



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT**

Marcos Assumpção Martins

O gráfico dos sons

Rio de Janeiro

2014

Marcos Assumpção Martins

O gráfico dos sons

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.^a Jeanne Denise Bezerra de Barros

Coorientadora: Prof.^a Marilda Duboc

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S386 Martins, Marcos Assumpção.
O gráfico dos sons / Marcos Assumpção. – 2014.
80 f. : il.
Orientador: Jeanne Denise Bezerra de Barros.
Coorientador: Marilda Duboc .
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Matemática – Música – Teses. 2. Funções (Matemática) –
Estudo e ensino. I. Barros, Jeanne. II. Duboc, Marilda. III.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de
Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51:78

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Marcos Assumpção Martins
Assinatura

25/4/2014
Data

Marcos Assumpção Martins

O gráfico dos sons

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

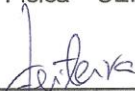
Aprovada em 25 de abril de 2014.

Banca Examinadora:


Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ


Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ


Prof. Dr. Maria Lúcia Netto Grillo
Instituto de Física – UERJ


Prof. Dr. José Flávio Silveira Feiteira
Pólo Universitário de Volta Redonda – UFF

Rio de Janeiro

2014

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais (heróis), “Bety” e Marcos, por terem me dado oportunidade de ter e conquistar os meus sonhos, pois sem eles não teria concentração, tranquilidade, sustento e apoio para começar a trilhar a longa estrada na qual estou hoje.

À minha esposa maravilhosa, Aline, que aceitou e entendeu a omissão que um curso de mestrado acumulado à rotina de trabalho às vezes exige, até mesmo enquanto grávida. Sem ela não teria, inclusive, realizado o exame de ingresso no PROFMAT, fora todo o suporte incomensurável que me dá diariamente.

Ao meu primeiro filho, Arthur, que mal chegou ao mundo, dias atrás, e já é e sempre será um dos grandes norteadores da minha vida, junto a toda a minha família.

Aos saudosos ausentes, que por escolha divina, não puderam compartilhar carnalmente de todo o processo precedente e de pesquisa necessário para a realização deste trabalho.

Aos amigos, pela contribuição, incentivo e toda sustentação psicológica necessária para que se consiga seguir adiante num curso de Mestrado em Matemática, principalmente Antônio Andrade, por ter assumido sem custos a correção de boa parte de minhas provas, facilitando a realização deste trabalho, Emanuel Verçosa, pelas discussões históricas e pelo apoio rotineiro e aos meus amigos de curso Wesley Machado, Luciano e Clarissa Melo, Gabriela Maretti e José Travassos por terem sido meus companheiros indispensáveis no decorrer deste processo, dentre outros nunca menos importantes e que sempre me incentivaram e aconselharam.

Aos professores, que nos disponibilizaram em seus melhores e piores momentos, conteúdos, conhecimentos e experiências indispensáveis no decorrer deste curso e da realização deste trabalho, principalmente à minha orientadora Jeanne Barros que sempre esteve ao meu lado, paciente, amiga e conselheira, desde o dia em que revelei minha vontade em realizar este trabalho e à minha coorientadora Marilda Duboc, que me acolheu e ajudou com suas críticas diretas e pertinentes.

A Deus, por ter sido o grande responsável por tudo citado anteriormente em conjunto.

RESUMO

MARTINS, M. A. *O gráfico dos sons*. 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Este trabalho apresenta uma proposta de aula diferenciada baseada na análise de espectros sonoros, com o intuito de estudar os gráficos de funções, sobretudo trigonométricas. Após breve discussão histórica sobre estudos e pesquisas das relações entre Matemática e Música, em sua introdução, propõe-se um estudo básico sobre os principais métodos de análise destes espectros. Entre tais métodos - o banco de filtros harmônicos (Vocoder de fase) e o método de rastreamento de frequência (mq) - também são úteis para síntese de sinais sonoros monofônicos, sendo baseados no modelo de somas de senóides e muito dependentes das Transformadas de Fourier implementadas no formato digital de um computador. Este estudo permite que o leitor tenha uma noção das principais técnicas e seus principais métodos, de modo que possa decidir sobre a sua aplicação em salas de aula dos mais variados níveis de discernimento. Ele, também, tem por objetivo apresentar as aplicações matemáticas nesse processo, principalmente o emprego de séries de Fourier. Num segundo momento, mais importante, temos uma apresentação da proposta pedagógica do trabalho: o estudo de gráficos produzidos em sala de aula, através de sons emitidos por alunos voluntários ou gravações pré-existentes. A aplicação da atividade é norteada a buscar uma gravação sonora feita em sala, preferencialmente por alunos, gerando seu gráfico, possibilitando explorar características, tais como máximos e mínimos e formatos desses espectros. De posse disso, cada professor terá em mãos uma gama maior de ferramentas para explorar diversos assuntos dentro da Matemática, bem como entender, conhecer e aproximar-se um pouco mais da Música.

Palavras-chave: Matemática. Música. Espectros sonoros. Gráficos de funções. Análise.

ABSTRACT

MARTINS, M. A. *The graph of the sounds*. 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

This paper presents a proposal for a more differentiated lesson based on spectral sound analysis with the intention of studying graphs of functions, especially trigonometric functions. After a brief discussion of historical studies and research of the relationship between mathematics and music in his introduction, it is proposed a basic study of the main methods of analysis of these spectra. Such methods - Bank of harmonic filters (Phase Vocoder) and the method of tracking frequency (mq) - are also useful for the synthesis of monophonic audio signals, being based on the sums of sinusoids model and very dependent of Fourier Transforms implemented in a format digital of a computer. This study allows the reader to get a sense of the main techniques and their main methods so that can decide your application in classrooms of various levels of discernment. This also aims to present mathematical applications in this process, especially Fourier series. In the secondly moment, more importantly, we have a presentation of the proposed pedagogical work: the study of graphs produced in classroom for the sounds emitted by volunteer students or pre-existing recordings. The implementation of the activity is guided to seek a sound recording made in room, preferably by students, creating your chart in order to be able to explore features such as periods of maximum and minimum and shapes of these spectra. Having this, each teacher will have in hand a wider range of tools to explore various subjects in mathematics, as well as understand, know and approaching a little more music.

Keywords: Mathematics. Music. Sonic spectra. Graphs of functions; Analysis.

Sumário

	INTRODUÇÃO	13
	DEPOIMENTO	16
1	O SOM E SUA REPRESENTAÇÃO DIGITAL	17
1.1	Os sinais	18
1.1.1	<u>Representação dos sinais</u>	19
1.1.1.1	Representações Temporais.....	19
1.1.1.2	Representações espectrais	21
1.1.1.3	Representações temporais-frequenciais	22
1.1.2	<u>Métodos de transformação (conversão)</u>	23
1.1.2.1	Transformada de Fourier	24
1.1.2.2	Transformada Wavelet	27
1.1.3	<u>Métodos de análise / síntese</u>	29
1.1.3.1	Análise/Síntese do Banco de Filtro Harmônico (Vocoder de fase)	30
1.1.3.2	Desvio de frequência e “desarmonicidade”	31
1.1.3.3	Método de análise de filtro heteródino.....	33
1.1.3.4	Funções janela	34
1.1.3.5	Limites de análise harmônica	36
1.1.3.6	Síntese das amplitudes harmônicas e desvios de frequência	38
1.1.3.7	Reconstrução de sinais (ressíntese) e do filtro passa-banda (“ <i>equivalent bank</i> ”)	39
1.1.3.8	Implementação do sinal amostrado	41
1.1.3.9	Passo de análise	42
1.1.3.10	Síntese de Passo	46
1.1.3.11	Amplitudes constantes por partes e frequências	48
1.1.3.12	Amplitude linear por partes e interpolação de frequências	48
1.1.3.13	Interpolação quadrática de fases por partes.....	49
1.1.3.14	Interpolação cúbica de fases por partes	49
1.1.3.15	Método de rastreamento de frequência espectral	52
1.1.3.16	Análise do controle de frequência	53
1.1.3.17	Algoritmo de rastreamento de frequências	56
1.1.3.18	Detecção da frequência fundamental	60
2	O GRÁFICO DOS SONS NA SALA DE AULA	63
2.1	Música na aula de Matemática	63

2.2	Proposta de atividades para sala de aula	64
2.2.1	<u>Análise do som produzido por um aluno</u>	64
2.2.1.1	O programa Audacity.....	66
2.2.1.2	Roteiro da atividade.....	66
2.2.1.3	Atividade sugerida	68
2.2.2	<u>Funções trigonométricas na análise de sons</u>	73
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80

INTRODUÇÃO

Não se sabe ao certo quando se começou a estudar as relações entre Matemática e Música, porém a arqueologia tem comprovado através de objetos encontrados em sítios arqueológicos e pinturas em cavernas que o interesse pela música é tão antigo quanto a existência do Homem. Passagens históricas indicam a presença da música anteriormente aos experimentos dos pitagóricos na Grécia Antiga como, por exemplo, tambores utilizados por civilizações bem mais antigas que os gregos, mundialmente conhecidos, de maneira comprovada, como pioneiros nos estudos das relações entre ambas as áreas. Relatos apontam a existência de um osso de urso, com idade entre 43000 e 82000 anos, encontrado em 1995 na Eslováquia, com perfurações capazes de produzir intervalos musicais com tons e semitons, sendo esta espécie de flauta o “instrumento musical mais completo” e antigo encontrado (Scientific American, Edição de Setembro de 1997).

Muitas dificuldades no desenvolvimento de teorias musicais se tornavam grandes desafios matemáticos. Aliás, se ainda existe dúvida que ambas as áreas são interligadas, faça-se lembrar do Quadrivium da escola pitagórica, parte fundamental do aprendizado medieval, onde a música era uma das subdivisões da matemática, juntamente com aritmética, geometria e astronomia. Desse modo, englobando esta arte como parte integrante do estudo matemático, relata-se que os pitagóricos foram pioneiros no abalizamento científico da música, desenvolvido posteriormente através de vários outros grandes pensadores como, por exemplo, Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) e Arquitas de Tarento (428 a.C – 347 a.C.). Assim sendo, do mesmo modo que seria impossível citar todos os contribuintes no desenvolvimento da Música, como parte integrante da (e auxiliada pela) Matemática, seria também uma injustiça falar apenas de Pitágoras de Samos (aproximadamente 570 a.C. – 497 a.C) e seus discípulos.

Outro grande estudioso, norteador e facilitador deste trabalho, foi Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), que mostrou como representar qualquer curva periódica pela sobreposição de ondas senoidais correspondentes às mais variadas frequências da curva original, comprovando a característica periódica do som e colaborando na explicação das relações entre consonâncias (sons que

formam um acorde de modo harmônico e agradável) e conhecidos números inteiros. Sendo assim, tanto uma corda solta quanto colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos, e assim por diante, mostrando que outras frações, do tipo $f = \frac{n+1}{n}$, como 2/1, 3/2, 4/3, dentre outras, correspondiam à oitava, quinta, quarta e, assim sucessivamente (ABDOUNUR, 2006). Fourier concretizou ideias de Bernoulli em Acústica, dando início a estudos que, posteriormente, seriam direcionados a físicos como Helmholtz e Ohm.

Juntamente com os estudos teóricos, foram desenvolvidos vários meios facilitadores de estudos práticos, como o osciloscópio, que associado a um microfone, transforma eletronicamente ondas sonoras em impulsos elétricos disponíveis graficamente, possibilitando o estudo do som através de funções, sobretudo trigonométricas. O incremento da informática, desde a década de oitenta, acelerou bastante os cálculos até então considerados como muito trabalhosos e permitiu que outros mais complexos pudessem ser desenvolvidos. Esses incrementos conduzem a uma substituição de boa parte das instrumentações eletrônicas por *softwares* com programações e soluções informatizadas.

Uma vez que buscar relações entre Matemática e Música não é um fato inédito no que se refere a pesquisas, existindo relatos que tratam disso com pelo menos 2500 anos, o que se acrescenta nesse trabalho é difundir esta experiência, tanto para professores de Matemática que querem uma conquista um pouco maior de sua turma, minimizando a velha imagem de sua disciplina como uma “ciência abstrata” e “fora da realidade”, quanto para professores de Música que, através de simples conceitos matemáticos como, por exemplo, o de razão, podem facilitar a aprendizagem de uma arte muitas vezes relacionada apenas com o dom, já que muitos matemáticos desconhecem o intelecto da Música da mesma forma que muitos músicos desconhecem a estética da Matemática.

Este trabalho está dividido em duas partes: a primeira parte traz um breve estudo sobre síntese de sinais sonoros e estudos acústicos sobre a análise de sons que são temas sugeridos como motivadores ou bases para o professor que deseja utilizar a música na análise de gráficos utilizados em sala de aula. Boa parte do texto presente nessa etapa é baseado nos artigos de BEAUCHAMP (2007),

BISTAFA (2006) e HENRIQUE (2007). Já a segunda parte incentiva a utilização de tais conceitos em suas metodologias de ensino. De uma maneira geral, este trabalho tem por intuito apresentar o estudo de gráficos de ondas sonoras a fim de aplicá-los em sala de aula, seja no ensino de funções ou, em outras áreas do currículo. Esta, que é apenas uma das diversas relações existentes entre Matemática e Música, além de desconhecida por muitos, pode tanto enriquecer culturalmente profissionais de ambas as áreas, quanto desempenhar uma função de facilitador na relação ensino-aprendizagem de uma disciplina para outra, biunivocamente. Mas, como poderíamos relacionar o estudo técnico de sinais sonoros com os conhecimentos que nossos alunos necessitam adquirir? Até que ponto é possível simplificar tal abordagem de modo que ela seja acessível ao nosso alunado?

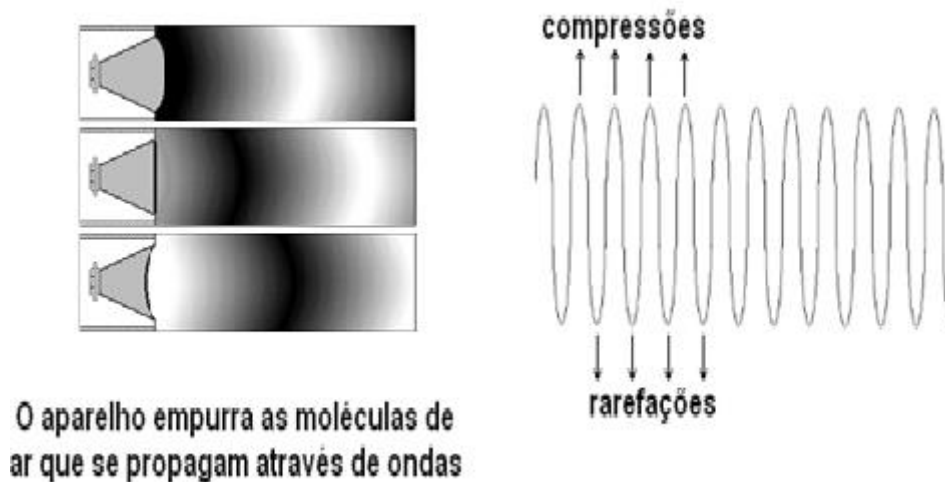
DEPOIMENTO

Minha história com a Música começou um pouco depois de meus primeiros contatos com a Matemática. Minha primeira experiência com instrumentos musicais aconteceu em meados dos anos 90, quando comecei a aprender teclado (depois de ter tido um pianinho quando criança), com um modelo pequeno, de brinquedo, sendo auxiliado por um amigo músico do meu pai. Não me adaptei muito com o instrumento e achando que seu som era muito delicado e chato, me afastei um pouco da música até o meu ensino médio, quando conheci meus verdadeiros amores musicais: a guitarra e o rock. No início de 2001, comprei um violão velho num bazar para tentar reproduzir as músicas que mais curti, mas sentia falta sempre de um algo a mais. Após perceber que gostava mesmo daquilo, pude enfim comprar minha primeira guitarra em 2007 (hoje são duas), selando de vez um amor incondicional que segue até os dias atuais, mesmo passando por inúmeras turbulências. Desde que ingressei na faculdade de Matemática em 2004, me deparei com dificuldades que não conhecia em minha simples vida de aluno de escola pública e precisei me dedicar bem mais à Matemática, deixando a música um pouco de lado. Hoje, depois de ter passado por “bandas de garagem”, depois de ter tocado para públicos variados, sem muito sucesso, acredito que nasci mesmo para dar aula. Digo que “acredito” por ainda ter vivo dentro de mim aquele sonho de garoto: de viver de música, na estrada, como nos melhores filmes de rock n’ roll. Não me considero um músico frustrado que dá aulas de Matemática usando Música, mas sim um “músico de final de semana” que dá aulas de Matemática por amar sua profissão tanto quanto o seu hobby. Este é o meu segundo trabalho sobre este assunto. O primeiro ocorreu na conclusão de minha especialização em 2009, falando de um modo mais abrangente sobre as relações sobre Matemática e Música.

1 O SOM E SUA REPRESENTAÇÃO DIGITAL

Todo esse capítulo é resultado do estudo feito sobre os textos de HENRIQUE (2007), BEAUCHAMP (2007), estudados para o exame de proficiência em inglês exigido pelo próprio PROFMAT, e de BISTAFA (2006), de modo que parte das referências contidas neles são dos próprios artigos citados. Tentamos resumir os conceitos de forma que permita ao leitor o entendimento necessário para aplicar em sala de aula as atividades do Capítulo 2, sem a pretensão de grande aprofundamento na área de acústica e suas especificidades.

Figura 1 - Propagação Sonora



Legenda: O som é o resultado de oscilações bem rápidas, através da compressão e rarefação das moléculas de ar, que são captadas pelo ouvido. o cone de um alto-falante, à esquerda, movimenta-se alternadamente para frente e para trás produzindo sucessivos pulsos de compressão e rarefação de ar, que se propagam em forma de onda.

Fonte: O autor, 2011 (figura da direita).

O som é o resultado da percepção de distúrbios das moléculas de um meio em certo espaço de tempo, que se apresentam sob a forma de ondas¹. A ocorrência

¹ Segundo Everest e Pohlmann (2009), na propagação das ondas sonoras constata-se que uma partícula de ar é posta a vibrar, em relação a sua posição de equilíbrio, pela passagem de uma onda sonora devido à interação das forças elásticas do ar e da inércia da partícula de ar.

desse fenômeno depende de três elementos: emissor, meio e receptor. O emissor produz um distúrbio no meio que será percebido pelo receptor. O meio, por sua vez, tem total influência na qualidade do distúrbio, que é o responsável pela forma de propagação. Estes distúrbios, de natureza mecânica, ocasionam pequenas variações de pressão no meio, que se propagam sob a forma de ondas longitudinais sonoras, a uma velocidade constante, normalmente através do ar. Pode-se dizer que o som é um fenômeno físico, resultado de oscilações bem rápidas, através da compressão e rarefação das moléculas de ar. A Figura 1 ilustra um alto-falante cujo cone movimenta-se para frente e para trás produzindo sucessivos pulsos de compressão e rarefação de ar, que se propagam em forma de onda. Esta movimentação, por sua vez, provoca pequenas flutuações de pressão em relação à pressão atmosférica que são captadas pelo ouvido. Um sinal é a representação desse fenômeno físico no tempo. Quando esta representação é no tempo contínuo, este sinal é dito analógico, quando a representação é no tempo discreto, este sinal é digital. A seguir, são descritos os sinais.

1.1 Os sinais

Um sinal transmite informações através de uma sequência de valores, sendo a representação, em geral, ao longo do tempo.

Os sinais são mais facilmente manipuláveis quando estão na forma de sinais elétricos ou digitais. Na forma de sinais elétricos, um sinal no tempo contínuo pode ser considerado como uma diferença entre correntes ou tensão no decorrer do tempo e são utilizados para representar variações de alguma grandeza física também no tempo contínuo. Quando um instrumento musical ou uma pessoa cantando, emite um som, ele é transformado em sinal elétrico através de um microfone (transdutor eletro-acústico), que é um dispositivo que converte a energia vibratória em impulsos elétricos. A partir daí, é possível se fazer uma análise que extrai as informações contidas nele sem modificar a sua essência, ou ainda, um tratamento ou processamento desses sinais, num processo que os modifica por

razões técnicas ou meramente estéticas. Esse sinal no tempo contínuo é dito analógico. Porém os sinais no tempo contínuo não podem ser utilizados na tecnologia digital. É necessário ainda transformá-los em versões amostradas do sinal original, cujas amostras coincidem com os sinais originais em determinados instantes de tempo. Esse sinal amostrado, no tempo discreto, é então convertido numa sequência de números e transferido para um *hardware* digital (computador) sendo, então, chamado de sinal digital. Também, nesse caso, é possível se fazer o processamento digital desses sinais.

Dentre os vários tipos de sinais, os sinais harmônicos são aqueles que envolvem funções trigonométricas e cuja representação matemática é simples. O movimento harmônico simples pode ser escrito através da função trigonométrica do tipo $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$, sendo A a amplitude do sinal, ω_0 a frequência angular (em rad s^{-1}) e ϕ sua fase inicial (HENRIQUE, 2007).

O matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1839) demonstrou que cada movimento periódico de uma partícula poderia ser representado como uma combinação de movimentos harmônicos simples, ou seja, é necessário apenas ondas harmônicas simples para formar a maioria das formas de onda (GRILLO, M. L., 2013). Para sinais periódicos, é possível escrevê-los através da série de Fourier. Já para movimentos aperiódicos, como os ruídos, por exemplo, a série é substituída pela Integral de Fourier.

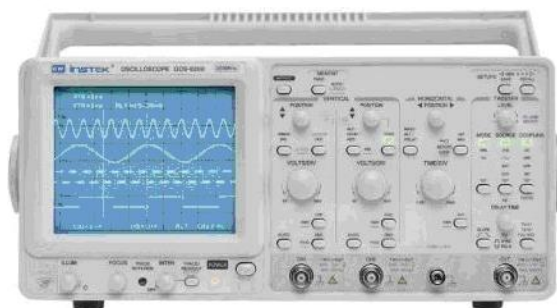
1.1.1 Representação dos sinais

Dentre várias formas de se representar um sinal, destacam-se as seguintes, que possuem relação com o objeto de estudo desse trabalho:

1.1.1.1 Representações Temporais

Analisando o som graficamente como uma variação de amplitude da pressão, produzida pelos movimentos das moléculas de um dado ponto no espaço num certo intervalo de tempo, como define LAZZARINI (2009), é possível utilizar, por exemplo, os conceitos de amplitude, frequência e período para fazer uma análise acessível a diversos tipos de leitores. Observar o som sob esses aspectos é analisar o domínio temporal, isto é, analisar as variações das funções matemáticas ou de uma grandeza no decorrer do tempo, no qual os fenômenos acontecem. A visualização desses sinais em função do tempo pode ser feita com o auxílio de um aparelho chamado osciloscópio (Figura 2), responsável pela produção dos oscilogramas, os traçados temporais. Estes aparelhos, bem como alguns outros que ainda serão citados adiante, vêm sendo substituídos por meios mais sofisticados, com o auxílio da informática. Tais parâmetros são convertidos com o auxílio dos transdutores como, por exemplo, microfones, e digitalizados.

