



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Emerson Roberto Luminati

A Matemática dos Sistemas de Localização por Satélites

São José do Rio Preto

2015

Emerson Roberto Luminati

A Matemática dos Sistemas de Localização por Satélites

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto

2015

Luminati, Emerson Roberto.

A matemática dos sistemas de localização por satélites /
Emerson Roberto Luminati. -- São José do Rio Preto, 2015
97 f. : il., tabs.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria analítica.
3. Satélites artificiais de navegação. 4. Sistema de posicionamento
global. 5 Coordenadas (Matemática) 6. Coordenadas geográficas.
I. Silva, Flávia Souza Machado da. II. Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas. III. Título.

CDU – 511(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Emerson Roberto Luminati

A Matemática dos Sistemas de Localização por Satélites

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Flávia Souza Machado da Silva

UNESP – São José do Rio Preto

Orientadora

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

UNESP – São José do Rio Preto

Prof^a. Dr^a. Andréia Cristina Ribeiro

UFMS – Paranaíba

São José do Rio Preto

12 de Fevereiro de 2015

AGRADECIMENTOS

Ao PROFMAT – Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional, pela oportunidade oferecida;

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro;

A todos os docentes do IBILCE-UNESP que direta ou indiretamente contribuíram comigo para a realização deste trabalho;

À minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Flávia Souza Machado da Silva;

À minha família, em especial à minha esposa, pela compreensão.

“Navegar é preciso. Viver não é preciso.”

Fernando Pessoa

RESUMO

Neste trabalho procuramos mostrar a Matemática utilizada nos sistemas de localização e navegação utilizados pelo homem desde a antiguidade até os dias atuais, terminando com a apresentação do GPS – sistema de posicionamento global por satélites, visando despertar a curiosidade e o interesse pela Matemática no aluno do ensino médio. Queremos conduzir o aluno a aprimorar e também construir conceitos através de atividades propostas, onde ele pode usar sua criatividade e relacionar habilidades já adquiridas, buscando desenvolver novas competências.

Palavras-chave: Localização. Superfície Esférica. GPS. Coordenadas.

ABSTRACT

This work we try to show the mathematics used in localization and navigation systems used by human since ancient times to the present day, ending with the presentation of GPS - global positioning system satellites, seeking to awaken the curiosity and the interest in mathematics in student secondary school. We want to lead the student to improve and also build concepts through activities proposed, where he can use his creativity and relate previously acquired abilities, in order to develop new competences.

Keywords: Localization. Spherical Surface. GPS. Coordinates.

LISTA DE SÍMBOLOS

$A \cup B$: **união** do conjunto A com o conjunto B

$A \cap B$: **interseção** do conjunto A com o conjunto B

$a \in B$: o elemento a **pertence** ao conjunto B

$a < b$: número a é **menor do que** o número b

$a \leq b$: número a é **menor do que ou igual** ao número b

$a > b$: número a é **maior do que** o número b

$a \geq b$: número a é **maior do que ou igual** ao número b

$reta AB$: **reta** determinada pelos pontos distintos A e B

\overline{AB} : **segmento de reta** com extremidades nos pontos A e B

AB : **comprimento** de \overline{AB}

$r \perp s$: reta r é **perpendicular** à reta s

\mathbb{R} : conjunto dos **números reais**

$d(A, B)$: **distância** entre os pontos A e B

ρ : **distância** de um ponto P da superfície esférica à origem

θ : **longitude** em graus

φ : **latitude** em graus

$\Gamma(C, r)$: **circunferência** de centro no ponto C e raio r

$arco AXB$: **arco** de circunferência com extremidades nos pontos A e B e que contém o ponto X

LAL : caso **lado-ângulo-lado** de congruência de triângulos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1. PRELIMINARES	12
1.1. Coordenadas Cartesianas no Plano e no Espaço	12
1.2. Distância Euclidiana entre Dois Pontos por meio de Coordenadas	18
2. CIRCUNFERÊNCIA E TRILATERAÇÃO	21
2.1. Circunferência e seus Elementos	21
2.2. Trilateração	23
3. SUPERFÍCIE ESFÉRICA E LOCALIZAÇÃO DE UM PONTO NO GLOBO TERRESTRE	28
3.1. Superfície Esférica e seus Elementos	28
3.2. Intersecção de um Plano com uma Superfície Esférica	31
3.3. Intersecção de Quatro Superfícies Esféricas	37
3.4. Coordenadas de um Ponto do Globo Terrestre	41
4. INSTRUMENTOS E SISTEMAS DE LOCALIZAÇÃO	48
4.1. Instrumentos de Localização	48
4.2. Construção e Funcionamento do GPS	52
5. ATIVIDADES PROPOSTAS	55
5.1. Maquete representando a Terra e as órbitas dos satélites	55
5.2. Como o receptor GPS calcula as coordenadas geográficas	60
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
APÊNDICE	85

INTRODUÇÃO

Na história da humanidade sempre houve a necessidade de saber localizar-se, tanto para descobrir novos caminhos como para voltar para casa. Em terra, uma maneira encontrada consistia em se marcar o caminho baseando-se no relevo, na vegetação, nos rios e posteriormente nas construções. Mas essa maneira não era segura e nem precisa, visto que a vegetação cresce, o relevo se modifica, as construções mudam e se multiplicam, etc. Na costa marítima, os marinheiros utilizavam os faróis para se localizarem, mas em alto-mar não havia nenhum ponto fixo para referência.

Sendo assim surgiu a ideia de se marcar as estrelas no céu e calcular a posição na superfície terrestre em relação a elas. Tal mapeamento era trabalhoso, complicado, exaustivo e impreciso. Além disso, durante o dia não dava para ver as estrelas, nem em noites nubladas, com chuvas ou tempestades.

Esses foram alguns dos motivos que levaram o homem a criar e utilizar instrumentos de localização e navegação. “A palavra **navegação** não se refere apenas a veículos aquáticos como barcos, navios, etc., mas a todo um sistema de orientação e localização. Tecnicamente, **navegação é o processo de determinar onde se está e para onde se está indo**” (FASCIONI, 2013, p.17), seja em terra, água ou ar, a bordo de algum veículo ou não.

A ideia de se basear nos astros para determinar uma direção era ótima, mas a questão era que os astros, além de mudarem de lugar dependendo da época do ano e do hemisfério, nem sempre eram visíveis. Além disso, durante o dia o único astro era o Sol. Era muito difícil uma pessoa em alto-mar, com o barco balançando, ter que alinhar os instrumentos de medição olhando diretamente para o Sol. Talvez por este motivo, navegadores e piratas da época utilizavam um tapa olho.

Diante das dificuldades e limitações encontradas para se localizar, o DOD – Department of Defense (Departamento de Defesa dos Estados Unidos) teve uma grande ideia: colocar no céu suas próprias “estrelas”, que fariam sempre o caminho pré-determinado, não importando o hemisfério, a época do ano e se é dia ou noite. “As estrelas” seriam satélites, que se comunicariam com a Terra sem que houvesse necessidade de vê-los, resolvendo também o problema dos dias nublados.

Nascia, então, em 1973, o projeto NAVASTAR-GPS ou simplesmente GPS – Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global). Inicialmente o projeto seria para

uso militar, mas os projetistas do DOD também planejaram o uso civil do GPS, porém com menor precisão.

O objetivo desse trabalho é despertar a curiosidade e o interesse pela Matemática apresentando um pouco da matemática utilizada pelo homem desde a antiguidade em sistemas de localização e navegação, começando pela marcação de estrelas no céu, passando pela bússola, pelo astrolábio, pelo quadrante, pelo sextante, e terminando com a apresentação do GPS – Sistema de Posicionamento Global por Satélites. O trabalho está desenvolvido da seguinte forma: no primeiro capítulo abordamos conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial como distância entre dois pontos no plano e no espaço, colinearidade e coplanaridade; no segundo capítulo apresentamos a circunferência e seus elementos, sua equação cartesiana e também o conceito de trilateração; no terceiro capítulo apresentamos a superfície esférica e seus elementos, suas intersecções com planos, sua equação cartesiana, o teorema da intersecção de quatro superfícies esféricas no espaço tridimensional, sendo este teorema fundamental para o entendimento dos sistemas de localização por satélites, e em particular, o GPS, as coordenadas geográficas e cartesianas de um ponto na superfície terrestre e as transformações de coordenadas geográficas em cartesianas e vice-versa; no quarto capítulo descrevemos os principais instrumentos de localização utilizados pelo homem desde a antiguidade, terminando com a apresentação do GPS, o sistema de posicionamento global com o uso de satélites artificiais. No último capítulo, propomos duas atividades educacionais incluindo a construção de uma maquete em escala representando a Terra e as órbitas dos satélites GPS e a determinação das coordenadas geográficas de um ponto da superfície terrestre utilizando as efemérides transmitidas por quatro satélites. Os objetivos destas atividades são dar uma ideia ao aluno do que é um sistema de localização e navegação por satélites e da Matemática neles envolvida. O público-alvo destas atividades são os alunos do terceiro ano do ensino médio regular. Os pré requisitos são conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana Plana e Espacial, equação cartesiana da circunferência, conceitos básicos de Trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico e resolução de sistemas lineares com três equações e três incógnitas. O tempo previsto para a primeira atividade é de quatro aulas de 50 minutos e para a segunda, seis aulas de 50 minutos. O que esperamos com esse trabalho é despertar a curiosidade e o interesse pela Matemática, mostrando, de forma básica, uma aplicação desta ciência no dia-a-dia.

1. Preliminares

Neste capítulo abordaremos de forma breve a representação de pontos (do plano e do espaço) por meio de coordenadas cartesianas; em seguida, apresentamos a expressão da distância euclidiana entre dois pontos obtida por meio das coordenadas dos pontos. Para isso, admitiremos conhecidos conceitos e fatos elementares referentes à Geometria Euclidiana Plana e Espacial, que podem ser encontrados em REZENDE; QUEIROZ (2008) e CARVALHO (2005).

As principais referências utilizadas neste capítulo são LIMA (2007), LIMA (2011) e HEFEZ; FERNANDES (2012).

1.1. Coordenadas Cartesianas no Plano e no Espaço

Pontos do plano e do espaço podem ser representados, respectivamente, por pares e ternos ordenados de números reais. Para isso, recordemos inicialmente o conceito de função distância.

Dados o conjunto não vazio M e $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que d é uma **função distância ou uma métrica** se, para quaisquer $x, y, z \in M$, d satisfaz: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Nessas condições, cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de **distância de x a y** . Estaremos interessados no caso em que M é o conjunto de pontos de uma reta, de um plano ou de um espaço tridimensional. Fixemos uma unidade de comprimento, com a qual mediremos a distância $d(P, Q)$ entre dois pontos P e Q .

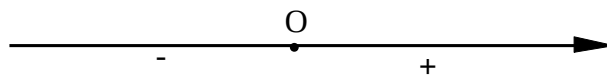
Uma **reta orientada** é uma reta na qual se escolheu um sentido de percurso, chamado **positivo**; o sentido inverso é chamado **negativo**. Numa reta orientada, diz-se que o ponto P está situado à **esquerda** do ponto Q (e, conseqüentemente, Q está à **direita** de P) quando o sentido de P para Q é positivo.

Figura 1: Ponto P à esquerda do ponto Q



Um **eixo** é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O , chamado **origem**. A cada ponto X de um eixo corresponde um número real x , chamado de **coordenada** do ponto X , do seguinte modo: à origem faz-se corresponder o número zero, aos pontos situados à direita de O correspondem números reais positivos e aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem.

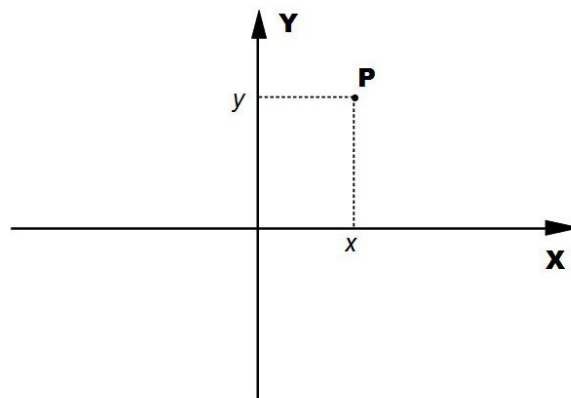
Figura 2: Eixo



Definição 1.1: Considere um plano Π . Um **sistema ortogonal de coordenadas** em Π consiste de um par de eixos OX e OY que estão contidos em Π , têm a mesma origem e são perpendiculares em O . Denotamos tal sistema por OXY .

A partir da escolha de um sistema ortogonal de coordenadas num plano Π , estabelecemos, de modo natural, uma correspondência biunívoca entre Π e \mathbb{R}^2 (conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais). Dado um ponto $P \in \Pi$, traçamos por ele retas paralelas aos eixos OY e OX . Essas paralelas intersectam os eixos em pontos cujas coordenadas são x e y , respectivamente. Ao ponto P faz-se então corresponder o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, a cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde o ponto $P \in \Pi$, intersecção da paralela ao eixo OY traçada pelo ponto do eixo OX cuja coordenada é x com a paralela a OX traçada a partir do ponto do eixo OY cuja coordenada é y . Os números x e y são chamados de **coordenadas cartesianas** do ponto $P \in \Pi$, relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado. Escrevemos $P = (x, y)$, onde x é denominado **abscissa** de P e y é denominado **ordenada** de P .

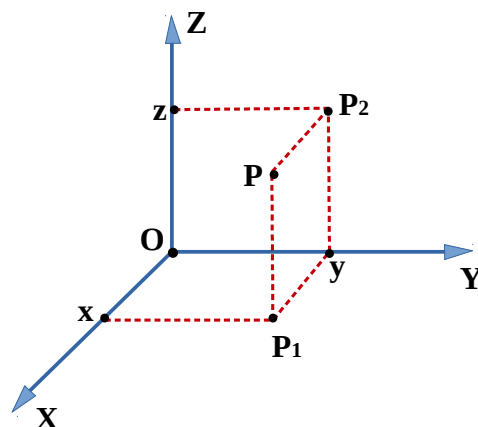
Figura 3: Coordenadas cartesianas no plano



Definição 1.2: Seja E o espaço euclidiano tridimensional. Um **sistema ortogonal de coordenadas em E** consiste em três eixos OX , OY e OZ , todos com origem em O e perpendiculares dois a dois. Denotamos tal sistema por $OXYZ$.

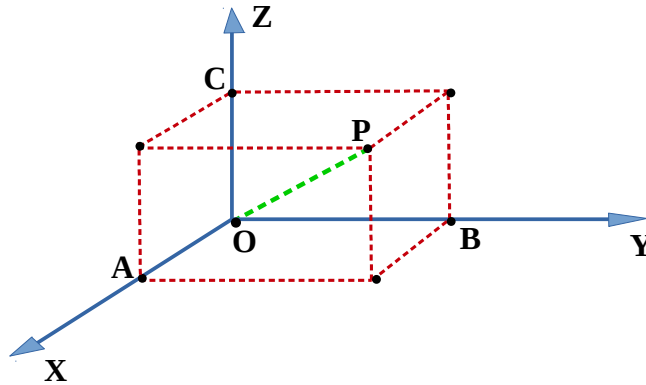
Consideremos fixado um sistema $OXYZ$ ortogonal de coordenadas em um espaço euclidiano tridimensional E . Denotaremos por Π_{xy} , Π_{yz} e Π_{xz} os planos determinados pelos eixos OX e OY , OY e OZ , OX e OZ , respectivamente. O sistema $OXYZ$ no espaço E determina, de modo natural, uma correspondência biunívoca entre E e \mathbb{R}^3 (conjunto dos ternos ordenados (x, y, z) de números reais). Dado um ponto $P \in E$, a reta paralela ao eixo OZ , passando por P , intersecta Π_{xy} no ponto P_1 . Sejam (x, y) as coordenadas de P_1 no sistema OXY de Π_{xy} . A reta paralela ao eixo OX passando por P , intersecta Π_{yz} no ponto P_2 . Sejam (y, z) as coordenadas de P_2 no sistema OYZ de Π_{yz} . O número y é o mesmo obtido anteriormente. Ao ponto P faz-se então corresponder o terno ordenado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (figura 4).

Figura 4: Terno (x, y, z) associado ao ponto P



Reciprocamente, associa-se ao terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o ponto P do espaço obtido da seguinte maneira: tomemos sobre os eixos OX , OY e OZ , respectivamente, os pontos A , B e C cujas coordenadas nesses eixos são x , y e z . Os segmentos não colineares \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{OC} determinam um paralelepípedo. O ponto P é o vértice oposto a O nesse paralelepípedo (figura 5). Os números x , y e z são chamados as **coordenadas cartesianas do ponto** $P \in E$, relativamente ao sistema $OXYZ$ e escrevemos $P = (x, y, z)$, onde x é a **abscissa** de P , y é a **ordenada** de P e z é a **cota** de P .

Figura 5: Ponto P associado a um terno (x,y,z)



Proposição 1.1: Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, e $C = (x_C, y_C)$ pontos distintos do \mathbb{R}^2 . Os pontos A , B , e C são colineares se, e somente se, o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \text{ for nulo.}$$

Demonstração: Considere os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, tais que

$$\vec{v}_1 = \vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A) \text{ e } \vec{v}_2 = \vec{AC} = C - A = (x_C - x_A, y_C - y_A).$$

$$\text{Assim, } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Se os pontos A , B , e C são colineares, então \vec{v}_1 e \vec{v}_2 também são colineares e, assim, algum deles é múltiplo do outro, ou seja, são linearmente dependentes (LD). Vamos supor, sem perder generalidade, que \vec{v}_2 seja múltiplo de \vec{v}_1 . Então existe α real tal que $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$.

$$\text{Assim, } \vec{v}_2 = \alpha (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \text{ e } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \alpha x_1 & \alpha y_1 \end{vmatrix}.$$

As propriedades citadas encontram-se no apêndice 1.

$$\text{Pela propriedade d2, temos } \Delta = \alpha \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade d5, temos $\Delta = \alpha \cdot 0 = 0$.

Reciprocamente, se $\Delta = 0$, então um vetor é múltiplo do outro. Como, por hipótese, os pontos A , B , e C são distintos, temos que nenhum dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 é nulo e, dessa forma, Δ **não possui uma linha nula** (propriedade d3). Para Δ ter uma coluna nula (propriedade d3), devemos ter $x_1 = x_2 = 0$ ou $y_1 = y_2 = 0$, o que implica $x_A = x_B = x_C$ ou $y_A = y_B = y_C$ e, em qualquer um desses casos, os pontos A , B , e C são colineares, pois, ou pertencem simultaneamente à reta $x = x_A$ ou à reta $y = y_A$. Por último, temos a possibilidade de uma linha de Δ ser múltiplo da outra, o que implica um vetor ser múltiplo do outro, ou seja, serem LD e, para dois vetores no plano serem LD, eles devem pertencer à mesma reta (colineares). Em qualquer um desses casos, os pontos A , B , e C são colineares, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 1.2: Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $D = (x_D, y_D, z_D)$ pontos distintos do \mathbb{R}^3 . Os pontos A , B , C e D são coplanares se, e somente se, o

$$\text{determinante } \Delta = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} \text{ for nulo.}$$

Demonstração: Considere os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, tais que

$$\vec{v}_1 = \vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

$$\vec{v}_2 = \vec{AC} = C - A = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \text{ e}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{AD} = D - A = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A).$$

$$\text{Assim, } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Se os pontos A , B , C e D são coplanares então \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 também são coplanares e, assim, algum deles é combinação linear dos outros dois, ou seja, são LD. Vamos supor,

sem perder generalidade, que \vec{v}_3 seja combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Então existem α e β reais tais que $\vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \vec{v}_3 &= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2). \end{aligned}$$

$$\text{Então } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & \alpha y_1 + \beta y_2 & \alpha z_1 + \beta z_2 \end{vmatrix}.$$

As propriedades citadas encontram-se no apêndice 1.

