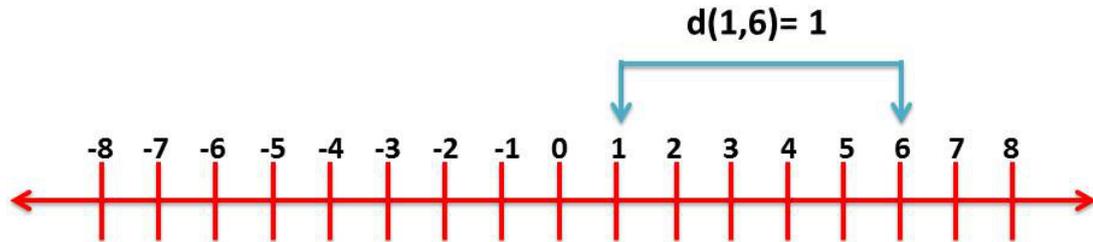


Figura 1.8: Representação gráfica da solução

(b) $d(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

Resolução: Temos que $x = y$ logo a distância, será por definição $d(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = 0$.

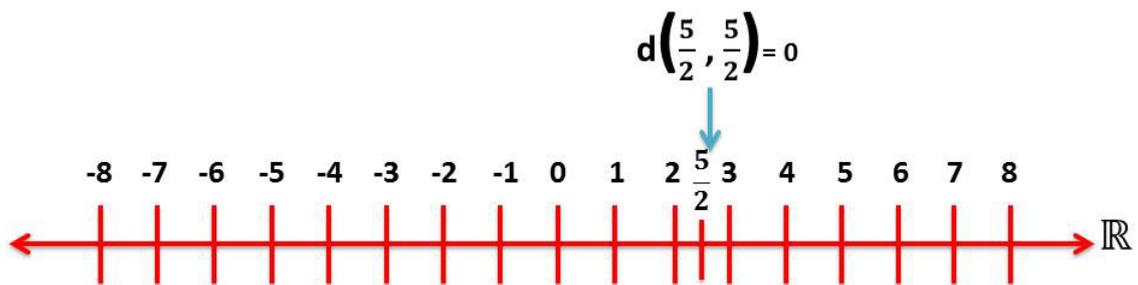


Figura 1.9: Representação gráfica da solução

1.2.4 Métrica da Soma em \mathbb{R}^2

Dada a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ onde, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, é uma métrica sobre \mathbb{R}^2 , conhecida como métrica da soma ou métrica do taxi.

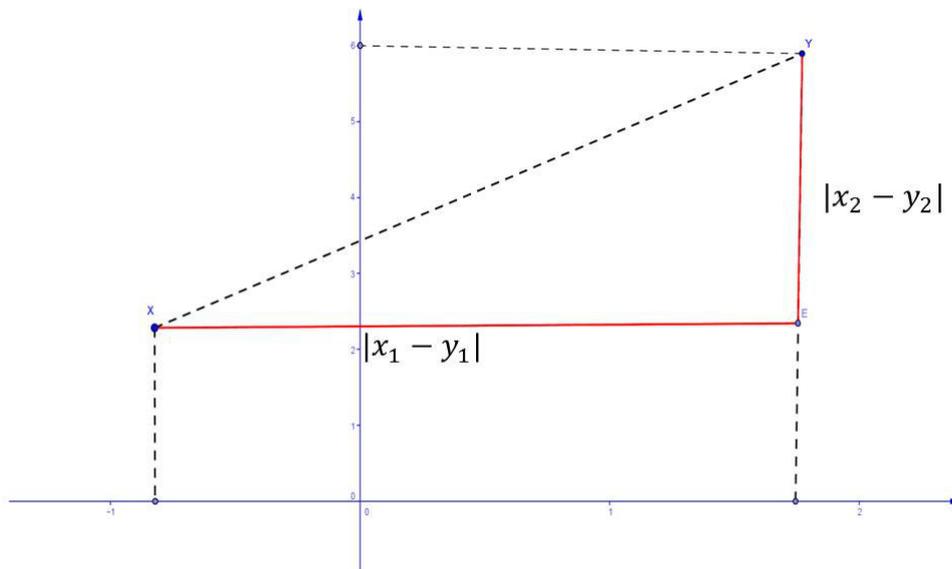


Figura 1.10: Métrica da Soma

Demonstração.

Para a demonstração, devemos verificar as três condições da definição de métrica:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

De fato: $d(x, y) = 0 \Rightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0$ e $|x_2 - y_2| = 0 \iff x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0$, ou seja, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ daí, $d(x, y) = 0$. Por outro lado, usando a definição de valor absoluto temos que: $|x_1 - y_1| \geq 0$ e $|x_2 - y_2| \geq 0$ isso implica, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

De fato: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d(y, x)$.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Sendo que $d(x, z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| = (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = d(x, y) + d(y, z)$. Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemplo 1.4. Calcule as distâncias entre os pontos dados abaixo:

(a) $x = (4, 2)$ e $y = (-3, 4)$.

Resolução: temos que a $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |4 - (-3)| + |2 - 4| = 7 + 2 = 9$.

Interpretação geométrica

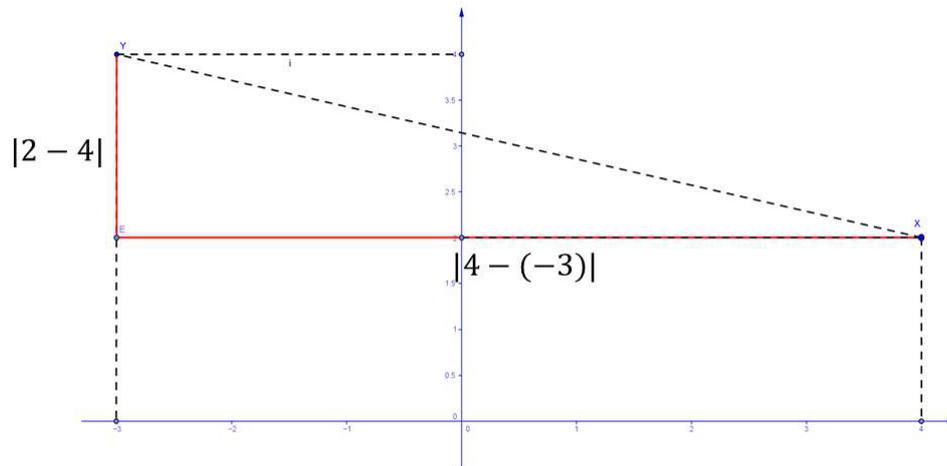


Figura 1.11: Representação gráfica da solução

(b) $x = (2, 2)$ e $y = (2, 4)$.