Figura 2 – Osciloscópio Digital

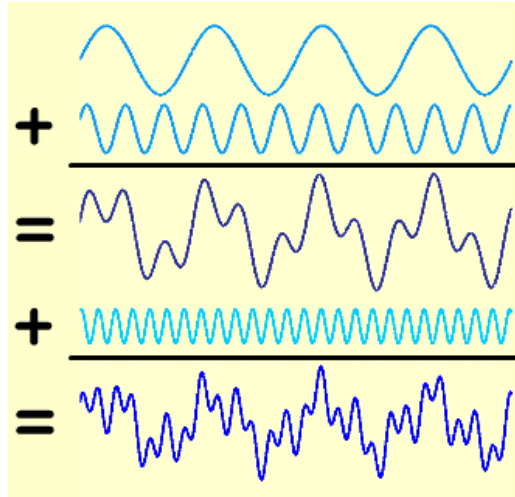


Legenda: Osciloscópio com oscilograma exibido no painel frontal.

Fonte: <http://paginas.fe.up.pt/~ee00264/equipamentos/osciloscopio.html> (Acesso em: 1/5/14. 13:47h).

Pode-se analisar o sinal inteiro ou particioná-lo em fragmentos significativos, a fim de buscar maiores detalhes necessários para seu estudo, utilizando-se de escalas de tempo que permitam uma ampliação, evidenciando, por exemplo, picos iniciais ou finais desse sinal. Por outro lado, podemos verificar se o sinal é periódico, destacando que todas as partes analisadas são harmônicas, ou seja, repetem-se em períodos de tempo iguais ou, caso contrário, se não existe repetição ou se esta repetição é ocasional. Essa análise é de suma importância para o estudo em questão.

Figura 3 – Sinais periódicos



Legenda: A composição entre sinais periódicos senoidais simples resultam em sinais complexos semelhantes a trechos de sinais sonoros.

Fonte:

telecom.inescn.pt/research/audio/cienciaviva/natureza_som.html (Acesso em: 1/5/14. 13:59h).

Podemos analisar sinais periódicos como o exemplificado na Figura 3, através de sua representação no domínio do tempo. Através da frequência fundamental, que é a componente de frequência com maior amplitude que compõe a série harmônica do som, torna possível, por exemplo, visualizar a altura de uma nota (mais aguda ou mais grave), medindo-se o menor intervalo de tempo entre dois picos idênticos do sinal. O menor intervalo de tempo é chamado de período e a frequência o inverso do período, ou seja, $f = \frac{1}{T}$.

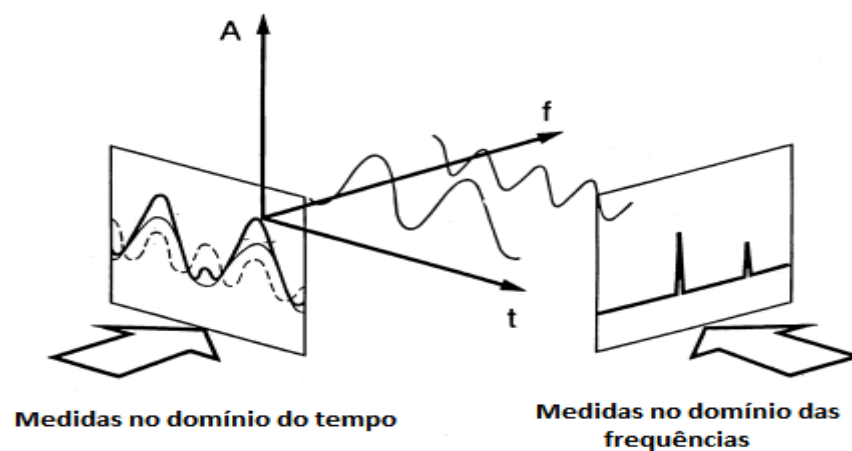
1.1.1.2 Representações espectrais

Um espectro sonoro é a distribuição, no domínio da frequência, do conjunto de todas as ondas que formam um som. A representação espectral relaciona a amplitude, representada no eixo vertical, com a frequência, representada no eixo horizontal, permitindo uma melhor visualização de algumas propriedades não tão nítidas na representação temporal, como, por exemplo, as componentes de frequências com maiores picos de energia e periodicidades existentes. Essa

representação é definida no domínio frequencial. Um exemplo deste tipo de representação pode ser visto na Figura 4 e na Figura 6.

Os espectros fornecem mais detalhes sobre a composição do sinal do que os traçados temporais. Quando tem-se sinais periódicos, é feita uma aplicação do teorema de Fourier através da Transformada de Fourier, apresentada a seguir, para a conversão do domínio temporal para o espectral.

Figura 4 – Diferenças entre o domínio da frequência e o domínio do tempo



Fonte: <http://masters.donntu.edu.ua/2008/eltf/naftulin/library/letter5.htm> (Acesso em: 1/5/14. 14:23h).

1.1.1.3 Representações temporais-frequenciais

Os sinais musicais quase nunca se apresentam de maneira estacionária, o que faz com que seu espectro varie com muita frequência. Como a transformada de Fourier utiliza-se de funções trigonométricas e exponenciais complexas, modelando sinais que se repetem infinitamente no tempo, não podemos aplicá-la nesse caso, necessitando então de uma espécie híbrida de representação que permita observar a variação das frequências ao longo do tempo. São aplicadas outras transformações, as quais se utilizam de pequenas ondas, chamadas de wavelets, como suporte. Essas ondas representam funções que podem ser decompostas em outras funções, o que facilita a análise mais apurada em diferentes escalas tanto no domínio frequencial quanto no domínio temporal, em intervalos bem definidos e

limitados. Esse processo de transformação é conhecido como Transformada Wavelet e será descrito mais adiante. Diferentemente da transformada de Fourier, a Wavelet dá maior destaque para a posição dos fenômenos no decorrer do tempo. Nesse tipo de representação, observa-se a necessidade de que a aquisição deve ser longa para se obter uma boa resolução frequencial. Por se tratar de uma representação híbrida, tem-se que uma frequência mais baixa numa duração mais curta destaca uma melhor resolução no tempo.

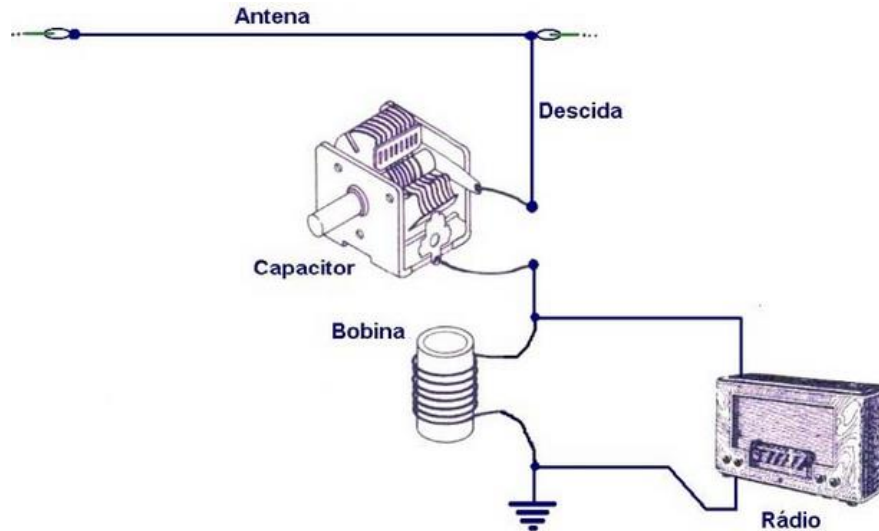
Um exemplo bem conhecido deste tipo de representação seria uma partitura musical (ver figura 8), que representa um sinal que não é estacionário, ou seja, um tipo de sinal que exige uma representação com informações de tempo e frequência.

1.1.2 Métodos de transformação (conversão)

Antes de mencionar os métodos de transformação, faz-se necessário lembrar o que são filtros. Um filtro é um dispositivo que seleciona certas componentes de frequências de um sinal de entrada e as direciona para o sinal de saída, suprimindo outras componentes de frequência (HENRIQUE, 2007). Geralmente, esses filtros são utilizados na eliminação total ou parcial de ruídos, mas podem ser muito úteis no processamento de sinais.

Os principais tipos de filtros são: os que possuem largura de banda, isto é, o sinal filtrado fica compreendido entre dois limites de frequências, os constantes (representados com escalas de frequências lineares) ou os que possuem largura de banda de percentagem constante (representados com escalas de frequência logarítmicas).

FIGURA 5 – Filtro passa-alta



Legenda: Exemplo de filtro com bobina em paralelo com rádio.
 Fonte: http://www.sarmento.eng.br/Artigo_Martim.htm.
 Acesso em: 1/5/14. 14:34h).

Convém ressaltar que um filtro passa-banda (ou passa-faixa) é um dispositivo que permite a passagem de uma certa faixa de frequências e rejeita (atenua) as frequências fora dessa faixa. Esses filtros também podem ser obtidos através da combinação entre um filtro passa-baixa (que permite a passagem de baixas frequências e atenua ou reduz a amplitude das frequências maiores que a frequência de corte) e um filtro passa-alta (que permite a passagem das frequências altas, porém atenua (ou reduz) a amplitude das frequências abaixo de frequência de corte).

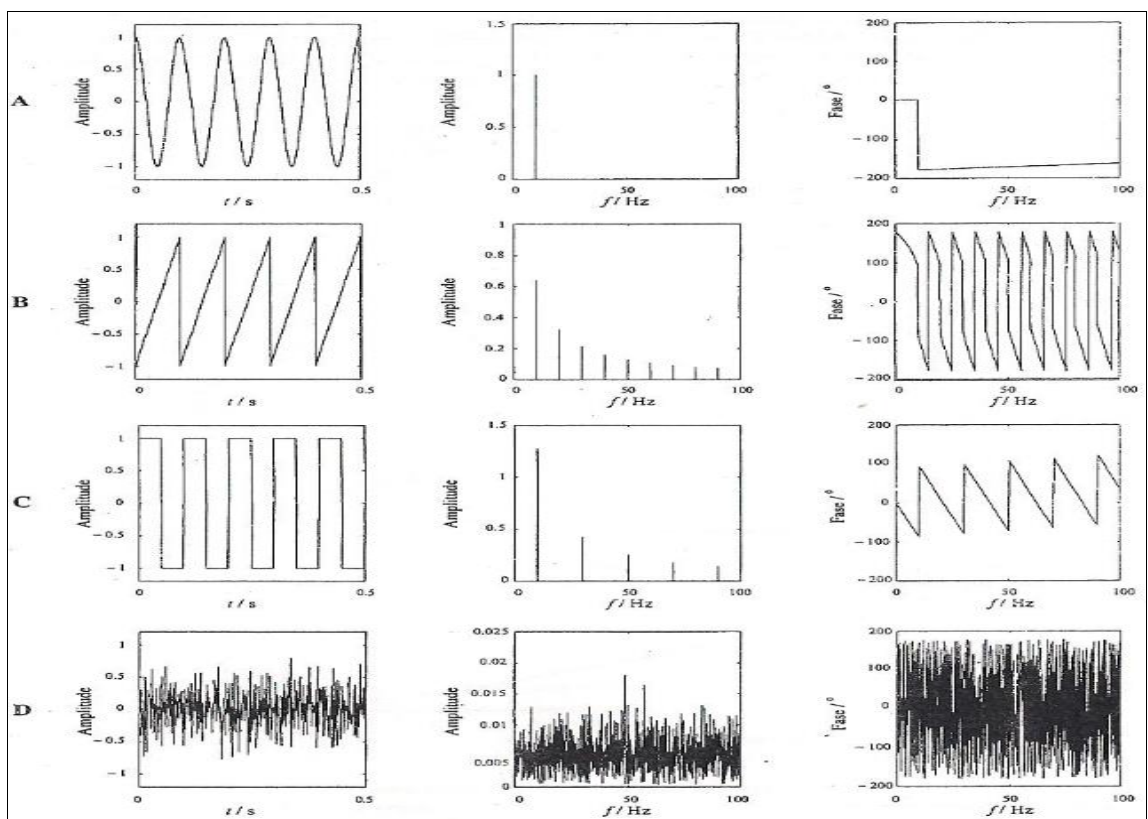
Destacam-se, a seguir, os principais métodos de transformação entre os domínios e representações supracitados:

1.1.2.1 Transformada de Fourier

A primeira investigação importante sobre a condução do calor, que serviria como pano de fundo para o desenvolvimento da série que serve de base para caracterização matemática da onda sonora, foi realizada por Fourier no seu tempo livre, enquanto estava servindo como prefeito do departamento de Isère (Grenoble,

de 1801 a 1815, quando apresentou estudo sobre o tema à Academia de Ciências de Paris). No entanto, os artigos foram criticados pelos consultores, como Lagrange, pela falta de rigor. Com a não publicação de seus artigos, Fourier seguiu desenvolvendo suas ideias e acabou por escrever um clássico da Matemática Aplicada chamado *Théorie Analytique de la Chaleur*, publicado em 1822.

Figura 6 - Análise de Fourier: Representação temporal e espectral (em amplitude e fase) de alguns sinais típicos



Legenda: A - Onda senoidal; B - Onda em dente de serra; C - Onda quadrada; D - sinal aleatório, e suas representações no domínio da frequência. A resposta de fase aparece no processo de filtragem do sinal, um filtro com fase zero, que seria o ideal, na prática é não realizável. Sempre há uma fase, que é introduzida no processo de filtragem.

Fonte: HENRIQUE, 2007.

O processo desenvolvido por Fourier consiste em decompor uma onda complexa representante de uma função periódica em uma soma de ondas mais básicas, cujas frequências são múltiplas da frequência fundamental. Este tipo de transformação permite mudar a dependência da função de tempo para a frequência, com o uso da Transformada de Fourier, sem mudar as características da função original. Esta transformação permite conhecer as frequências onde os sinais têm

energia, por meio das respectivas amplitudes e fases associadas. A série de Fourier é conhecida através da expressão $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq L$ e com a_i e b_i sendo termos da série.

Fourier observou que o espectro do sinal periódico tem infinitas repetições das componentes que, na verdade, nada mais são do que os múltiplos da frequência fundamental. Já nos casos dos sinais aleatórios, que não possuem periodicidade, é considerada uma onda com período único infinito, como se o sinal fosse periódico. Esta consideração é possível, uma vez que $\Delta f = \frac{1}{T}$ tende para zero quando o período T tende para infinito.

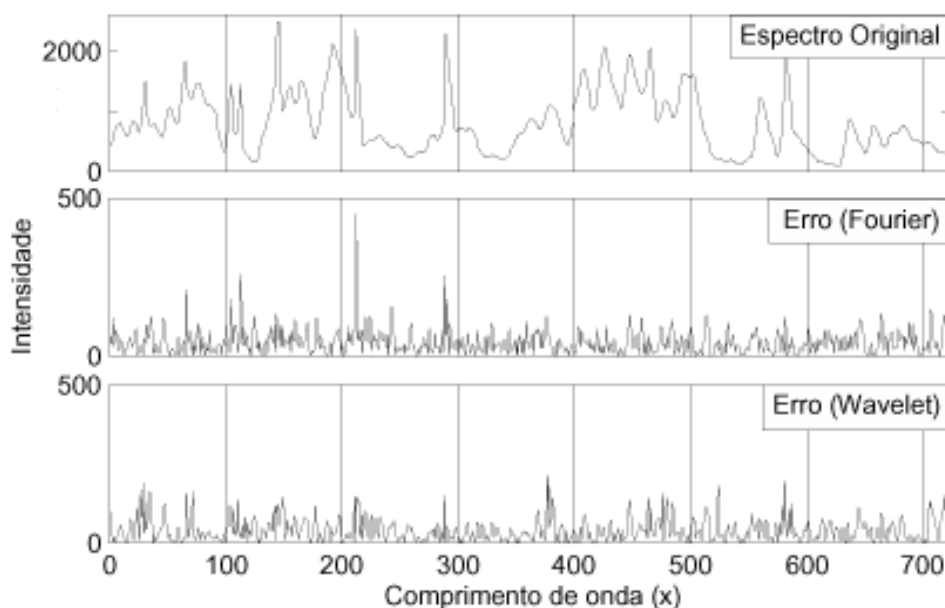
Essa transformada é uma generalização da série de Fourier para sons que não são periódicos, onde sua representação deixa de ser uma sequência de linhas para assumir a forma de um espectro contínuo.

Enquanto a série é uma soma infinita de termos diferenciados de um intervalo finito da frequência, a transformada é o limite para o qual tende a série quando os termos estão infinitamente próximos, num processo de consideração infinita do período T citado anteriormente.

À Transformada de Fourier está associada, naturalmente, a sua inversa. Tem-se a transformada (direta) de Fourier que é representada por $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt$ e a transformada inversa de Fourier, que traz a função de volta ao domínio temporal, que é representada por $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift} df$.

Convém lembrar que, na prática, é muito complicado estimar o comportamento de uma amostra de duração infinita, devido a limitações inerentes ao ser humano e ao domínio computacional, que optam por admitir, implicitamente, que o período do sinal é igual à duração da amostra. Ainda assim, os recursos computacionais oferecem vantagem, como exemplo, o uso da Transformada Rápida de Fourier (FFT), algoritmo desenvolvido por Cooley e Tukey em 1965. Outro problema seria o erro gerado na aplicação da transformada (Figura 7), fato que também ocorre em outros tipos de conversão.

Figura 7 – Comparativo entre erros gerados pela Transformada de Fourier pela Transformada Wavelet



Fonte:
http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S010040422001000600026&script=sci_artext. Acesso em: 1/5/14. 14:58h).

1.1.2.2. Transformada Wavelet

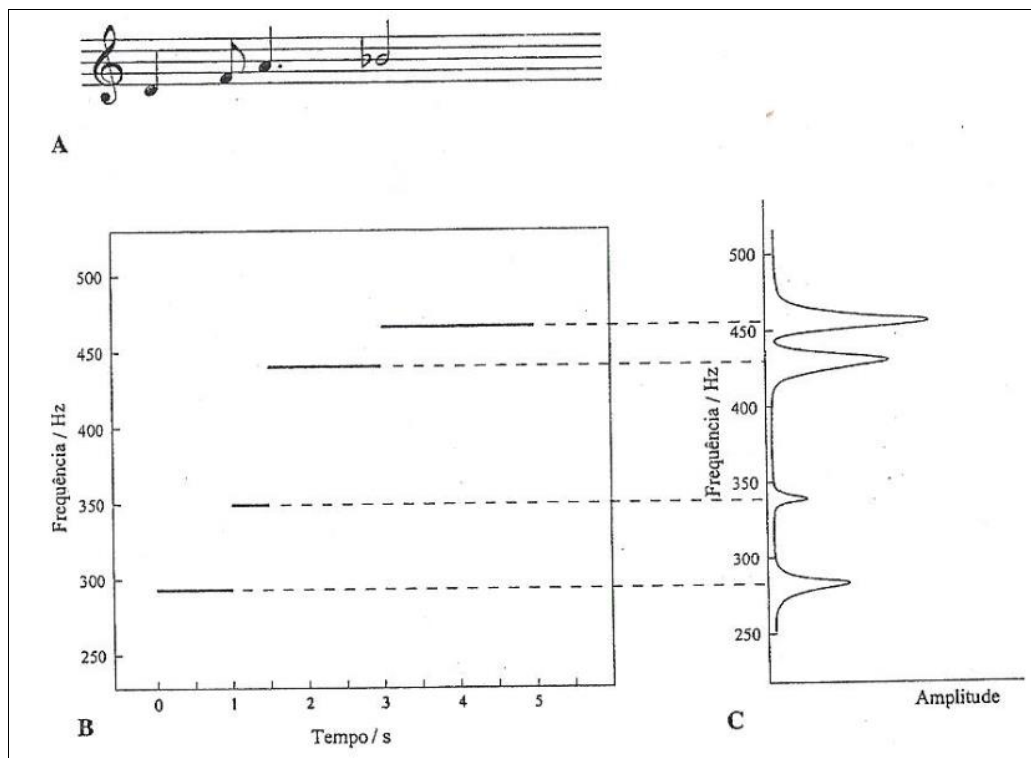
Uma função Wavelet é a interpretação de uma onda de curta duração com crescimento e decrescimento rápidos. Baseia-se na representação de funções em diferentes escalas e diferentes resoluções (tempo-escala) (DAUBECHIES, 1992).

Dividir o sinal total em blocos idênticos tem o inconveniente de conduzir a uma mesma resolução temporal-frequencial tanto para frequências baixas quanto para as altas. Para otimizar este processo é necessário adotar blocos de maior dimensão para frequências baixas, de modo a se analisar sempre o mesmo número de ciclos, independente das frequências. Nessa transformação, projeta-se o sinal que se deseja numa família de funções de duração finita, ao invés das funções trigonométricas comumente utilizadas na transformada de Fourier, permitindo uma representação dos sons que respeita a resolução em frequência, assim como as suas características impulsivas, presentes no instante inicial.

Outro ponto interessante está no fato da transformação possibilitar a extração de sinais quando se apresentam somados ao ruído branco (ruído branco é um tipo de ruído formado pela combinação de sons de todas as frequências). Esta separação é útil haja vista que a maioria dos sinais se apresentam, corrompidos ou

mascarados pelo ruído, como por exemplo, nos discos de vinil antigos. Uma filtragem mal feita pode corromper a informação musical existente onde só uma transformação Wavelet poderia identificar, instante a instante, se existe música ou se é apenas ruído, conduzindo assim uma filtragem dinâmica seletiva. Interessante observar que essa transformação, a Wavelet, é reversível.