Pela propriedade d8, temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \alpha x_1 & \alpha y_1 & \alpha z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \beta x_2 & \beta y_2 & \beta z_2 \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade d2, temos

$$\Delta = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade d5, temos

$$\Delta = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Reciprocamente, se $\Delta = 0$, então um dos vetores é combinação linear dos outros dois. Como, por hipótese, os pontos A , B , C e D são distintos, temos que nenhum dos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 é nulo e, dessa forma, Δ **não possui uma linha nula** (propriedade d3). Para Δ ter uma coluna nula (propriedade d3), devemos ter $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ou $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ou $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, o que implica $x_A = x_B = x_C = x_D$ ou $y_A = y_B = y_C = y_D$ ou $z_A = z_B = z_C = z_D$ e, em qualquer um desses casos, os pontos A , B , C e D são coplanares, pois, ou pertencem simultaneamente ao plano $x = x_A$, ou ao plano $y = y_A$, ou ao plano $z = z_A$. Por último, temos a possibilidade de uma linha de Δ ser combinação linear de outras duas, o que implica um dos vetores ser combinação linear dos outros dois, ou seja,

serem LD e, para três vetores do \mathbb{R}^3 serem LD, eles devem pertencer ao mesmo plano ou ser múltiplos um do outro (colineares). Em qualquer um desses casos, os pontos A, B, C e D são coplanares, o que conclui a demonstração. ■

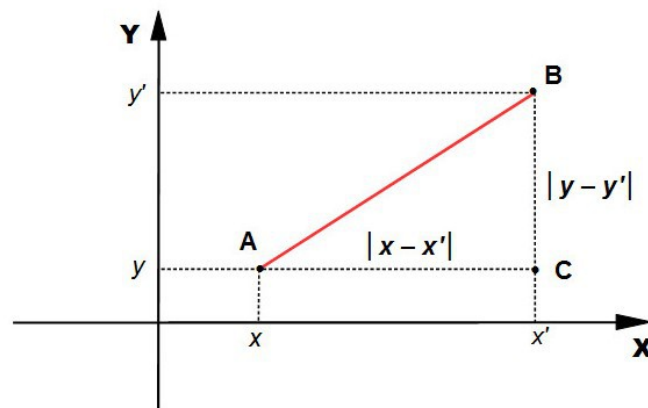
1.2. Distância Euclidiana entre Dois Pontos por meio de Coordenadas

A **distância** (euclidiana) entre os pontos A e B (do plano ou do espaço) é a medida do segmento de reta (euclidiano) com extremidades nos pontos A e B .

Consideremos fixado um sistema ortogonal de coordenadas OXY em um plano Π e dois pontos A e $B \in \Pi$. Se os pontos A e B têm a mesma abscissa, ou seja, $A=(x, y)$ e $B=(x, y')$, então $d(A, B)=|y - y'|$, pois esta é a medida do segmento com extremidades nos pontos A e B , o qual está contido numa reta que é paralela ao eixo OY . Analogamente, se $A=(x, y)$ e $B=(x', y)$, então $d(A, B)=|x - x'|$.

No caso em que o segmento formado pelos pontos $A=(x, y)$ e $B=(x', y')$ está contido numa reta que não é paralela a nenhum dos eixos, considere o ponto $C=(x', y)$ (figura 6). Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo em C . Como os pontos A e C possuem a mesma ordenada e os pontos B e C possuem a mesma abscissa, $d(A, C)=|x - x'|$ e $d(B, C)=|y - y'|$.

Figura 6: Distância entre dois pontos no plano



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos:

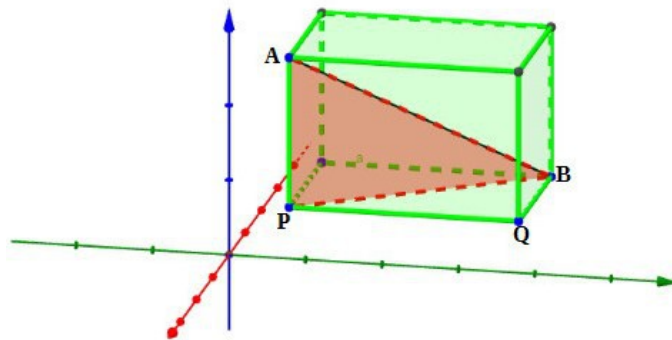
$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2.$$

Portanto, $d(A, B) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

Num determinado sistema ortogonal de coordenadas $OXYZ$ em um espaço euclidiano tridimensional E , se dois pontos A e B têm as duas primeiras coordenadas iguais, ou seja, $A=(x,y,z)$ e $B=(x,y,z')$, então $d(A,B)=|z-z'|$, pois esta é a medida do segmento formado por dois pontos que pertencem a uma reta que é paralela ao eixo OZ . Analogamente, se $A=(x,y,z)$ e $B=(x,y',z)$, então $d(A,B)=|y-y'|$ e, também, se $A=(x,y,z)$ e $B=(x',y,z)$, então $d(A,B)=|x-x'|$.

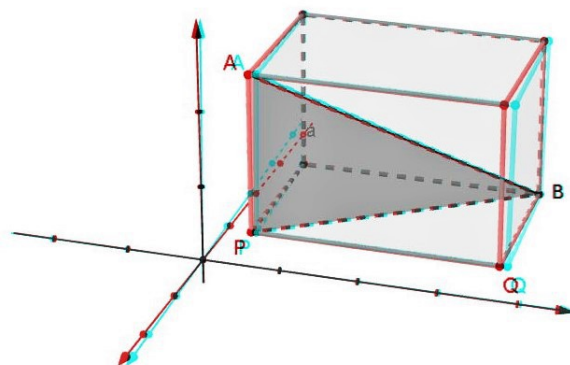
Agora, se $A=(x,y,z)$ e $B=(x',y',z')$, considere os pontos $P=(x,y,z')$ e $Q=(x',y',z)$ (figuras 7 e 8). Como A e P têm as duas primeiras coordenadas iguais, $d(A,P)=|z-z'|$. Os pontos B e Q têm as duas últimas coordenadas iguais, então $d(B,Q)=|x-x'|$.

Figura 7: Distância entre dois pontos no espaço



A figura 8, assim como as demais com **visualização 3D**, requerem uso de **óculos anáglifo** (aquele azul de um lado e vermelho do outro) para serem visualizadas.

Figura 8: Distância entre dois pontos no espaço - visualização 3D



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BPQ , temos:

$$d(P, B)^2 = d(P, Q)^2 + d(B, Q)^2. \quad (1)$$

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo APB temos:

$$d(A, B)^2 = d(A, P)^2 + d(B, P)^2. \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) temos:

$$d(A, B)^2 = d(A, P)^2 + d(P, Q)^2 + d(B, Q)^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

Logo,

$$d(A, B) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

2. Circunferência e Trilateração

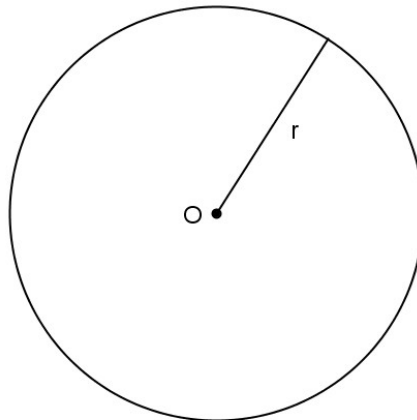
Inicialmente, abordaremos o conceito de circunferência e de alguns de seus elementos. Em seguida trataremos da trilateração, que é o processo de determinar a posição de um ponto do plano fazendo uso de três circunferências, ou seja, determinar o único ponto de intersecção (se houver) de três circunferências.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram CRATO (2009), LIMA (2007) e LIMA (2001).

2.1 Circunferência e seus Elementos

Definição 2.1: Sejam O um ponto do plano e r um número real positivo. A **circunferência** de centro O e raio r , denotada por $I(O,r)$, é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto O .

Figura 9: Circunferência de centro O e raio r

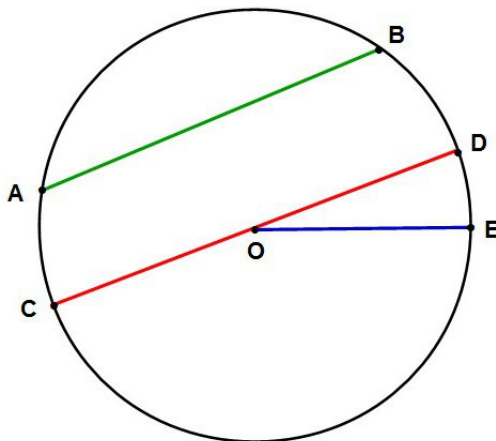


Os pontos do plano cuja distância a O é menor que r são chamados de **pontos interiores à circunferência**, enquanto que os pontos cuja distância a O é maior que r são chamados de **pontos exteriores à circunferência**. A união do conjunto dos pontos da circunferência com o conjunto dos pontos interiores à mesma é chamada **círculo de centro O e raio r** .

Definição 2.2: Uma **corda** de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada **diâmetro** da circunferência. Um **raio** é também um

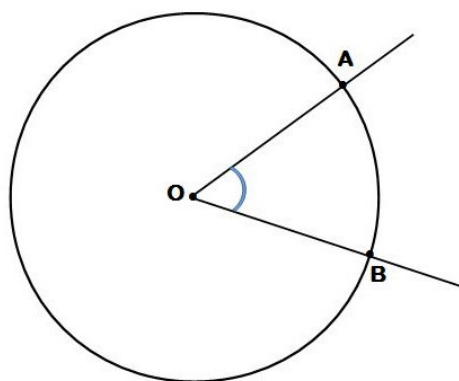
segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra, o centro da mesma. Na figura 10, \overline{AB} é uma corda, \overline{CD} é um diâmetro e \overline{OE} é um raio.

Figura 10: Circunferência, Corda, Diâmetro e raio



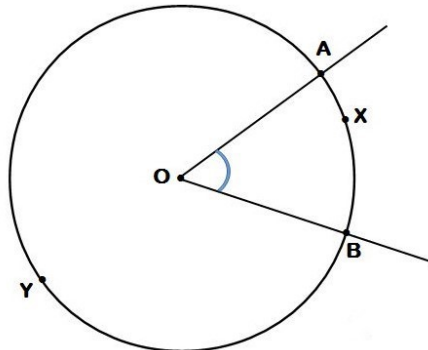
Definição 2.3: Um **ângulo central** de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Figura 11: ângulo central



Definição 2.4: Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro O . Se \overline{AB} for um diâmetro, então o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência situados num mesmo semiplano de origem na reta AB é uma **semicircunferência**. Se \overline{AB} não for um diâmetro, então o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos da circunferência que estão no interior ou no exterior do ângulo central é chamado um **arco da circunferência** e os pontos A e B são as **extremidades do arco**.

Figura 12: Arco AXB e arco AYB



Definição 2.5: A medida de um arco em graus é definida como a medida do ângulo central correspondente.

2.2 Trilateração

Para mostrar que é possível determinar a localização de um ponto do plano por meio de três circunferências, vamos primeiramente deduzir a equação cartesiana de uma circunferência.

Dados um ponto $C=(x_c, y_c)$ e um número real r positivo, um ponto $P=(x, y)$ pertence a $I(C, r)$ se $d(P, C) = r$. Assim,

$$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r.$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

Esta última é chamada **equação reduzida** da circunferência de centro C e raio r .

Desenvolvendo os quadrados e subtraindo r^2 dos dois membros, temos

$$x^2 - 2x_c \cdot x + x_c^2 + y^2 - 2y_c \cdot y + y_c^2 - r^2 = 0 \text{ ou}$$

$$x^2 + y^2 - 2x_c \cdot x - 2y_c \cdot y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo $-2x_c = d$; $-2y_c = e$; $x_c^2 + y_c^2 - r^2 = f$ temos

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0.$$

Esta última é chamada **equação geral** da circunferência de centro C e raio r .

Teorema 2.1: Se três circunferências se intersectam no plano de forma que seus centros não são colineares, então esta intersecção se dá num único ponto.

Demonstração: Sejam Γ_1, Γ_2 e Γ_3 circunferências de centros C_1, C_2 e C_3 e raios r_1, r_2 e r_3 , respectivamente. Vamos mostrar que se existir um ponto $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$, com C_1, C_2 e C_3 não *colineares*, então $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \{P\}$.

Sejam

$$\Gamma_1: x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

$$\Gamma_2: x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

$$\Gamma_3: x^2 + y^2 + d_3x + e_3y + f_3 = 0$$

as equações gerais de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 . Ao subtrairmos duas a duas essas equações, obtemos equações lineares em x e y que determinam a reta que contém a respectiva intersecção. Por exemplo, ao fazermos $\Gamma_1 - \Gamma_2$ obtemos a equação da reta que contém $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Considerando as retas que contém $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$, temos o sistema linear (*)

$$(*) \begin{cases} (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0 \\ (d_1 - d_3)x + (e_1 - e_3)y + (f_1 - f_3) = 0. \end{cases}$$

Seja $C_i = (x_i, y_i)$ o centro de Γ_i , com $i = 1, 2, 3$. Comparando as equações

$$x^2 + y^2 - 2x_i \cdot x - 2y_i \cdot y + x_i^2 + y_i^2 - r_i^2 = 0 \quad \text{e}$$

$$x^2 + y^2 + d_i x + e_i y + f_i = 0, \quad \text{temos:}$$

$$d_i = -2x_i; \quad e_i = -2y_i \quad \text{e} \quad f_i = x_i^2 + y_i^2 - r_i^2. \quad (**)$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear (*) é $\Delta = \begin{vmatrix} d_1 - d_2 & e_1 - e_2 \\ d_1 - d_3 & e_1 - e_3 \end{vmatrix}$.

Substituindo (**) em D, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}.$$

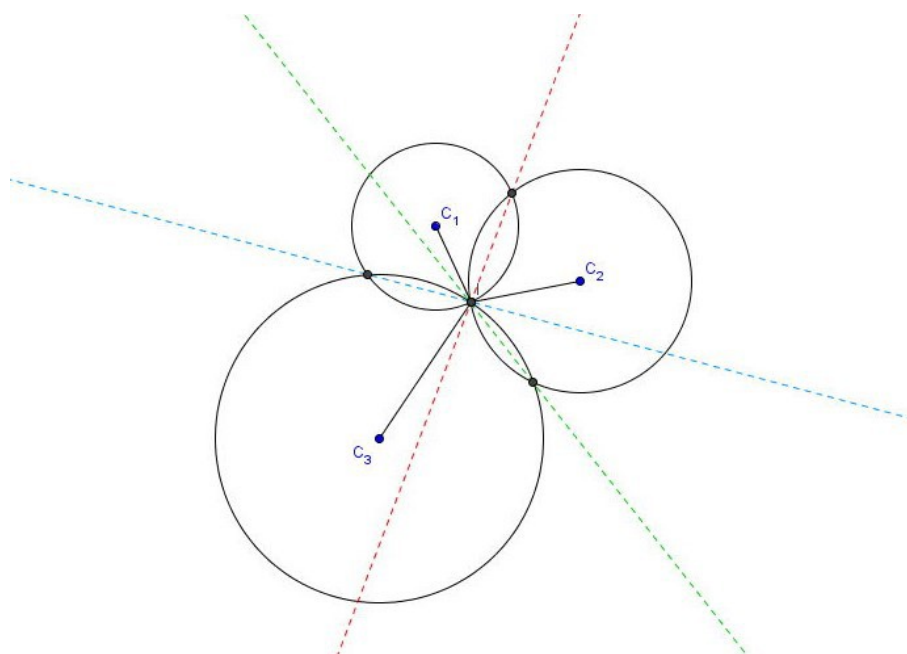
Pela propriedade (d2) temos:

$$\Delta = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}.$$

Como C_1 , C_2 e C_3 não são colineares, o que equivale a dizer que os vetores $\vec{v}_1 = C_2 - C_1$ e $\vec{v}_2 = C_3 - C_1$ são linearmente independentes. Pela proposição 1.1, temos que $\Delta \neq 0$ e, assim, (*) possui solução única. ■

Observação 2.1: É importante observar que o fato de o sistema (*), obtido na demonstração anterior, ter solução única, equivale a dizer que os centros das circunferências não são colineares e isso não implica, necessariamente, que a intersecção das três circunferências consiste no ponto P . O significado deste resultado é que as duas retas que contêm, respectivamente, as intersecções $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$, intersectam-se no ponto P . Deve-se verificar se o ponto P pertence a cada uma das circunferências e, em caso afirmativo, concluímos que P é o ponto de intersecção das três circunferências.

Figura 13: Intersecção de três circunferências



A seguir, um exemplo hipotético (baseado e adaptado de CRATO, p.71-74) de como obter a sua localização por meio da trilateração.

Exemplo 2.1: No dia da Matemática foram promovidas várias atividades para os alunos do curso de Matemática da UNESP – São José do Rio Preto. Uma das atividades consistia no seguinte: Uma aluna do quarto ano de Matemática, vamos chamá-la de Vanessa, teve seus olhos vendados, foi colocada numa Van e levada para algum lugar em São José do Rio Preto. Calma, não estamos falando de um sequestro. O desafio de Vanessa era saber onde ela estava, porém sem perguntar a ninguém na rua e sem usar aparelho de comunicação ou localização. Foi fornecido a Vanessa o seguinte material: mapa de São José do Rio Preto, lápis, borracha, esquadros, régua graduada, compasso, relógio e cronógrafo para contar o tempo. Para facilitar, havia na Van uma grande prancheta. Além disso, foi informado a Vanessa que foram instaladas três sirenes de tons diferentes, que permitem identificá-las, e que as sirenes tocam todos os dias às 9 horas, 13 horas e 17 horas, disparadas por controladores eletrônicos, e podem ser ouvidas a quilômetros de distância.

As sirenes foram instaladas na UNESP, no Zoológico Municipal e na E.M. Bosque Encantado. Os relógios de Vanessa e das sirenes foram sincronizados. Foi iniciado o desafio. Às 12:50 a Van parou em algum lugar. Vanessa sabia que as sirenes tocariam às 13 horas e ficou preparada. Vanessa ouviu a sirene da UNESP 1,1s após as 13 horas (no seu relógio); a da E.M. Bosque Encantado 1,7s após as 13 horas e a do Zoológico Municipal 3,1s após as 13 horas. Como sabe que o som se propaga a 340 m/s, Vanessa consegue calcular as distâncias d_1 , d_2 e d_3 em relação à UNESP, à E.M. Bosque Encantado e ao Zoológico; obtendo:

$$d_1 = 340 \text{ m/s} \times 1,1 \text{ s} = 363 \text{ m},$$

$$d_2 = 340 \text{ m/s} \times 1,7 \text{ s} = 590 \text{ m},$$

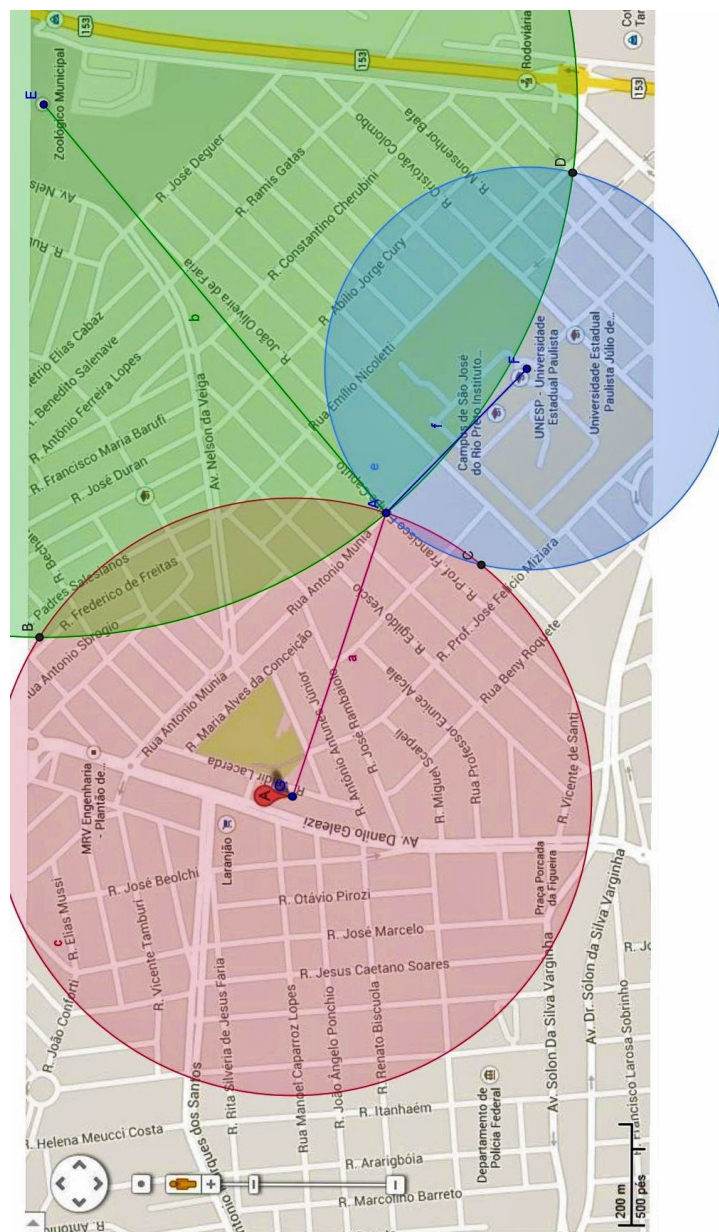
$$d_3 = 340 \text{ m/s} \times 3,1 \text{ s} = 1063 \text{ m}.$$

Vanessa traça no mapa uma circunferência com raio d_3 (considerando a escala do mapa) e centro no Zoológico, obtendo assim todos os pontos do mapa que estão a uma distância d_3 do Zoológico. Depois traça uma circunferência com raio d_2 e centro na E.M. Bosque Encantado. Essas duas circunferências se intersectam nos pontos A e B, ou seja, há dois pontos no mapa que estão a distância d_3 do Zoológico e d_2 da E.M. Bosque Encantado. Vanessa pode estar em um desses dois pontos. Traçando uma terceira circunferência de raio d_1 e centro na UNESP, esta passa pelo ponto A (figura 14), ou seja, o ponto A é o único ponto do mapa que está a distância d_3 do Zoológico, d_2 da E.M. Bosque

Encantado e d_1 da UNESP, e Vanessa descobre que está na esquina da rua Professor Francisco Felipe Caputo com a rua Antônio Munia.