Resolução: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |2 - 2| + |2 - 4| = 2$.

Interpretação geométrica

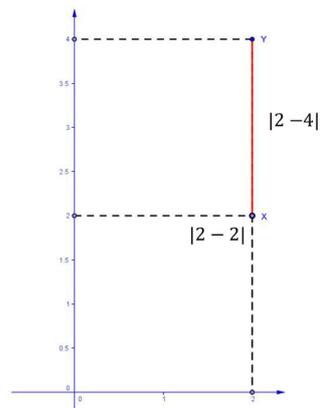


Figura 1.12: Representação gráfica da solução

1.2.5 Métrica do Máximo \mathbb{R}^2

A função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, dada por $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ onde, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é uma métrica sobre \mathbb{R}^2 .

Demonstração.

Para a demonstração, devemos verificar as três condições da definição de métrica:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

De fato: $d(x, y) = 0 \iff \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0$ e $|x_2 - y_2| = 0 \iff x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0$, ou seja, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ daí, conclui-se que, $x = y$ e $d(x, y) = 0$. Por outro lado, usando a definição de valor absoluto temos que $|x_1 - y_1| \geq 0$ e $|x_2 - y_2| \geq 0$ isso implica $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

De fato: $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d(y, x)$.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

De fato.

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, |x_2 - y_2 + y_2 - z_2|\} \\ &= \max\{|(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)|, |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)|\} \\ &\leq \max\{|(x_1 - y_1)|, |(x_2 - y_2)|\} + \max\{|(y_1 - z_1)|, |(y_2 - z_2)|\} \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Concluimos assim que, $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ é uma métrica em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.5. Calcule a distância entre os pontos dados abaixo:

(a) $x = (1, 2)$ e $y = (0, 4)$.

Resolução: temos que $d(x, y) = \max\{|1 - 0|, |2 - 4|\} = \max\{|1|, |-2|\} = 2$.

Interpretação geométrica

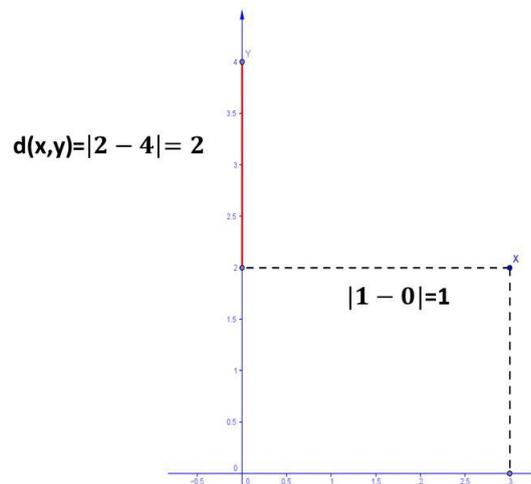


Figura 1.13: Representação gráfica da solução

(b) $x = (-1, 2)$ e $y = (2, 4)$.

Resolução: temos que $d(x, y) = \max\{|-1 - 2|, |2 - 4|\} = \max\{|-3|, |-2|\} = 3$.

Interpretação geométrica

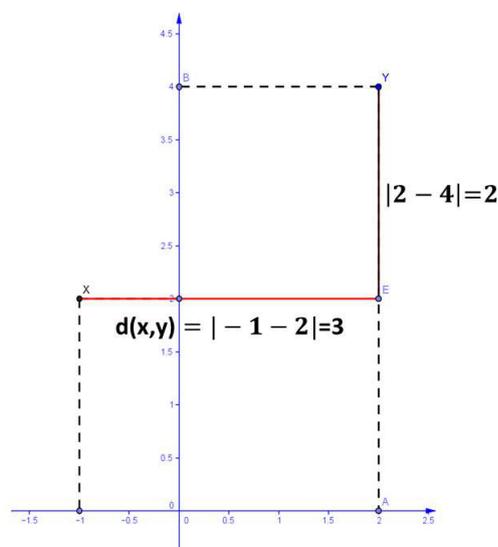


Figura 1.14: Representação gráfica da solução

2 Construção de Novos Espaços Métricos

Neste capítulo, veremos que é possível obter novos espaços métricos, a partir de espaços métricos existentes.

Seja $d : M \times M \Rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica. Mostraremos abaixo, que os itens

(a) $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ e (b) $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, são métricas sobre M .

(a) Para verificarmos que $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ é uma métrica devemos verificar as três condições da definição de espaços métricos:

(1) $d_1(x, y) \geq 0$ e $d_1(x, y) = 0 \iff x = y$.

De fato: $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \geq 0$ pois $d(x, y) \geq 0$,

como $d(x, y) = 0 \iff x = y \Rightarrow \sqrt{d(x, y)} = 0 \iff x = y \Rightarrow d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = 0 \iff x = y$.

(2) $d_1(x, y) = d_1(y, x)$.

Como $d(x, y) = d(y, x) \Rightarrow \sqrt{d(x, y)} = d_1(x, y) = \sqrt{d(y, x)} = d_1(y, x) \Rightarrow d_1(x, y) = d_1(y, x)$.

(3) $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$.

Temos que

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Rightarrow d_1(x, z) = \sqrt{d(x, z)} \leq \sqrt{d(x, y) + d(y, z)} \leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d_1(x, y) + d_1(y, z)$ daí, $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$.

Portanto, concluímos que $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ é também uma métrica em M .

Exemplo 2.1. Sabendo - se que $d(x, y)$ é a métrica usual sobre \mathbb{R}^2 , utilizando - se a métrica $d_1 = \sqrt{d(x, y)}$. calcule a distância entre os pontos dados abaixo:

(i) $x = (1, 6)$ e $y = (-2, 2)$.