Figura 8 – Fragmento musical e representações



Legenda: A – *Fragmento musical*; B – *Representação tempo/frequência da sequência de sons*; C – *Módulo da transformada de Fourier da sequência de sons*.
Fonte: HENRIQUE, 2007.

Quando estudam-se as ondas sonoras e suas formas de propagação, sempre se depara com o conceito de impedância, ou ainda, com o conceito de admitância, que seria o seu inverso. A impedância acústica é a razão entre a pressão sonora e a velocidade das partículas, dependendo do meio de propagação e do tipo de onda (BISTAFA,2006). Pode-se considerar a impedância como uma medida da resistência à passagem da onda presente em cada meio de propagação. Tanto a impedância quanto a admitância podem ser medidas em quaisquer pontos, tendo as medições

de entrada como destaque dentre os mais diversos casos, feita quando ambas são medidas no mesmo ponto, conhecido como ponto de excitação do sistema. Esses conceitos são intrinsecamente relacionados com a caracterização de cada instrumento musical.

1.1.3 Métodos de análise / síntese

Os métodos de síntese e análise permitem sintetizar o som dos instrumentos musicais por exemplo, ou gravar e reproduzir os sons musicais, processando-os em softwares de gravação.

Como já visto acima, representações matemáticas de sons de instrumentos musicais não são únicas, e é muito útil representar esses sons como uma coleção de ondas senoidais (com amplitudes, frequências e fases variáveis no tempo) adicionado a algum tipo de ruído. Baseado nisso, um sinal de som musical $s(t)$ pode ser expresso como

$$s(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} A_k(t) \cos(\theta_k(t)) + n(t), \quad (1.1a)$$

sendo

$$\theta_k(t) = 2\pi \int_0^t f_k(\tau) d\tau + \theta_{k0}. \quad (1.1b)$$

onde t = tempo; $A_k(t)$ = a amplitude da k -ésima onda senoidal (componente de frequência ou parcial) no tempo t ; $K(t)$ = número de parciais senoidais, que podem variar com o tempo; $\theta_k(t)$ = fase da parcial k no tempo t ; $f_k(t)$ = frequência da parcial k no tempo t ; $\theta_{k0} = \theta_k(0)$ = fase inicial da parcial k (fase no tempo = 0); $n(t)$ = sinal de ruído aditivo, cujo espectro de curto prazo varia com o tempo.

A fase instantânea de cada parcial é intrinsecamente ligada à sua fase inicial e a sua frequência instantânea. Dadas uma fase inicial e uma frequência (derivada da fase), esta fase é conhecida, pelo menos teoricamente, em cada instante de tempo.

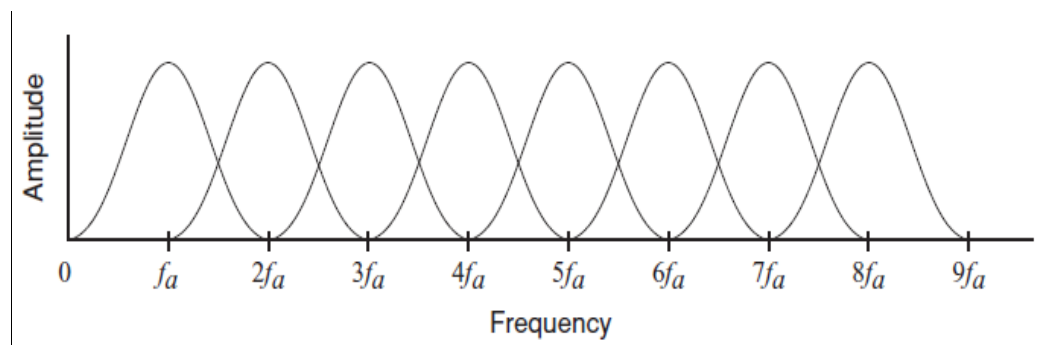
A decisão se o ruído deve estar contido ou separado da senóide depende do tipo de análise utilizada, da natureza do ruído e de conveniência de quando se faz a

síntese. Inicialmente neste trabalho, será considerado que o ruído está incorporado às funções temporais de frequência e amplitude representativas das parcelas individuais, de modo que possa ser representado por

$$s(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} A_k(t) \cos(2\pi \int_0^t f_k(\tau) d\tau + \theta_{k_0}). \quad (1.2)$$

Apresentam-se, abaixo, dois diferentes métodos de análise, os quais são exemplos da análise de Fourier de curta duração: um chamado de banco de filtros harmônicos ou Vocoder de fase (uma técnica de processamento de grande importância musical também conhecida como *Phase Vocoder*) e, o outro, método de rastreamento de frequência ou McAulay-Quatier (MQ).

Figura 9 – Respostas de filtro de análise



Legenda: Respostas do filtro de análise por sobreposição passa-banda centrados em harmônicos de f_a .
Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

1.1.3.1 Análise/Síntese do Banco de Filtro Harmônico (Vocoder de fase)

A análise ou a síntese um som musical pode ser feita através da utilização de algum método de filtragem. Entre os filtros mais utilizados para este fim encontram-se o banco de filtro harmônico ou Vocoder de fase e o filtro heteródino. Como foi visto anteriormente, um som musical pode ser escrito por uma série harmônica adicionada a ruído. Para a síntese de um som, um filtro Vocoder de fase simula o som através de um banco de filtros, sendo que o som é sintetizado através da sobreposição de filtros passa-banda.

O banco de filtro harmônico ou Vocoder de fase simula um banco de sobreposição de filtros passa-banda centrados em cada um dos múltiplos inteiros de uma frequência base f_a , isto é, em frequências harmônicas. Cada uma delas das frequências harmônicas é múltipla da frequência fundamental, $f_k = k.f_a$, para $k = 1, \dots, K$, onde f_a é referido como a frequência de análise, e K é um número constante de harmônicos. Cada função de filtro $W_k(f - f_k)$ tem um valor máximo em $f = k.f_a$. Além disso, cada função de filtro é igual a zero ou possui valor muito pequeno para $f \leq (k-1)f_a$ e $f \geq (k+1)f_a$. Tal banco de filtro, que consiste em uma série de sobreposições de senoides, uma para cada filtro passa-banda, está representado na figura 4. Este banco de filtro tem a propriedade especial de que cada filtro irá produzir uma onda senoidal com frequência $f_k = k.f_a$ e amplitude A_k para um sinal periódico com frequência fundamental constante exatamente em f_a e amplitudes harmônicas fixas A_k , isto é,

$$s_k(t) = A_k \cos(2\pi k f_a t + \theta_{k_0}). \quad (1.3)$$

1.1.3.2. Desvio de frequência e “desarmonicidade”

Sendo permitido variar as amplitudes e as frequências com o tempo e estando cada k -ésima frequência harmônica confinada a uma estreita faixa em torno $k.f_a$, as saídas de filtro próximas, embora sem perfeição, replicam os termos da soma da Equação (1.2). Neste caso, é útil definir

$$\frac{\Delta f_k(t)}{k f_a} = \frac{f_k(t)}{k f_a} - 1, \quad (1.4)$$

onde $\Delta f_k(t)$ é um desvio de frequência variando em função do tempo. Para fazer a análise de um som musical uma frequência pode ser escrita enfatizando seu desvio de frequência relativa. Se $\Delta f_k / k.f_a$ varia em $\pm 0,06$ (ou 6%), a k -ésima frequência harmônica varia para cima e para baixo por cerca de um semitom com relação à sua posição central, $k.f_a$.

Um som é instantaneamente harmônico se todas as frequências acompanham umas às outras de tal forma que

$$\Delta f_k(t) = k \Delta f_1(t), \quad (1.5a)$$

o que leva a uma definição de “desarmonicidade”:

$$I_k(t) = \frac{\Delta f_k(t)}{k \Delta f_1(t)} - 1. \quad (1.5b)$$

Na prática, quando a amplitude do primeiro harmônico é muito pequena, Δf_1 pode ser definida pobremente, e a Equação (1.5b) pode resultar em uma estimativa pobre de desarmonicidade. Para contornar este problema, um desvio de frequência fundamental composta é definido como

$$\Delta f_{c_1}(t) = \frac{\sum_{k=1}^5 A_k(t) \Delta f_k(t) / k}{\sum_{k=1}^5 A_k(t)}, \quad (1.5c)$$

que é a soma da amplitude ponderada relativa dos cinco primeiros desvios de frequência harmônica normalizada harmonicamente. Note que todas as amplitudes dos harmônicos são iguais à média corrente dos resultados de desvio de frequência relativa. Mas, para amplitudes desiguais, amplitudes mais fortes dominam a fórmula. Devido às imperfeições de sinal e análise, uma pequena quantidade de desarmonicidade aparece na análise dos mais harmoniosos dos tons. No entanto, a Equação (1.5b) é especialmente útil para casos em que o sinal tem quantidades apreciáveis de desarmonicidade. Na análise de um som, o método do *desvio de frequência* possibilita por exemplo afinar um som ligeiramente desafinado.

Um problema surge quando as frequências de som a serem analisadas têm também o desvio dos valores de frequências harmônicas, quer seja devido às modulações de frequência ou desarmonicidade de longo prazo. Para o caso harmônico, a frequência fundamental que se desvia por Δf_1 de f_a traduz-se numa mudança de $k\Delta f_1$ de kf_a , que é a frequência central do k-ésimo filtro de análise harmônica, também chamado de k-ésimo bin, uma estrutura de dados que atua no particionamento de espaços de modo a facilitar buscas rápidas em regiões próximas.

Enquanto que uma quantidade moderada de desvio de frequência fundamental tipicamente faz com que não ocorra erro de análise apreciável nos harmônicos mais baixos, em um determinado harmônico a precisão de análise para as parciais superiores são afetadas. Esta é uma limitação fundamental da abordagem de banco de filtros harmônicos.

1.1.3.3. Método de análise de filtro heteródino

O analisador de banco de filtro é pode ser executado através de um método conhecido como método de filtro heteródino (BEAUCHAMP apud FORNANGO, 1966; BEAUCHAMP, 1969) que é derivado da análise de séries de Fourier tradicionais. Por conseguinte, a amplitude complexa do k-ésimo harmônico de $s(t)$ é dada por

$$\tilde{c}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) e^{-j2\pi k f_a \tau} s(\tau) d\tau, \quad (1.6a)$$

onde $w(t)$ é a resposta de impulso de um filtro de passa-baixa.

A Equação 1.6a pode ser interpretada como sendo a combinação de duas operações: (1) Heteródino (isto é, multiplicação) do sinal $s(t)$ pelo função exponencial complexa $e^{-j2\pi k f_a t}$ [que também pode ser escrita como $\cos(2\pi k f_a t) - j \sin(2\pi k f_a t)$], onde f_a é a frequência de análise; (2) filtragem passa-baixa deste produto por convolução com uma função "janela" especial $w(t)$, que, em geral, é uma função par de t .

A operação heteródino desloca a frequência $k f_a$ dentro de $s(t)$ para $f = 0$ e frequências na vizinhança da $k f_a$ para a vizinhança de zero. Em seguida, o filtro passa-baixa tenta remover todos os componentes, exceto aqueles cujas frequências são menores do que $f_a/2$. Para ilustrar, vamos definir

$$s'_k(t) = e^{-j2\pi k f_a t} s(t) \quad (1.6b)$$

como o sinal heterodinizado. Em seguida, a operação de filtragem passa baixa pode ser conseguida por:

$$\tilde{c}_k(t) = w(t) * s'_k(t), \quad (1.6c)$$

onde $*$ indica convolução. Em termos de Transformações de Fourier, a Equação (1.6c) se torna

$$\tilde{C}_k(f) = W(f) S'_k(f) = W(f) S(f + k f_a). \quad (1.6d)$$

A transformada de Fourier de $w(t)$, $W(f)$, é também conhecida como a resposta em frequência ou o filtro característico de $W(f)$, enquanto que $S(f)$ representa a característica espectral, ou simplesmente o espectro, de $s(t)$.

1.1.3.4. Funções janela

Funções janela são versões particulares de $w(t)$ que são limitadas por tempo. Estas funções são zero fora de um intervalo de tempo $-T \leq t \leq T$, $w(t) = w(-t)$, sendo que as suas transformadas de Fourier são reais e as suas respostas de fase são iguais à zero.

A janela mais simples é a janela retangular, que para aplicação, neste trabalho, é definida como:

$$w(t) = \begin{cases} f_a, & |t| \leq 0.5/f_a \\ 0, & |t| > 0.5/f_a \end{cases} \quad (1.7a)$$

Outro exemplo de janela é a janela Hanning, dada por:

$$\frac{w(t)}{f_a} = \begin{cases} \cos^2(0.5\pi t f_a) = 0.5 + 0.5 \cos(\pi t f_a), & |t| \leq 1/f_a \\ 0, & |t| > 1/f_a \end{cases} \quad (1.7b)$$

A largura desta janela é $2/f_a$, a sua amplitude de pico é f_a , e a sua área, como no caso anterior, vale 1,0.

Uma variante da janela Hanning é a função janela de Hamming:

$$\frac{w(t)}{f_a} = \begin{cases} 0.5 + 0.426 \cos(\pi t f_a), & |t| \leq 1/f_a \\ 0, & |t| > 1/f_a \end{cases} \quad (1.7c)$$

Hamming é uma função de janela (2-termo) com uma largura de $2/f_a$, mas com uma amplitude de pico de $0,926 f_a$. Observa-se que há uma descontinuidade em $t = \pm 1/f_a$.

A função de janela mais sofisticada é a janela 4-termo de Blackman-Harris:

$$\frac{w(t)}{f_a} = \begin{cases} 0.25 + 0.3403 \cos(0.5\pi t f_a) + 0.0985 \cos(\pi t f_a) + 0.0081 \cos(1.5\pi t f_a), & |t| \leq 2/f_a \\ 0, & |t| > 2/f_a \end{cases} \quad (1.7d)$$

A Figura 10.a mostra uma comparação entre as quatro funções das janelas dadas acima (normalizadas pela f_a).

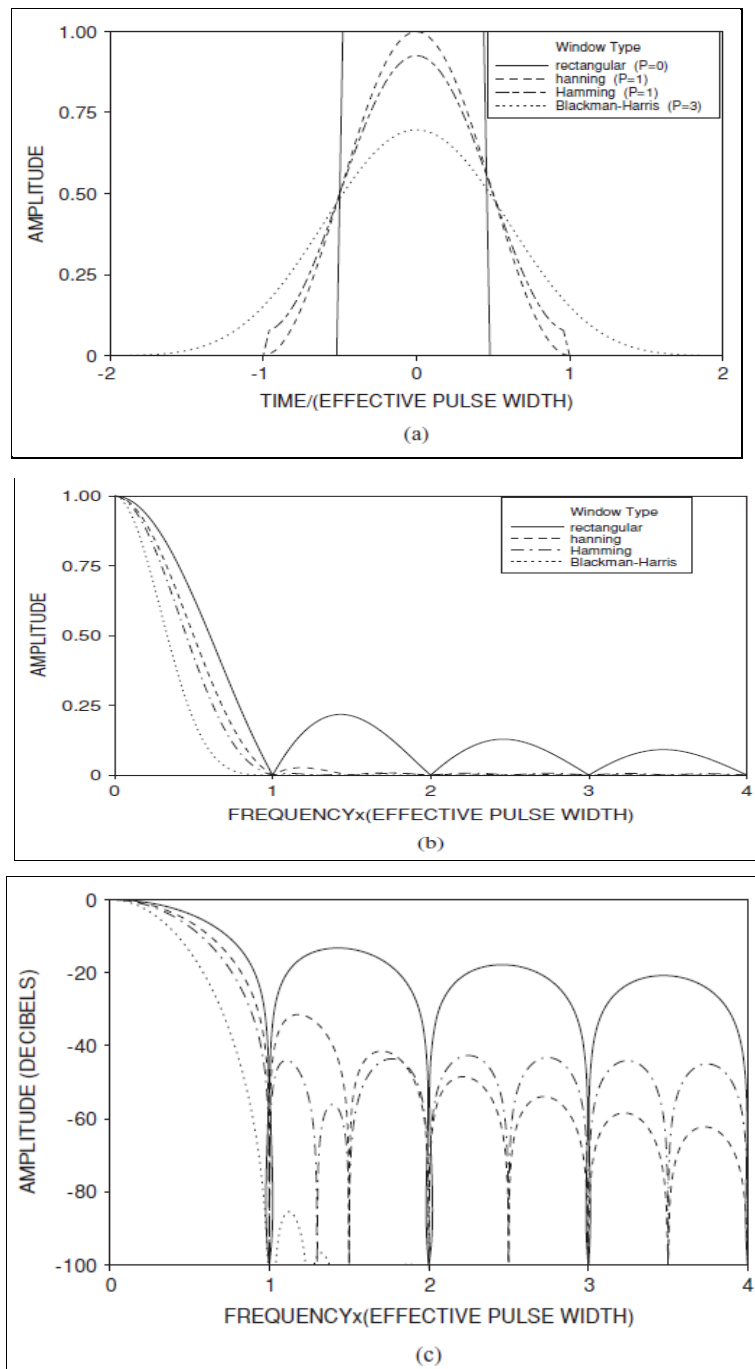
Com algumas transformações é possível se obter

$$W(f) = \frac{P}{2} \sum_{p=0}^{P-1} \alpha_p \left(\text{sinc} \left(\pi \left(\frac{Pf}{f_a} + p \right) \right) + \text{sinc} \left(\pi \left(\frac{Pf}{f_a} - p \right) \right) \right) \quad (1.12)$$

Considerando que $\alpha_0 = 1/P$ e $f = 0$, segue-se que $H(0) = P\alpha_0 = 1,0$, o valor máximo da resposta. Além disso, se a frequência é uma harmônica da f_a , isto é, $f = k.f_a$, $k = 1, 2, 3, \dots$, pode ser visto que $W(k.f_a) = 0$. O primeiro zero, que ocorre em f

$= f_a$, define o fim da resposta de baixa frequência. Devido às posições do zero, este tipo de resposta é perfeito para análise de sinais periódicos com frequência fundamental f_a . As respostas de $W(f)$ e $W_{db}(f)$ são comparadas nas Figuras. 10.b e 10.c.

FIGURA 10 – Comparação entre as funções janela.



(Legenda disponível na página seguinte.)

Legenda: Comparação dos quatro tipos de janela: retangular, Hanning, Hamming, e Blackman-Harris. (a) funções da janela normalizada, $w(t.f_a) / f_a$, (b) Respostas de frequência de janela normalizada, $W(f / f_a)$, (c) as respostas da janela em decibéis, $20\log(W(f / f_a))$.
Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

Outra função de janela muito útil é a janela Kaiser-Bessel (Kaiser e Schafer, 1980; Harris, 1978; Nuttall, 1981), que é definida no domínio do tempo, por

$$w(t) = \frac{1}{T} \frac{\alpha}{\sinh(\alpha)} I_0 \left(\alpha \sqrt{1 - (2t/T)^2} \right), \quad |t| < \frac{T}{2}, \quad (1.13)$$

onde I_0 é a zero-ésima ordem da função de Bessel modificada do primeiro tipo, α é parâmetro fixo e T é a largura da janela. Quando $\pi T f / \alpha > 1$, as raízes quadradas desta função bastante peculiar, se tornam imaginárias e a função \sinh no numerador se transforma em uma função seno.

1.1.3.5. Limites de análise harmônica

A análise é feita a partir de um sinal de entrada. Um importante problema ocorre quando a frequência fundamental de entrada é afinada com f_a por um valor Δf . Então, o harmônico k é afinado por $f_{k1} = k\Delta f$, e este torna-se a frequência de saída após ser heterodinizado por kf_a , em oposição a zero, o que ocorre quando o ajuste é perfeito. Enquanto isso, os harmônicos vizinhos, que devem ser rejeitados, têm frequências de $(k - 1)(f_a + \Delta f)$ e $(k + 1)(f_a + \Delta f)$, e depois de heterodinizado por kf_a estas frequências tornam-se $f_{k2} = -f_a + (k - 1)\Delta f$ e $f_{k3} = f_a + (k + 1)\Delta f$, respectivamente. Deste modo, a precisão de análise pode ser medida com base na diferença entre a amplitude do harmônico k desejado e as amplitudes dos harmônicos indesejados $k - 1$ e $k + 1$, que podem corromper a medida da k -ésima amplitude harmônica.

Para dar um exemplo concreto, supondo $\Delta f = 0,03f_a$ (aproximadamente meio semitom) e $k = 3$ (terceiro harmônico), então $f_{31} = 0,09 f_a$, $f_{32} = -0,94 f_a$, e $f_{33} = 1,12 f_a$. As respostas do retangular, Hanning, Hamming, e da janela 4-termo Blackman-Harris (em decibéis) são comparadas na tabela a seguir:

Window Type	$W_{db}(f_{31} = 0.09 f_a)$	$W_{db}(f_{32} = -0.94 f_a)$	$W_{db}(f_{33} = 1.12 f_a)$	$W_{db}(f_{31}) - W_{db}(f_{32})$	$W_{db}(f_{31}) - W_{db}(f_{33})$
rectangular	-0.1	-24.0	-19.6	23.9	19.5
hanning	-0.2	-32.2	-32.3	32.0	36.1
Hamming	-0.2	-38.6	-44.1	38.4	43.9
Blackman-Harris	-0.4	-70.5	-92.1	70.1	91.7

Em outro exemplo, use $\Delta f = 0,03 f_a$ e tome $k = 10$ (décimo harmônico). Então $f_1 = 0,3 f_a$, $f_2 = 0,73 f_a$, e $f_3 = 1,33 f_a$. As respostas das quatro janelas são agora:

Window Type	$W_{db}(f_1 = 0.3 f_a)$	$W_{db}(f_2 = -0.73 f_a)$	$W_{db}(f_3 = 1.33 f_a)$	$W_{db}(f_1) - W_{db}(f_2)$	$W_{db}(f_1) - W_{db}(f_3)$
rectangular	-1.3	-9.7	-13.7	8.4	12.4
hanning	-2.1	-14.4	-35.3	12.3	33.2
Hamming	-2.5	-17.7	-61.8	15.2	59.3
Blackman-Harris	-4.9	-33.4	-115.7	28.5	110.8

Deve ficar claro a partir destes números que é mais difícil isolar um harmônico mais alto e que o isolamento de um harmônico melhora com a sofisticação do tipo de janela. Por exemplo, o 4-termo Blackman-Harris é melhor do que o de Hamming, a Hamming é melhor do que o de Hanning, e o Hanning é melhor do que a retangular. Mas existem ainda outras questões a se analisar. A troca de Hanning comparada com Hamming sai diferente se a corrupção causada por vários harmônicos em torno do que está sendo analisado for considerada e se a resposta da função de Hanning proporcionar uma melhor rejeição do que a Hamming para $f / f_a > 2$, o que deve reduzir a corrupção do vizinho não imediato. Assim, o melhor indicador a ser utilizado depende da natureza do espectro do sinal e do harmônico particular a ser analisado.