Algumas observações importantes neste exemplo são: que consideramos a região em questão como um plano, que o som não sofre interferências do relevo e nem do vento e que Vanessa tem conhecimentos de geometria, escala e da relação entre tempo, velocidade e deslocamento.

Figura 14: Trilateração. Fonte: Google Maps



3. Superfície Esférica e Localização de um Ponto do Globo Terrestre

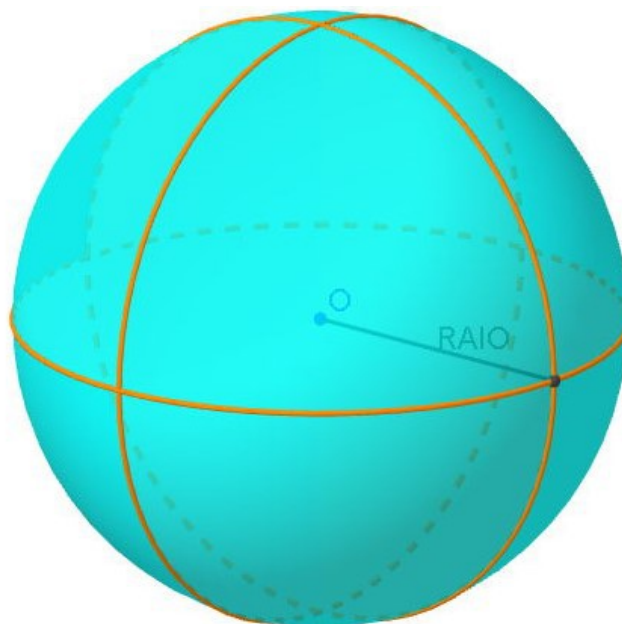
O globo terrestre possui formato semelhante ao de uma esfera levemente achatada nas extremidades. Sendo assim, para localizarmos um ponto do globo terrestre (principal função do GPS) precisamos conhecer um pouco a respeito da superfície esférica.

Neste capítulo apresentaremos a superfície esférica, seus elementos, suas intersecções com planos e algumas de suas propriedades. Apresentaremos também o Teorema da Intersecção de Quatro Superfícies Esféricas, fundamental para o entendimento dos sistemas de localização por satélites, em particular, o GPS. As principais referências utilizadas nesse capítulo são ALVES (2013), ALVES (2006) e LIMA (2012).

3.1 Superfície Esférica e seus Elementos

Definição 3.1: Dados um ponto O do espaço e um número real r positivo, chama-se **esfera de centro O e raio r** ao conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância (euclidiana) a O é menor ou igual a r .

Figura 15: Esfera de centro O e raio r



Definição 3.2: Dados um ponto O do espaço e um número real r positivo, chama-se **superfície esférica** de centro O e raio r ao conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância (euclidiana) a O é igual a r .

Definição 3.3: Um segmento de reta que une dois pontos distintos de uma superfície esférica é chamado **corda** da superfície esférica. Uma corda de uma superfície esférica que contém o seu centro é chamada **diâmetro** da superfície esférica. Um **raio** é um segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica. Na figura 16, \overline{HI} é um diâmetro e \overline{KL} é uma corda.

Observação 3.1: A palavra **raio** é usada para dois significados. Um conforme a definição 3.1 (como um número real) e outro conforme definição 3.3 (como um segmento de reta). No entanto, isto não é problema, visto que o contexto sempre deixará claro qual o significado utilizado. Analogamente para o termo **diâmetro**, que também é usado com dois sentidos: como um número real ou como um segmento de reta.

Definição 3.4: Dado um ponto P da superfície esférica, seu **antípoda** P' é o único ponto da superfície esférica tal que o segmento $\overline{PP'}$ é um diâmetro. Na figura 16 os pontos H e I são antípodas.

Figura 16: Corda, diâmetro e pontos antípodas

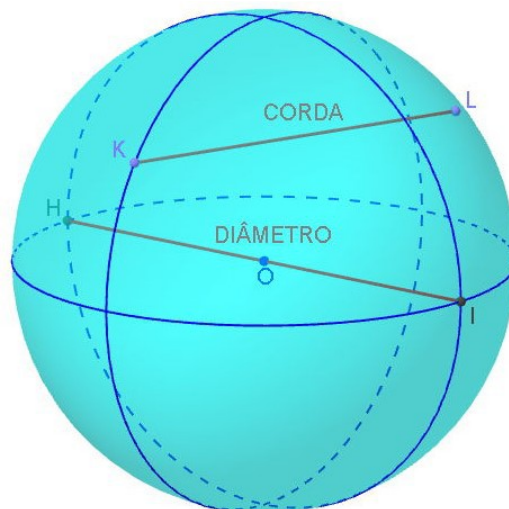
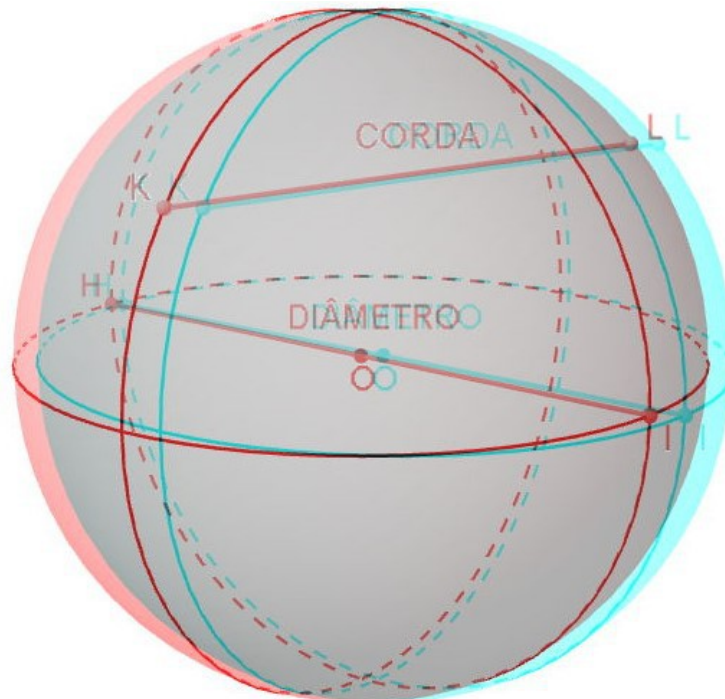


Figura17: Corda, diâmetro e pontos antípodas - visualização 3D



Definição 3.5: Quando duas circunferências máximas se interseccionam em um ponto, formam entre si um **ângulo esférico**. A medida de um ângulo esférico é igual à medida do ângulo plano formado entre as tangentes às duas circunferências, sendo o ponto de intersecção das circunferências o ponto de tangência.

Figura 18: Ângulo esférico

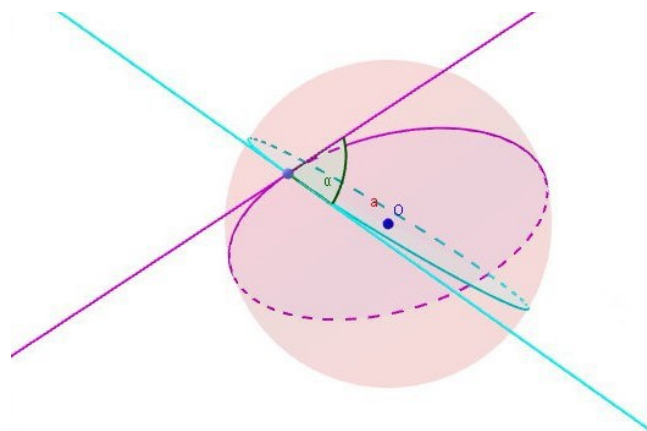
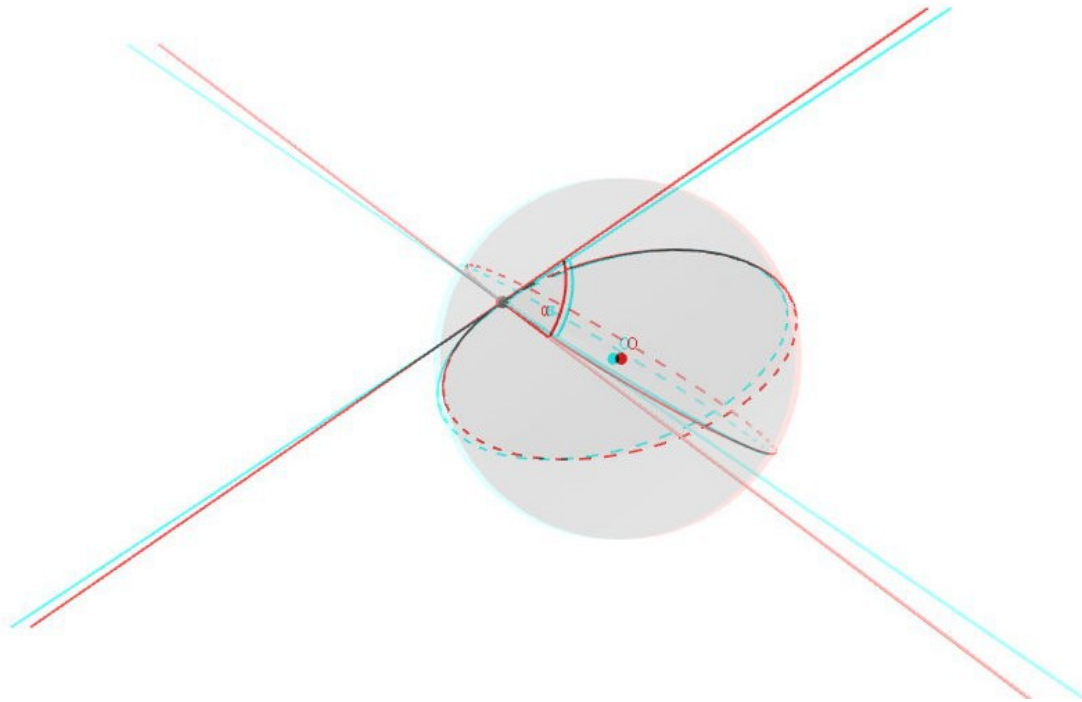


Figura 19: Ângulo esférico – Visualização 3D



3.2 Intersecção de um Plano com uma Superfície Esférica

Para definir as coordenadas geográficas de um ponto do Globo Terrestre, ou seja, a localização de um ponto na superfície do Globo Terrestre, precisamos analisar as possíveis intersecções de um plano com uma superfície esférica.

Definição 3.6: Um plano Π é **secante** a uma superfície esférica S se a intersecção $\Pi \cap S$ é uma circunferência.

Teorema 3.1: A intersecção de uma superfície esférica com um plano que contém seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio da superfície esférica.

Demonstração: Sejam S uma superfície esférica com centro O e raio r e Π um plano que contém O . A intersecção $\Pi \cap S$ é o conjunto dos pontos pertencentes a Π e que distam r de O . Ora, mas esta é exatamente a definição de circunferência de centro O e raio r . ■

Figura 20: Plano secante contendo o centro

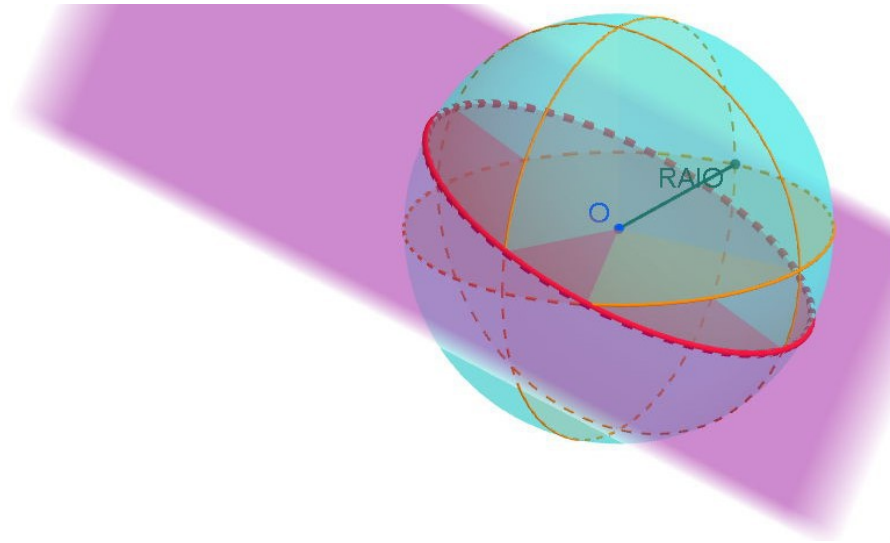
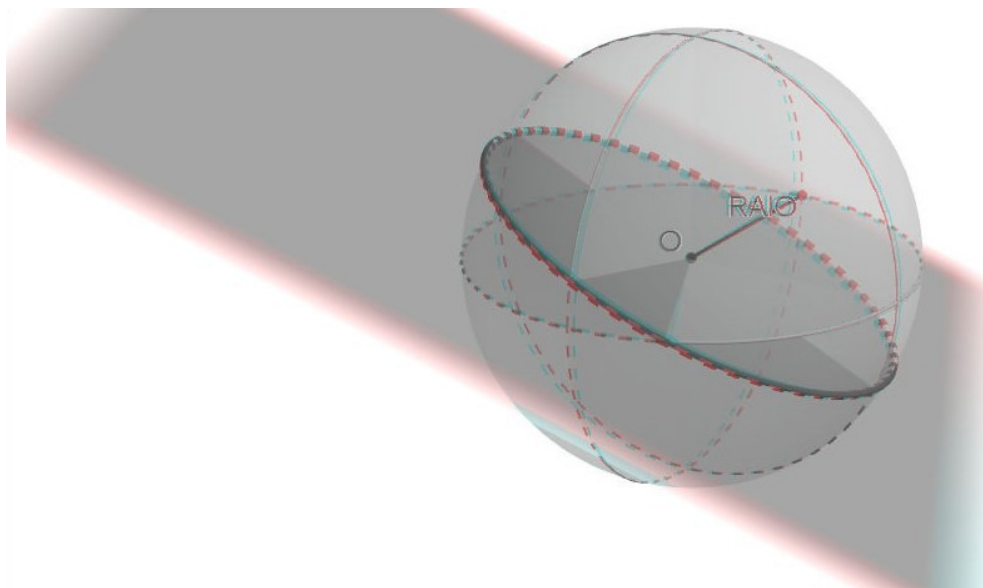


Figura 21: Plano secante contendo o centro – visualização 3D



Note que a circunferência de maior raio contida em uma superfície esférica é obtida da intersecção da superfície esférica com um plano que contém seu centro. Sendo assim, vamos adotar a seguinte definição:

Definição 3.7: Uma **circunferência máxima** em uma superfície esférica é a circunferência obtida da intersecção da superfície esférica com um plano que contém seu centro.

Definição 3.8: Um plano Π é **tangente** a uma superfície esférica S se a intersecção $\Pi \cap S$ for um conjunto unitário, ou seja, se o plano Π e a superfície esférica S têm apenas um ponto em comum. Tal ponto é denominado **ponto de tangência**.

Teorema 3.2: Um plano é perpendicular a um raio na sua extremidade comum a uma superfície esférica se, e somente se, for tangente à superfície esférica.

Demonstração: Sejam \overline{OT} um raio da superfície esférica de centro O , Π um plano perpendicular a \overline{OT} em T , e P um ponto de Π , com P e T distintos.

Figura 22: Plano Tangente à Superfície Esférica

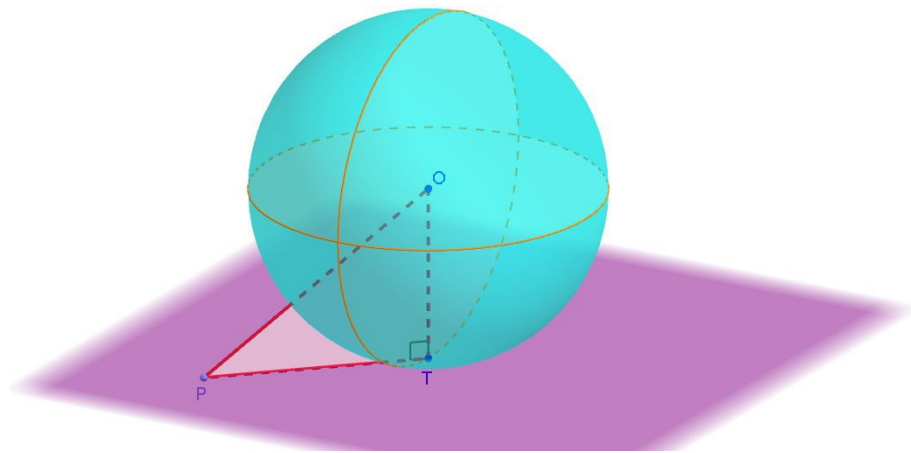
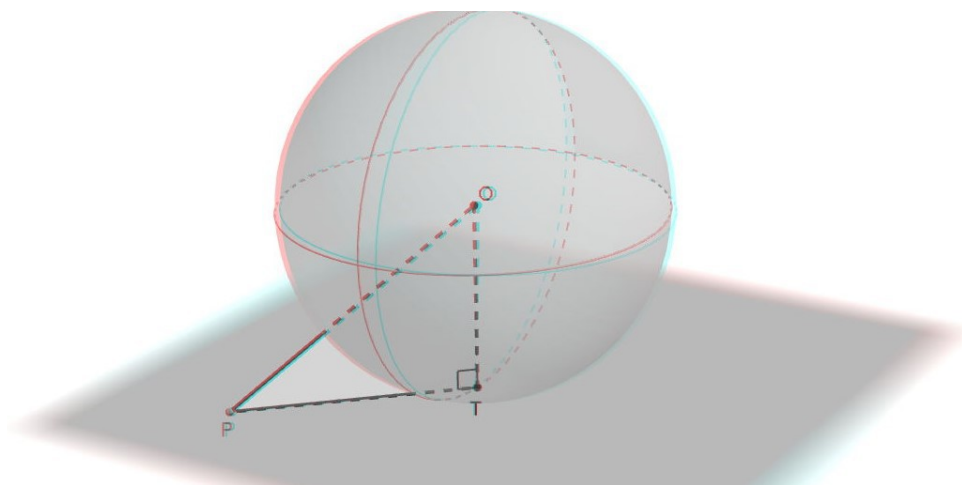


Figura 23: Plano Tangente à Superfície Esférica – visualização 3D



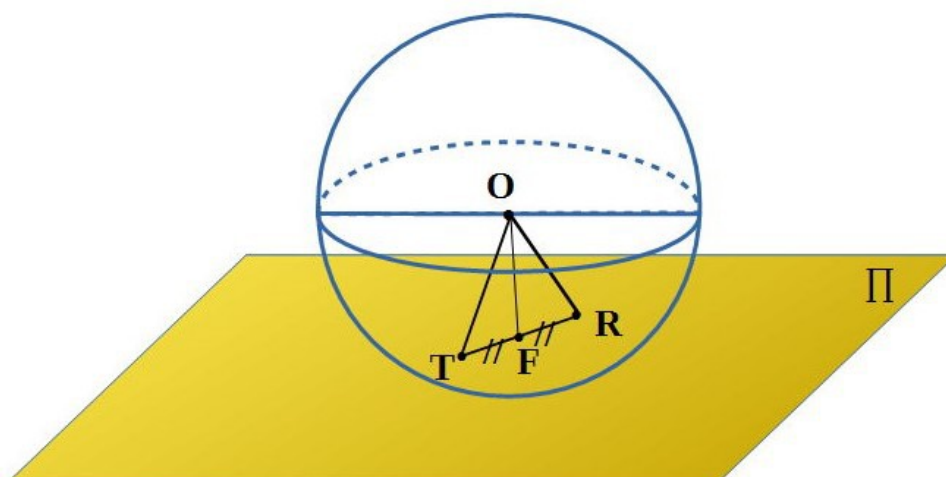
Como Π é perpendicular a \overline{OT} , o triângulo OPT é retângulo em T , com hipotenusa \overline{OP} e catetos \overline{OT} e \overline{PT} . Logo $OP > OT$ e, portanto, P não pertence à superfície esférica. Assim, o único ponto comum a Π e ao segmento \overline{OT} é o ponto T e, pela definição 3.8, Π é tangente à superfície esférica.