Resolução: temos

$d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$, mas como $d(x, y)$ é a métrica Euclidiana, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \Rightarrow d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \\ &= \sqrt{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre os pontos será:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{\sqrt{(1 - (-2))^2 + (6 - 2)^2}} = \sqrt{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \\ &= \sqrt{\sqrt{9 + 16}} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica

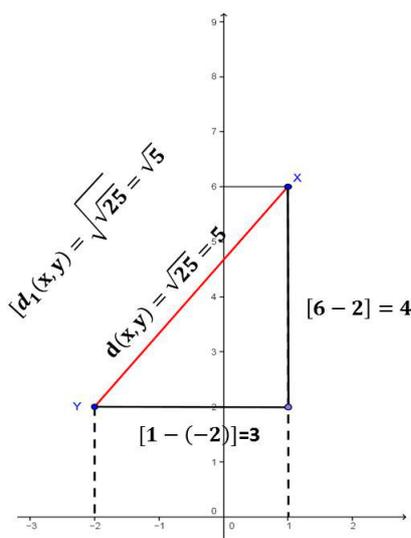


Figura 2.1: Representação gráfica da solução

(ii) $x = (-1, \sqrt{7})$ e $y = (2, 0)$.

Resolução: temos que $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$, mas como $d(x, y)$ é a métrica Euclidiana temos que $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \Rightarrow d_1(x, y) = \\ &= \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre os pontos será:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} &= \sqrt{\sqrt{(-1 - 2)^2 + (\sqrt{7} - 0)^2}} = \sqrt{\sqrt{(-3)^2 + 7}} \\ &= \sqrt{\sqrt{9 + 7}} = \sqrt{\sqrt{16}} = 2. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica

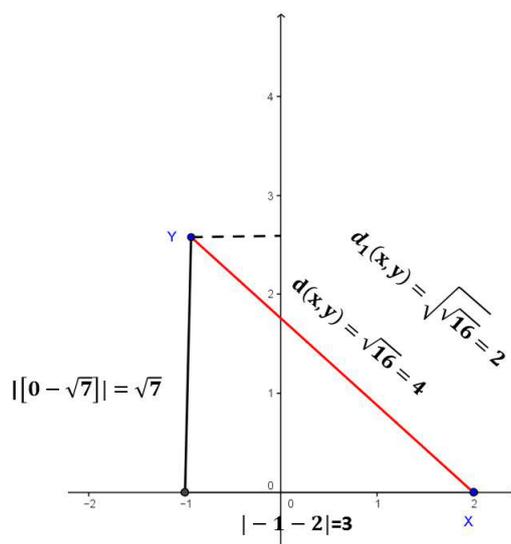


Figura 2.2: Representação gráfica da solução

(b) Verificaremos as três condições de espaço métrico para $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$:

(1) $d_2(x, y) \geq 0$ e $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

Temos que, $d_2(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$. Daí, segue que $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

(2) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

Como $d(x, y) = d(y, x) \Rightarrow d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d_2(y, x) \Rightarrow d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

(3) $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.

De fato, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pois, $d(x, y)$ é uma métrica. Para simplificarmos o processo algébrico faremos $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ e $c = d(x, z)$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} &= \frac{a(1+b) + b(1+a)}{(1+a)(1+b)} = \frac{a+ab+ba+b}{1+a+b+ab} \\ &\geq \frac{a+b+ab}{1+a+b+ab} = \frac{1+a+b+ab-1}{1+a+b+ab} \\ &= 1 - \frac{1}{1+a+b+ab}. \end{aligned}$$

Observamos que $c \leq a + b$, pois $d(x, y)$ é uma métrica. Então, $1 + a + b + ab \geq 1 + c + ab \geq 1 + c$.

Daí, segue que:

$$\frac{1}{1+a+b+ab} \leq \frac{1}{1+c} \Rightarrow -\frac{1}{1+a+b+ab} \geq -\frac{1}{1+c} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+a+b+ab} \geq 1 - \frac{1}{1+c}.$$

logo,

$$\frac{\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1+d(y, z)}}{1+d(x, z)} = \frac{\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}}{1+d(x, z)} \geq 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{1+c-1}{1+c} = \frac{c}{1+c} = \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)}.$$

Concluindo assim, a desigualdade desejada. Logo, $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$, é uma métrica sobre M .

Exemplo 2.2. Sabendo - se que, $d(x, y)$ é a métrica da soma sobre \mathbb{R}^2 , utilizando - se a métrica $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Calcule a distância entre os pontos dados abaixo:

(i) $x = (0, 3)$ e $y = (2, 4)$.

Resolução: Sendo $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, mas como $d(x, y)$ é a métrica da soma temos que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)| \Rightarrow d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \\ &= \frac{|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|}{1 + (|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|)}. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre os pontos será:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \frac{|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|}{1 + (|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|)} = \\ &= \frac{|(0 - 2)| + |(3 - 4)|}{1 + (|(0 - 2)| + |(3 - 4)|)} = \frac{|-2| + |-1|}{1 + (|-2| + |-1|)} = \\ &= \frac{3}{1 + 3} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

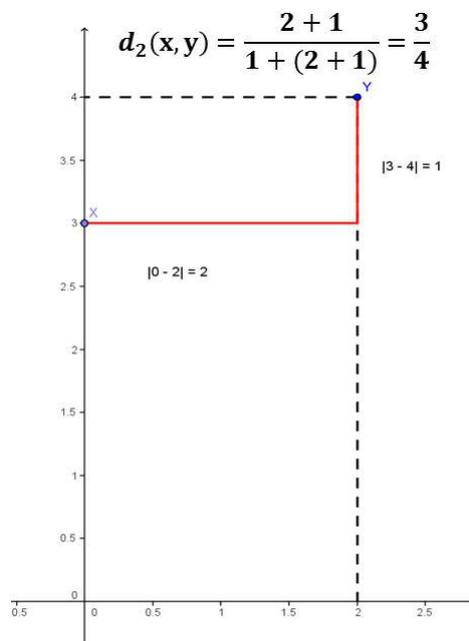


Figura 2.3: Representação gráfica da solução

(ii) $x = (1, -2)$ e $y = (3, 3)$.