Outra preocupação seria a estreiteza da resposta do 4-termo-Blackman-Harris para a região de passagem de banda $0 \leq f / f_a \leq 1$ e a largura abundante correspondente no domínio do tempo ($4 / f_a$) de sua função janela [ver eq. (1.7d)]. Embora os seus lóbulos laterais de resposta sejam mais baixos, o seu lóbulo principal é mais sensível a sintonização de frequências do que as outras funções de janela. Além disso, uma janela de tempo relativamente ampla como a Blackman-Harris pode causar problemas de resolução (no tempo), com conseqüente perda de algum detalhe. Assim, as funções de janela de Hanning e Hamming, além de serem

um pouco menos custosas para calcular, apresentam algumas vantagens como precisão se comparadas com a Blackman-Harris.

Em conexão com as funções de resposta do filtro, pode-se perguntar: "Por que não usar um filtro de resposta ideal?" Tal resposta, na forma de um filtro passa-baixa, é definida como

$$W(f) = \begin{cases} 1.0, & |f| \leq 0.5f_a \\ 0, & |f| > 0.5f_a \end{cases} \quad (1.14a)$$

e dá resultados ideais no domínio da frequência, separando-os perfeitamente de f_a , estando relativamente imune a mudanças de frequência, produzindo ainda uma resposta igual a 1,0. No entanto, a função de transferência $W(f)$ corresponde, no tempo, à função de janela:

$$\frac{w(t)}{f_a} = \frac{\sin(\pi f_a t)}{\pi t f_a}, \quad (1.14b)$$

que não é limitada no tempo e converge muito lentamente para zero à medida que o tempo aumenta. Enquanto esta janela executa com muita precisão no domínio da frequência, este daria origem a muita distorção no domínio do tempo.

1.1.3.6. Síntese das amplitudes harmônicas e desvios de frequência

De acordo com a teoria de séries de Fourier, um sinal analisado pode ser sintetizado usando-se

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k(t) e^{j2\pi k f_a t} \quad (1.15a)$$

$$= c_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{c}_k(t) e^{j2\pi k f_a t} + \tilde{c}_{-k}(t) e^{-j2\pi k f_a t}) \quad (1.15b)$$

$$= A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cos(2\pi k f_a t + \theta_k(t)) \quad (1.15c)$$

$$= A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cos(2\pi(k f_a t + \int_0^t \Delta f_k(t) dt) + \theta_{k_0}), \quad (1.15d)$$

onde $k \geq 1$,

$$A_k(t) = 2 |\tilde{c}_k(t)| = 2\sqrt{(\text{Re}(\tilde{c}_k(t)))^2 + (\text{Im}(\tilde{c}_k(t)))^2}, \quad (1.15e)$$

$$\theta_k(t) = \text{atan2}(\text{Im}(\tilde{c}_k(t)), \text{Re}(\tilde{c}_k(t))), \quad (1.15f)$$

$$\theta_{k0} = \theta_k(0), \quad (1.15g)$$

$$\Delta f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_k(t)}{dt}, \quad (1.15h)$$

e onde $\tilde{c}_k(t)$ está definido na Eq. 1.6a.

A expressão 1.15d resulta em uma equação geral para síntese com variação no tempo, e $A_k(t)$, $\Delta f_k(t)$, e θ_{k0} são os parâmetros que devem ser conhecidos para proceder esta síntese. No entanto, para os sinais de áudio reais, são necessários apenas um número finito de harmônicos (K) que é dado por:

$$K = \text{floor}(0.5 f_s / f_a), \quad (1.15i)$$

onde $0,5 f_s$ é a frequência de Nyquist (O Teorema de Nyquist garante que a frequência de amostragem de um sinal analógico, para que possa posteriormente ser reconstituído com o mínimo de perda de informação, deve ser igual ou maior a duas vezes a maior frequência do espectro desse sinal).

Outro ponto que deve ser lembrado reside no comando “*floor*” do *software* Matlab, que serve para arredondar o número para o menor inteiro mais próximo do valor aplicado.

1.1.3.7. Reconstrução de sinais (ressíntese) e do filtro passa-banda (“*equivalent bank*”)

Teoricamente, se todas as saídas do filtro passa-banda são combinadas, o sinal original pode ser reconstruído com precisão, independentemente das componentes das frequências do sinal alinharem-se com as frequências centrais de filtragem utilizando:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_k(t) = s_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{s}_k(t) + \tilde{s}_{-k}(t)) \approx s(t). \quad (1.16a)$$

A Equação 1.16a torna-se uma identidade importante devido a sua semelhança com funções de transferência de um filtro passa-banda adicionando-se 1,0 ou próximo disso. Tomando-se os resultados da transformada de Fourier:

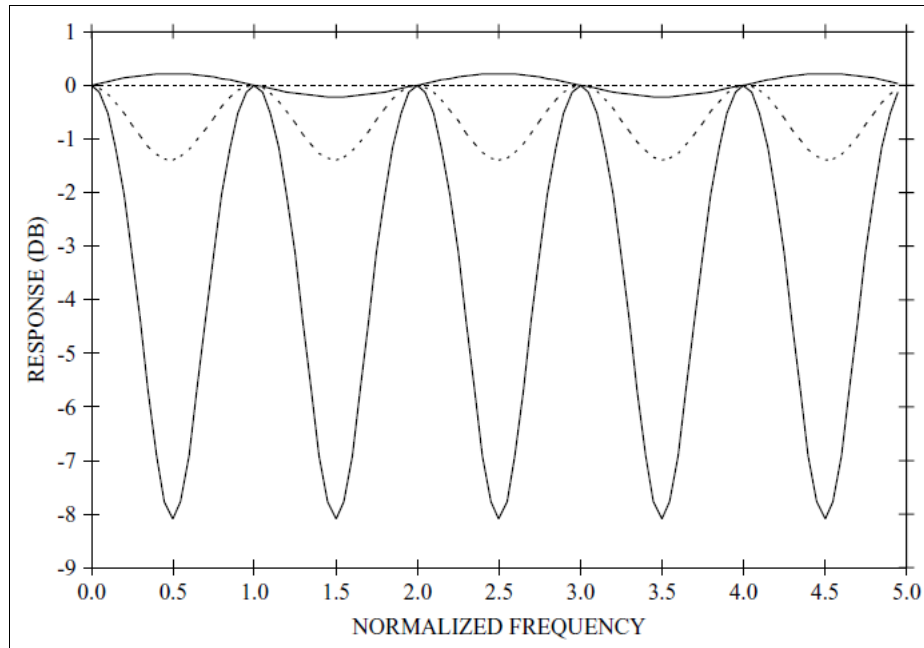
$$\hat{S}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(f - kf_a)S(f) = S(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(f - kf_a) = S(f)W_{\text{sum}}(f). \quad (1.16b)$$

onde $\hat{s}(t)$ é o sinal sintetizado.

Nota-se que $W(f - kf_a)$ é a transformação passa-banda aplicada à janela de passa-baixa, ou seja, a função de resposta $W(f)$ acaba sendo deslocada para a direita pela quantidade kf_a . Assim, se o sinal sintetizado $\hat{s}(t)$ for igual a $s(t)$ original, acrescenta-se a unidade [isto é, $W_{\text{soma}}(f) \equiv 1,0$] dependendo se a soma das funções janela deslocadas formam um banco de filtros de harmônicos (ver Figura 4).

A Figura 6 mostra estes resultados para quatro funções da janela discutidas acima, onde a frequência é normalizada por f_a . Cada soma é composta por 25 respostas de filtro passa-banda individuais, variando de $k = -10$ até $k = 15$, mostrando apenas $0 \leq k \leq 5$. Para um número infinito de filtros, a resposta resumida da janela retangular é teoricamente 1,0, independente da frequência, o que apresenta convergência lenta e mostra uma variação de um número finito. Por outro lado, a resposta da janela Hanning converge rapidamente para 1,0, com a resposta apresentando uma ondulação 1,4 dB, que é provavelmente difícil de ser detectada auditivamente. No entanto, a resposta da janela Blackman-Harris varia de 8,1 dB entre os centros de banda e centros de meia-banda. Assim, a janela de Blackman-Harris, que dá resultados exatos para um sinal periódico de frequência f_a , não funciona bem para o banco de filtros de harmônicos quando aplicada à sinais cujas frequências periódicas variam substancialmente em harmônicos de f_a . No entanto, deve-se dizer que, se estreitarmos um pouco a janela de Blackman-Harris, aumentando assim sua resposta de frequência de passa-baixa, poderia ser obtido um melhor efeito global, mesmo que as respostas dos harmônicos de f_a não fossem mais zero.

Figura 11 – Sobreposição para análise



Legenda: Somas de sobreposição para a análise de respostas da aplicação de filtro passa banda $W((f - kf_a) / f_a)$ para $k = -10, -9, \dots, 15$: janela retangular (curva sólida superior), de Hanning (curva pontilhada), de Hamming (curva tracejada), e Blackman-Harris (curva sólida inferior). Estas dão as respostas de frequência geral de ressíntese de um sinal de entrada arbitrário.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

1.1.3.8. Implementação do sinal amostrado

Embora uma implementação analógica do analisador de tempo contínuo descrito acima seja uma possibilidade, a implementação de um sinal “amostrado” num computador é muito mais prática. Isto requer que o sinal seja armazenado como uma série de amostras de $s(n / f_s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde f_s é a frequência de amostragem. Claro que, a entrada de “samples” numa fonte analógica requer um conversor analógico-digital (ADC), e a reprodução a partir do computador requer um conversor digital-analógico (DAC). A frequência de amostragem típica, que é frequentemente usada em aplicações de informática e de discos compactos (CDs), é de 44.100 Hz. Esta seria alta o suficiente para que as frequências de sinal de até 20.000 Hz, que correspondem, mais ou menos, ao limite superior da audição humana, sejam bem resolvidas.

1.1.3.9. Passo de análise

O objetivo do passo de análise é calcular as fases iniciais, amplitudes e desvios de frequência dos harmônicos k do sinal de entrada para uma série de intervalos de tempo i , que ocorrem a uma taxa significativamente mais baixa do que a taxa de amostragem. Obtém-se

$$\tilde{c}_k(n/f_s) = f_a \sum_{m=n-N/2}^{n+N/2-1} w'((n-m)/f_s) e^{-j2\pi k f_a m/f_s} s(m/f_s)/f_s, \quad (1.17a)$$

onde $\tilde{c}_k(n)$ é o sinal “sampleado” ou seja “copiado”, $N \cong P f_s / f_a$ é o comprimento da função de janela w' em amostras e w' é a versão normalizada de w , ou seja, $w'(\) = w(\) / f_a$. e

Para as funções da janela discutidas nas seções anteriores, $P = 1$ para a janela retangular, $P = 2$ para o Hamming e funções da janela de Hanning, e $P = 4$ para a janela de Blackman-Harris de quarta ordem, de modo que N corresponde a um, dois, ou quatro períodos da frequência f_a . O centro da função janela ocorre quando $n = m$.

Desta equação, podemos gerar ainda

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k(n) &= \frac{f_a}{f_s} \sum_{m=n-N/2}^{n+N/2-1} w'(n-m) e^{-j2\pi k m f_a / f_s} s(m) \\ &= \frac{P}{N} \sum_{m=n-N/2}^{n+N/2-1} w'(n-m) e^{-j2\pi P k m / N} s(n). \end{aligned} \quad (1.17 \text{ b e c})$$

Lembrando-se que todas essas equações podem ser pensadas como aproximações discretas de

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k(t) &= f_a \int_{t-\frac{P}{2f_a}}^{t+\frac{P}{2f_a}} \frac{w(t-\tau)}{f_a} e^{-j2\pi k f_a \tau} s(\tau) d\tau \\ &= f_a \sum_{p=0}^{P-1} \alpha_p \int_{t-\frac{P}{2f_a}}^{t+\frac{P}{2f_a}} \cos(2\pi p f_a (t-\tau)/P) e^{-j2\pi k f_a \tau} s(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.9)$$

que representa uma aplicação específica da Equação (1.6a) em termos da soma dos valores de N , onde N representa números pares. Como pode ser feita usando um pequeno valor óbvio de N (por exemplo, $N = 4$), esta fórmula representa uma amostragem assimétrica de $w'(\)$, com $N / 2$ pontos para o lado esquerdo e $(N / 2) - 1$ pontos para o lado direito. Isso pode ser facilmente corrigido com uma ligeira mudança da função $w'(\)$, de 0,5 pontos. Além disso, a Transformada Rápida de

Fourier (FFT) é usualmente utilizada para o computação, que, para a maioria dos algoritmos significa que: (1) a Equação 1.17c deve estar na forma de Transformada Discreta de Fourier (DFT) e (2) N deve ser uma potência de 2.

Considerando o requisito de que N seja uma potência de dois, o sinal $s(n)$ tem que ser sampleado, a fim de produzir exatamente $N = 2^M$ pontos, onde M é um número inteiro. Por exemplo, se um tom de 261,6 Hz (dó central) é digitalizado em uma taxa de amostragem de 44.100 Hz e analisado utilizando uma janela de Hamming ($P = 2$) de largura $2 / f_a$ e, em seguida, $Pf_s / f_a = 337,16$, $N = 512$, o tom da nova taxa de amostragem é 66,969.6 Hz. O método programado por Maher (1989) para a utilização no pacote de análise / síntese SNDAN (BEAUCHAMP, 1993) envolve uma função sinc - janela Hamming com o sinal de entrada, e o resultado “upsampled” é linearmente interpolado.

Para o requisito da transformada rápida de Fourier (FFT), a substituição $m \leftarrow (m + n - N / 2)$ é feita na Eq. (1.17c), resultando em

$$\tilde{c}_k(n) = e^{j\pi k P(1-2n/N)} \frac{P}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w'(N/2 - m) s(m + n - N/2) e^{-j2\pi k P m / N}. \quad (1.19a)$$

Com $P = 1$, a soma da equação (1.19a) está na forma correta para a Transformada Discreta de Fourier (DFT). No entanto, com $P > 1$, Eq. (1.19a) indica a análise apenas nas frequências $P / N, 2P / N, 3P / N, \dots$, ao passo que a DFT é definida por todas as frequências de $0, 1 / n, 2 / n, 3 / N \dots$. Este problema é resolvido, obtendo-se a FFT de todas as frequências (substituindo kP por k' e deixando $k' = 0, 1, 2, \dots$) e, em seguida, mantendo apenas os componentes necessários (isto é, $k' = P, 2P, 3P, \dots$). Por exemplo, para $P = 2$, todos os harmônicos de $0,5 f_a$ são computados em primeiro lugar e, em seguida, os componentes ímpares são jogados fora, mantendo os pares, que correspondem aos harmônicos de f_a .

Outra implicação da Equação 1.19a é que $\tilde{c}_k(n)$ tem de ser calculado para todos os valores inteiros de n . No entanto, verifica-se que $\tilde{c}_k(n)$ pode ser corretamente representado por um número consideravelmente menor de amostras, devido à baixa largura de banda inerente a esta função. Considerando que a largura de banda de $\tilde{c}_k(n)$ esteja confinada a um valor igual a f_a , o que é aproximadamente verdadeiro para cada uma das funções janelas discutidas acima (exceto para a janela retangular), $\tilde{c}_k(n)$ pode ser minimamente sampleado à uma frequência de igual a $2 f_a$, o que corresponde a dois pontos por período do sinal ou pontos $2P$ de

entrada sampleada uniformemente dentro da janela do ponto N . A análise da amostra de espaçamento ou tamanho do salto (em sinais sampleados) é então $H = 0,5 N / P$, ou seja, $0,25 N$ para o Hamming ou Hanning ou $0.125N$ para a janela de Blackman-Harris. Portanto, os valores só devem ser computados para $n = Hi$, onde i é o número do quadro, de modo a obtermos

$$\tilde{c}_k(Hi) = e^{j\pi k(P-i)} \frac{P}{N} X(Hi, Pk), \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.19d)$$

Esta é uma DFT com um multiplicador constante (P / N) e um desvio de fase adicional de $\pi k (P - i)$. Como a mudança de fase é sempre um número inteiro múltiplo de π , é equivalente a um desvio ou de 0° ou de 180° .

Os cálculos de amplitude (magnitude), fase e frequência decorrem das Equações 1.15e - 1.15h. Em primeiro lugar, as partes real e imaginária de $\tilde{c}_k(Hi)$, que resultarão naturalmente de uma FFT ou DFT, sendo obtidos como $a_k(i)$ e $b_k(i)$, respectivamente. Esta é, essencialmente, uma questão de calcular a diferença entre a fase de cada quadro e a do quadro anterior, multiplicando o resultado por um fator de escala adequado. No entanto, se a fase for avançada e cruzar a fronteira de $+\pi$, ela saltará imediatamente negativa até ser ligeiramente maior que $-\pi$, o que não significa que a frequência vire negativa de repente. Inversamente, se a fase regredir e atravessar a fronteira $-\pi$, vai saltar positiva para ser um pouco menos do que $+\pi$, o que implica falsamente numa frequência positiva. É melhor pensar que a fase está progredindo em torno de um círculo e escolher a diferença de fase que seja menor nesse regime angular. Uma maneira de lidar com este problema seria usar a função módulo:

$$\Delta\theta_k(Hi) = \text{mod}(\theta_k(H(i+1)) - \theta_k(Hi); -\pi, \pi), \quad (1.20d)$$

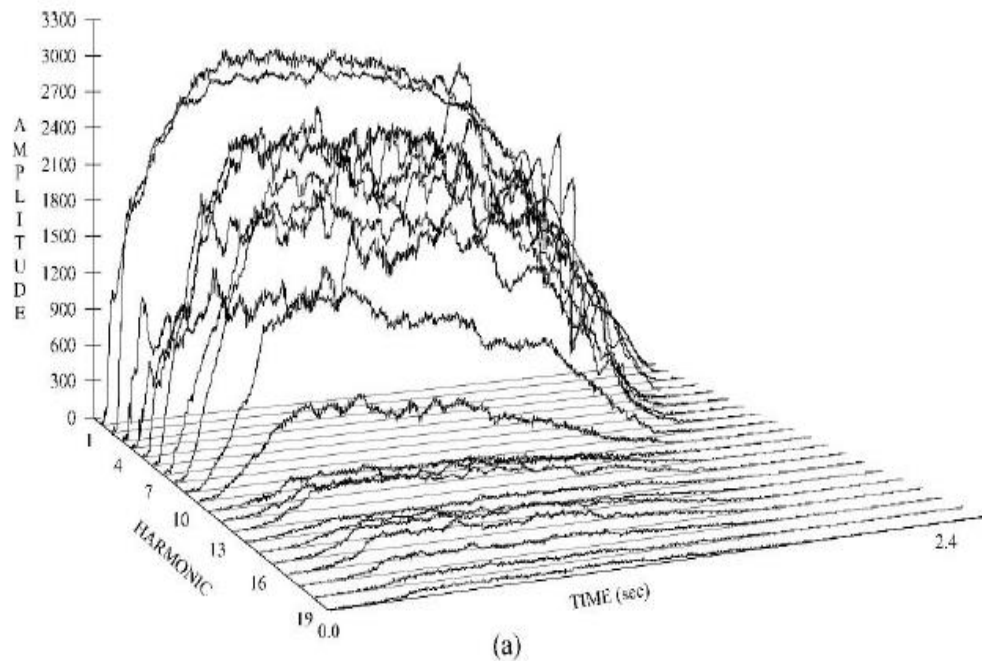
que confina automaticamente a fase para o intervalo $[-\pi, \pi]$.

Os desvios de frequência são os preferidos para o armazenamento de arquivos sobre as fases, porque eles são intuitivamente mais úteis para a análise de dados de som e de manipulação. Assim, segundo este projeto, um arquivo de análise contém as fases harmônicas iniciais e, para cada número harmônico e seu quadro, os pares de desvios amplitude/frequência $\{\{A_k(Hi), \Delta f_k(Hi)\}, k = 1, \dots, K\} i = 0, \dots, I - 1\}$, onde i é o número total de quadros.

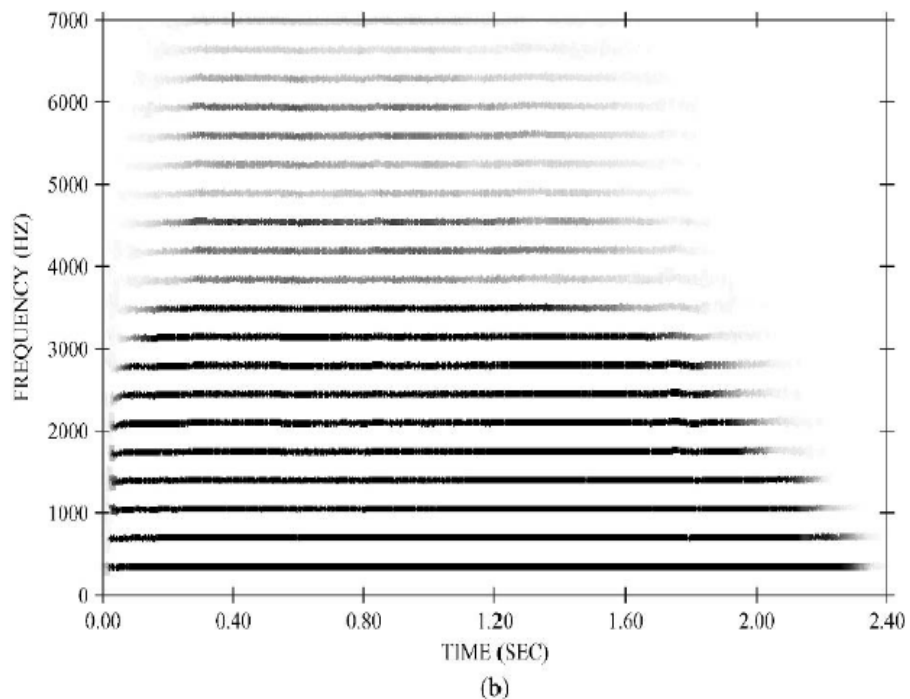
A Figura 12 mostra a análise do banco fixo de filtros de um trompete emitindo um fá4 (F_4) tocado *ff* (fortíssimo, dinâmica de execução de notas do trompete) com

análise de frequência $f_a = 350$ Hz, em termos de frequência comparada com a amplitude e o tempo. A figura 12.a é uma visualização 3D que possui a amplitude como dimensão vertical (desvios de frequência não são mostrados) e a figura 12.b é uma exibição 2D mostrando a frequência fundamental e os harmônicos em função do tempo onde as partes mais escuras das curvas descrevem as maiores amplitudes dos harmônicos.