Reciprocamente, seja Π um plano tangente à superfície esférica em T . Vamos supor que Π não seja perpendicular a \overline{OT} .

Seja F o pé da perpendicular a Π , passando por O . Daí temos que F e T são pontos distintos, pois Π não é perpendicular a \overline{OT} .

Considere R um ponto da reta FT tal que $TR = TF + FR$ e $FT = FR$.

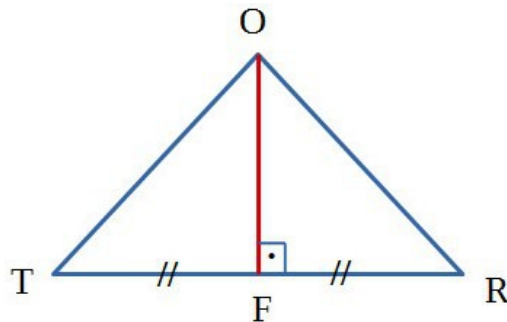
Figura 24: Plano não perpendicular ao raio



A reta FT está contida em Π , pois T e F são pontos de Π . Como R é um ponto da reta FT , temos que R pertence a Π . Como \overline{OF} é perpendicular a Π , temos que a reta FT é perpendicular a \overline{OF} .

No triângulo OTR , \overline{OF} é a altura relativa ao lado \overline{TR} e, portanto, os ângulos \hat{OFT} e \hat{OFR} são retos.

Figura 25: Triângulo OTR



Como $FT=FR$ (por construção), os ângulos $\hat{O}FT$ e $\hat{O}FR$ são retos e \overline{OF} é lado comum aos triângulos OTF e ORF . Pelo critério *LAL* de congruência de triângulos, temos que o triângulo OTF é congruente ao triângulo ORF . Logo, $OR = OT$ e, portanto, R está na superfície esférica, pois \overline{OT} é um raio da superfície esférica. Assim, Π intersecta a superfície esférica em um ponto R distinto de T , o que é uma contradição, pois, por hipótese, Π é um plano tangente à superfície esférica. A contradição veio do fato de considerar que Π não é perpendicular a \overline{OT} . Logo, Π é perpendicular a \overline{OT} . ■

Definição 3.9: Dada uma superfície esférica de centro O e raio r , os pontos do espaço cuja distância (euclidiana) a O é menor que r são chamados de **pontos interiores à superfície esférica** e os pontos cuja distância (euclidiana) a O é maior que r são chamados de **pontos exteriores à superfície esférica**.

Teorema 3.3: Se um plano contém um ponto interior de uma superfície esférica distinto de seu centro, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro desta circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.

Demonstração: Sejam S uma superfície esférica de centro O e raio r , Y um ponto interior à superfície esférica e Π um plano que não contém o centro da superfície esférica e que contém Y . (Recorde que o caso em que o plano contém o centro da esfera foi tratado no teorema 1).

Considere F o pé da perpendicular a Π que passa por O . Temos $d(O, Y) < r$, pois Y pertence ao interior de S . O triângulo OFY é retângulo em F , pois F é o pé da perpendicular a Π por O . Note que \overline{FY} está contido em Π . Como \overline{OY} é a hipotenusa e \overline{OF} é um cateto do triângulo OFY , segue que $OF < OY$.

Logo, $OF < OY = d(O, Y) < r$ e, portanto, F é um ponto interior de S .

Figura 26: Intersecção de um plano com uma superfície esférica

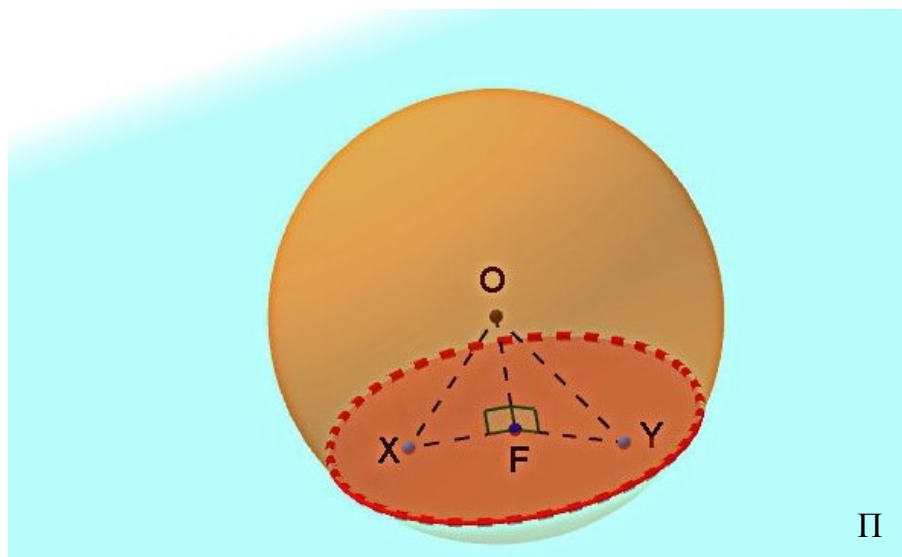
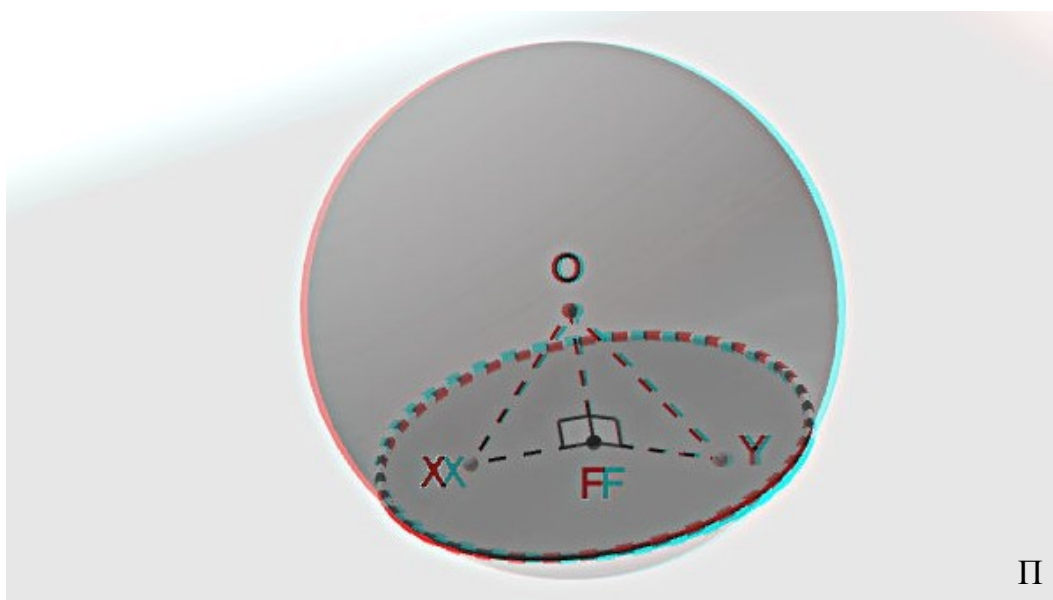


Figura 27: Intersecção de um plano com uma superfície esférica visualização 3D



Considere X um ponto qualquer da intersecção de Π com S . O triângulo OFX é retângulo em F , pois F é pé da perpendicular por O e \overline{FX} está contido em Π . Pelo Teorema

de Pitágoras, $FX^2 + OF^2 = OX^2$. Mas $OX = r$, pois $X \in S$. Assim, $FX^2 = r^2 - OF^2$ e, portanto, $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$ ($r^2 - OF^2 > 0$, pois $OF < OX = r$). Logo X é um ponto da circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$, mostrando que a intersecção $\Pi \cap S$ está contida na tal circunferência.

Vamos mostrar agora que todo ponto da circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$ pertence a $\Pi \cap S$.

Seja X um ponto qualquer dessa circunferência, em Π , com centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$, temos $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$.

Reciprocamente, no triângulo OFX , pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} OX^2 &= OF^2 + FX^2 \Rightarrow OX^2 = OF^2 + (\sqrt{r^2 - OF^2})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow OX^2 = OF^2 + r^2 - OF^2 = r^2 \Rightarrow OX = r \quad (OX \text{ e } r \text{ são positivos}). \end{aligned}$$

Assim, X pertence a $\Pi \cap S$. ■

3.3 - Intersecção de Quatro Superfícies Esféricas

Considere um sistema cartesiano ortogonal $OXYZ$ em um espaço euclidiano tridimensional E e S uma superfície esférica de centro C raio r .

Seja $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $P = (x, y, z) \in E$. Então $P \in S$ se, e somente se, $d(P, C) = r$. Como $d(P, C) = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2}$, segue que $P \in S$ se, e somente se, $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$. (1)

A equação (1) é denominada **equação reduzida de S**. Por exemplo, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ é a equação reduzida da superfície esférica de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = 4$.

Desenvolvendo a equação (1), temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_Cx + x_C^2 + y^2 - 2y_Cy + y_C^2 + z^2 - 2z_Cz + z_C^2 &= r^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x_Cx - 2y_Cy - 2z_Cz + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 &= r^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Fazendo $-2x_c = a$, $-2y_c = b$, $-2z_c = c$ e $x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - r^2 = d$ em (2) temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0. \quad (3)$$

A equação (3) é denominada **equação geral de S**.

Teorema 3.4: Se quatro superfícies esféricas intersectam-se de forma que seus centros não são coplanares, então esta intersecção se dá num único ponto.

Demonstração: Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 quatro superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente. Vamos mostrar que, se existir um ponto $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ com C_1, C_2, C_3 e C_4 não coplanares, então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

Sejam $S_1: x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

$$S_3: x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \text{ e}$$

$$S_4: x^2 + y^2 + z^2 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

as equações gerais de S_1, S_2, S_3 e S_4 . Ao subtrairmos duas a duas essas equações, obtemos equações lineares em x, y e z que determinam o plano que contém a respectiva intersecção (se houver intersecção). Por exemplo, ao fazermos $S_1 - S_2$ obtemos a equação de um plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando-se os planos que contém $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$, temos o sistema linear (*):

$$(*) \begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0. \end{cases}$$

Seja $C_i = (x_i, y_i, z_i)$ o centro de S_i , com $i=1,2,3,4$. Comparando as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0,$$

temos: $a_i = -2x_i$; $b_i = -2y_i$; $c_i = -2z_i$ e $d_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2$. (**)

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema (*) é

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}.$$

Substituindo (**) em Δ , temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) & 2(z_3 - z_1) \\ 2(x_4 - x_1) & 2(y_4 - y_1) & 2(z_4 - z_1) \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade d2 temos: $\Delta = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$

Como C_1 , C_2 , C_3 e C_4 não são coplanares, o que equivale a dizer que são linearmente independentes, pela proposição 1.2, temos que $\Delta \neq 0$ e, assim, o sistema linear (*) possui solução única. ■

Observação 3.2: É importante observar que o fato de o sistema (*), obtido na demonstração anterior, ter solução única equivale a dizer que os centros das superfícies esféricas não são coplanares e isso não implica, necessariamente, que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste no ponto P . O significado deste resultado é que os três planos que contêm, respectivamente, as intersecções $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$, intersectam-se no

ponto P . Deve-se verificar se o ponto P pertence a cada uma das superfícies esféricas e, em caso afirmativo, concluímos que P é o ponto de intersecção das quatro superfícies esféricas.

Por exemplo, sejam as superfícies esféricas

$$S_1: (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ de centro } C_1 = (1,0,0) \text{ e raio } r_1 = 1,$$

$$S_2: x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \text{ de centro } C_2 = (0,1,0) \text{ e raio } r_2 = 1,$$

$$S_3: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \text{ de centro } C_3 = (0,0,1) \text{ e raio } r_3 = 1 \text{ e}$$

$$S_4: x^2 + y^2 + z^2 = 9, \text{ de centro } C_4 = (0,0,0) \text{ e raio } r_4 = 3.$$

Desenvolvendo os quadrados, temos:

$$S_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0,$$

$$S_2: x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = 1 \Rightarrow S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0,$$

$$S_3: x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1 \Rightarrow S_3: x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

$$\text{e } S_4: x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Fazendo $S_1 - S_2$, $S_1 - S_3$ e $S_1 - S_4$, temos o sistema linear

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \\ -2x &= -9 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = y = z = \frac{9}{2}$.

Assim, a solução do sistema é a terna $(x, y, z) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e o determinante do sistema é

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \text{ logo esta é a única solução do sistema. Isto significa que os}$$

planos que contêm as intersecções $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$, intersectam-se no ponto

$P = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Mas uma simples verificação mostra que o ponto P em questão não pertence a qualquer das quatro superfícies esféricas e, assim, estas quatro superfícies esféricas não possuem intersecção, embora as três primeiras superfícies se intersectem na origem do sistema cartesiano. Dessa forma, vemos que a hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é essencial para a validade do teorema.

Observemos também que, numa situação real de uso do GPS, que descreveremos posteriormente, essa hipótese é comprovada pela existência do próprio usuário do GPS. O fato é que os raios das superfícies esféricas são variáveis e são determinados em função da posição do usuário, pois tratam-se de superfícies esféricas imaginárias formadas por frentes de ondas eletromagnéticas que se propagam no espaço à velocidade da luz.

3.4 Coordenadas de um Ponto do Globo Terrestre

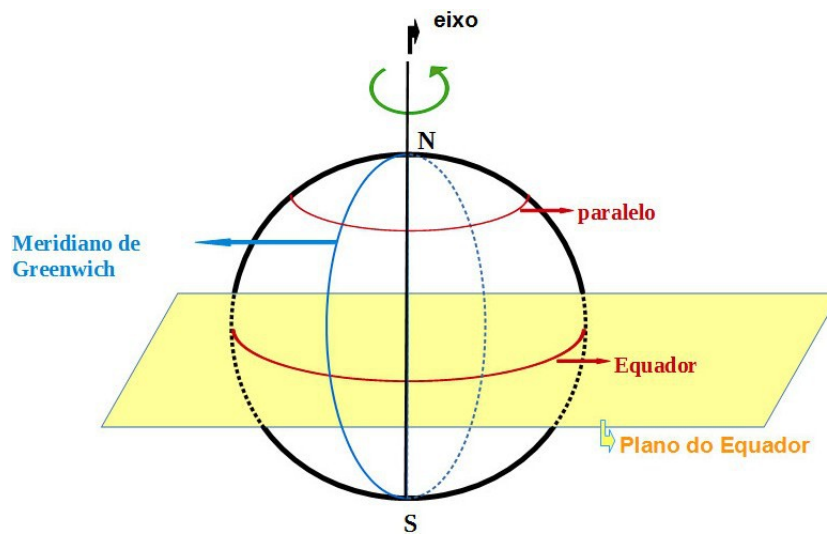
O formato da Terra é muito semelhante ao de uma esfera, levemente achatada nos pólos. Como esse achatamento é proporcionalmente muito pequeno, para efeitos didáticos podemos considerar a Terra como uma esfera. **Globo Terrestre** é o nome dado ao instrumento didático que representa a Terra como uma esfera. Passamos a considerar neste trabalho o modelo esférico da Terra, com raio médio de 6370 Km e consideremos um sistema cartesiano $OXYZ$ fixado, com origem O , no centro da Terra.

Definição 3.10: Uma reta que contém o centro da Terra é chamada de **Eixo**. O eixo em torno do qual a Terra efetua seu movimento de rotação é chamado de **Eixo Polar**.

Definição 3.11: **Pólo Norte** é o ponto de intersecção do semi-eixo OZ positivo com a superfície terrestre. O antípoda do **Pólo Norte** é o **Pólo Sul**.

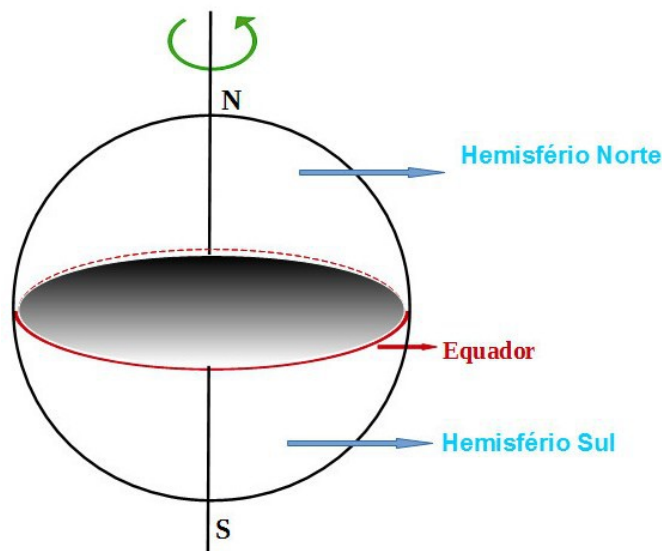
Definição 3.12: A circunferência máxima contida num plano perpendicular ao Eixo Polar é chamada **Linha do Equador** (que chamaremos apenas de **Equador**) e o plano que contém o Equador é chamado **Plano do Equador**.

Figura 28: Eixo Polar e Plano do Equador



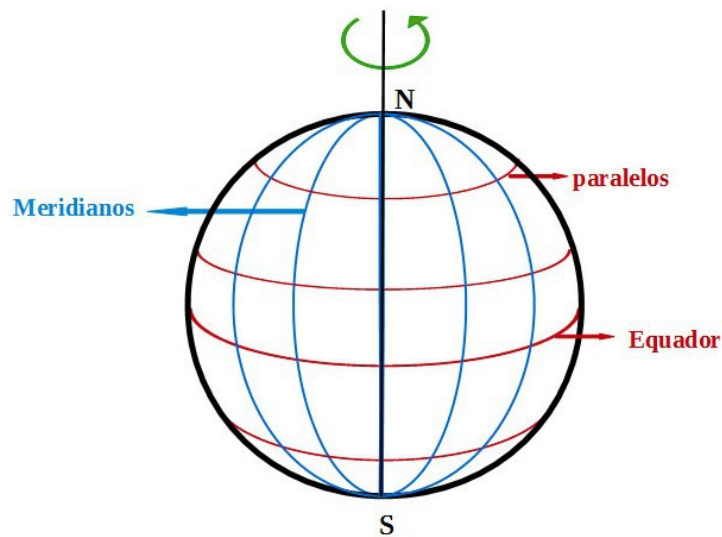
O plano do Equador divide a Terra em duas partes chamadas **Hemisfério Norte** e **Hemisfério Sul**.

Figura 29: Hemisférios Norte e Sul



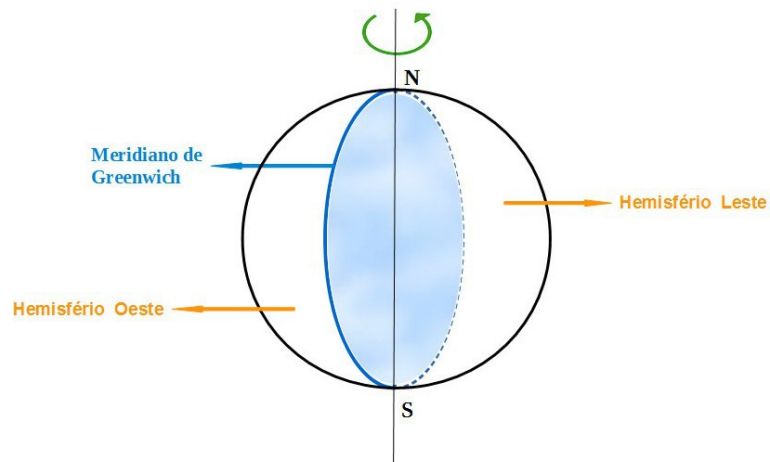
Definição 3.13: As circunferências obtidas através da intersecção da superfície terrestre com planos paralelos ao plano que contém o Equador são chamadas de **Paralelos** e as semicircunferências máximas com extremidades nos pólos Norte e Sul e contidas no plano que contém o eixo polar são chamadas de **Meridianos**.

Figura 30: Paralelos e meridianos



O meridiano mais conhecido é o **Meridiano de Greenwich** e é o meridiano que passa pelo Observatório Real, na localidade de Greenwich, em Londres, Reino Unido. Por convenção, o plano que contém o meridiano de Greenwich divide o globo terrestre em dois Hemisférios, **Leste** e **Oeste** (Oriente e Ocidente). Foi definido por acordo internacional em 1884 e enfrentou concorrência com a França (seria denominado “Meridiano de Paris”), com a Espanha (seria “Meridiano de Cadis”) e com Portugal (seria “Meridiano de Coimbra”). Além disso, serve de referência para estabelecer os fusos horários.