Resolução: Sendo $d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, mas como $d(x, y)$ é a métrica da soma temos que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)| \Rightarrow d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \\ &= \frac{|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|}{1 + (|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|)}. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre os pontos será:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \frac{|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|}{1 + (|(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|)} = \\ &= \frac{|(1 - 3)| + |(-2 - 3)|}{1 + (|(1 - 3)| + |(-2 - 3)|)} = \frac{|-2| + |-5|}{1 + (|-2| + |-5|)} = \frac{7}{1 + 7} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

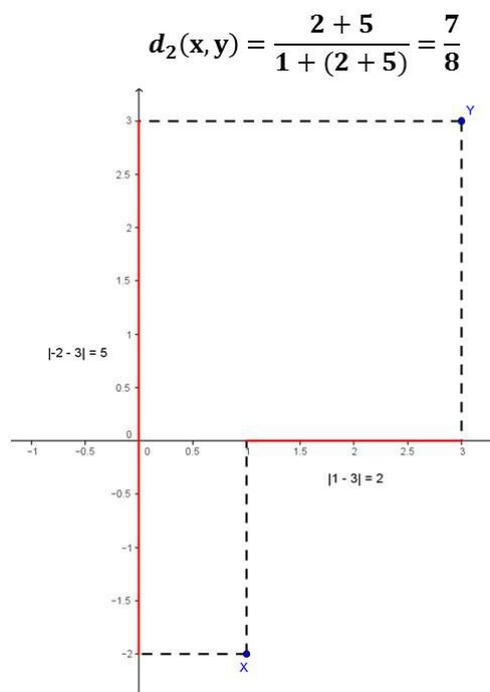


Figura 2.4: Representação gráfica da solução

3 Atividades de Aplicação

3.1 Aplicação 1

No problema abaixo, veremos que não faz sentido perguntar, em busca de uma resposta específica, qual é a distância entre dois pontos dados se não for especificado qual é a métrica utilizada, como corriqueiramente acontece na maioria dos livros didáticos adotados na Educação Básica.

Um professor faz o seguinte questionamento aos seus discentes: Dados os pontos $X = (2, 1)$ e $Y = (5, 6)$. Qual é a distância entre eles?

Este é um problema típico enfrentados pelos discentes do Ensino Básico. Utilizando-se algumas métricas definidas sobre \mathbb{R}^2 .

(a) Utilizando a métrica usual ou Euclidiana, cuja a métrica é

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Segue - se que:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre $X = (2, 1)$ e $Y = (5, 6)$ é igual a $\sqrt{34}$.

(b) Utilizando a métrica da Soma, cuja a métrica é

$$d(x, y) = |(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)|.$$

Temos:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |(x_1 - y_1)| + |(x_2 - y_2)| = |(2 - 5)| + |(1 - 6)| = \\ &= |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8. \end{aligned}$$

então, a distância entre X e Y é igual a 8.

(c) Com a métrica Zero Um, cuja a métrica é:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Observa-se que os pontos X e Y têm coordenadas diferentes. Logo, concluímos que $X \neq Y$.

Portanto, $d(x, y) = 1$.

(d) Com a métrica do máximo, cuja a métrica é

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Temos:

$$d(x, y) = \max\{|2 - 5|, |1 - 6|\} = \max\{|-3|, |-5|\} = \max\{3, 5\} = 5. \text{ Portanto, } d(x, y) = 5.$$

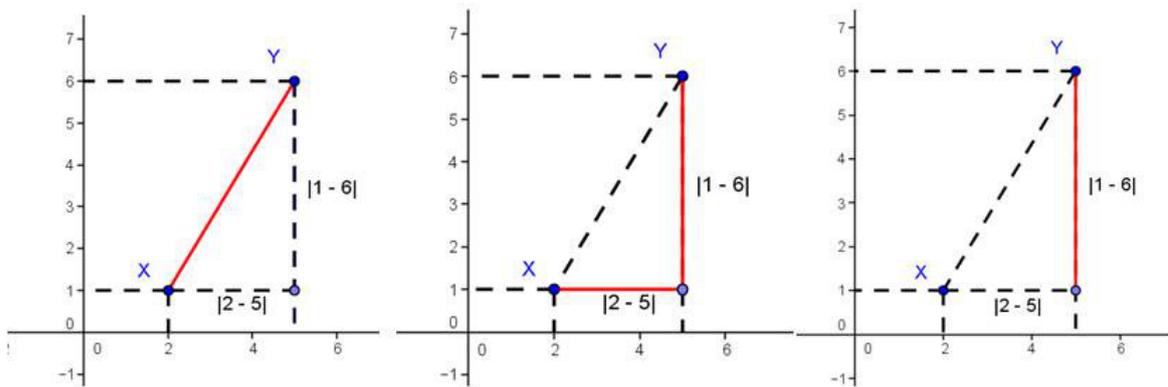


Figura 3.1: Representação gráfica da solução

3.2 Aplicação 2

Usando as métricas: Euclidiana, Métrica do Máximo, Métrica da Soma e a Métrica Zero-um, identifique os pontos de \mathbb{R}^2 , tais que sua distância até a origem seja igual a 2.

Resolução

Para a solução do problema, considerar-se-a os pontos $O = (0, 0)$ e $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Métrica Euclidiana Para esta métrica temos:

$$d(O, X) = 2 \iff \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = 2 \iff x_1^2 + x_2^2 = 4.$$

A equação $x_1^2 + x_2^2 = 4$, representa uma circunferência de centro na origem do sistema cartesiano e cujo raio mede 2.