Figura 12



(Legenda disponível na página seguinte)



Legenda: Análise da variação temporal de um trompete emitindo um fá 4 (F_4) (350 Hz) tocado ff: (a) gráficos dos harmônicos envolvidos na escala amplitude X número de harmônicos X tempo (3D). (b) gráficos dos harmônicos em frequência X tempo (2D). A amplitude é indicada pela variação de escuridão no gráfico 2D.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

1.1.3.10. Síntese de Passo

A síntese pode ser feita usando as FFTs inversas e com uma sobreposição adicional de janelas adjacentes ou sínteses senoidais (banco oscilador) aditivas simples. Com a sobreposição adicional é preciso tomar cuidado, pois o efeito da função janela de análise pode desaparecer. Isso pode ser observado para as janelas em termos de cossenos, quando elas são sobrepostas com os centros de janelas espaçadas de $0,5 / f_a$. Assumindo que não haja alteração de escala de tempo, é necessário fazer manipulações no espectro que podem ser feitas na amplitude dos harmônicos e na frequência, e ainda os dados de entrada devem ser convertidos em partes real e imaginária para uso da FFT inversa.

A principal vantagem deste método comparado à síntese aditiva de senóides é o aumento da velocidade de síntese, quando um grande número de harmônicos é usado.

Com a variação de tempo da síntese aditiva senoidal, a computação é muito direta e baseia-se na fórmula seguinte, derivada da Equação 1.15d [com o termo $A'_0(t)$ omitido]:

$$\hat{s}(n) = \sum_{k=1}^K A'_k(n) \cos \left[\frac{2\pi}{f_s''} \left(kf_a n + \sum_{m=0}^{n-1} \Delta f'_k(m) \right) + \theta_{k_0} \right], \quad (1.21a)$$

em que f_s'' é a síntese da amostra de frequência, $A_k(n)$ e $\Delta f'_k(n)$ são os harmônicos de amplitude da síntese e desvios de frequência para o harmônico da amostra n , respectivamente.

Com a síntese aditiva, há algumas questões a se considerar. Primeiro, como o contador da amostra n avança para além do zero, o argumento do cosseno avança para $2\pi(kf_a + \Delta f'_k(n)) / f_s''$ em cada amostra, dando

$$\hat{s}(n) = \sum_{k=1}^K A'_k(n) \cos(\Theta_k(n)), \quad (1.21b)$$

onde $\Theta_k(n)$, a "fase de síntese total", é calculada recursivamente usando

$$\Theta_k(n+1) = \text{mod} \left(\Theta_k(n) + \frac{2\pi}{f_s''} (kf_a + \Delta f'_k(n)); -\pi, \pi \right). \quad (1.21c)$$

Em segundo lugar, como no passo de análise, A_k e Δf_k só são computados para os limites do quadro, ou seja, a cada H na taxa de amostragem de análise, há a questão de como a interpolação de A_k e Δf_k fica entre esses limites. Nos próximos quatro métodos de seções para a reconstrução da fase, utilizando a 0-ésima (constante), a primeira (linear), a segunda (quadrática) e a terceira (cúbica), interpolações de fase em ordem são examinadas.

Em terceiro lugar, é desejável combinar as fases de análise com as fronteiras do quadro "Síntese de desvio de fase", que pode ser definida a partir da Equação 1.21a como

$$\theta'_k(n) = \frac{2\pi}{f_s''} \sum_{m=0}^{n-1} \Delta f'_k(m) + \theta_{k_0}, \quad (1.21d)$$

ou de forma recursiva utilizando

$$\theta'_k(n+1) = \theta'_k(n) + \frac{2\pi}{f_s''} \Delta f'_k(n). \quad (1.21e)$$

1.1.3.11. Amplitudes constantes por partes e frequências

Com amplitudes constantes por partes e frequências, o formato de onda recriado por "ressíntese - identidade" (ressíntese sem quaisquer modificações espectrais) representa a amplitude do sinal original modulado pela função de janela de análise. No caso Hanning ou Hamming, são utilizados quatro quadros por janela, de modo que a parte da janela usada na síntese varie em amplitude entre 0,8536 e 1,0, variação com cerca de 1,4 dB. Isto poderia ser compensado através da multiplicação por uma função inversa. Mudar meramente as amplitudes do espectro costuma produzir resultados semelhantes, mas quando as frequências ou a escala de tempo são alteradas, resultados imprevisíveis podem ocorrer. A fase de compensação da análise é exatamente igual. No entanto, a objeção principal deste método é a descontinuidade de frequência nos limites.

1.1.3.12. Amplitude linear por partes e interpolação de frequências

É o método mais comumente usado, trabalhando com amplitudes e frequências, são interligadas linearmente entre os limites do quadro. Assim,

$$A'_k(n) = \frac{H'(i+1) - n}{H'} A_k(Hi) + \frac{n - H'i}{H'} A_k(H(i+1)), \quad H'i \leq n < H'(i+1),$$

$$\Delta f'_k(n) = \frac{H'(i+1) - n}{H'} \Delta f_k(Hi) + \frac{n - H'i}{H'} \Delta f_k(H(i+1)),$$

$$H'i \leq n < H'(i+1). \quad (1.23 \text{ a e b})$$

Enquanto este funciona muito bem em geral (principalmente porque ouvidos humanos são relativamente insensíveis a erros de fase de alteração lenta), pode ser demonstrado que a menos que a frequência seja constante, a Equação 1.23b

resultará em valores com erros de fase nos limites do quadro e, a menos que a frequência seja fixa, este erro vai se acumular quadro a quadro.

1.1.3.13. Interpolação quadrática de fases por partes

Com este método, as fases dos harmônicos são combinados nos limites do quadro quando as frequências são comparadas a meio caminho entre os limites. Como visto anteriormente, a frequência varia linearmente com o tempo. O deslocamento da fase é reconstruído utilizando uma série de parábolas, cada uma das quais estendidas desde o ponto médio de um quadro até o ponto médio do seguinte.

Esse processo pode ser aplicado à interpolação dos valores de amplitude e o método de interpolação quadrática funciona muito bem. No entanto, uma grande desvantagem é que ele tem de ser aplicado ao sinal como um todo, ao invés de observar como o sinal progride de forma recursiva. Portanto, seu uso é restrito a aplicações fora do tempo real e sobre arquivos de som bastante curtos. Ele funciona muito bem em instrumentos musicais de tons únicos.

1.1.3.14. Interpolação cúbica de fases por partes

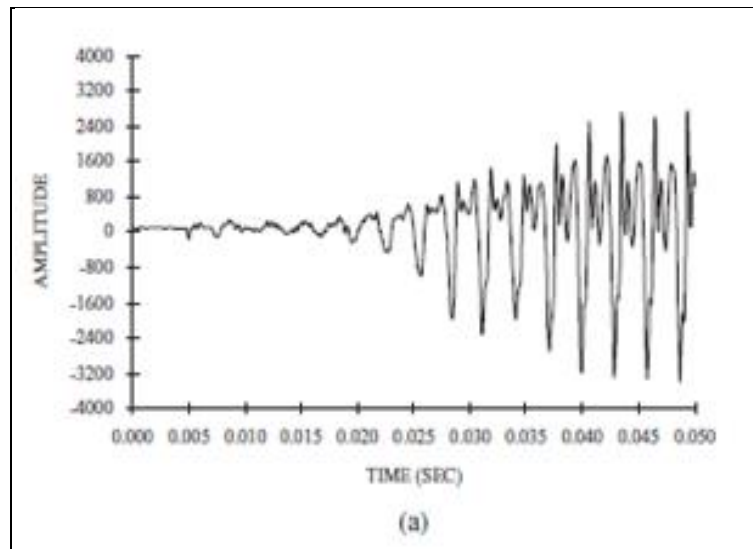
Nesse caso, presume-se que ambas as fases e as frequências sejam conhecidas no início e no final de cada quadro. Ao afirmar isso, a continuidade da frequência e sua fase podem ser garantidas e ao contrário do caso de segundo grau, cada segmento de quadro é calculado de forma independente.

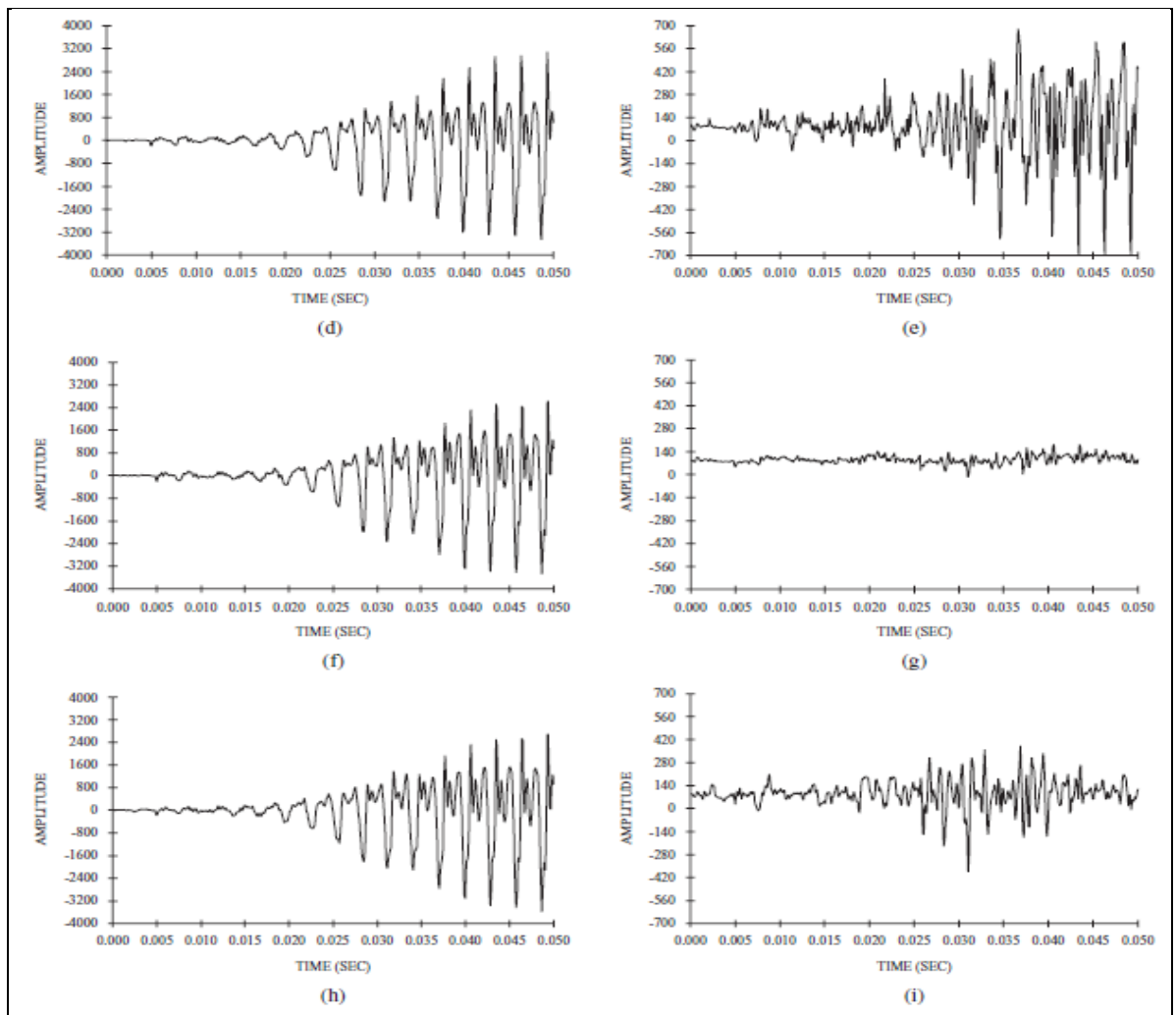
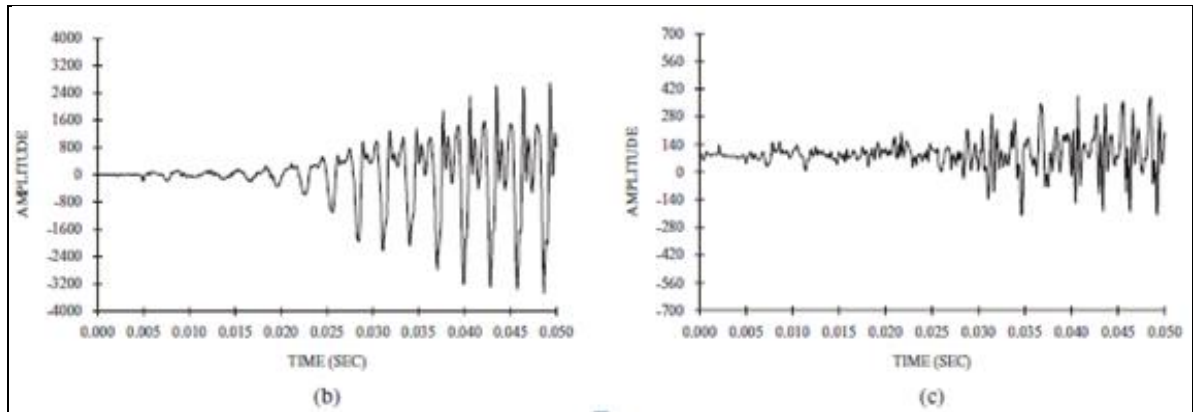
Comparado com o método quadrático, a principal vantagem do método de interpolação cúbica é que cada quadro é tratado separadamente, o que não é um problema com aplicações em tempo real, exceto no tempo envolvido no cálculo de cada quadro. Além disso, tanto a fase quanto a frequência são contabilizadas em cada fronteira de quadro, não podendo ocorrer grandes erros de fase relativa entre

esses quadros. Assim, o método cúbico normalmente funciona bem para aplicações de tempo alongado. No entanto, Ding e Qian (1997) demonstraram que o método quadrático é mais estável em face das fases iniciais aleatórias e pequenas frequência fixa.

A Figura 13 compara os primeiros 50 ms originais do sinal de um trompete emitindo F_4 *fortíssimo* com ressínteses do tom com frequências lineares por partes, frequência constante por partes, a fase quadrática e interpolação da fase cúbica. Ele também dá as diferenças entre o original e os quatro casos. A partir das diferenças, parece que a quadrática por partes é muito superior aos outros métodos. No entanto, segundo BEAUCHAMP (2007), ao ouvir os sinais de diferença, fica evidente que a cúbica por partes produz o resultado perceptivelmente menor, porque, ao contrário dos outros métodos, que ainda mantêm o tom do original, pelo menos neste caso, produz-se um residual *pitchless* de banda larga.

Figura 13



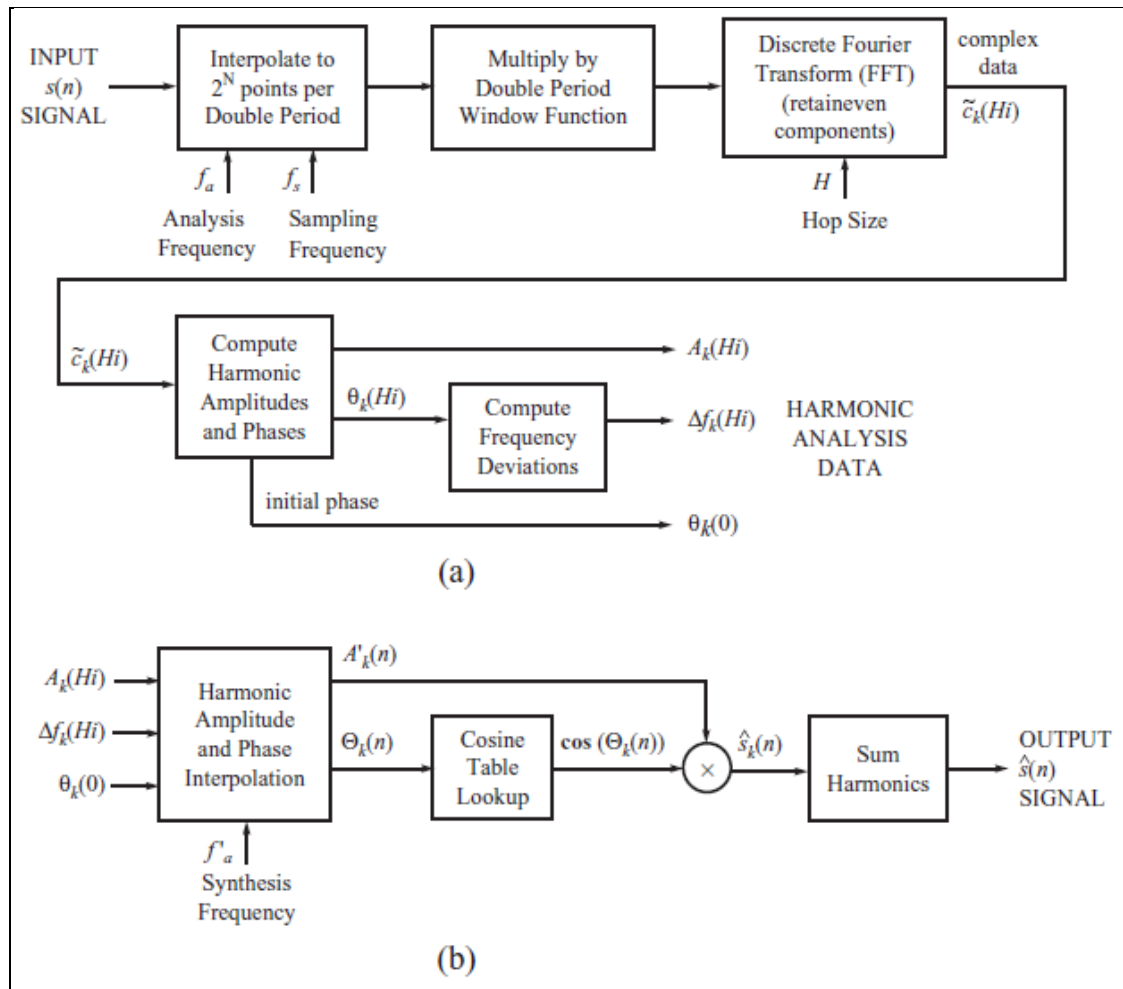


Legenda: Primeiros 50 ms do original (parte superior central), resintizada (à esquerda), e os sinais de diferença (à direita) para o tom trompeta F4 usando vários métodos de interpolação fase: (a) originais, (b) e (c) a frequência lineares por partes; (d) e (e)-seccionalmente frequência constante, (f) e (g) fase quadrática por partes, (h) e (i) a fase cúbica por partes.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

Em resumo, a Figura 14 dá um diagrama de blocos de um sistema de análise / síntese baseado na abordagem do filtro de banco fixo (vocoder de fase).

Figura 14



Legenda: Diagrama de blocos do banco de filtros do método fixo de análise/ressíntese do vocoder de fase, onde n = número da amostra, k = número harmônicos, e i = número do quadro: (a) o método de análise, (b) o método aditivo de ressíntese com base em dados de análise harmônica.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

1.1.3.15 Método de rastreamento de frequência espectral

Quando o sinal de entrada é mais complexo do que um único som, como um tom de trombeta de passo fixo, o método de análise / síntese harmônica pode não ser suficiente. Isto é verdade para os sons que contêm parciais inarmônicos ou ruído

significativo, mas é especialmente verdadeiro para sinais com grandes variações de afinação ou que contenham vários timbres de instrumentos onde estes são variados. O método de rastreamento de frequência ou MQ, que foi introduzido por McAulay e Quatieri (1986) para debates e aperfeiçoado por Smith e Serra (1987) para aplicações na música, parte da suposição de que um sinal sonoro é composto por coleções de senóides com frequências arbitrárias (ou seja, sem proporções particulares entre as frequências) e que cada uma das componentes da frequências não aparecem, necessariamente, durante toda a duração do sinal. De fato, alguns componentes da frequência podem ter duração extremamente curtas, normalmente aqueles que formam grupos de imitação com rajadas de ruído.