Figura 31: Hemisférios Leste e Oeste



Observação 3.3:

I) Paralelos NÃO são circunferências máximas.

II) Meridianos NÃO são circunferências, são semicircunferências.

III) *Os livros de Geografia utilizam com muita frequência a palavra “círculo” para designar circunferência. Em particular, descrevem o Equador como um círculo máximo e utilizam nomes como círculo polar. Isto é, na verdade, um abuso de linguagem consagrado pelo uso sistemático ao longo do tempo. A nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso os geógrafos, não precisa coincidir necessariamente com a usada pelos matemáticos.*[ALVES, 2013, p. 22]

Para dar a localização precisa de um ponto no globo terrestre foi criado um sistema de coordenadas. São as chamadas **Coordenadas Geográficas**: longitude, latitude e altitude.

Definição 3.14: A **Longitude** de um ponto P é a medida em graus (e seus submúltiplos) do arco de paralelo, com extremidades em P no Meridiano de Greenwich. É medida de 0° a 180° L (Leste) ou de 0° a 180° O (Oeste).

Definição 3.15: A **Latitude** de um ponto P é a medida em graus (e seus submúltiplos) do arco de meridiano, com extremidades P no Equador. É medida de 0° a 90° N (Norte) ou de 0° a 90° S (Sul).

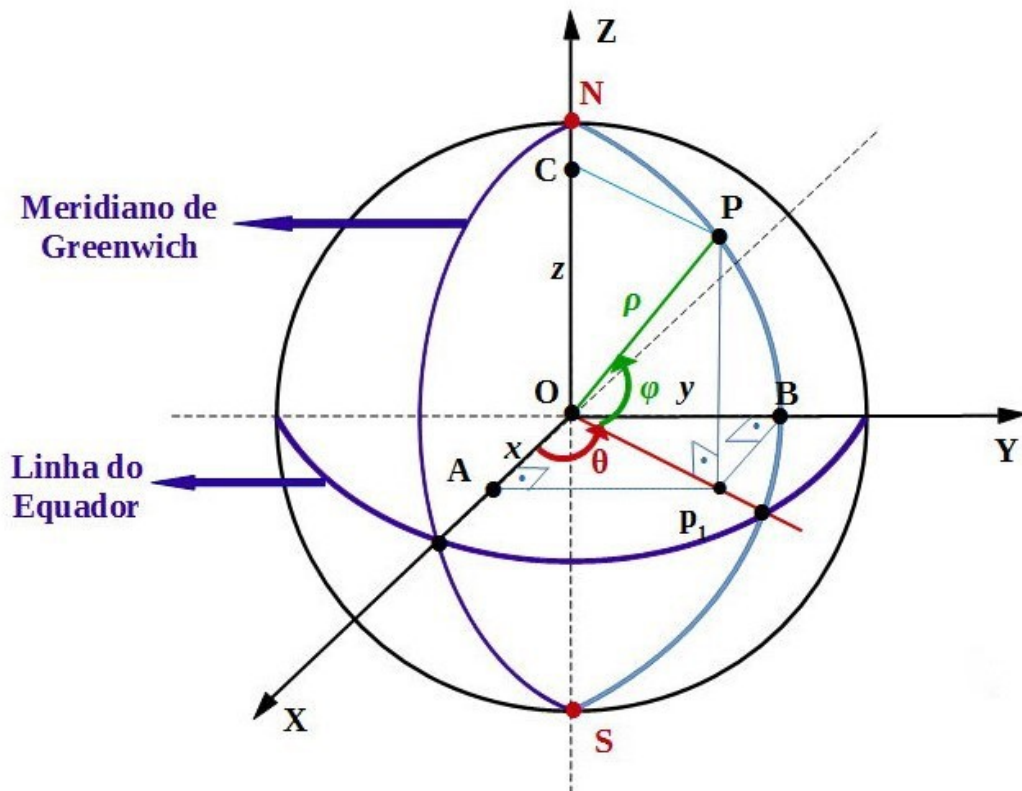
Observação 3.4: Alguns receptores GPS (que trataremos mais à frente) e alguns softwares de localização, como o Google Earth, utilizam valores positivos para latitude Norte e valores negativos para latitude Sul. Assim, quando dizemos que a latitude do ponto P é 30° , deve-se entender 30° Norte e, quando dizemos que a latitude de um ponto é -30° , deve-se entender 30° Sul. Analogamente para a longitude. Assim, quando dizemos que a longitude de um ponto P é 60° , devemos entender 60° Leste e, ao dizer -60° , devemos entender 60° Oeste. Também para efeitos de cálculo de transformação de coordenadas cartesianas em geográficas e vice-versa, deve-se usar sinal positivo para longitude Leste e para latitude Norte e sinal negativo para longitude Oeste e latitude Sul.

Definição 3.16: A **Altitude** de um ponto P é a distância entre P e a superfície terrestre a nível do mar.

A localização de um ponto P sobre a superfície é dada em termos de coordenadas geográficas e para isso devemos relacionar essas coordenadas com as coordenadas cartesianas desse ponto P . Consideremos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, semi-eixo OZ positivo apontando na direção do pólo Norte, plano Π_{xy} sendo o plano do Equador, eixo OX positivo intersectando o meridiano de Greenwich e eixo OY positivo intersectando o meridiano de longitude 90° Leste.

Na figura 32, o ângulo θ indica a longitude do ponto P , o ângulo φ indica a latitude do ponto P . Seja P_1 a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano Π_{xy} . Considere os pontos A , B e C pertencendo, respectivamente, aos eixos OX , OY e OZ , sendo $OA = x$, $OB = y$ e $OC = z$ e $\rho = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a distância de P à origem. Neste trabalho estamos considerando o modelo esférico da Terra com raio 6370 km . Assim, para um ponto P da superfície terrestre temos que $\rho = 6370 \text{ km}$ e a altitude do ponto P é zero.

Figura 32: Coordenadas de um ponto na superfície terrestre



No triângulo OP_1P , retângulo em P_1 , temos $\operatorname{sen} \varphi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \operatorname{sen} \varphi$. (1)

Ainda no triângulo OP_1P , temos $\operatorname{cos} \varphi = \frac{OP_1}{\rho} \Rightarrow OP_1 = \rho \operatorname{cos} \varphi$.

No triângulo OAP_1 , substituindo $OP_1 = \rho \operatorname{cos} \varphi$, temos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{OP_1} = \frac{y}{\rho \operatorname{cos} \varphi} \Rightarrow y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi \quad (2)$$

e

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{OP_1} = \frac{x}{\rho \operatorname{cos} \varphi} \Rightarrow x = \rho \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi. \quad (3)$$

Assim, dado um ponto P de coordenadas geográficas (ρ, θ, φ) , suas coordenadas cartesianas são: $x = \rho \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi$ e $z = \rho \operatorname{sen} \varphi$.

Agora, de (3) temos

$$z = \rho \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \operatorname{sen} \varphi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{z}{\rho}\right).$$

De (2) e (1) temos

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi}{\rho \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Assim, dado um P de coordenadas cartesianas (x, y, z) , suas coordenadas geográficas são: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ e $\varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{z}{\rho}\right)$.

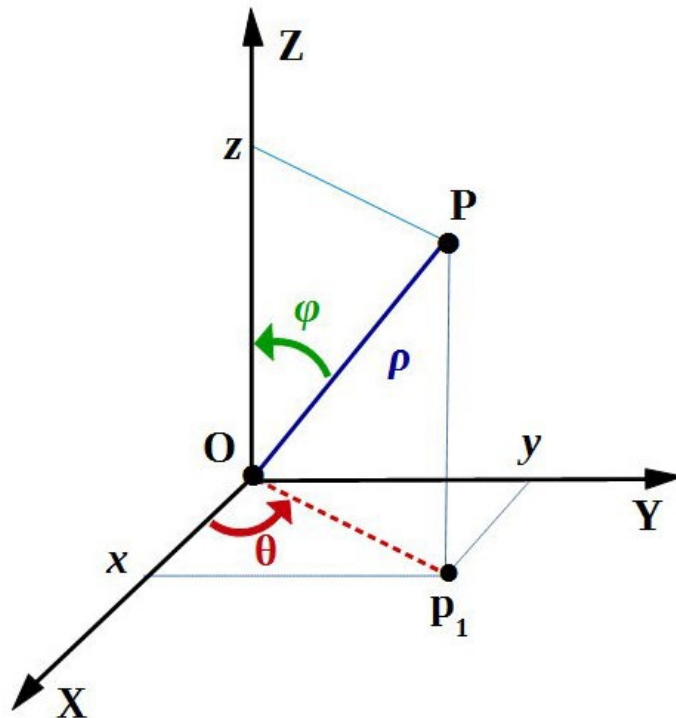
Observação 3.5: É comum haver certa confusão entre os conceitos de coordenadas esféricas e coordenadas geográficas. Apenas para esclarecimentos, **coordenadas esféricas** de um ponto $P = (x, y, z)$ num sistema de coordenadas $OXYZ$ S são (ρ, θ, φ) , definidas da seguinte maneira: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, é a distância do ponto P à origem; θ é o ângulo entre $\overline{OP_1}$ e o eixo OX , onde $P_1 = (x, y, 0)$ é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano Π_{xy} e φ é o ângulo entre \overline{OP} e o eixo OZ . Assim, dado um ponto P de

coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , suas coordenadas cartesianas são:
 $x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ e $z = \rho \cos \varphi$. A origem não possui as coordenadas θ e φ . Para um ponto $P=(x, y, z)$ temos:

Tabela 1: Coordenadas esféricas e geográficas do ponto $P = (x, y, z)$

	ρ	θ	φ
Coordenadas esféricas	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$
Coordenadas geográficas	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{z}{\rho}\right)$

Figura 33: Coordenadas esféricas do ponto $P = (x, y, z)$



4. Instrumentos e Sistemas de Localização

A necessidade da humanidade de saber localizar-se, seja em terra, água ou mar, levou o homem a criar e utilizar instrumentos de localização. A principal dificuldade era que os instrumentos de localização criados até então, forneciam a direção a ser seguida, mas não a posição em que se encontrava um objeto. Mas tudo mudou a partir de 1973 com a criação do GPS.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram ALVES (2013), FASCIONI (2013) e MONICO (2008).

4.1 Instrumentos de Localização

Apresentaremos de forma breve alguns dos instrumentos de localização que eram utilizados. São eles: o astrolábio, o quadrante e o sextante. Os instrumentos citados, bem como outros, foram utilizados por muito tempo apesar de suas limitações.

ASTROLÁBIO

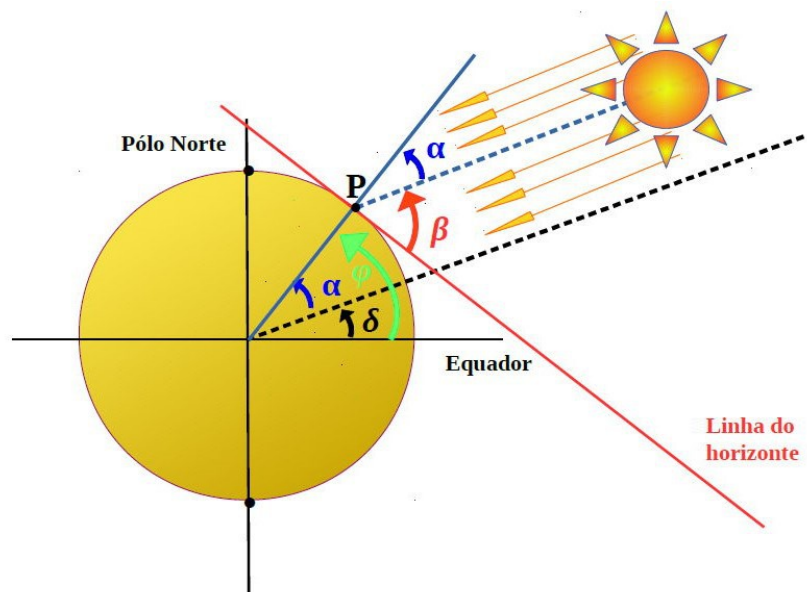
Do grego astrolabium: astro = astro e labium = adquirir, conhecer. O astrolábio consiste de um disco de metal com anéis graduados, tendo preso ao centro uma seta móvel que deveria ser alinhada a um astro conhecido, indicando no anel graduado uma medida em graus do ângulo formado entre a linha do horizonte e a linha imaginária que une o astro em questão e a pessoa que está olhando o astro através do astrolábio, sendo a pessoa o vértice do ângulo (*Figura 34*). Tal ângulo é chamado **ângulo de elevação** ou **altura** do astro. A utilização do astrolábio não era muito simples e devia ser feita por duas pessoas, uma pessoa erguia o disco na altura dos olhos (ou pendurava em algo) e alinhava a seta com o astro, a outra pessoa lia os graus no círculo. O esquema de funcionamento do astrolábio está ilustrado na figura 35. Sendo β é o ângulo de elevação, $\alpha = (90^\circ - \beta)$ a distância zenital (ângulo formado entre a vertical do local e a linha imaginária que une o astro e o local do observador, sendo a pessoa o vértice do ângulo) e δ a declinação do astro. A **latitude** é o ângulo φ , formado pela vertical do local com o Equador, medido

sobre o meridiano do lugar, sendo $\varphi = \alpha + \delta$. A declinação do astro era obtida através de uma tabela astronômica.

Figura 34: Astrolábio. Fonte: www.isthmus.com.br



Figura 35: Esquema de funcionamento do Astrolábio



QUADRANTE

Tal como o nome indica, é um instrumento que consiste num quarto de círculo graduado ao qual está fixo um fio de prumo (*Figura 36*). Sua função também é a medição do ângulo de um objeto, no caso um astro, em relação ao horizonte, sendo o observador o vértice desse ângulo. O funcionamento do quadrante é semelhante ao do astrolábio.

Figura 36: Quadrante. Fonte: www.isthmus.com.br



SEXTANTE

Uma evolução do astrolábio, em vez de um disco inteiro (360°), consiste apenas de uma secção de círculo vazado com ângulo de 60° (um sexto do círculo, daí o nome). O sextante é composto por uma luneta, dois espelhos (planos) refletores, um limbo graduado com uma lupa auxiliar para tornar a leitura mais exata e filtros para proteção contra a luz solar.

Figura 37: Sextante. Fonte: www.portuguese.alibaba.com



O esquema de funcionamento do sextante (*Figura 38*) consiste no seguinte: o raio de luz que sai da estrela (ou outro astro, como o sol) é refletido nos espelhos *A* e *B* até o olho do observador, situado em *O*. A reta *OB* representa o horizonte, que pode ser visto pelo observador, pois uma parte do espelho *B* não é espelhada. O ângulo θ é o ângulo de elevação da estrela. Como em um espelho plano, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, temos que $\widehat{BAE} = \widehat{OAE} = \alpha$ e $\widehat{CBE} = \widehat{EBO} = \beta$.

No triângulo *ABO*, temos:

$$2\alpha + (180^\circ - 2\beta) + \theta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 2\alpha + \theta \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\theta}{2}. \quad (1)$$

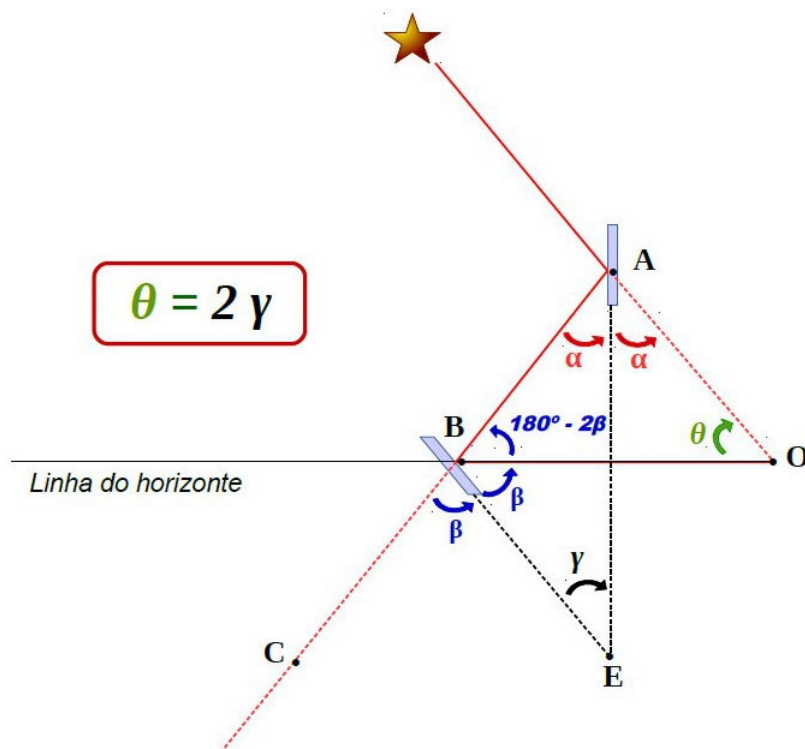
No triângulo *ABE*, temos:

$$\alpha + (180^\circ - 2\beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma. \quad (2)$$

De (1) e (2), temos $\alpha + \gamma = \alpha + \frac{\theta}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\gamma$.

Assim, o ângulo de elevação do astro é o dobro do ângulo formado entre os espelhos e este é o ângulo que se lê no limbo do instrumento.

Figura 38: Funcionamento do sextante



4.2 Construção e Funcionamento do GPS

É comum encontrar em textos sobre GPS que NAVSTAR significa **NAV**igation **Sat**élite with **T**ime **A**nd **R**anging. Mas, lendo o histórico do desenvolvimento do sistema, constata-se que NAVSTAR era apenas um bom nome para o projeto, e não uma sigla. É um nome bem sugestivo para o projeto, pois conota “estrela de navegação” (MONICO, 2008). O GPS foi oficialmente declarado operacional em 27 de abril de 1985, com 24 satélites em órbita. Em 2005 já eram 29 satélites e, em junho de 2007, havia 30 satélites operacionais.

O sistema proporcionava 2 tipos de serviço:

- o **SPS** – Standart Positioning Service (serviço de posicionamento padrão) - disponível para todos os usuários, sem cobrança de qualquer taxa. Oferecia níveis de acurácia horizontal de 100 m e vertical de 140 m. **Acurácia** é o grau de concordância entre o valor medido de uma grandeza e o considerado “verdadeiro” ou de melhor qualidade.
- o **PPS** – Precise Positioning Service (serviço de posicionamento preciso) – restrito ao uso militar. Proporcionava acurácia de 22 m na horizontal e 27,7 m na vertical.

A partir do dia 22 de maio de 2000, para surpresa de toda comunidade usuária, foi abolida a técnica de deterioração da acurácia no SPS, melhorando a acurácia em torno de 10 vezes para usuários comuns. Em 18 de setembro de 2007, o presidente dos Estados Unidos aboliu definitivamente a degradação da acurácia nos futuros satélites. Hoje já temos receptores GPS para usuários comuns com acurácia na ordem de 3 m.

O **GPS** - Global Positioning System (sistema de posicionamento global) é, no Brasil, o mais conhecido dos sistemas atuais de localização, posicionamento e navegação, tanto terrestre como também aéreo, marítimo e fluvial. O **GPS** foi concebido na década de 1970, nos Estados Unidos. Os outros sistemas atuais em funcionamento são o **GLONASS** (Global Orbiting Navigation Satellite System), também concebido na década de 1970 na antiga URSS, e o **Galileo**, concebido em 1999 pela União Europeia. De forma geral, esses sistemas têm sido chamados de **GNSS** (Global Navigation Satellite System), nome concebido em 1991, pela Associação Internacional de Aviação Civil. Os três sistemas têm funcionamento semelhante em relação à concepção física e à matemática envolvida, porém cada um com suas peculiaridades. Como o objetivo deste trabalho é explorar um pouco da matemática destes sistemas para uso didático em nível de ensino médio, nos referiremos apenas ao GPS.

O GPS é composto de três segmentos: espacial, de controle e de usuários.

Segmento espacial

O segmento espacial é composto por uma constelação de, no mínimo, 24 satélites (hoje já há mais de 30) de órbita média, a uma altitude aproximada de 20200 km acima do nível do mar. Os satélites são distribuídos em seis planos orbitais igualmente espaçados e inclinados 55° em relação ao plano do Equador, com 4 satélites em cada plano orbital. As órbitas são elípticas mas, para efeito didático, vamos considerá-las circulares. O período orbital é de aproximadamente 12 horas e cada satélite tem um ângulo de visualização de aproximadamente 28° . Essa configuração garante que, no mínimo, quatro satélites estejam “visíveis” em qualquer local da superfície terrestre, a qualquer hora do dia ou da noite (MONICO, 2008, p. 40), independentemente das condições climáticas.