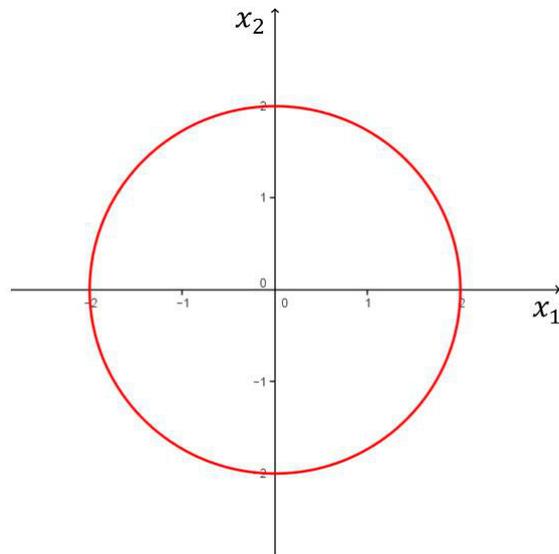


Figura 3.2: Representação gráfica da solução

Métrica do Máximo Para esta métrica temos:

$$d(O, X) = 2 \iff \max(|x_1 - 0|, |x_2 - 0|) = 2 \iff \max(|x_1|, |x_2|) = 2.$$

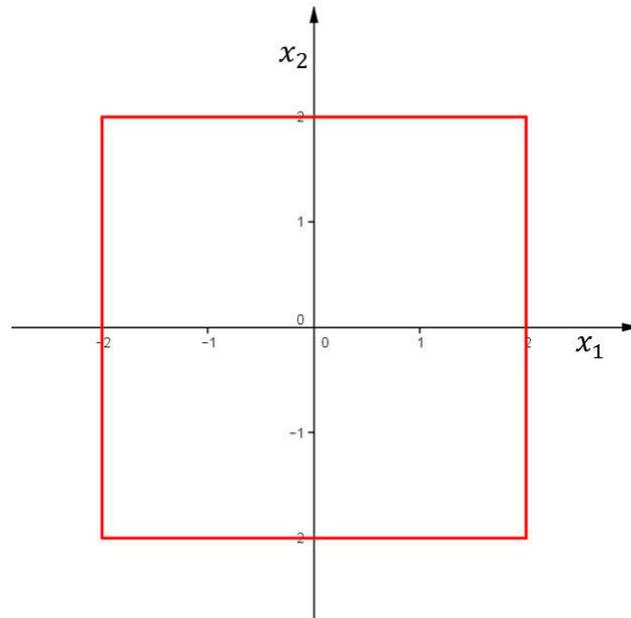


Figura 3.3: Representação gráfica da solução

Métrica da Soma Para esta métrica, temos:

$$d(O, X) = 2 \iff |x_1 - 0| + |x_2 - 0| = 2 \iff |x_1| + |x_2| = 2.$$

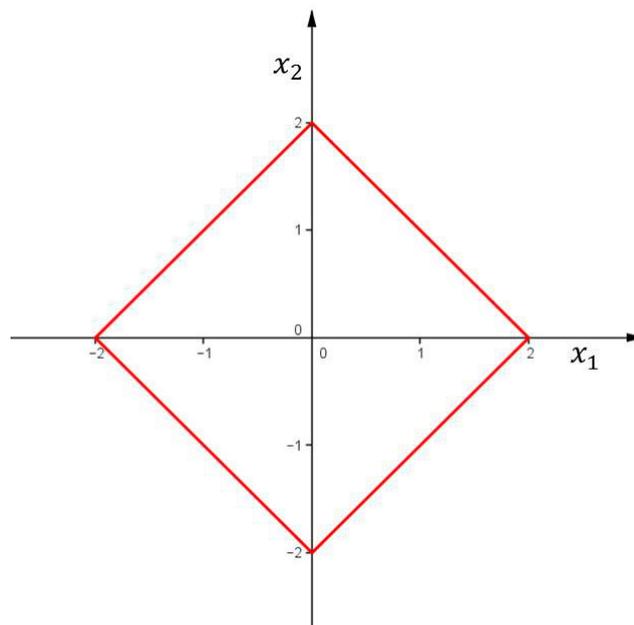


Figura 3.4: Representação gráfica da solução

Métrica Zero-Um Para esta métrica, não existem pontos $\in \mathbb{R}^2$ para os quais a distância até a origem seja igual a 2.

3.3 Aplicação 3

Utilizando - se as métricas: Euclidiana, Métrica do Máximo, Métrica da Soma e Métrica Zero um, identifique os pontos de \mathbb{R}^2 , tais que sua distância até o ponto $A = (1, 2)$ seja menor que 2.

Resolução

Para a solução do problema, considerar-se-a os pontos $A = (1, 2)$ e $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Métrica Euclidiana .

Para esta métrica, temos:

$$d(A, X) < 2 \iff \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2} < 2 \iff (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 < 4.$$

A inequação $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 < 4$, representa os pontos interiores a uma circunferência de centro no ponto $A = (1, 2)$ e cujo raio mede 2.

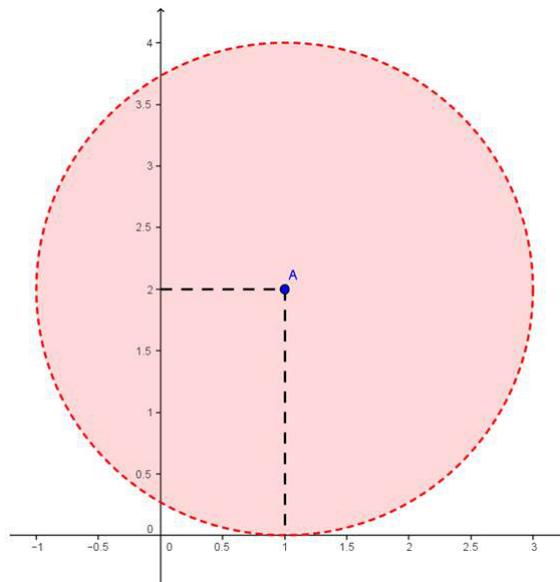


Figura 3.5: Representação gráfica da solução

Métrica do Máximo .

Para esta métrica, temos:

$$d(A, X) < 2 \iff \max(|x_1 - 1|, |x_2 - 2|) < 2.$$

Como o valor máximo entre $|x_1 - 1|$ e $|x_2 - 2|$ deve ser menor que dois temos:

$|x_1 - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x_1 - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x_1 < 3$ e de $|x_2 - 2| < 2$ segue - se que $0 < x_2 < 4$.