1.1.3.16 Análise do controle de frequência

É sabido que os componentes individuais da frequência, ou seja, senoidais ou parciais, podem ser observados e medidos como picos, numa transformada de Fourier discreta, se as frequências destes componentes são espaçadas de forma substancialmente mais afastadas do que as frequências de análise de bin^2 e a largura da janela de análise função de banda. Um critério útil é que, para frequências de componentes adjacentes, por exemplo, f_1 e f_2 a serem escolhidas, estas devam ser separadas por, pelo menos, uma largura de banda da função janela determinada por:

$$\Delta f_w = B_w \frac{f_s}{N} = B_w \Delta f_b, \quad (1.32)$$

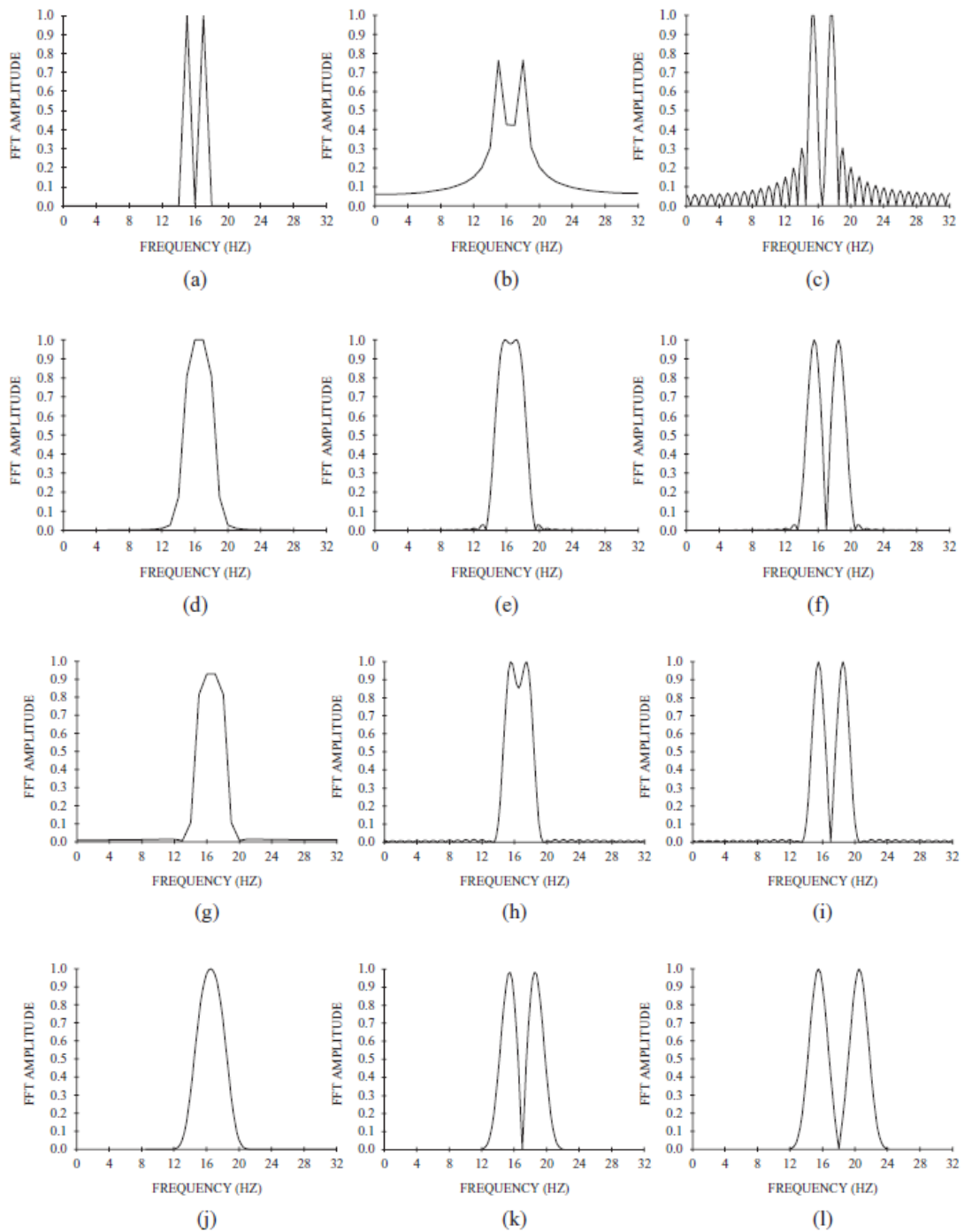
onde B_w é a janela de largura de banda em caixas, f_s é a frequência de amostragem, N é o número de amostras na função de janela, e Δf_b é a separação bin de frequência.

² O histograma de um ruído apresenta agrupamentos de um conjunto de dados em células ou *bins*. A faixa dinâmica (*range*) dos dados é dividida em um determinado número de bins de mesmo "comprimento".

Com base na janela de transformação da primeira frequência zero, $B_w = 2$ para a janela retangular, $B_w = 4$ para o Hanning e janelas de Hamming e $B_w = 8$ para a janela de 4-termo-Blackman-Harris.

A Figura 15 ilustra a análise do espectro de magnitude de duas senóides sobrepostas em frequências diferentes para vários tipos de janelas e separações de frequência. Os zeros de preenchimento, segundo o qual o comprimento da FFT é artificialmente aumentado por zeros adicionados para a esquerda e para a direita da função janela, pode ser usado para revelar a verdadeira natureza das funções de janela de transformação. Neste caso, as transformações de magnitude de duas janelas de funções de transformação, uma para cada frequência de senóide, são sobrepostas. Com f_s ajustada para ser igual a N , as frequências de bin têm valores inteiros. Para a janela retangular, se f_1 e f_2 são ajustados para valores inteiros, separados por pelo menos 2, os picos são claramente discerníveis. No entanto, se, com a mesma separação estabelecida para as frequências a meio caminho entre os números inteiros (pior caso), eles são menos distintos de zero a não ser que preenchimentos sejam usados. Para uma janela de Hanning ou Hamming e o mesmo espaçamento de componente de frequência, os componentes não podem ser separados mesmo quando é usado preenchimento de zero. No entanto, quando o espaçamento de frequência é aumentado para 3, a separação é muito clara. Por janela 4 -termo - Blackman-Harris, um espaçamento de 3, também funciona bem. Assim, uma separação de três frequências de bin é suficiente para os três tipos de janela. Além disso, nos *sidelobes* de Hanning e Hamming as amplitudes são muito pequenas e enquanto que os *sidelobes* de Blackman-Harris não são visíveis.

Figura 15



Legenda: A Transformada de Fourier Discreta de um sinal de janela que consiste em duas senóides de amplitude única com frequências f_1 e f_2 para diversas funções de janela, com e sem preenchimento de zero. Em todos os casos, a frequência de amostragem é de 64. (a) - (c) respostas das janelas retangulares: (a) $f_1 = 15$, $f_2 = 17$, sem preenchimento a zero, (b) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, sem preenchimento zero; (c) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, com preenchimento zero. (d) - (f) as respostas da janela de Hanning: (d) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, sem preenchimento zero, (e) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, com preenchimento zero, (f) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 18,5$, com preenchimento zero. (g) - (i) as respostas da janela de Hamming: (g) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, sem preenchimento zero, (h) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, com preenchimento zero, (i) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 18,5$, com preenchimento zero. (j) - (l) as respostas da janela Blackman-Harris (todos com

preenchimento zero): (j) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 17,5$, (k) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 18,5$, (l) $f_1 = 15,5$, $f_2 = 20,5$.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

Portanto, a fim de resolver com precisão picos na magnitude de um espectro, suas frequências devem ser separadas por pelo menos três unidades de frequência de bin. Caso contrário, os componentes que aparecem juntos não podem ser separados facilmente. Uma situação típica é onde $f_s = 44,100$ Hz, $N = 1024$, bem como a frequência de separação bin é $\Delta f_b = 43$ Hz. É claro que, nestas circunstâncias, a menor frequência fundamental de um tom harmônico que pode ser analisado corretamente é de cerca de 130 Hz. A resolução de tempo, em termos de largura da janela é $N / f_s = 23$ ms. Indo para as frequências mais baixas por um determinado fator compromete a resolução de tempo pelo fator inverso.

Uma vez que os picos detectados devem ser de pelo menos três compartimentos separados de janela, para cada quadro, o número máximo de picos K_i que pode ser detectado num espectro é $N / 6$. Como a resolução de frequência é $\Delta f_b = f_s / N$, o número máximo de picos (ou parciais) é igual a $f_s / (6 \Delta f_b)$. Por exemplo, se um pico de separação mínima de 40 Hz for necessário, a uma taxa de amostra de 44,100 Hz, um valor de potência de N igual a 2 deve ser escolhido antes, para se obter um valor tão pequeno. A frequência de separação bin máxima utilizável seria de $40/3 = 13,3$ Hz. Uma separação bin de 10,8 Hz é dada por $N = 4096$, de modo que o pico de separação mínima correspondente seja 32,4 Hz, e o número máximo de picos que podem ser resolvidos seria $4096/6 \approx 683$. Assume-se que cada pico corresponde a uma senóide no sinal.

1.1.3.17 Algoritmo de rastreamento de frequências

Supondo-se que os componentes de frequência possam ser resolvidos, o método de controle de frequência consiste nas quatro etapas seguintes:

- 1^a) FFTs sucessivas (correspondentes a quadros) de segmentos em janelas sobrepostas do sinal de entrada são computadas. As funções de janela, tais como a Kaiser com $\alpha = 6.3$, podem ser utilizadas para uma boa separação de pico. Normalmente um fator de preenchimento de zero de pelo menos 1,0 é usado, mas fatores (inteiros) maiores podem ser úteis. As

partes reais e imaginárias da FFT são retidas e os valores de magnitude são computados.

2ª) Para cada quadro I , os picos do espectro de K_i são identificados a partir da magnitude espectral. Cada pico é determinado por três valores de grandeza de FFT consecutivos $A_{\xi-1}$, A_{ξ} , e $A_{\xi+1}$ (ξ é o número de variáveis da FFT bin), onde A_{ξ} é o maior dos três. A frequência estimada e o valor máximo só são encontrados de verdade por interpolação parabólica. O preenchimento de zero ajuda a interpolação porque mais pontos são inseridos automaticamente entre as funções de janela bin e a interpolação é de banda limitada. No entanto, a interpolação direta pode ser implementada por ajuste de uma curva suave para os três pontos. Idealmente, um melhor ajuste deslocado da versão transformada da função janela deve ser usado. Na prática, verifica-se que a montagem de uma forma quadrática da magnitude do registro da função produz resultados adequados com muito menos cálculos. Assim, a frequência de pico é dada por

$$f_k = (\xi + p)\Delta f_{\text{FFT}}, \quad (1.33a)$$

onde

$$p = 0.5 \frac{\log(A_{\xi-1}A_{\xi+1})}{\log(A_{\xi-1}A_{\xi+1}/A_{\xi}^2)}. \quad (1.33b)$$

Em seguida, fase e amplitude de cada pico são calculadas. A amplitude de pico é calculada usando

$$A_k = \frac{A_{\xi}}{(A_{\xi-1}/A_{\xi+1})^{p/4}}. \quad (1.33c)$$

Frequência, amplitude e fase de cada pico (A_k , f_k , θ_k) são, portanto, computadas e mantidas. Outras informações da FFT de bin são descartadas.

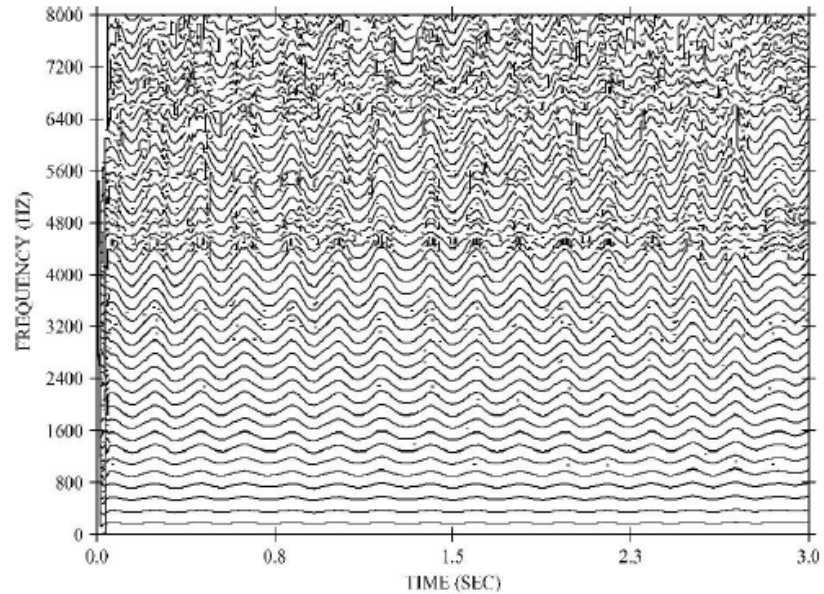
Normalmente, nem todo máximo local é escolhido para ser um pico. Por exemplo, os picos podem ser ignorados, se não estiverem acima de um limiar pré-definido. O limiar pode variar com frequência. Por exemplo, um limite que diminui à medida que aumenta a frequência pode ser desejável, porque mesmo que os componentes da maioria dos sons musicais de maior frequência sejam geralmente mais fracos do que os componentes de

baixa frequência, eles ainda são muito audíveis. Esta variação de limiar pode ser conseguida por pré-processamento do sinal, com um filtro digital simples de primeira ordem e, em seguida, com uma aplicação de um limiar fixo.

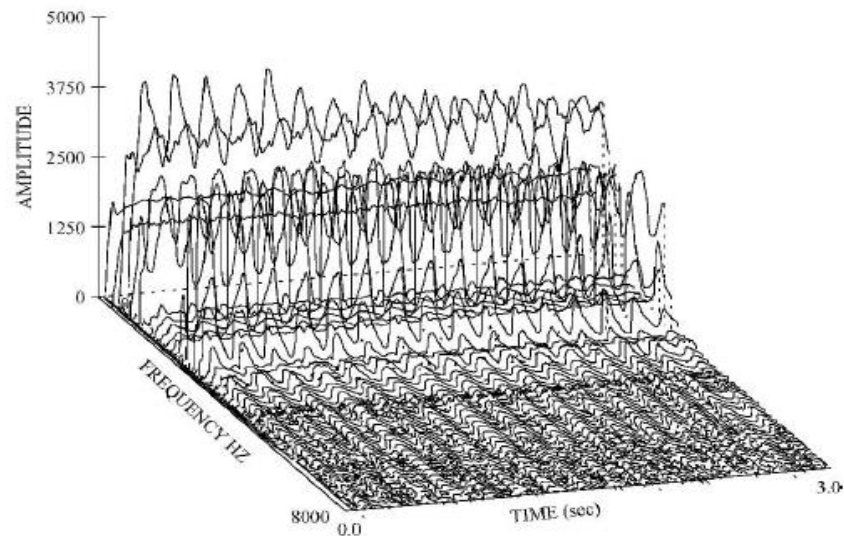
3ª) Faixas de frequência X tempo são formadas conectando-se picos de quadros consecutivos. Este acaba sendo o aspecto mais crucial do método de análise e, provavelmente, não há maneira perfeita de fazê-lo. O procedimento básico é o de encontrar a melhor correspondência entre os picos de quadro i com quadro $i + 1$. Correspondências são tentadas entre as frequências correspondentes que estão juntas. Se o número de picos nos quadros i e $i + 1$ são K_0 e K_1 , respectivamente, e $K_0 > K_1$, algumas das faixas tem que acabar ("morte"). Por outro lado, se $K_0 < K_1$, algumas novas faixas começaram ("nascimento"). Faixas também podem começar ou terminar porque as únicas comparações disponíveis tenham diferenças de frequência excessiva. Mas até mesmo o melhor rastreador de frequência deve olhar para o sinal como um todo, ou pelo menos em pedaços grandes, em vez de apenas alguns fotogramas.

A Figura 16.a mostra um conjunto de faixas para um som de voz de tenor cantado em sol3 (G3) com vibrato. Note que com o método de banco de filtro fixo (vocoder de fase) seria difícil isolar os harmônicos porque quando os desvios de frequência harmônica excedem $0,5 f_a$, neste caso quando o número de harmônicos é superior a cerca de 8, as respostas de filtro começam a se sobrepor seriamente. O acompanhamento da frequência alivia o problema. A Figura 16.b mostra os mesmos dados representados em três dimensões, o que proporciona uma vista da amplitude das várias faixas, assim como as suas frequências, como funções do tempo.

Figura 16



(a)



(b)

Legenda: Análise do controle da frequência de um som de voz de um tenor G3:(a) Display frequência X time 2D que mostra as posições de faixas, (b) Display amplitude X frequência X time 3D que mostra os pontos fortes e as frequências dos diversos harmônicos.

Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

4^a) Dados de pico para cada faixa são gravados em um arquivo. Uma alternativa para dar este resultado é numerar as faixas e dar o número da faixa de cada pico, mas um problema com este método é que o número de

faixas geralmente muda continuamente durante todo o som, para que os números de rastreamento saiam logo da ordem da frequência.

1.1.3.18 Detecção da frequência fundamental

Há alguma controvérsia sobre o uso do termo tom (*pitch*) para significar a frequência fundamental (ou f_0). A maioria dos pesquisadores de comunicação de voz [eg, Hess (1983) e Schroeder (1999)] utilizam os dois termos como sinônimos, enquanto que a maioria dos pesquisadores de ciências auditivas insistem em uma clara distinção entre eles. De acordo com estes últimos, o tom é estritamente uma percepção e não deve ser confundido com a frequência. No entanto, o tom de um som corresponde à frequência de um tom senoidal que é julgado como se fosse igual ao primeiro. Para sinais periódicos, o tom percebido geralmente corresponde à sua frequência fundamental. Por exemplo, se apenas alguns harmônicos superiores são ressintetizados, o tom pode estar associado tanto com o centro da banda harmônica quanto com o máximo divisor comum das frequências harmônicas. Ambiguidades sobre tons também podem surgir quando apenas harmônicos ímpares estão presentes e ocorre falta do componente fundamental. Além disso, no desempenho típico de música, o tom é muito variável, e nem todos os sons são igualmente harmônicos. Alguns sons curtos podem ser muito ruidosos e serão percebidos (pelos ouvintes musicalmente experientes) como tons musicais particulares. Ao contrário do discurso, onde o tom tende a mudar sem problemas ao longo do tempo e é restrito no seu alcance, em passagens de solos musicais típicos, os tons mudam continuamente de um valor relativamente constante para outro, ocorrendo frequentemente grandes saltos e vãos de duas oitavas ou mais se tornam possíveis.

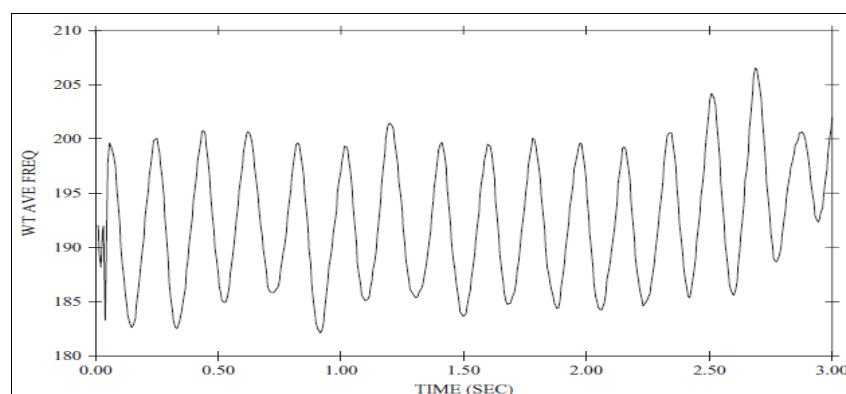
O detector deverá produzir dados de frequência X tempo para as gravações de instrumentos musicais acústicos individualmente. Gravações com reverberação apresentam dificuldades porque ecos, normalmente ignorados pela audição humana, sobrepostos aos sons destinados tendem a confundir os detectores. Em segundo lugar, o detector deve render um gráfico campo X tempo de modo que músicos especialistas concordem que corresponde ao que ouvem. Se o sinal de

entrada é uma gravação pontuada do desempenho escrito, é razoavelmente fácil avaliar a precisão do detector de tom. Por outro lado, se o desempenho é uma improvisação, uma transcrição de algum tipo deve ser produzida antes da avaliação ser feita sendo muito útil uma estimativa da precisão do tom para cada evento. Tal transcrição pode ser produzida utilizando um editor de arquivos sonoros que reproduza os segmentos isolados do arquivo e a determinação do tom comparado a um gerador de tons. O gráfico tom X tempo pode ser comparado a estes dados visualmente ou utilizando um computador para registrar os erros em uma base, nota por nota ou quadro a quadro.

Detectores de tom podem trabalhar diretamente com as amostras no domínio do tempo ou com espectros no domínio da frequência. Em essência, um sinal é comparado com uma versão atrasada da amostra do sinal, seja através da multiplicação dos dois sinais em conjunto fazendo a média ou subtraindo as duas e calculando a média das amplitudes das diferenças ou ao longo de uma certa janela de tempo. No primeiro caso, o primeiro máximo significativo indica o período, ao passo que no último caso o primeiro mínimo significativo indica o período. Assumindo que uma janela suficientemente ampla seja escolhida, espectros no domínio da frequência mostram as posições dos harmônicos, e as posições dos harmônicos podem ser utilizadas para prever a frequência fundamental.

Um gráfico de f_0 por tempo para a voz do tenor, cujos dados espectrais são mostrados na Figura 16, é dado na Figura 17. Um gráfico de f_0 por tempo para uma passagem de um clarinete solo traduzido em unidades igualmente temperadas do tom é mostrado na Figura 18.a. Para comparação, a Figura 18.b mostra a partitura musical correspondente.

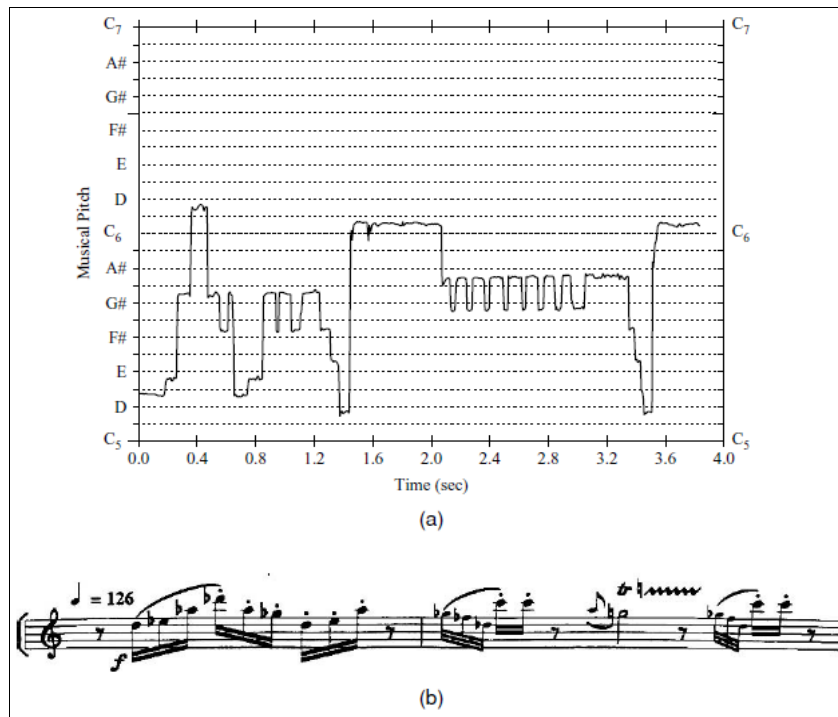
Figura 17



(Legenda disponível na página seguinte)

Legenda: Legenda: Frequência f_0 fundamental X tempo para o som da voz de um tenor G3.
 Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

Figura 18



Legenda: Detecção de tom de uma passagem de clarinete solo: (a) frequência fundamental X tempo, (b) Partitura equivalente.
 Fonte: BEAUCHAMP, 2007.