Figura 39: Representação da Terra e das órbitas dos satélites GPS

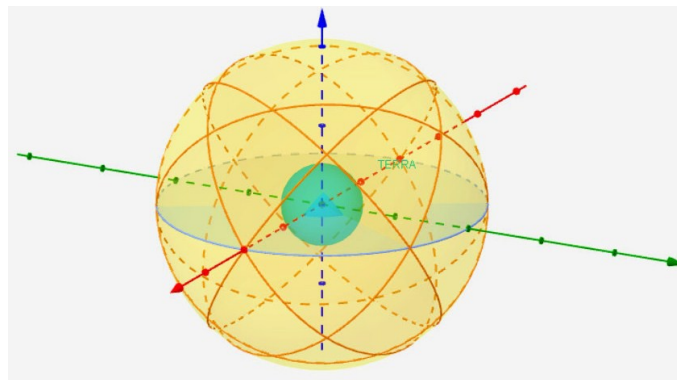
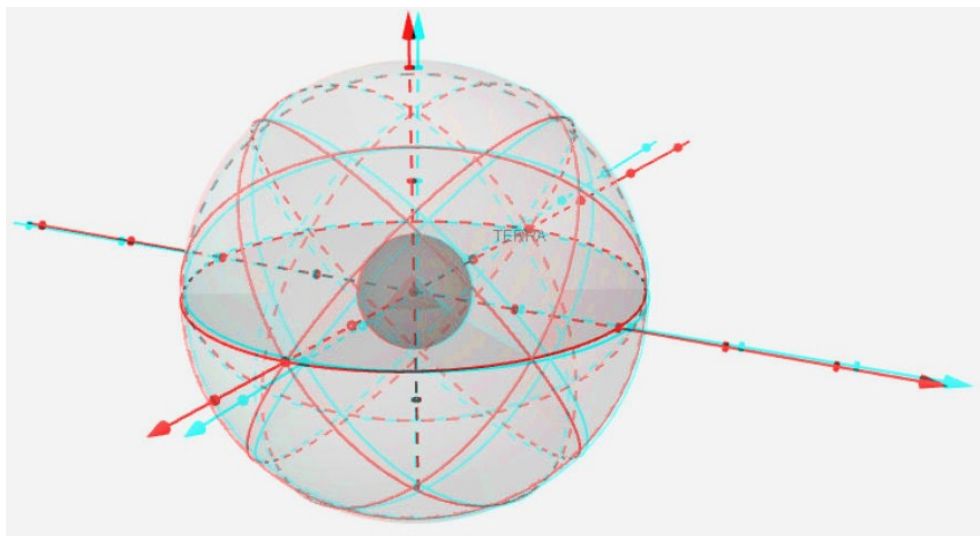


Figura 40: Representação da Terra e das órbitas dos satélites GPS - Visualização 3D



Segmento de controle

O sistema de controle é composto por seis estações terrestres de controle e gerenciamento do sistema, sendo uma estação de controle central, localizada no Colorado, EUA. Estas estações monitoram continuamente o sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema sempre que necessário.

Segmento de usuários

Composto por usuários de receptores GPS, tanto no uso civil quanto militar, de acordo com a necessidade de cada um, como navegação, agricultura, construção, manobras militares, guerras ou outra atividade.

Cada satélite transmite, repetidamente, através de ondas eletromagnéticas (ondas de rádio), um sinal padrão fixado. Esse sinal é recebido por um **receptor GPS** (a partir daqui denominado apenas **receptor**) na Terra, que mede a diferença de tempo, chamada **lapso de tempo**, entre a transmissão e a recepção deste sinal padrão. Essa diferença é inferior a um décimo de segundo. O receptor calcula, então, a distância até o satélite, multiplicando o lapso de tempo pela **velocidade da luz**, aproximadamente **299792458 m/s**, pois é essa a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas. Cada satélite transmite também suas **efemérides**, que são suas coordenadas cartesianas em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Assim, o receptor calcula a equação de uma superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância calculada anteriormente. Captando sinais de quatro satélites, o receptor determina a sua posição (posição do usuário) intersectando as quatro superfícies esféricas obtidas e obtendo as coordenadas cartesianas do ponto P, sendo este ponto a localização do usuário. O receptor transforma, então, estas coordenadas cartesianas em coordenadas geográficas – latitude, longitude e altitude (a maioria dos receptores “chamam” a altitude de elevação).

A qualidade de um receptor (e o preço) é determinada, principalmente, pela precisão na contagem de tempo que o receptor é capaz de processar. Um erro de um milésimo de segundo na medição do lapso de tempo resulta num erro de *300 km*, pois, aproximando a velocidade da luz para $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, temos:

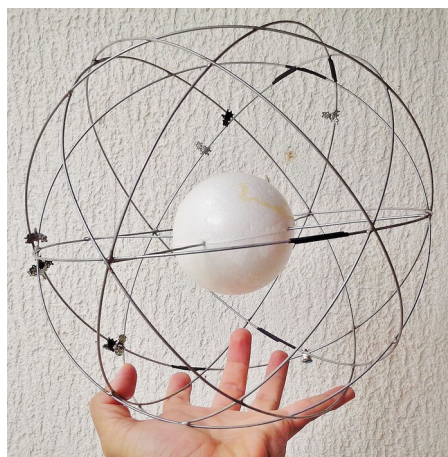
$$3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} \text{ s} = 3 \cdot 10^5 \text{ m} = 300000 \text{ m} = 300 \text{ km}.$$

Por esse motivo, as informações numéricas utilizadas no GPS envolvem 10 ou mais dígitos, para obtenção de um nível confiável de acurácia.

5. ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 5.1 – Maquete representando a Terra e as órbitas dos satélites

Figura 41: Maquete representando a Terra e as órbitas dos satélites GPS



O **objetivo** desta atividade é construir uma maquete em escala representando a Terra e as órbitas dos satélites do GPS, dando ao aluno uma ideia do que seja e como funciona tal sistema e servindo como base para revisar e aprimorar conteúdos matemáticos. A experiência de Professor permite afirmar que a maioria dos alunos gostam de manipular, na escola, materiais que não são de uso corriqueiro na escola, como arame, alicate, soldador, bola de isopor e que se sentem bem à vontade para fazer perguntas ao professor, sem medo de errar ou de dizer que não sabe ou que esqueceu tal conteúdo.

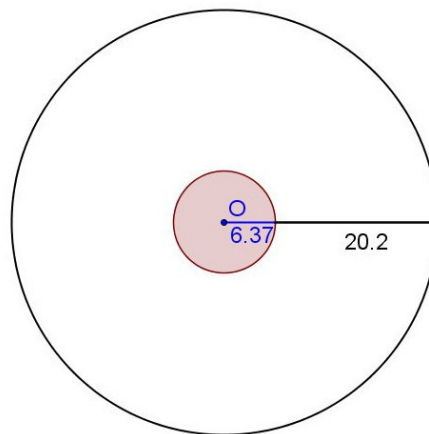
Esta atividade pode ser aplicada **nos três anos do ensino médio**, visto que os **conteúdos** trabalhados são básicos e vistos até o final do ensino fundamental, como regra de três simples, escala (proporção), circunferência, ângulos, esfera.

Os **materiais necessários** são bolinha de isopor ou plástica (daquelas de piscina de bolinhas infantil) com diâmetro aproximado de 7 cm, arame galvanizado com bitola 16 BWG - 1,65 mm (ou próximo disso – não pode ser muito fino pois não dará sustentação à maquete, e não pode ser muito grosso pois fica difícil de cortar e moldar), alicate ou torquês

para cortar o arame, soldador e solda estanho (ou cola que cole metal), régua, transferidor, arame fino ou barbante, fita adesiva, espaguete termo-retrátil.

Vamos considerar que a Terra tem forma esférica de raio 6370 Km, que as órbitas dos satélites são circulares e que cada órbita dista 20200 Km da superfície terrestre. Uma boa primeira representação para o aluno seria esta:

Figura 42: Representação plana da Terra e de uma órbita de satélites GPS



De posse do material, vamos à construção da maquete. Primeiramente, meça o diâmetro da bolinha que será utilizada. Vamos supor que seja 7 cm, ou seja, seu raio é 3,5 cm. Seja x a distância de uma órbita de satélite à superfície da Terra, **na maquete**. Como vamos construir a maquete em escala, temos, por uma regra de três simples:

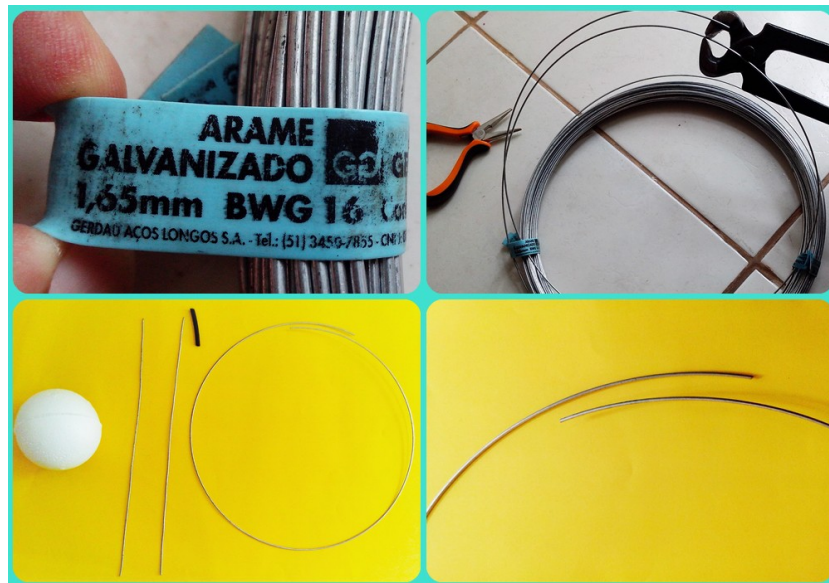
$$\begin{array}{l} 3,5 \text{ cm} \text{ ----- } 6370 \text{ Km} \\ x \text{ ----- } 20200 \text{ Km} \end{array}$$

Resolvendo: $x \cdot 6370 = 3,5 \cdot 20200 \Rightarrow x = \frac{3,5 \cdot 20200}{6370} \Rightarrow x = 11,1 \text{ cm}.$

Sendo o ponto **O** da figura 42 o centro da Terra e também das órbitas dos satélites, temos que o raio das órbitas, **na maquete**, será 3,5 cm + 11,1 cm = 14,6 cm. O rolo de arame costuma ter diâmetro entre 27 cm a 31 cm. Para facilitar a montagem, corte o arame sem esticá-lo, cortando, a cada vez, uma volta inteira e mais um pouquinho para fazer a emenda (figura 43). A emenda pode ser feita com solda estanho, com espaguete termo-retrátil (esta é a melhor forma, pois se necessário, dá para variar um pouco o raio) ou mesmo fita adesiva.

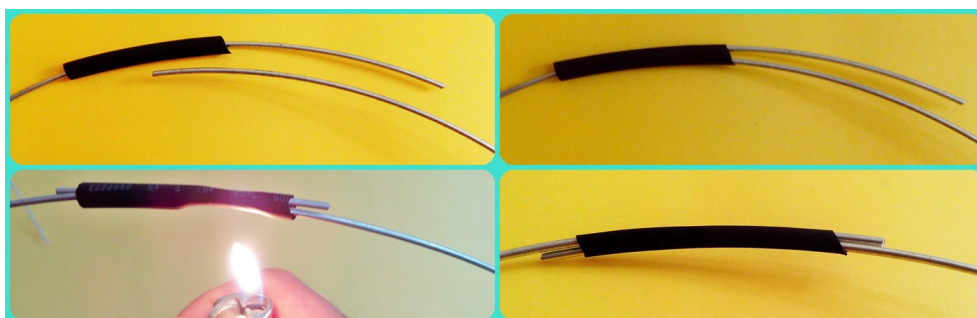
Corte 7 circunferências, 6 para representar as órbitas dos satélites e uma para ser colocada no plano do Equador para dar sustentação às outras (essa órbita não existe, é apenas para servir de suporte para montar a maquete). Corte também dois pedaços retos de 30 cm.

Figura 43: Cortando o arame



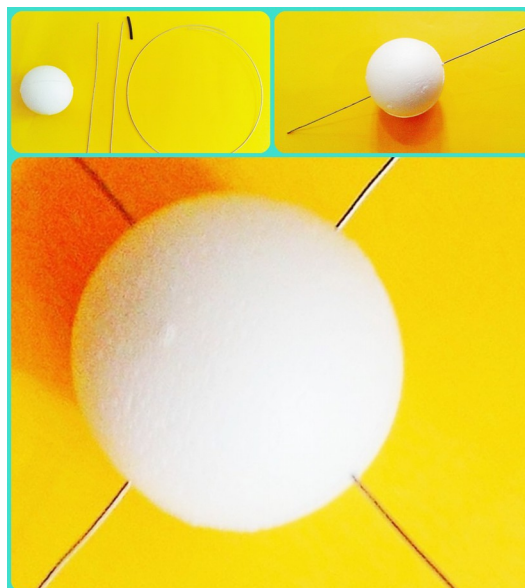
Monte as circunferências utilizando o espaguete termo-retrátil. Este espaguete pode ser encontrado em lojas de componentes eletrônicos ou adquirido através de sites como o www.mercadolivre.com.br, por exemplo. Na falta deste, pode-se usar fita adesiva mesmo. Feche as circunferências com o espaguete, utilizando isqueiro, vela, palito de fósforo, etc.. (Figura 44).

Figura 44: Aplicação do espaguete termo-retrátil



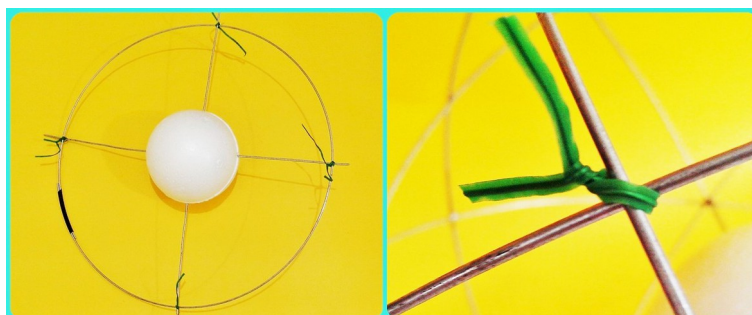
Introduza os dois pedaços de arame retos numa imaginária linha do equador – a bolinha geralmente tem uma emenda que serve para essa referência (figura 45).

Figura 45: Introdução dos arames na bola de isopor



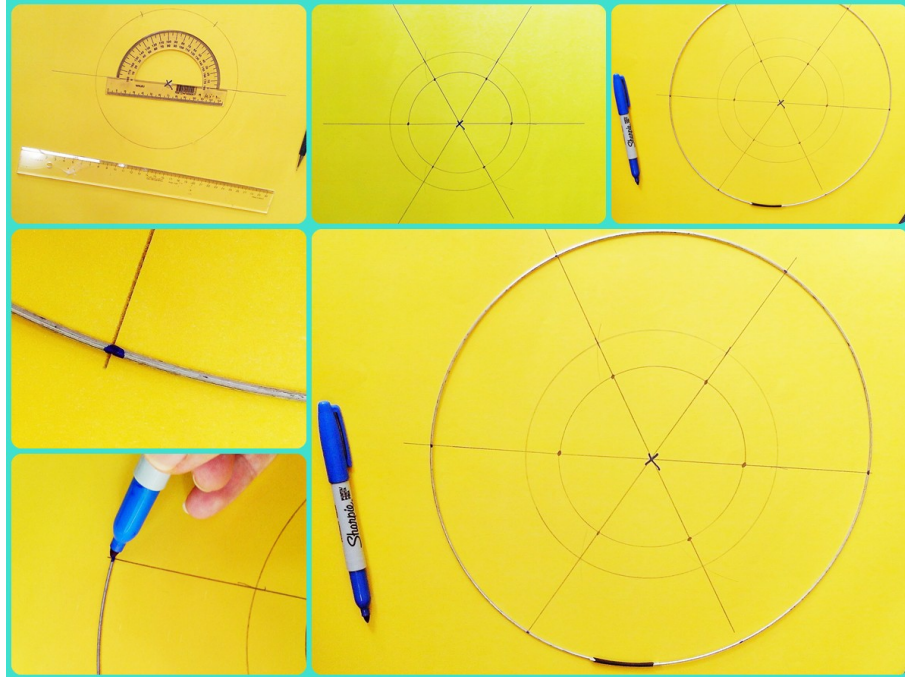
Em seguida, encaixe uma circunferência e amarre com arame fino ou barbante (figura 46). Essa circunferência deve ser encaixada de modo a representar uma circunferência contida no plano do Equador e iremos nos referir a ela como **circunferência suporte**. Não faça soldas ainda, monte toda a maquete e vá amarrando. Solde tudo ao final pois, possivelmente, haverá pequenas diferenças nos comprimentos das circunferências que deverão ser ajustados enquanto se monta a maquete e, se soldar, esses pequenos ajustes não poderão ser feitos. Lembremos que essa atividade tem o intuito de dar ao aluno uma ideia do GPS e não requer precisão absoluta.

Figura 46: Circunferência suporte encaixada e amarrada



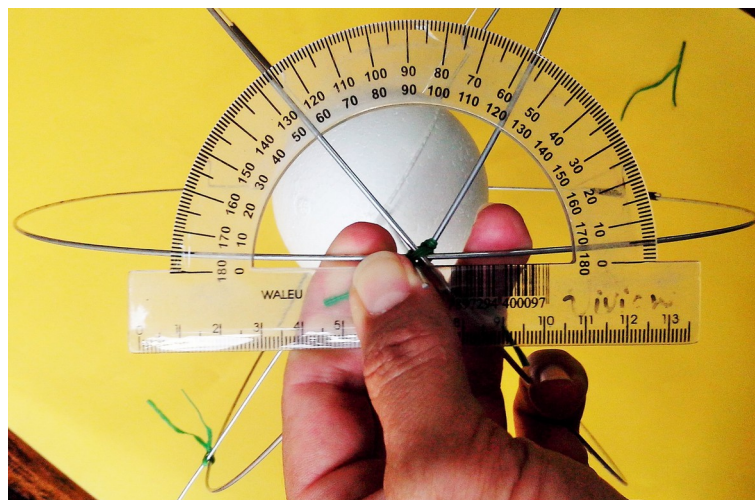
Utilizando o transferidor, divida a circunferência suporte em seis arcos de 60° e vá fazendo marquinhos (figura 47).

Figura 47: “Dividindo” a circunferência suporte em 6 arcos de 60° cada



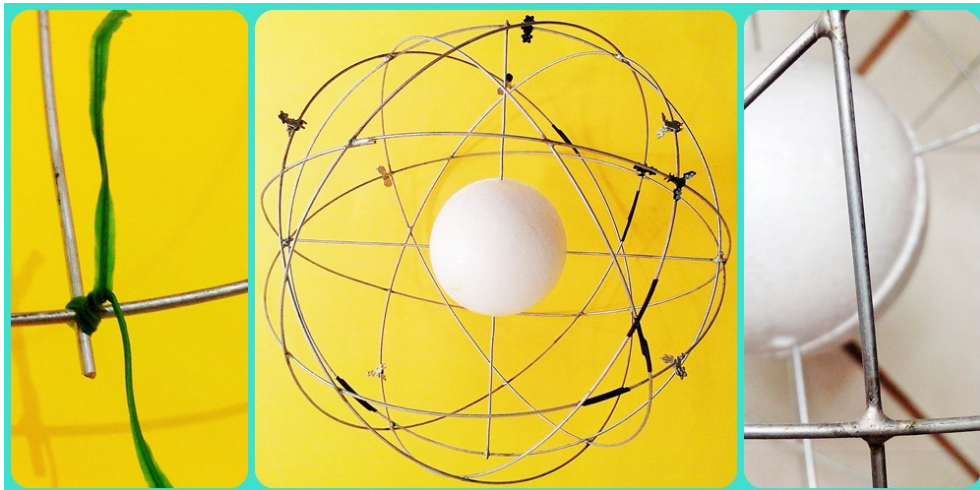
Coloque as circunferências que representam as órbitas dos satélites em cada marquinha e formando ângulo de aproximadamente 55° com o plano do Equador. Meça com o transferidor mesmo, não é necessário muita precisão (figura 48).