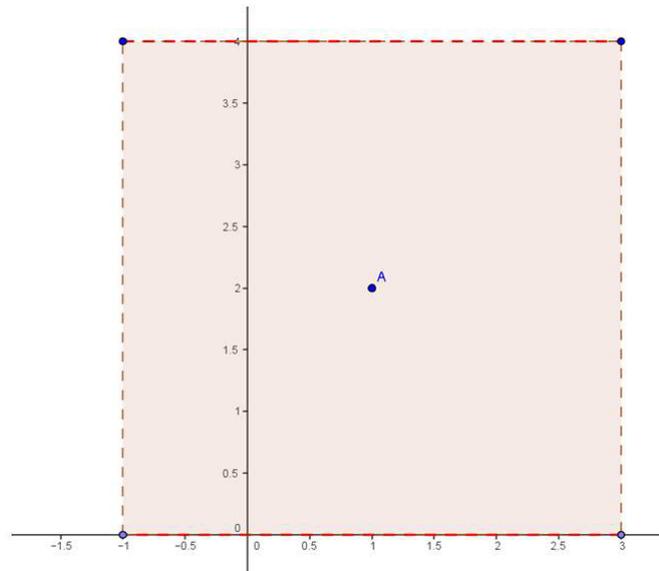


Figura 3.6: Representação gráfica da solução

Métrica da Soma .

Para esta métrica, temos:

$d(A, X) < 2 \iff |x_1 - 1| + |x_2 - 2| < 2$ desta desigualdade segue - se que:

$$x_1 - 1 \geq 0 \text{ e } \begin{cases} x_2 - 2 \geq 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases}$$

ou

$$x_1 - 1 < 0 \text{ e } \begin{cases} x_2 - 2 \geq 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases}$$

utilizando-se as desigualdades acima, temos que:

$|x_1 - 1| + |x_2 - 2| < 2 \Rightarrow x_1 + x_2 < 5$ ou $x_1 - x_2 < 2$ ou $-x_1 + x_2 < 3$ ou $x_1 + x_2 > 1$.

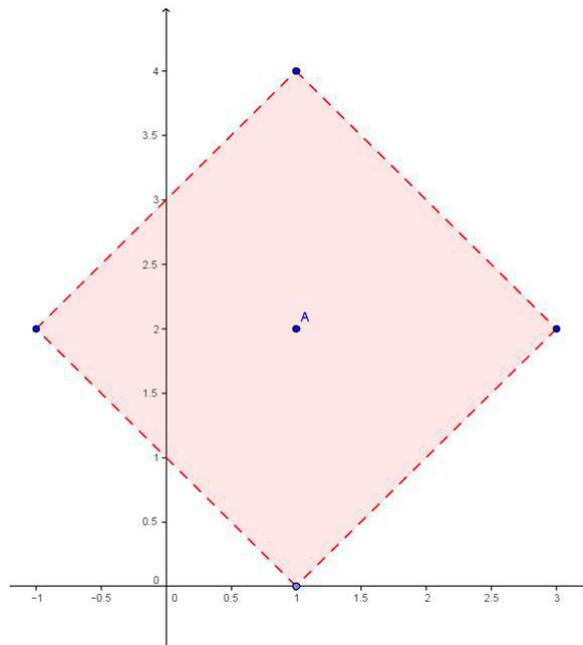


Figura 3.7: Representação gráfica da solução

Métrica Zero-Um .

Para esta métrica, a distância entre qualquer ponto $\in \mathbb{R}^2$ e o ponto $A = (1, 2)$ é sempre menor que 2.

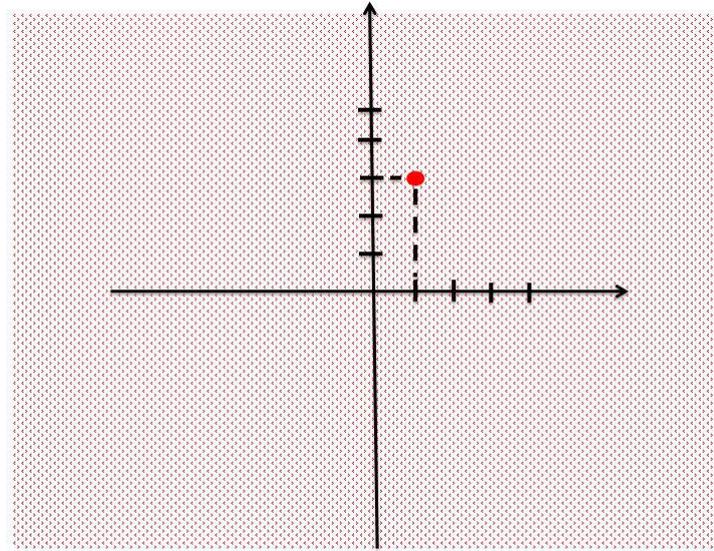


Figura 3.8: Representação gráfica da solução

Com a realização destas atividades, percebemos que se desejarmos apenas uma resposta a um determinado questionamento, devemos oferecer informações precisas, bem como sua delimitação.

4 Conclusão

Graças a habilidade adquirida pelo homem na resolução de problemas envolvendo o cálculo de distâncias, somos capazes de realizarmos, com eficácia e eficiência, a construção de pontes e de nossas habitações, a demarcação de terras e o cálculo de distâncias inacessíveis, etc.

Levando em consideração os recentes trabalhos científicos de matemática, desenvolvidos para a Educação Básica sobre distâncias, percebe-se apenas uma visão unilateral sobre a mesma, a métrica usual ou Euclidiana.

Contrapondo-se a essa prática docente, demonstrou-se que através do estudo sobre Espaços Métricos foi possível a utilização das métricas e suas respectivas representações gráficas: Usual em \mathbb{R} ; Usual em \mathbb{R}^2 ; Métrica Zero-Um; Métrica da Soma em \mathbb{R}^2 e Métrica do Máximo em \mathbb{R}^2 demonstrando assim, diferentes formas para a realização do cálculo de distâncias.

Propiciando aos discente e docentes um novo olhar sobre o cálculo de distâncias, com o propósito de subsidiar todos aqueles que desejarem conhecer ou aprofundar-se no estudo sobre a temática desenvolvida.