2 O GRÁFICO DOS SONS NA SALA DE AULA

2.1 Música na aula de Matemática

Não é tão raro conviver com um grupo de professores onde pelo menos um deles saiba tocar um instrumento. Também não é preciso procurar muito para encontrar um professor que faça paródias de algum sucesso do momento para ensinar sua matéria, mas é raríssimo encontrar um professor que utilize, com propriedade, a música no ensino de Matemática ou Física, muito menos em outras disciplinas. O interesse de matemáticos por música e de músicos por matemática existe há tempos, como citado anteriormente, mas a maioria dos professores de Matemática tem receio de fazer um trabalho diferenciado, baseado em teoria musical. Seja levando um instrumento para mostrar alguma propriedade relacionada com sua aula, seja mostrando a relação entre o gráfico disponível em sua lousa e um oscilograma (representação gráfica das oscilações de uma onda), muitas vezes o docente desiste da ideia por achar que esta iniciativa é complicada demais ou, por não conhecer as ferramentas que podem engrandecer sua aula.

O simples fato de que o som é um fenômeno mecânico, onde moléculas vibrantes de ar se empurram estando, ora mais comprimidas, ora mais soltas, já nos permite expressar o som como o grau de compressão em função do tempo. É possível associar a regularidade desses movimentos com a definição do som ouvido bem como sua irregularidade com ruídos. Cabe a pensar em como usar isso em benefício de nossas aulas.

Quando o aluno se depara com a função seno, geralmente no primeiro ano do ensino médio, uma das poucas coisas que ele entende com facilidade é a noção de periodicidade que essas funções têm. Em alguns casos, é citada a existência de picos e vales nesses gráficos, mas nada que não possa ser esquecido após questões que peçam esboços de gráficos mais complicados na semana seguinte. Às vezes, horas são perdidas tentando fazer com que os alunos entendam gráficos complicadíssimos que aumentam o grau de dificuldade da aula em questão de minutos. Coisas do tipo: “Este é o gráfico de $f(x) = \sin(x)$. Já este, é o gráfico de

$\sin(2x)$. Este aqui, é o gráfico de $2 \sin(x)$... Esboce o gráfico de $2 \sin(2x) + 2$ ". Sabemos que a maioria dos concursos que eles almejam não cobra esse tipo de conhecimento por outro lado, há a exigência de compreensão e leitura bem feita de um gráfico. Mostrar os mais variados tipos de gráficos é importante, mas não podemos esperar que sua generalização dependa apenas da observação de uma sequência de exemplos sem aplicação.

2.2 Proposta de atividades para sala de aula

2.2.1 Análise do som produzido por um aluno

Uma experiência interessante pode mudar uma aula de trigonometria: Com o auxílio de um computador munido de algum *software* que capte sons e os converta em mp3 ou algum tipo de arquivo que permita uma análise desse som, de um violão e/ou um microfone, convide um aluno para tocar ou somente cantar sua música preferida para a turma. Todos ficarão, no mínimo, curiosos com o que irá acontecer. Caso não haja voluntários, toque ou cante você mesmo, sem medo de ser julgado. Não se sentindo à vontade, leve alguma música de sua preferência no computador, de modo que esta sirva de objeto de estudo. Após a execução do som, faça a conversão da gravação e utilize o *software* na elaboração do espectro sonoro. Um bom exemplo de *software* para esta atividade seria o Audacity, um programa editor de áudio digital livre desenvolvido por programadores do mundo todo, disponível para Windows, Mac, Linux, dentre outros, que será apresentado através de um exemplo no próximo tópico. Convém ressaltar que este programa também serve para estudos mais detalhados, como os feitos no capítulo anterior, mas recomendamos outros mais específicos como o Matlab e o Labview, ambos pagos.

O gráfico gerado, num primeiro momento, não traz muitas semelhanças com os que aparecem nos livros, até por que estão apresentados de maneira primitiva, sem permitir muitas análises e detalhamentos. Escolha um pedaço deste gráfico

(uma janela, como vimos no capítulo anterior) e faça a sua ampliação. É possível ver neste fragmento, várias semelhanças com gráficos de funções trigonométricas, que podem ser explicadas, de modo mais específico, através do entendimento de argumentos resumidos no capítulo anterior, dependendo do tipo de abordagem optada pelo professor..

É possível mostrar que em ondas com maior amplitude, diferença entre o ponto mais alto (crista) e o ponto mais baixo (vale) é mais significativa pelo fato deste tipo de onda representar sons mais fortes, com muita energia mecânica, como um grito ou um solo de guitarra. Em seguida, é possível mostrar ondas com menor amplitude, onde as diferenças entre os picos e os vales são pequenas, são geradas por um som fraco como o de um sussurro, por exemplo.

Analisando a perspectiva horizontal, é possível mostrar que sons graves produzem espectros mais largos e espaçados, por conta da baixa frequência. Ondas que oscilam mais rápido, mais “espremidas”, são causadas por sons mais agudos, de alta frequência. Desse modo, o professor permite que o aluno associe características importantes de uma senóide, por exemplo, de uma maneira prática, facilitando assim o caráter mnemônico do processo.

O mais fantástico desse tipo de experimento é mostrar que sons diferentes possuem características diferentes dentro de uma mesma análise. Por exemplo, um menino cantando, com voz mais grave, irá produzir um gráfico diferente daquele produzido por uma menina cantando a mesma música, porém com voz mais fina, mesmo que eles estejam em consonância. Acredita-se que homens cantem cerca uma oitava acima das mulheres, dependendo do tamanho ou das características das cordas vocais, conclusão essa feita com base em estudos parecidos ou baseados na experiência de Pitágoras com o monocórdio, o instrumento de uma corda só, na qual estudou-se diferenças tonais nos mais diferentes tipos de comprimento desta corda. Gráficos diferentes podem surgir em sons produzidos por alunos do mesmo sexo, pelo mesmo motivo citado, associado à característica peculiar de cada aluno. Por intermédio dessa experiência, fica fácil para o aluno que “a música é o prazer que a alma humana experimenta quando conta sem perceber que está contando”, frase famosa do matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

Outro *software* muito utilizado na análise mais apurada de espectros sonoros é o Labview que, apesar de não ser um software gratuito, constitui uma poderosa ferramenta disponível para Windows e Mac OS X. Outros softwares podem ser

utilizados de acordo com a disponibilidade e o interesse do professor, como veremos mais adiante.

2.2.1.1. O programa Audacity

Usaremos o Audacity para mostrar como é simples fazer uma atividade produtiva e simples em sala:

2.2.1.2. Roteiro da atividade

1. Baixe o programa Audacity, de acordo com o seu sistema operacional, em: <http://audacity.sourceforge.net/>;
2. Instale-o no computador que pretende utilizar na aplicação da atividade, dando um duplo clique no ícone do software que foi baixado; (Existem instruções detalhadas no site divulgado acima, bem como tutoriais em inglês. Também é possível baixar versões em português na rede, em qualquer site de buscas)
3. Abra o programa; (O ideal é que o usuário faça alguns testes antes de aplicá-lo em sala, de modo a se familiarizar com seus comandos e evitar “surpresas constrangedoras” perante seus alunos)
4. Grave o som a ser analisado: Clique no círculo (último botão da direita) da barra de ferramentas (Fig. 19) localizada no canto superior esquerdo para iniciar a gravação. Deixe gravando pelo tempo que achar suficiente para analisar, lembrando que é preciso escolher um gráfico interessante para aplicação em sala, coisa que pode ser feita apenas observando o espectro produzido em tempo real pelo *software*. Pare a gravação clicando no quadrado (terceiro botão da esquerda para a direita) disponível na mesma barra.

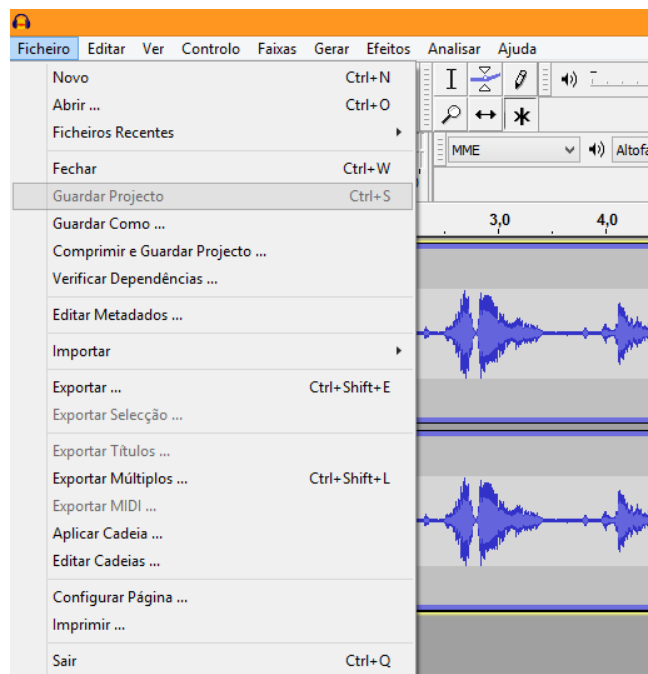
Figura 19 - Barra de ferramentas do Audacity



(É possível importar também áudios em formato MP3 ou WAV disponíveis no computador utilizado. Veja como no site que disponibiliza o Audacity)

5. Salve a gravação feita na opção “guardar projeto” disponível no link “Ficheiro” do menu que aparece na parte superior do *software*, como na figura abaixo.

Figura 20 - Como salvar sua gravação



(É importante salvar devido a problemas com o computador, para realizar edições ou para que se passe alguma atividade para os alunos em cima do gráfico produzido naquele momento)

6. Escolha o trecho de análise e amplie-o usando a lupa (destacado na figura abaixo) com sinal de positivo disponível na barra de ferramentas de medição localizada no canto superior direito (terceira linha) do *software*.

Figura 21 - Ferramentas de ampliação/redução



7. Utilize a ampliação deste e de outros trechos para comparar tal gráfico com ondas trigonométricas, mostrar picos, vales, máximos, mínimos, período, dentre inúmeras aplicações possíveis.
8. Discuta com seus alunos os principais resultados obtidos, passe exercícios ou até mesmo uma avaliação da atividade.

É possível gravar com microfones simples de computadores domésticos ou através da própria captação da placa de som, como consegui, graças à placa de som com captação, em um computador portátil. Nesse caso, não é necessário levar nada além do aparelho e, apesar da baixa qualidade de gravação (obviamente inferior à gravação feita com microfone), é possível fazer análises bem aceitáveis. Outra possibilidade um pouco mais atraente e um pouco menos acessível, seria conectar uma guitarra ou um violão diretamente ao computador, através de um cabo específico de captação (plugue mono de $\frac{1}{4}$ de polegada, como indicado no link fornecido no passo 1 do roteiro da atividade).

Apesar de não ser a maior referência na análise de espectros, o Audacity permite que vários processos descritos no capítulo anterior sejam utilizados, como: análises em janelas (todas descritas anteriormente e mais algumas), análise da frequência (logarítmica ou linear), execução de Phaser, inversão e normalização, dentre outros efeitos possíveis. Também é possível mudar o tom do som produzido a fim de comparar seus gráficos.

Com o auxílio do resumo teórico descrito no capítulo anterior, munido da ressalva de suas dificuldades, é oferecida mais uma opção para que o docente decida sobre a melhor abordagem da análise com sua turma e o nível de profundidade que deseja alcançar em meio aos impasses que cercam o seu compromisso com seus alunos, sobretudo diante do tempo disponível para a execução da atividade perante seu planejamento.

2.2.1.3. Atividade sugerida

Após baixar e instalar o programa Audacity em um computador portátil (usei um *ultrabook*, por conta de sua leveza), pode-se aproveitar a praticidade de transporte para executar a análise em turmas diversas em escolas diferentes. Outra vantagem nesse caso está no fato do aparelho aceitar a gravação direta através do microfone de sua placa de som, desprezando a necessidade de transporte de microfone externo. Esta atividade torna-se muito mais interessante quando a escola disponibiliza um retroprojetor para que o aluno possa acompanhá-la com a comodidade de sua carteira, de onde pode, inclusive, fazer alguma anotação necessária.

Com o *software* aberto, pegamos um violão e tocamos uma música de nossa preferência. Nesse exemplo, foram tocadas as músicas “Back in Black” da banda AC-DC e “Smoke on the water” da banda Deep Purple, dois clássicos do rock. Separamos os gráficos gerados pelos riffs (acordes ou notas características por se repetirem em trechos importantes da música) mais marcantes das duas músicas, aproveitando-se que estes se encontram logo no início da execução. Os gráficos obtidos em mostrados nas Figuras 22, 23 24 e 25 mostram a evolução do sinal no tempo.

Figura 22 - Riff de *Back in Black* – AC DC

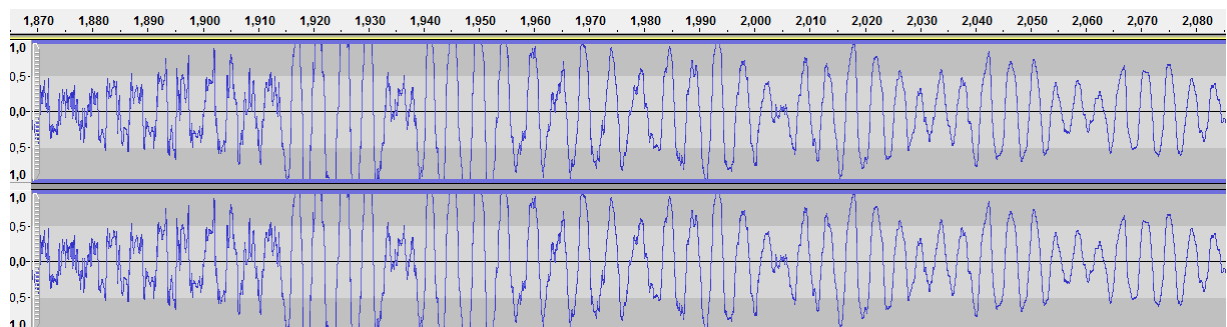
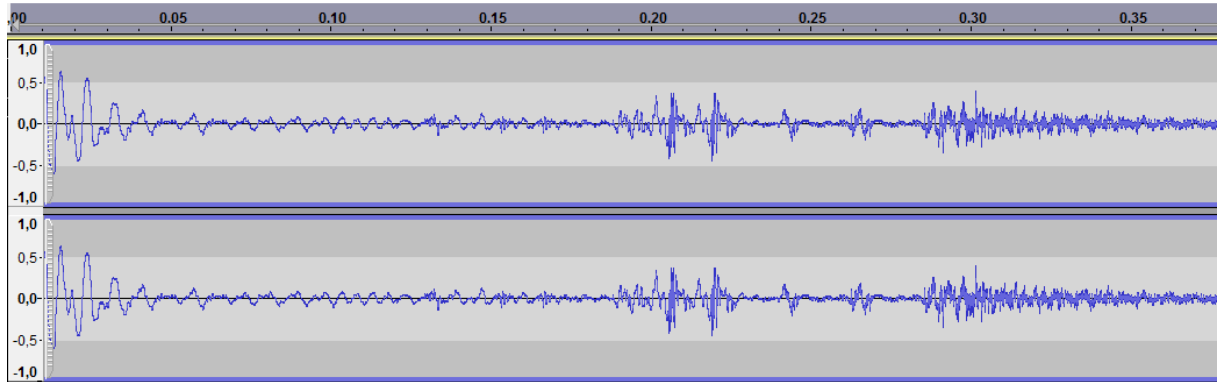


Figura 23 - Riff de *Smoke on the Water* – Deep Purple



Num primeiro momento, só é possível perceber que o gráfico possui alguns pontos muito parecidos que, salvo intensidade do executante, demonstram a periodicidade da onda na reprodução de sons iguais. Esta aparência é devida ao formato da janela escolhida, sendo possível expandir ou reduzir o gráfico através do *zoom*, como faremos em seguida. É interessante mostrar nesse momento a ideia de período, mostrando para o observador que, de tempos em tempos, a mesma forma de onda é repetida. Convém reduzir a imagem para mostrar que a mesma forma de onda repetida demonstra que é o mesmo trecho musical que se repete, explicando ainda que os gráficos não são idênticos devido à força que o executante aplica na corda ao produzir a nota ou até mesmo pela forma com que ele a produz. Observe-se a semelhança das partes, ainda que executados com intensidades diferentes (Fig. 24).

Figura 24 - Gráfico produzido pela música *Back in Black* – AC DC

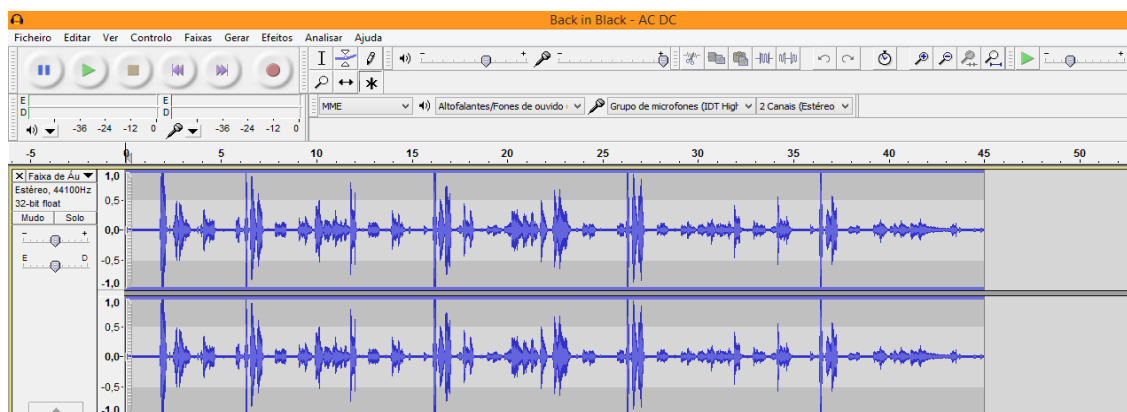
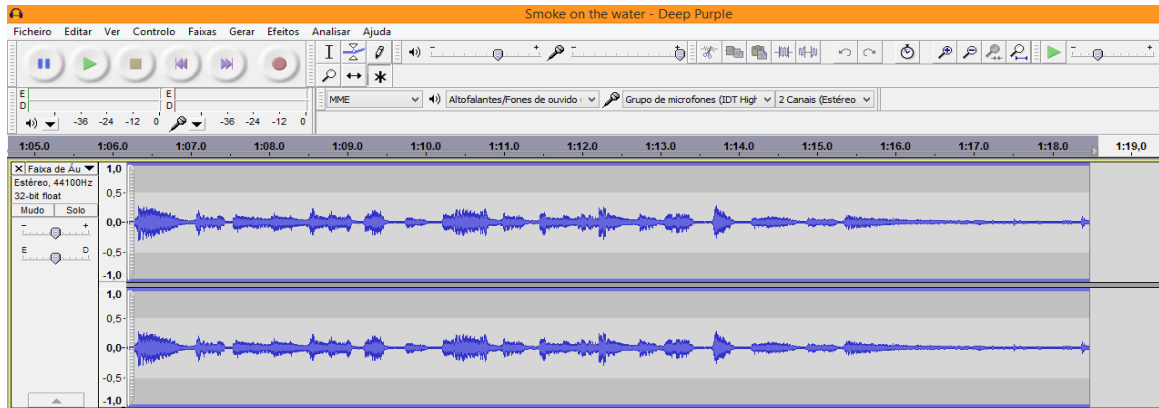
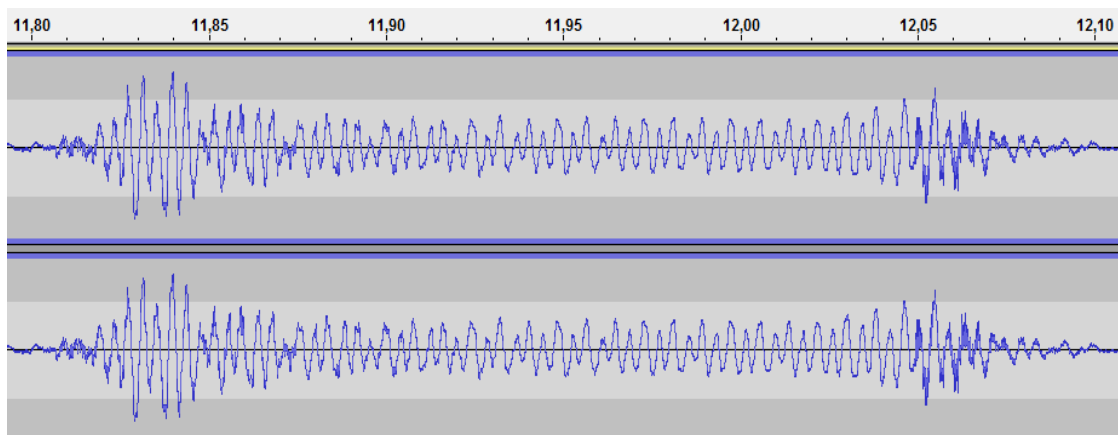


Figura 25 - Gráfico produzido pela música *Smoke on the Water* – Deep Purple



Em seguida, escolhe-se um intervalo de tempo específico da música “Back in Black”, entre 11,80 e 12,10 no zoom (um intervalo de ataque do som), para ilustrar a ideia de máximos e mínimos. Repara-se que este momento era visto antes como um traçado mais alongado e escuro do gráfico minimizado, além de já dar a entender que se tratava de um dos picos mais altos de todo o trecho do sinal gravado, ainda que muito achatado. É possível usar esse instante para mostrar pontos de máximos locais e mínimos locais ao observador, sendo possível contextualizar as diferenças entre extremantes locais e aparentes. Também cabe, nesse momento, uma apresentação da noção de crista e vale, dependendo do nível de abstração ou do contexto inserido na atividade.