Figura 48: Ângulo de 55° entre o plano do Equador e cada órbita



Coloque todas as circunferências, sempre amarrando na circunferência suporte e umas às outras, nas intersecções (figura 44). Por fim, vá retirando as amarras uma de cada vez e soldando as emendas. Se houver dificuldade para soldar, pode-se também amarrar com barbante fino ou até mesmo colar (é claro que com uma cola que cole metal).

Figura 49: Maquete soldada e detalhe da solda



Atividade 5.2 – Como o receptor GPS calcula as coordenadas geográficas

Nesta atividade apresentamos, de uma forma, digamos, simplificada, como um receptor GPS calcula as coordenadas geográficas de um local na superfície terrestre. Diante de tanta tecnologia disponível, muitas vezes não nos damos conta da Matemática envolvida no nosso dia a dia. Hoje, saber as coordenadas geográficas de algum local se tornou tão simples, por exemplo, como olhar no relógio e saber que horas são. Aliás, já temos até relógios munidos de receptor GPS.

Nosso **objetivo** nessa atividade é conduzir o aluno na realização dos cálculos que um receptor GPS realiza na determinação das coordenadas, no intuito de despertar a curiosidade e o interesse pela Matemática de uma forma, digamos, descontraída. Uma curiosidade inicial é que a maioria dos receptores GPS de uso civil, como os veiculares e os portáteis (“de mão”), realizam todos esses cálculos que apresentaremos (e muitos outros), a cada segundo!

Recomendamos esta atividade para o **terceiro ano do ensino médio regular**, podendo também ser desenvolvida no quarto bimestre (ou terceiro trimestre, dependendo da escola) do **segundo ano do ensino médio**, após ter desenvolvido o conteúdo básico de Geometria Espacial Métrica.

Os principais **conteúdos** que podem ser trabalhados são: unidades de medidas de distância, transformações de unidades, notação científica, ângulos, grau e seus submúltiplos, trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no ciclo trigonométrico, resolução de sistemas lineares com três equações e três incógnitas, longitude e latitude.

Os **materiais necessários** são: receptor GPS, laboratório de informática, computadores com o softwares gratuitos **GeoGebra**, **Microsoft Mathematics** e **Google Earth** instalados, óculos anáglifo (aquele que é azul do lado direito e vermelho do lado esquerdo).

Esta atividade foi baseada e adaptada de ALVES (2006, p.25-26).

O receptor de um usuário capta transmissões de quatro satélites. A tabela abaixo mostra as efemérides, em milhares de quilômetros (10^3 km), transmitidas por cada satélite, em relação ao fixado sistema de coordenadas cartesianas:

Tabela 2: Efemérides recebidas (em milhares de km)

	x	y	z
Satélite A	<i>6,08481</i>	<i>-25,01244</i>	<i>6,58163</i>
Satélite B	<i>16,76812</i>	<i>-3,34172</i>	<i>-20,33785</i>
Satélite C	<i>23,77766</i>	<i>6,31603</i>	<i>-10,03472</i>
Satélite D	<i>12,00883</i>	<i>-12,53720</i>	<i>20,11396</i>

O receptor registra os lapsos de tempo de cada satélite, em segundos:

Tabela 3: Lapsos de tempo (em segundos)

Satélite A	<i>0,0748142692</i>
Satélite B	<i>0,07416117463</i>
Satélite C	<i>0,0799014754</i>
Satélite D	<i>0,0837913752</i>

Uma **observação** importante é que os receptores GPS não mostram as efemérides e os lapsos de tempo. Para produzir esta atividade, fizemos as contas “ao contrário”, como mostraremos ao final e sugerimos ao Professor que se dispuser a aplicar esta atividade que utilize, por exemplo, as coordenadas da própria escola. Uma outra sugestão é o próprio aluno participar da criação da atividade.

Multiplicando cada lapso de tempo pela velocidade da luz, $2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, obtemos as distâncias de cada satélite ao receptor. Denotando por I o ponto onde o usuário está na superfície terrestre e A, B, C e D os pontos que representam os satélites, temos:

$$d(A, I) = 0,0748142692 \text{ s} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,2428753644 \cdot 10^7 \text{ m} = 22,428753644 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$d(B, I) = 0,0741611463 \text{ s} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,2232952346 \cdot 10^7 \text{ m} = 22,232952346 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$d(C, I) = 0,0799014754 \text{ s} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,395385971 \cdot 10^7 \text{ m} = 23,95385971 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$d(D, I) = 0,0837913752 \text{ s} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,5120022333 \cdot 10^7 \text{ m} = 25,120022333 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Podemos agora escrever as equações reduzidas das quatro superfícies esféricas imaginárias com centros nos satélites e raios iguais às distâncias calculadas, onde S_P indica a superfície esférica de centro P e raio $d(P, I)$.

Assim:

$$S_A: (x - 6,08481)^2 + (y + 25,01244)^2 + (z - 6,58163)^2 = 503,04899$$

$$S_B: (x - 16,76812)^2 + (y + 3,34172)^2 + (z - 20,33785)^2 = 494,30417$$

$$S_C: (x - 23,77766)^2 + (y + 25,01244)^2 + (z + 10,03472)^2 = 573,787395$$

$$S_D: (x - 12,00883)^2 + (y + 12,5372)^2 + (z - 20,11396)^2 = 631,015522$$

Desenvolvendo os quadrados e fazendo $S_A - S_B$, $S_A - S_C$ e $S_A - S_D$ temos:

$$21,36662x + 43,34144y - 53,83896z - 8,744713 = 0$$

$$35,3857x + 62,6569y - 33,2327z + 70,738405 = 0$$

$$11,848x + 24,9505y + 27,0647z + 127,966532 = 0$$

Resolvendo o sistema linear acima, obtemos as coordenadas cartesianas do ponto I , que são: $x = 3,87888$; $y = -4,51895$ e $z = -2,26060$.

Transformando em coordenadas geográficas, temos:

$$\varphi = -20,7862274^\circ \text{ e } \theta = -49,358571^\circ .$$

Assim, as coordenadas geográficas do ponto I são:

Longitude **49,358571° Oeste (W)** e latitude **20,7862274° Sul (S)**.

A obtenção do sistema e sua solução podem ser feitas com o auxílio do software **Microsoft Mathematics**. Isso é feito do seguinte modo:

Abra o **Microsoft Mathematics**.

Digite o primeiro membro de cada equação de superfície esférica menos o segundo membro sem colocar o sinal de igual, ou seja, você vai digitar uma expressão, dessa forma:

$$(x - 6,08481)^2 + (y + 25,01244)^2 + (z - 6,58163)^2 - 503,04899 \text{ para a primeira equação.}$$

Vamos chamar de **expressão de S_L** a expressão obtida quando, da equação de S_L subtraímos o segundo membro do primeiro membro e tiramos o sinal de igual. Clique ENTER. A expressão será expandida. Faça o mesmo para as outras equações.

Figura 50: Tela inicial do Microsoft Mathematics

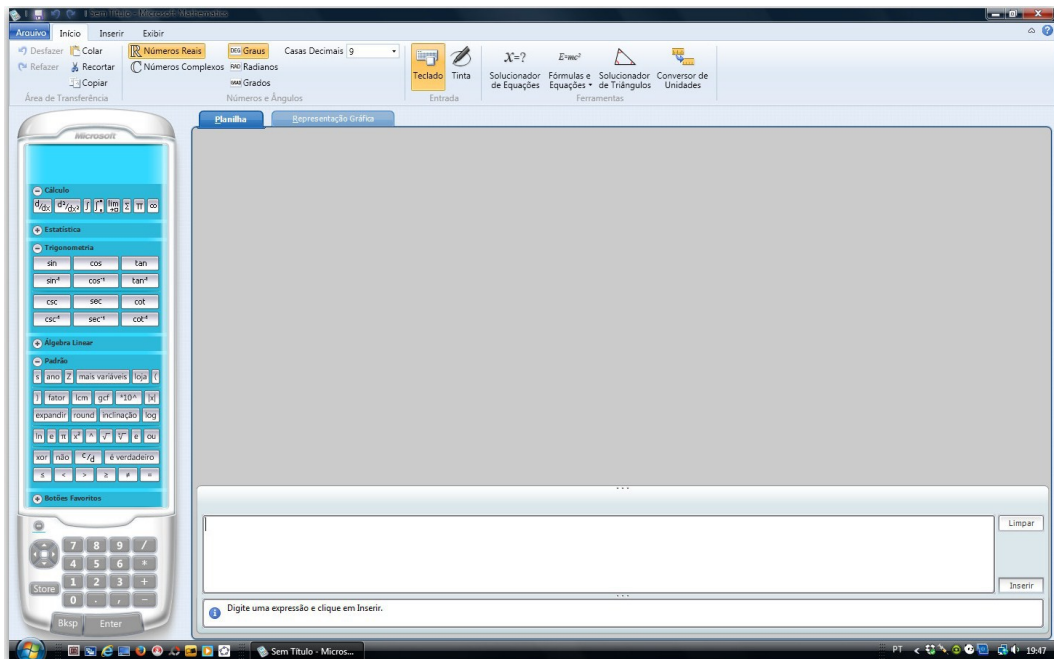
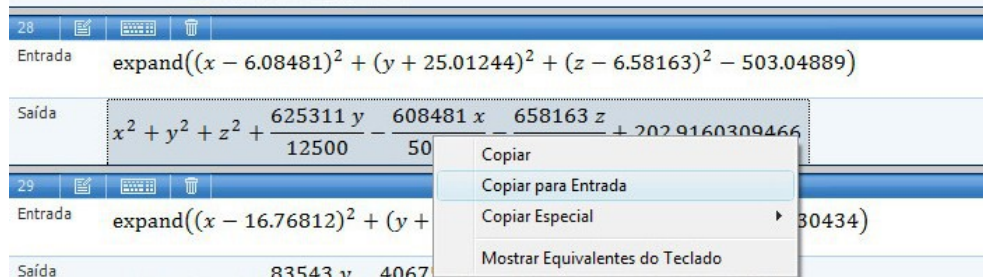


Figura 51: Desenvolvimento das expressões de S_A , S_B , S_C e S_D

28	Entrada	$\text{expand}((x - 6.08481)^2 + (y + 25.01244)^2 + (z - 6.58163)^2 - 503.04889)$
	Saída	$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{625311 y}{12500} - \frac{608481 x}{50000} - \frac{658163 z}{50000} + 202.9160309466$
29	Entrada	$\text{expand}((x - 16.76812)^2 + (y + 3.34172)^2 + (z + 20.33785)^2 - 494.30434)$
	Saída	$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{83543 y}{12500} + \frac{406757 z}{10000} - \frac{419203 x}{12500} + 211.6607435153$
30	Entrada	$\text{expand}((x - 23.77766)^2 + (y - 6.31603)^2 + (z + 10.03472)^2 - 573.78733)$
	Saída	$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{62717 z}{3125} - \frac{631603 y}{50000} - \frac{1188883 x}{25000} + 132.1776255149$
31	Entrada	$(x - 12.00883)^2 + (y + 12.5372)^2 + (z - 20.11396)^2 - 631.01527$
	Saída	$(y + 12.5372)^2 + (x - 12.00883)^2 + (z - 20.11396)^2 - 631.01527$

Agora volte à **SAÍDA** da **expressão de S_A**, clique com o **botão direito** do mouse e selecione **copiar para entrada**.

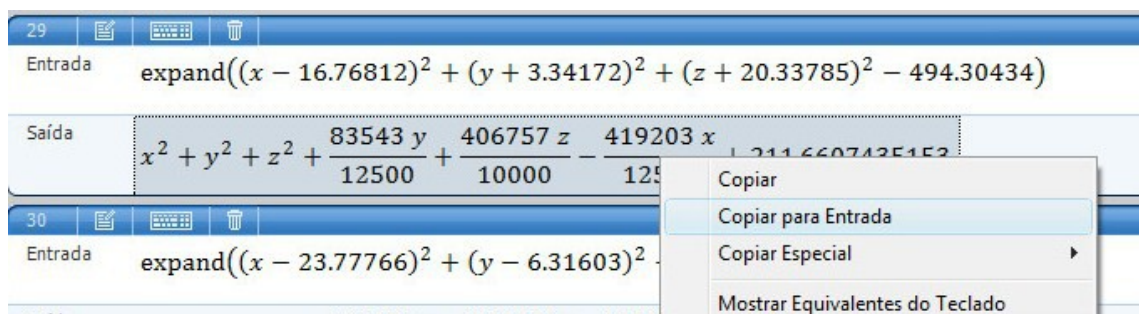
Figura 52: Copiando saída da expressão de S_A para uma nova entrada



A expressão aparecerá no campo **entrada** na parte inferior da tela. Vá ao campo **entrada** na parte inferior e digite no final da expressão um sinal de menos e abra parênteses.

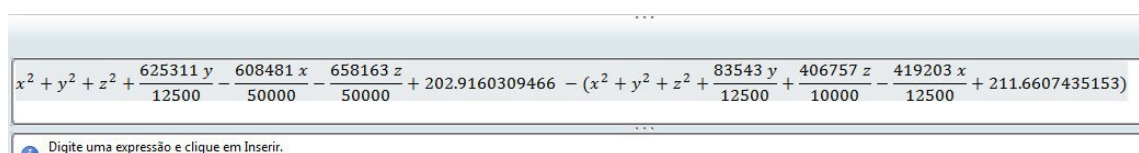
Vá à **SAÍDA** da expressão de **S_B**, clique com o **botão direito** e selecione **copiar para entrada**.

Figura 53: Copiando saída da expressão de S_B para a entrada



A expressão aparecerá na frente do parêntese que você abriu e o cursor ficará no final da linha. Agora feche parênteses e clique ENTER.

Figura 54: Nova entrada contendo (expressão de S_A) - (expressão de S_B)



Em SAÍDA obterá

$$\frac{135442}{3125}y + \frac{10688331}{50000}x - \frac{672987}{12500}z - 8,7447125687$$

Note que o Mathematics troca os termos de lugar, colocando primeiro os positivos.

Dividindo o numerador pelo denominador de cada fração acima e colocando na ordem x, y e z, temos:

$$21,36662x + 43,34144y - 53,83896z - 8,744713$$

E, assim, temos $S_A - S_B$: **$21,36662x + 43,34144y - 53,83896z - 8,744713 = 0$** .

Faça o mesmo para obter $S_A - S_C$ e $S_A - S_D$, obtendo o sistema linear

$$21,36662x + 43,34144y - 53,83896z - 8,744713 = 0$$

$$35,3857x + 62,6569y - 33,2327z + 70,738405 = 0$$

$$11,848x + 24,9505y + 27,0647z + 127,966532 = 0$$

Clique em **Solucionador de equações** e selecione **Resolver sistema com 3 equações**.

Figura 55: Selecionando *solucionador de equações*

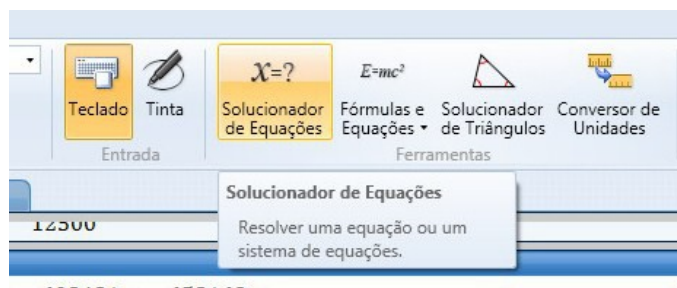
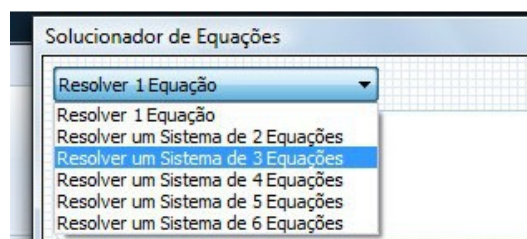


Figura 56: Selecionando *resolver sistema de 3 equações*



Digite as três equações nas entradas correspondentes.

Figura 57: Entradas do solucionador de equações

Agora clique em **Resolver**, obtendo:

Figura 58: Solução do sistema

Arredondando os valores para cinco casas decimais, temos:

$$\mathbf{x = 3,87888; y = - 4,51895 e z = - 2,26060}$$

Estas são as coordenadas cartesianas do ponto de intersecção (que chamamos de ponto I) das quatro superfícies esféricas imaginárias com centros em cada satélite e raios iguais às distâncias de cada satélite ao usuário.

Como já comentado na observação 3.2, não há necessidade de se verificar se o ponto $(x, y, z) = (3,87888; -4,51895; -2,26060)$ pertence às quatro superfícies esféricas, pois essa existência é garantida pela própria existência do usuário.

Utilizando as equações de transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas geográficas, temos:

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{z}{\rho}\right) \Rightarrow \varphi = \arcsen\left(\frac{-2,260599879}{6,37}\right) \Rightarrow \varphi = -20,7862274^\circ$$

e

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{-4,51895}{3,87888}\right) \Rightarrow \theta = -49,358571^\circ.$$

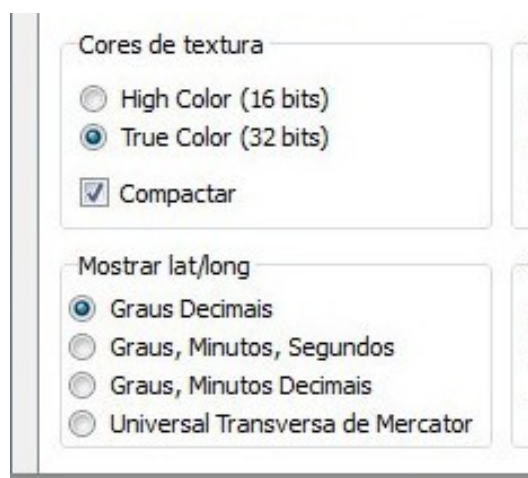
Assim, as coordenadas geográficas do ponto I são:

longitude $-49,358571^\circ$ ou **49,358571° Oeste (W)**

latitude $-20,7862274^\circ$ ou **20,7862274° Sul (S)**

Vamos agora inserir estas coordenadas no software **Google Earth**. Abra o software, clique em **ferramentas - opções** e clique em **Graus decimais**.

Figura 59: Selecionando *graus decimais*



Agora insira as coordenadas no canto superior esquerdo separadas por barra ou por vírgula e clique em **pesquisar**. O Google Earth usa ponto e não vírgula para números decimais. Assim, 49,358571 deve ser digitado **49.358571**.

Figura 60: Inserindo coordenadas geográficas



Ao clicar em pesquisar, o software indicará o local com tais coordenadas que, neste caso, indica que o usuário está à frente do portão de entrada do IBILCE – UNESP São José do Rio Preto. Veja a indicação do local com um ponto amarelo na figura.

Figura 61: Vista aérea da UNESP-IBILCE São José do Rio Preto. Fonte: Google Earth



Vamos agora mostrar como fizemos para obter os dados fornecidos nas tabelas 2 e 3 do início da atividade. Munido de um receptor GPS “de mão” (pode ser um GPS veicular também) fomos ao local desejado e clicamos em **salvar local** (cada modelo de receptor tem comandos com nomes diferentes, mas todos tem este comando, talvez com outro nome, mas com a mesma função).

As coordenadas registradas foram $49,35859^{\circ}W$ e $20,78622^{\circ}S$, ou seja, longitude $-49,35859$ e latitude $-20,78622^{\circ}$ (para fazer os cálculos, deve-se usar o sinal – (*menos*) para longitude oeste (W) e para latitude Sul (S)), com o receptor configurado para **graus decimais**. As distâncias estão em milhares de km (10^3). Utilizando as equações de transformação de coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas temos:

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi = 6,37 \cdot \cos(-49,35859^{\circ}) \cdot \cos(-20,78623^{\circ}) \Rightarrow x = 3,87888,$$

$$y = \rho \sen \theta \cos \varphi \Rightarrow y = 6.37 \cdot \sen(-49,35859^{\circ}) \cdot \cos(-20,78623^{\circ}) \Rightarrow y = -4,51895 \text{ e}$$

$$z = \rho \sen \varphi \Rightarrow z = 6,37 \cdot \sen(-20,786229^{\circ}) \Rightarrow z = -2,26060.$$

Abra o software **GeoGebra**, clique em **arquivo - novo** (figura 62), **exibir - janela de visualização 3D** (figura 63). Feche a **janela de visualização 2D** (figura 64) e fique somente com a **3D**. Abaixo de onde está escrito **janela de visualização 3D**, clique no penúltimo ícone para fechar a **caixa de clipping** (figura 65).