Anexo

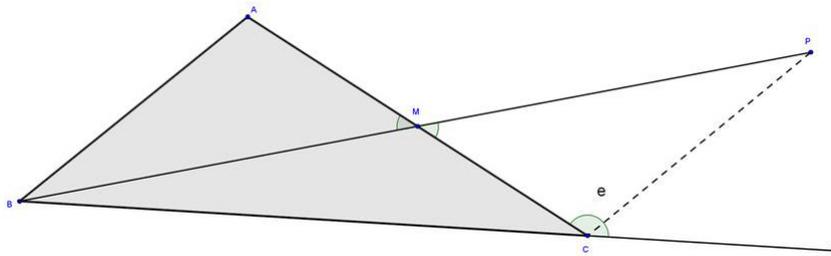
5 Desigualdade Triangular

Para realizarmos a demonstração da desigualdade triangular, demonstraremos os três teoremas seguintes, sendo que a mesma também pode ser encontrada em [8].

(1) Teorema do ângulo externo

O teorema do ângulo externo garante que em qualquer triângulo, a medida do ângulo externo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: consideremos o triângulo (ABC) abaixo



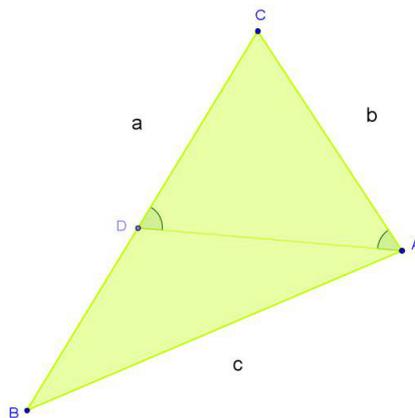
Seja M o ponto médio de \overline{AC} e P pertencente a semi-reta \overrightarrow{BM} tal que $\overline{BM} \equiv \overline{MP}$. Pela caso de congruência **LAL** $\triangle BAM \equiv \triangle PMC$ e portanto $\widehat{BAM} \equiv \widehat{PCM}$, logo $\widehat{e} > \widehat{A}$.

Analogamente, tomando - se o ponto médio de \overline{BC} e usando ângulos opostos pelo vértice, $\widehat{e} > \widehat{B}$.

(2) Ao maior lado de um triângulo opõe-se o maior ângulo

O teorema afirma que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado. $a > b \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$

Demonstração: consideremos o triângulo (ABC) abaixo:



Seja D em \overline{BC} tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$. Como $|\overline{BC}| > |\overline{AC}|$ temos que D é interno a \widehat{CAB} , o que implica, pelo teorema do ângulo exterior, que $\widehat{CAB} > \widehat{CAD}$.

Como $\triangle CAD$ é isósceles por construção, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CDA}$. Mas \widehat{CAD} é externo ao triângulo $\triangle ABD$, logo $\widehat{CDA} > \widehat{ABD} = \widehat{ABC}$. Daí segue-se que $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$.

(3) Ao maior ângulo de um triângulo opõe-se o maior lado

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior dos ângulos está oposto ao maior lado.

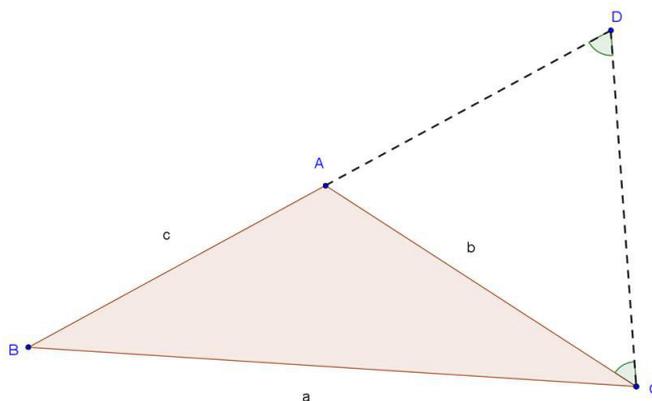
$$\widehat{A} > \widehat{B} \Rightarrow a > b.$$

Prova:

Ou $|\overline{BC}| < |\overline{AC}|$, ou $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou $|\overline{BC}| > |\overline{AC}|$. Se $|\overline{BC}| < |\overline{AC}|$, pelo teorema anterior $\widehat{A} < \widehat{C}$, absurdo. Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ então pelo teorema do triângulo isósceles, $\widehat{A} = \widehat{C}$, absurdo. Logo $\overline{BC} = a > \overline{AC} = b$.

DESIGUALDADE TRIANGULAR

Provaremos uma das mais importantes relações matemática, conhecida como desigualdade triangular; a qual afirma: em todo triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois. $a < b + c$. Prova: Consideremos o triângulo abaixo.



Consideremos um ponto D na semi-reta oposta à semi-reta \overrightarrow{AB} tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$. Logo, $|\overline{BD}| = |\overline{AB}| + |\overline{AD}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|$. Como $\triangle DAC$ é isósceles, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ACD}$ e como \widehat{A} é interno ao ângulo \widehat{BCD} temos que $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$. Logo $\widehat{BCD} > \widehat{ADC}$.

Do teorema anterior, $|\overline{BC}| < |\overline{BD}|$ e portanto $|\overline{BC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BD}|$. com isso provamos que $a < b + c$.

De maneira análoga provamos que:

$$b < a + c \text{ e } c < a + b$$

Das desigualdades acima temos:

$$b - c < a \text{ e } c - b < a \Rightarrow |b - c| < a < b + c$$

6 Módulo de um número real

A definição e demonstração das propriedades de módulo de um número real também pode ser encontrada em [3].

Definição 2. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o módulo (ou valor absoluto) de x , e indicamos por $|x|$, como segue:

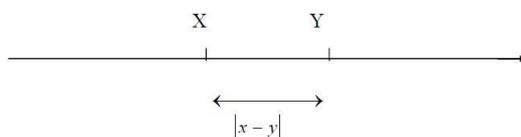
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo, a definição de módulo poderia ser assim:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto de um número x é, na reta, a distância entre o ponto x e a origem. Isto é, $|x|$ corresponde a distância do ponto x ao ponto 0.