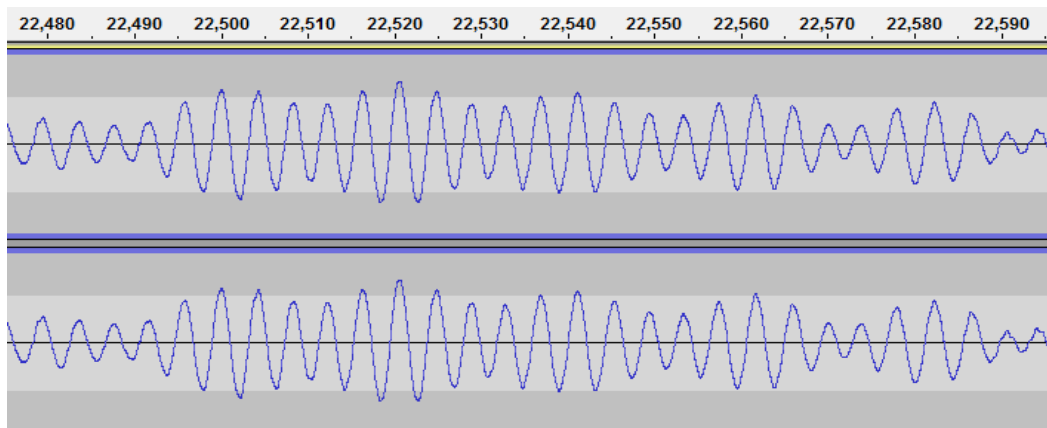
Figura 26 - Trecho do sinal no tempo rico em alterações, o que possibilita diversas análises



Analisando-se um pouco mais adiante, o sinal, no intervalo entre 22480 e 22590 da mesma música, é possível observar sua variação de intensidade em

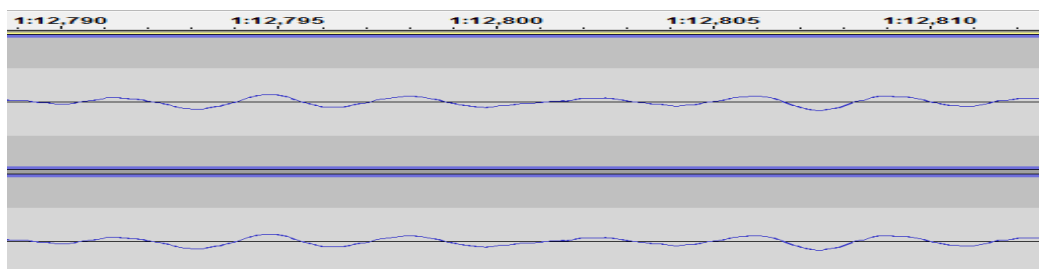
função do tempo, abrindo-se uma discussão entre a força que o executante faz e o gráfico produzido. Já é possível, neste intervalo, citar composições entre tipos de funções trigonométricas, sobretudo do tipo $\text{sen}(kx)$.

Figura 27 - Trecho semelhante ao estudo de composições de funções trigonométricas



Aplicando-se zoom na análise de “Smoke on the water”, bem como seria viável na outra opção, é possível notar semelhanças entre o sinal no tempo e o gráfico de funções trigonométricas mais simples, como a senóide clássica, no intervalo entre 1:12,790 e 1:12,810, sempre explicando que nenhum som produzido naturalmente é capaz de produzi-la de maneira pura.

Figura 28 - Trecho semelhante ao gráfico de uma senóide, lembrando que esta nem sempre se apresenta de maneira pura em sons sem edições



Ao final da atividade ou durante sua aplicação, é possível pedir algum exercício ou exemplo que engrandeça a experiência. O analista também pode comparar os gráficos das duas músicas e brincar de modo mais livre no *software*, diante de seus observadores. Outra atividade possível é o cálculo de um período, apontamento de máximos e mínimos ou exemplos de funções que se assemelham com o gráfico ficando a critério do analista o seu direcionamento. Para esta atividade é necessário emitir apenas uma nota musical e gravá-la.

2.2.2 Funções trigonométricas na análise de sons

Após a execução da análise descrita no exemplo anterior, pode-se explicar aos alunos com mais tranquilidade o conceito de funções trigonométricas baseado-se em análise de sons.

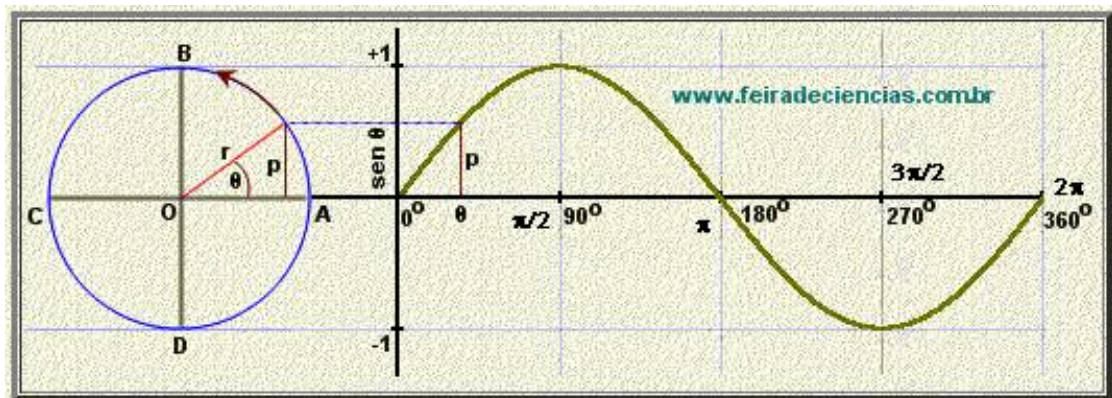
Como visto anteriormente, fenômenos ondulatórios mais simples podem ser analisados através de funções harmônicas periódicas do tipo senoidal. Apesar de quase nenhum som natural ser capaz de produzir uma senóide pura, é possível obter resultados muito próximos, como o exemplificado, através do som de um diapasão, aparelho bastante importante na afinação de instrumentos e vozes, mediante a vibração de um som musical de altura específica. Aliás, seria muito interessante inserir um exemplo com o diapasão na atividade desenvolvida em sala.

Adotando a função seno como modelo de análise da propagação sonora, pode-se correlacionar alguns de seus parâmetros com a percepção sonora sensoriais. Além dessa ligação entre a amplitude de uma onda sonora, isto é, sua magnitude de oscilação, e a sua ligação direta à nossa percepção de intensidades sonoras, ou seja, se o som é forte ou fraco. Pode-se concluir que quanto mais intenso for um som, maior será a amplitude de variação da pressão sonora ~~de meio~~, ou ainda, ocorrerá um maior deslocamento de moléculas, como citado anteriormente. Frequência, período e comprimento de onda são correlacionados com a percepção de alturas, isto é, se o som é grave ou agudo. Em particular, convencionam-se certos valores de frequências para algumas notas musicais ocidentais como, por exemplo, uma nota SOL que pode ter frequência 392Hz ou

uma nota LÁ, com 440Hz (Lembrando que o Hertz (Hz) é uma unidade de medida de frequência, definida como o número de ciclos por segundo de uma onda periódica). Uma maneira simples de entender frequência é compará-la com pulsações ou batidas. Sendo assim, sendo possível dar 440 passos em um segundo produzir-se-ia uma nota LÁ, ou seja, um LÁ é produzido por 440 batidas ou pulsações por segundo, supracitado como 440Hz.

Usando a definição usual da função seno de um ângulo θ qualquer no ciclo trigonométrico de raio 1, cujo perímetro vale 2π , centrado em um sistema de eixos cartesianos perpendiculares x e y , verifica-se de forma ordinária que $y = \text{sen}\theta$, como descrito abaixo, figura 29. Aplicando a definição, obtém-se $\text{sen}\theta = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \text{sen}\theta \cdot 1 \Rightarrow y = \text{sen}\theta$.

Figura 29 - Ciclo trigonométrico



Legenda: O ciclo trigonométrico gerando a curva senoidal..

Fonte: http://www.feiradeciencias.com.br/sala14/14_T03.asp. Acesso em: 1/5/14. 15:19h).

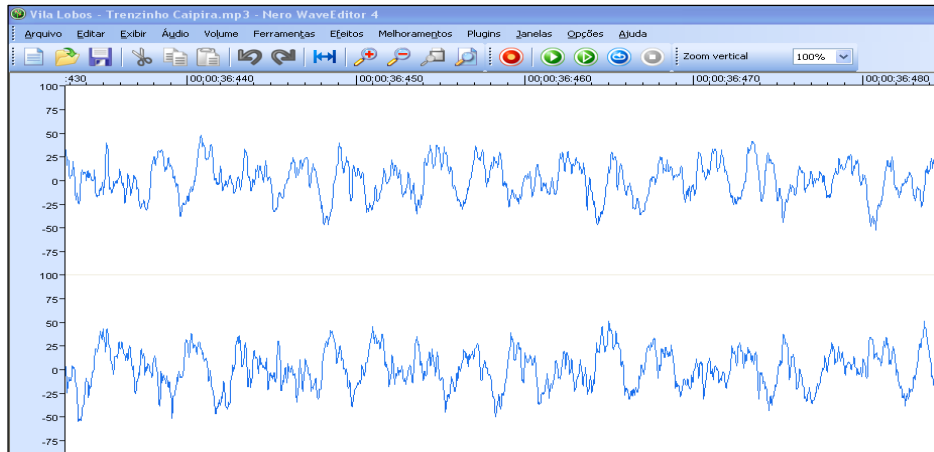
Para relacionar a função seno com a ideia de ondas sonoras, resta incluir a noção de tempo no sistema definido. Para tal, multiplica-se um ciclo completo (2π) pelo tempo necessário t , em segundos. Nota-se, então, que $2\pi t$ varia de 0 a 2π , enquanto t varia de 0 a 1 segundo, o que corresponde a 1Hz. Continuando, é possível generalizar o processo para outra frequência qualquer, multiplicando o ciclo pelo valor f referente à frequência desejada, obtendo-se, assim, $2\pi f t$, que vai girar f vezes em torno do ciclo, isto é, de 0 a 2π , enquanto t varia de 0 a 1. Sendo assim,

um gráfico de $\text{sen}(2\pi ft)$ descreve f ciclos cada vez que t aumenta uma unidade, o que define uma “função temporal” aceitável para modelar fenômenos ondulatórios mais simples. Resta, agora, pensar no ponto de partida do processo, chamado, em acústica, de fase f_0 , e a amplitude k que representa os pontos de máximo e mínimo oscilatórios. Para incluir tais conceitos, basta utilizar-se das ideias básicas de gráfico da própria função seno, somando a fase ao ciclo e multiplicando a expressão resultante pela amplitude.

Juntando-se todos os dados, obtém-se a função contínua do tempo, como é chamada em acústica, definida por $F(t) = k.\text{sen}(2\pi ft + f_0)$, que descreve o som senoidal de uma forma geral e que assume proporções ainda maiores quando unida ao Teorema de Fourier [convém lembrar: “Um sinal periódico qualquer é composto de (ou pode ser decomposto em) uma serie de ondas senoidais com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental f , cada uma com uma determinada amplitude e uma determinada fase, mais uma componente continua (de frequência zero)], permitindo o estudo de ondas mais complexas por intermédio de outras mais básicas.

As Figuras 30 e 31 mostram um trecho do sinal no tempo de um fragmento de “O trenzinho caipira”, de Heitor Vila Lobos, e outro de “Back in Black”, rock clássico da banda AC DC, ambas obtidas através do programa Nero Wave Editor 4. Outro ponto interessante a salientar é que o programa supracitado é de fácil acesso, sendo umas das ferramentas da nona edição do *software* Nero, que é um programa de gravação muito comum na maioria de nossos computadores, o que facilitaria o estudo dessas propriedades juntamente com os alunos, sendo um outro bom exemplo de ferramenta que viabiliza a proposta do presente trabalho. Também houve contato com o *software* LabView, porém, não o suficiente para julgar se este seria melhor, apesar do fato de não ser gratuito, impossibilitando melhores conclusões sobre o mesmo, muito utilizado por profissionais da área nos estudos descritos no capítulo anterior.

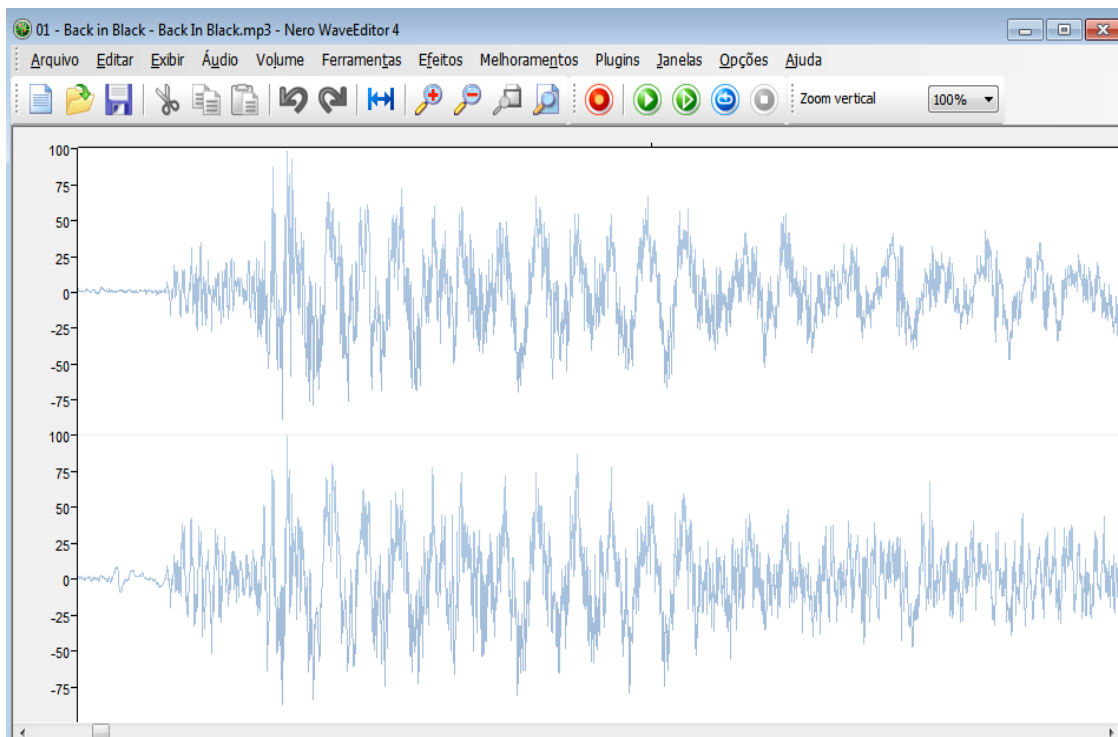
Figura 30



Legenda: Sinal no tempo de um trecho de “O trenzinho Caipira” – Villa Lobos, gráfico obtido pelo software Nero.

Fonte: O autor, 2011.

Figura 31



Legenda: Sinal no tempo de um trecho de “Back in Black” - AC DC, gráfico obtido pelo software Nero.

Fonte: O autor, 2011.

A análise gráfica dessas músicas pode ser feita conforme os exemplos anteriores de forma a entender todas as analogias mencionadas dos pontos de vista prático e teórico dos constituintes das ondas sonoras. Segundo o autor, -quanto mais rápida é a composição, mais difícil fica a aplicação do Teorema de Fourier, demonstrando também, uma maior quantidade de diferentes técnicas de elaboração musical, além de enfatizar a impossibilidade da descrição de um fenômeno sonoro através de uma única senóide convencional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse por Música é intrínseco a cada indivíduo, bem como a curiosidade na maioria dos casos. Cabe a quem tem na Matemática o prazer de se expressar saber usá-los para aproveitar-se de ambos. Também é muito comum entrarmos numa sala de aula em nosso primeiro dia letivo e nos depararmos com uma maioria de rostinhos que se contorcem ao anunciarmos o conteúdo que levamos, bem como é cotidiana a guerra contra os inúmeros aparatos tecnológicos que nascem dia a dia, num mundo no qual é quase proibido não acompanhar o desenvolvimento tecnológico. Mais uma vez cabe a quem tem na Matemática o prazer de se expressar saber usá-los para aproveitar-se de ambos.

Hoje, o grande desafio do educador, de uma maneira geral, é buscar meios e formas de tornar sua aula mais atraente para públicos cada vez mais exigentes, ora por serem até mesmo desinteressados, ora por desejarem informações tão bem explicadas quanto os inúmeros meios disponíveis nos veículos globalizados. Quem nunca ouviu um: “Professor, eu vi na televisão (ou num vídeo da internet) que o Teorema de Pitágoras não foi descoberto por Pitágoras...”? É preciso saber lidar com isso de forma natural.

Diante desses desafios, tentou-se mostrar nesse trabalho, através de um pequeno aprofundamento teórico concluído com proposta lúdica, uma forma que une tecnologia, curiosidade, música e matemática de modo simples e prático. A proposta deste trabalho é levar para o discente, supracitado por suas exigências, uma aula diferente, interativa e até mesmo animada, imersa em um assunto considerado como dos menos atraentes: o estudo de gráficos de funções, sobretudo trigonométricas. O grande desafio dessa proposta seria aceitar ir contra as aulas tradicionais, da lousa e do livro. Todos sabem das dificuldades em ensinar atualmente, mas não se pode jamais, limitar-se por isso. Não se deve deixar de ousar com o medo de não alcançarmos o objetivo almejado.

Outro problema residiria no fato de a maioria das escolas não disporem da aparelhagem básica para esta atividade (retroprojeter, computador, microfones, etc). Nada que um pouquinho de boa vontade não seja capaz de superar. A tecnologia digital está cada vez mais acessível e o *software*, empregado neste trabalho, é

grátis, um microfone portátil (quando necessário) custa menos do que se possa imaginar e o som, agradável ou não, é inerente ao ambiente de uma sala de aula.

Com base nos argumentos apresentados, o autor acredita que o interesse por música, independente de ritmo, estilo musical ou intensidade, seria o maior chamariz para uma aula. Esta que pode apresentar todas as características indispensáveis para a formação de um indivíduo, seja para fazer uma prova de algum concurso ou simplesmente para se tornar um cidadão diferenciado. Aliado a isso, tentou-se buscar saídas simples e, principalmente, gratuitas, ou ao menos vantajosas, para transformar sons em gráficos por ora abstratos e desconexos da realidade. O autor acredita, também, que o próprio professor, como outro amante da Música, venha engrandecer-se munido de conhecimentos que podem ser utilizados em outros assuntos que não o estudo de gráficos, fora o poder de elaboração de questões interdisciplinares, tão utilizadas e cobradas nos mais variados certames. Que este seja apenas um estopim para uma fonte inesgotável de discussões.

Neste trabalho o autor buscou unir o prazer da Música com o prazer de ensinar Matemática, usando a tecnologia como fio condutor. Esta é capaz de estabelecer uma ponte entre estas duas áreas que, para os nossos alunos, parecem estar tão distantes uma da outra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados*. 4ª ed. São Paulo: Escrituras, 2006.

BEAUCHAMP, J. W. *Analysys, Synthesis anda Perception of Musical Sounds – The Sound of Music*. University of Illinois at Urbana. Ed. Springer, 2007.

BENSON, D. Mathematics and Music. Disponível em <http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/mathematical_offering.pdf>. Acessado em 17/12/2010.

BISTAFA, S. R. *Acústica Aplicada ao controle do Ruído*. Ed. Edgard Blucher Ltda. 2006.

BOYCE, W. E; DiPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6ª Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1998

BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

COSTA, E. C. *Acústica Técnica*. Ed. Edgard Blucher Ltda.

CUNHA, N. P. *Matemática & música: diálogo interdisciplinar*. 2ª Ed. Recife: Universitária da UFPE, 2008.

DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelet*. Ed. SIAM, 1992.

EVEREST, F. A.; POHLMANN, K. C. *Master Handbook of Acoustics*. Fifth Edition. USA: Mc Graw Hill, 2009.

HARKLEROAD, L. *The math behind the music*. Cambridge University Press, 2006.

HENRIQUE, L. L. *Métodos Teóricos e Experimentais de Análise de Sons*. Editora Calouste Gulbenkian, 2007.

LAZZARINI, Victor E. P. Elementos de Acústica. Disponível em:<
<http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm>>. Acessado em:
11/11/2009.

LUCAS, S. *Matemática e Música a harmonia perfeita*. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 1996.

_____ *Cálculo de Intervalos Musicais*. 2002.

_____ *Dimensionamento das Distâncias Entre os Trastes nos Instrumentos Musicais de Cordas*, 2002.

_____ *Como calcular os valores das frequências das demais conhecendo-se uma delas*, 2002.

_____ *O intervalo coma na escala igualmente temperada*, 2003.

_____ *Tem Música no Triângulo de Pitágoras*, 2003.

_____ *Uma Progressão Geométrica Muito Especial*, 2002.

_____ *Unidades de Medidas de Intervalos Musicais - O Cent e o Savart*, 2002.

MARTINS, M. A. *Matemática e Música*. 2011. Monografia (Especialização em Aprendizagem em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

OLIVEIRA, João Pedro. Recolha de textos (Encontros de música contemporânea de 2000) Fundação Calouste Gulbenkian.

OLIVEIRA, Naylor. *A Física da música*. Disponível em:

<http://www.cdcc.sc.usp.br/ciencia/artigos/art_25/musica.html> Acesso em:
17/12/2010.

PERES, Larissa Suarez. *Matemática e Música: em busca da harmonia*. Monografia apresentada na Universidade do Grande ABC. Disponível em: <
<http://www.somatematica.com.br/>>. Acesso em 28/12/2010.

RATTON, M. Música e Matemática – A Relação Harmoniosa entre Sons e Números.
Disponível em:

http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/musica_matematica.htm
Acessado em 17/12/2010.

RATTON, Miguel. *Escalas musicais - quando a matemática rege a música*.
Disponível em: < <http://www.cristianonogueira.xpg.com.br/escalasmusicais.htm>.
Acesso em: 17/12/2010.

RODRIGUES, José Francisco. A Matemática e a Música. Colóquio/Ciências, nº23,
p.17-32, 1999. Disponível em < http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>.
Acesso em: 13/12/2009.

TAVARES, Levi de Paula, A Física da Música. Disponível em: <
<http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm>> Acessado em:
13/11/2009.

Vídeos auxiliares:

[Vídeo] A matemática e a música, disponível em: <http://www.esec-garcia-orta.rcts.pt>.
Disponível em :

<<http://www.musicaeadoracao.com.br/tecnicos/matematica/index.htm>>. Acessado
em: 11/11/2009.

[Vídeo] *A música das esferas*:

http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=22062

[Vídeo] “Donald no mundo da Matemágica” Disponível em DVD.

Sites auxiliares:

< <http://caraipora.tripod.com/assuntos.htm>>

< <http://pt.wikipedia.org>>

< <http://www.musicaeadoracao.com.br>>