Se os números reais x e y estão associados aos pontos X e Y na reta real, ou seja, são as coordenadas de X e Y , então $|x - y|$ corresponde à distância do ponto X ao ponto Y .



Esta interpretação como distância será de grande utilidade para que se possa enxergar intuitivamente o significado de algumas questões envolvendo módulo.

Observações

1. Temos da definição que $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Decorre também da definição que $|x|$ é o maior dos números x e $-x$, o que é indicado como $x = \max\{-x, x\}$. Portanto, $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, o que equivale a $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriedades do módulo

Dados $a; b \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1. $|a| \geq 0$; $\forall a \in \mathbb{R}$ e ainda $|a| = 0 \iff 0$.
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$
3. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a| < b \iff -b < a < b$
5. $|a| > b \iff a > b$ ou $a < -b$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

Demonstrações

1. Dado o ponto $a \in \mathbb{R}$, pelo axioma da ordem, temos dois casos (excludentes):

Caso 1: $a = 0 \iff a$ coincide com a origem \iff a distância de a até a origem é nula $\iff |a| = 0$.

Caso 2: $a \neq 0 \iff a$ está à direita ou à esquerda da origem $O \iff$ a distância de a à O é positiva $\iff |a| > 0$.
2. Temos tres casos a considerar.
 - i) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos $a \cdot b \geq 0$, portanto, $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.
 - ii) Se $a < 0$ e $b < 0$, temos $a \cdot b > 0$, e portanto, $|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.
 - iii) Se $a \geq 0$ e $b < 0$, temos $a \cdot b \leq 0$, e portanto, $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

Observações

Se já são conhecidas as propriedades das raízes podemos demonstrar, mais diretamente, como a seguir:

$$|a \cdot b| = \sqrt{(a \cdot b)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = a^2 \cdot b^2 = |a| \cdot |b|.$$

3. Usando o fato que $\frac{1}{|b|} = \left| \frac{1}{b} \right|$ (que pode ser facilmente demonstrado separando-se em dois casos: $y > 0$ e $y < 0$) temos:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| a \cdot \frac{1}{b} \right| = |a| \cdot \left| \frac{1}{b} \right| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

4. (1) Usando que $|a| = \max\{-a, a\}$, temos que

$$-a \leq |a| < b \Rightarrow a > -b \text{ (I)}$$

$$a \leq |a| < b \Rightarrow a < b \text{ (II)}$$

De (I) e (II) concluimos $-b < a < b$.

(2) Mostraremos que $-b < a < b \Rightarrow |a| < b$

i) Se $a \geq 0$ então $|a| = a$. Por hipótese $a < b$, logo $|a| < b$.

ii) Se $a < 0$ então $|a| = -a$. Por hipótese $-b < a$, ou seja, $-a < b$. Assim, $|a| < b$.

5. 1) Mostraremos que $|a| > b \Rightarrow a < -b$ ou $a > b$.

i) Se $a \geq 0$ então $|a| = a$ e como $|a| > b$, temos $a > b$.

ii) Se $a < 0$ então, $-a = |a| > b$, isto é, $-a > b$, ou seja, $a < -b$.

2) Mostraremos que $a < -b$ ou $a > b \Rightarrow |a| > b$

Usando que $|a| = \max\{-a, a\}$, temos que

$$b < a \leq |a| \Rightarrow |a| > b \text{ ou } b < -a \leq |a| \Rightarrow |a| > b.$$

6. Temos três casos a considerar.

i) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ temos $a + b \geq 0$ e, portanto,

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

ii) Se $a < 0$ e $b < 0$ temos $a + b < 0$ e, portanto,

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|$$

iii) Se $a \geq 0$ e $b < 0$, temos

$$b < -b = |b|, -a \leq a = |a| \text{ e } a + b \geq 0 \text{ ou } a + b < 0$$

Daí,

$$a + b \geq 0, \text{ então } |a + b| = a + b < a + (-b) = |a| + |b|.$$

e

$$a + b < 0, \text{ então } |a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Portanto, em qualquer dos casos $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Referências

- [1] BECHARA, E. *Dicionário escolar da Academia Brasileira de Letras: língua portuguesa*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2011.
- [2] BRASIL, M. Secretaria de educação fundamental. parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / secretaria de educação fundamental. MEC/SEF, Brasília, 2002.
- [3] CATTAI, A. P. *Análise real*. Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Bahia, 2009. Disponível em: <<http://cattai.mat.br>>.
- [4] DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia*. São Paulo: Atual, 1982.
- [5] FUZZO REGIS ALESSANDRO END REZENDE END SANTOS, T. S. d. Geometria do táxi: A menor distância entre dois pontos nem sempre é como pensamos. Outubro 2010. Disponível em: <<http://www.fecilcam.br/nupem>>. Acesso em: 21 de Dezembro. 2015.
- [6] GONÇALVES, M. B.; GONÇALVES, D. *Elementos de análise*. Florianópolis: UFSC, 2009.
- [7] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001.
- [8] HOLANDA, A. J. M. Os mistérios da mais bela forma geométrica: o triângulo. 2013.
- [9] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.
- [10] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [11] MARCON, D. Espaços métricos. Florianópolis, p. 49, Dezembro 2000. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal de Santa Catarina.

-
- [12] SILVA, G. L. da. A métrica divina. Março 2006. Disponível em: <<http://w3.dmat.ufr.br/gentil/images/stories/Artigos/aquiles.pdf>>. Acesso em: 02 de Novembro. 2015.
- [13] SILVA, G. L. da. *Espaços Métricos (com aplicações)*. Boa Vista: EDITORA KIRON, 2013.
- [14] SEOLIN, M. C.; ANDRADE, L. K. N. de. A utilização do geogebra como recurso facilitador para o ensino da geometria plana. in: O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense. v. 1, p. 1 – 30, 2010.
- [15] TOLENTINO, M.; ROCHA-FILHO, R. O átomo e a tecnologia. *Química Nova na Escola*, v. 1, n. 3, Maio 1996.