Figura 62: Selecionando *arquivo novo*

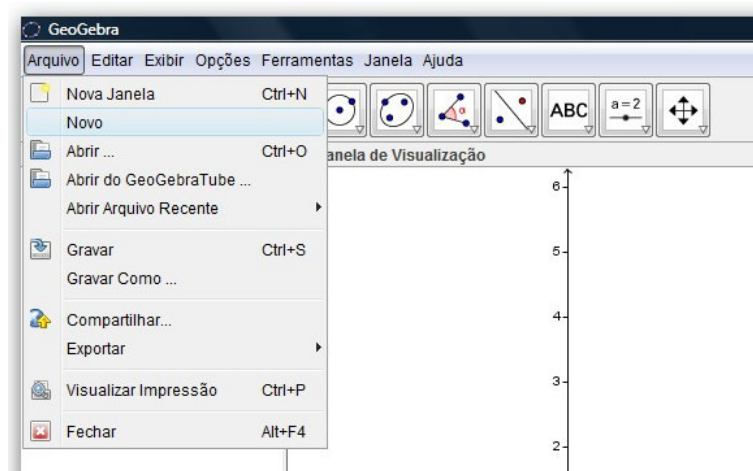


Figura 63: Selecionando *janela de visualização 3D*

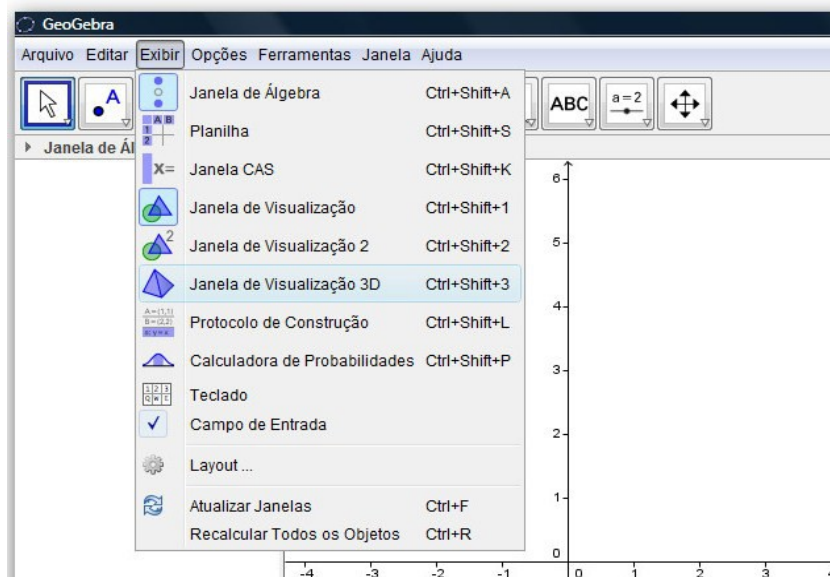


Figura 64: Janelas de visualização 2D e 3D

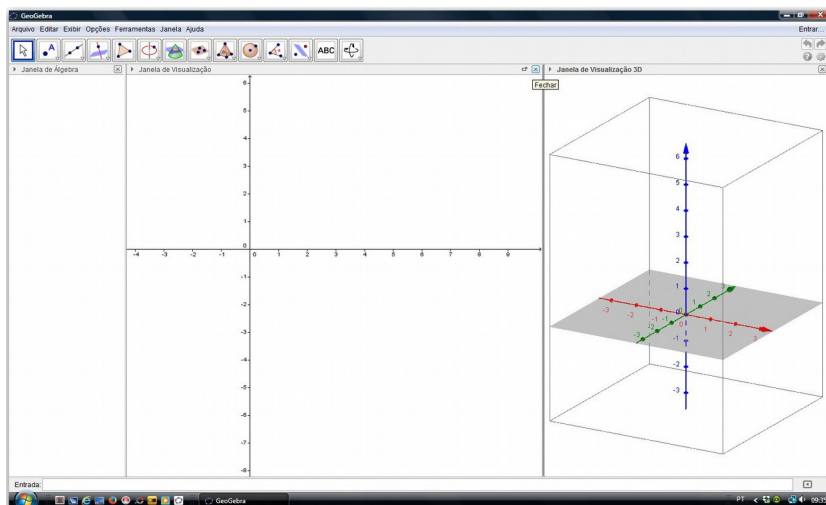
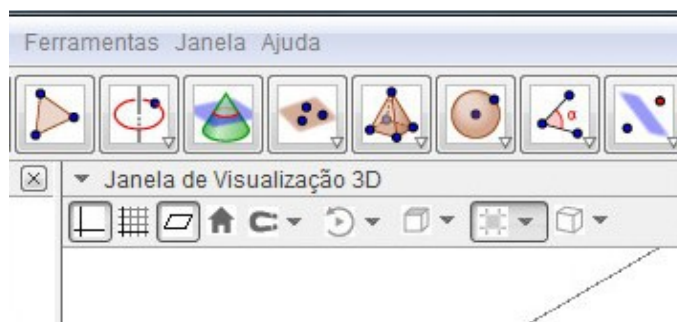


Figura 65: Ícone *fechar caixa de clipping*



Siga a sequência de passos. As medidas estão em milhares de km.

i) na linha **Entrada** digite $O = (0,0,0)$ para representar o ponto O (origem do sistema cartesiano).

ii) selecione **construir esfera dados o centro e o raio** – clique no ponto O ou em cima de $O = (0,0,0)$ no lado esquerdo, na **janela de álgebra** depois digite o raio **6.37** (o GeoGebra não usa vírgula para números decimais, e sim ponto) no retângulo que aparece ao centro da tela. Estamos usando a palavra **esfera** porque o GeoGebra assim o faz, mas na verdade são superfícies **esféricas** (veja que as equações estão na forma reduzida $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$, onde aparece o **sinal de igual**).

Figura 66: Selecionando *esfera dados o centro e o raio*

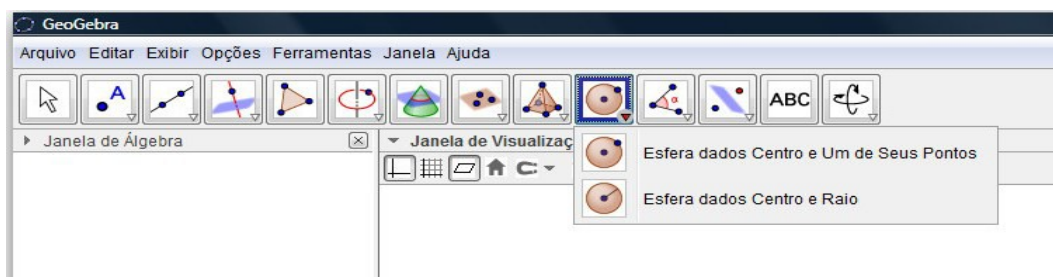
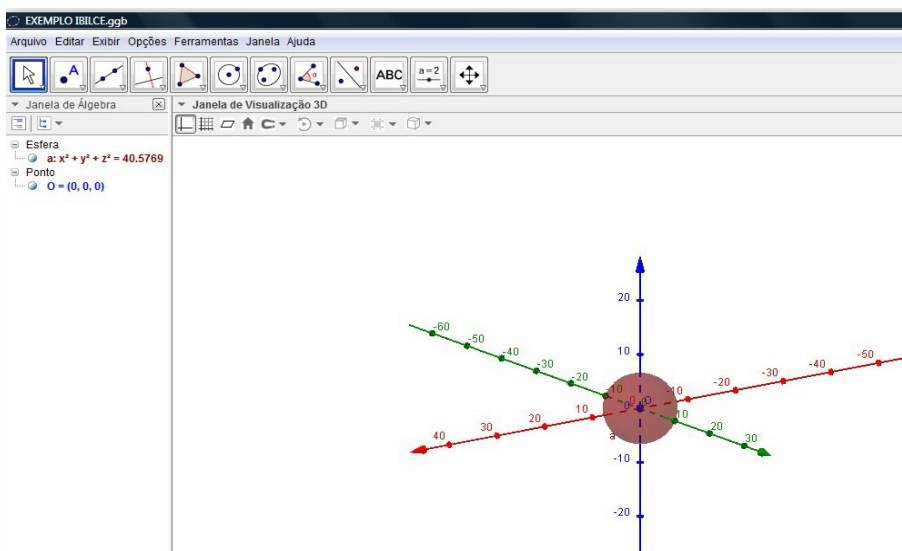
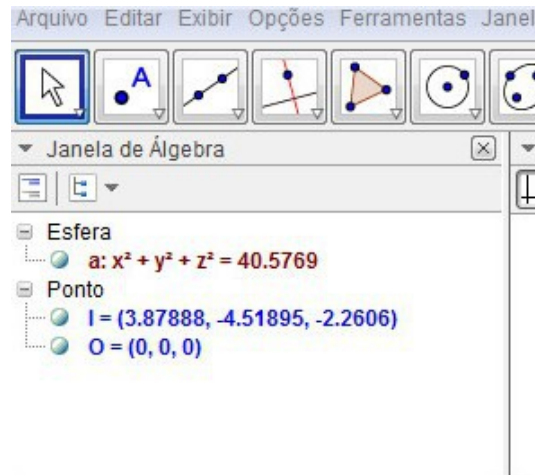


Figura 67: Esfera de centro $(0,0,0)$ e raio $6,37$



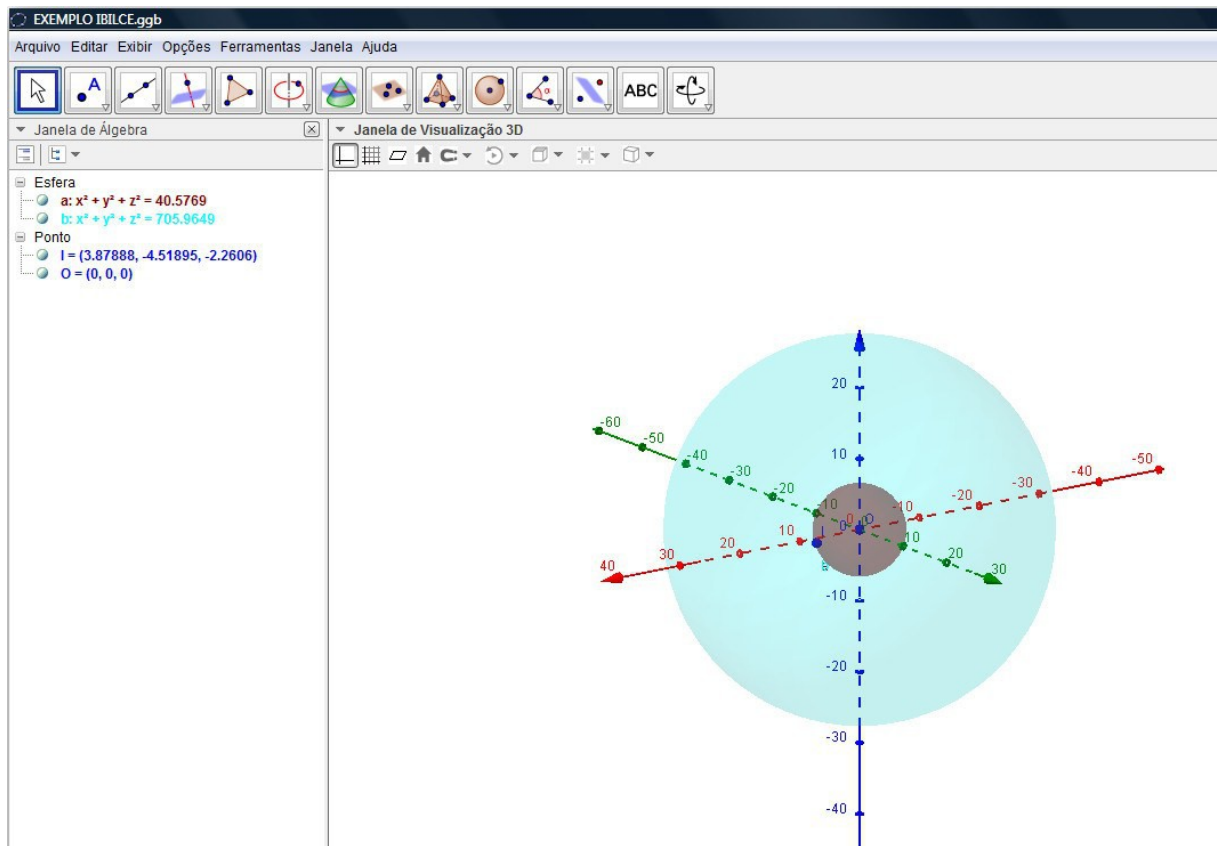
iii) represente o ponto I com as coordenadas (x,y,z) obtidas anteriormente.

Figura 68: Coordenadas do ponto *I*



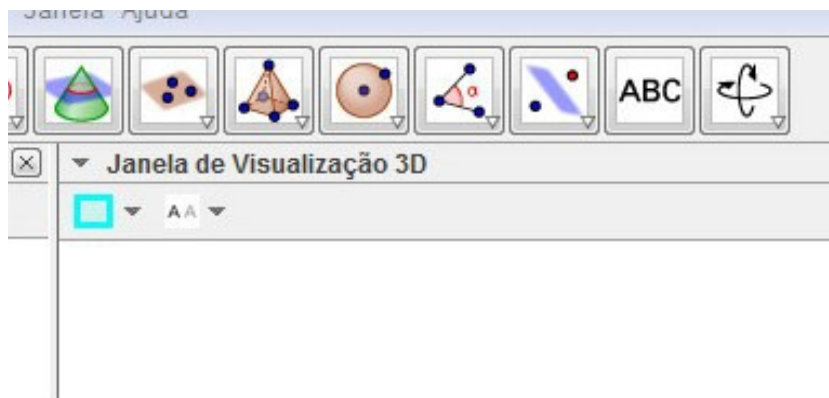
iv) proceda como em (ii) para obter uma esfera de centro **O** e raio **26,57**.

Figura 69: Esferas de centro $(0,0,0)$ e raios **6,37** e **26,57**



v) mude a cor e a transparência desta esfera clicando em cima dela e depois no primeiro quadradinho da janela de visualização.

Figura 70: Ícone para mudança de cor



vi) no segundo ícone, na parte superior esquerda, selecione **ponto em objeto** e clique na superfície esférica maior para representar 4 pontos (conforme você clica, aparece o ponto na imagem e aparecem as coordenadas do tal ponto na **janela de álgebra**). Esses pontos serão nossos satélites e devem ser representados na imagem, “do lado” que está o ponto *I*. Se necessário, clique no último ícone da barra de ferramentas e escolha **girar janela de visualização 3D**. Clique, segure e mova o *mouse* na janela de visualização para girar a figura. Para facilitar, e muito, a visualização, clique no último ícone da janela de visualização 3D, na flechinha, e no óculos azul e vermelho. Agora vista um **óculos anáglifo** e veja a figura em 3D. Para voltar à visualização 2D (sem o uso dos óculos) clique no primeiro ícone – **visualização paralela**.

Figura 71: Selecionando ícone *ponto em objeto*

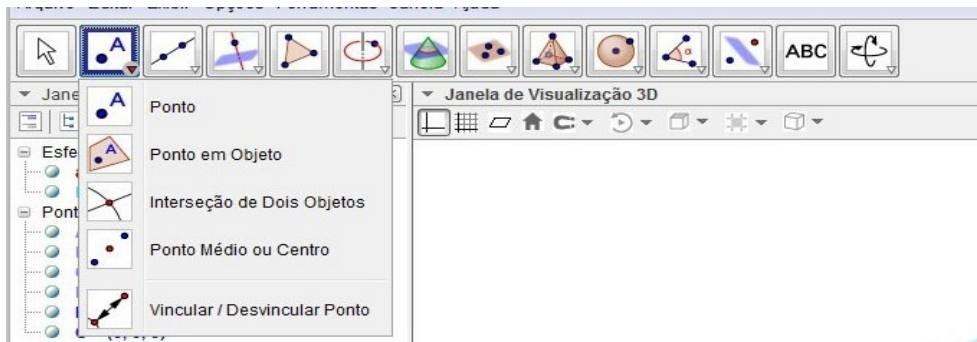


Figura 72: Ícone girar janela de visualização 3D

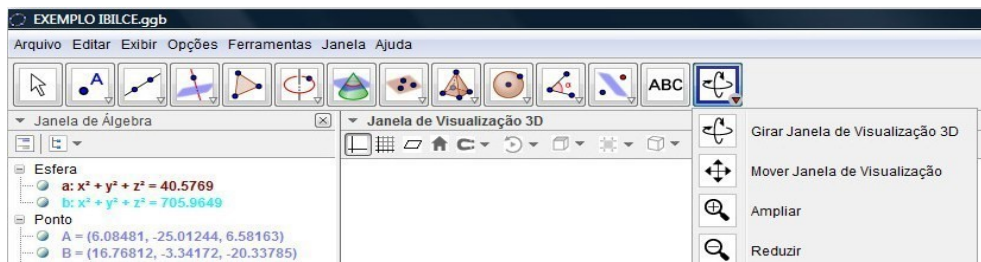


Figura 73: Selecionando visualização 3D

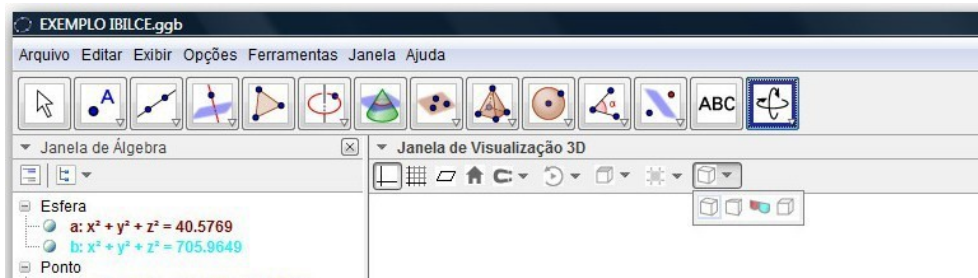
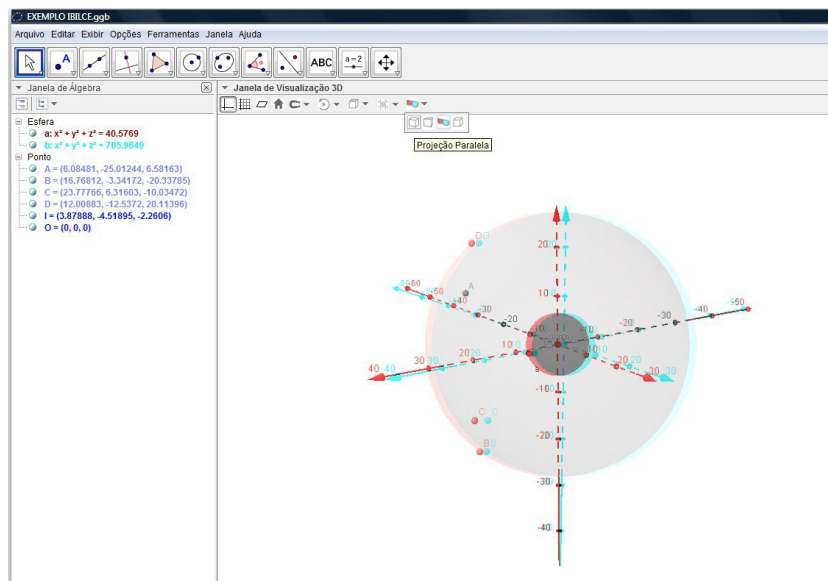


Figura 74: Esferas de centro $(0,0,0)$ e raios $6,37$ e $26,57$ – visualização 3D



vii) agora escolha **esfera dados centro e um de seus pontos** e represente 4 esferas com centros nos pontos A , B , C e D e que passam pelo ponto I . Conforme você vai clicando vão aparecendo a esfera, na imagem, e sua equação, na janela de álgebra. Agora mude as cores das esferas para facilitar a visualização.

Figura 75: Esferas de centro $(0,0,0)$ e raios $6,37$ e $26,57$ – vista ampliada

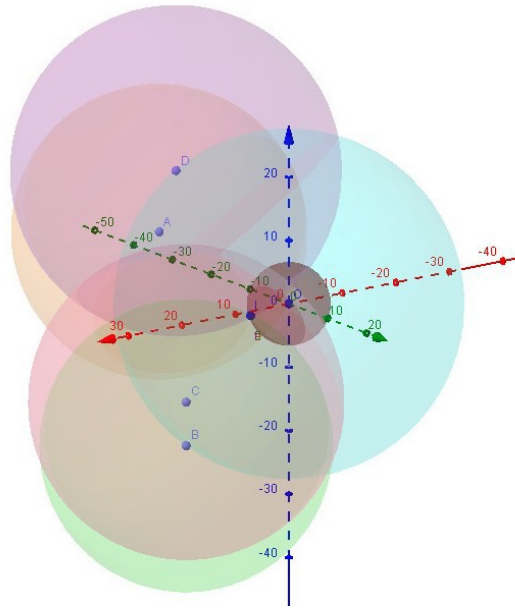
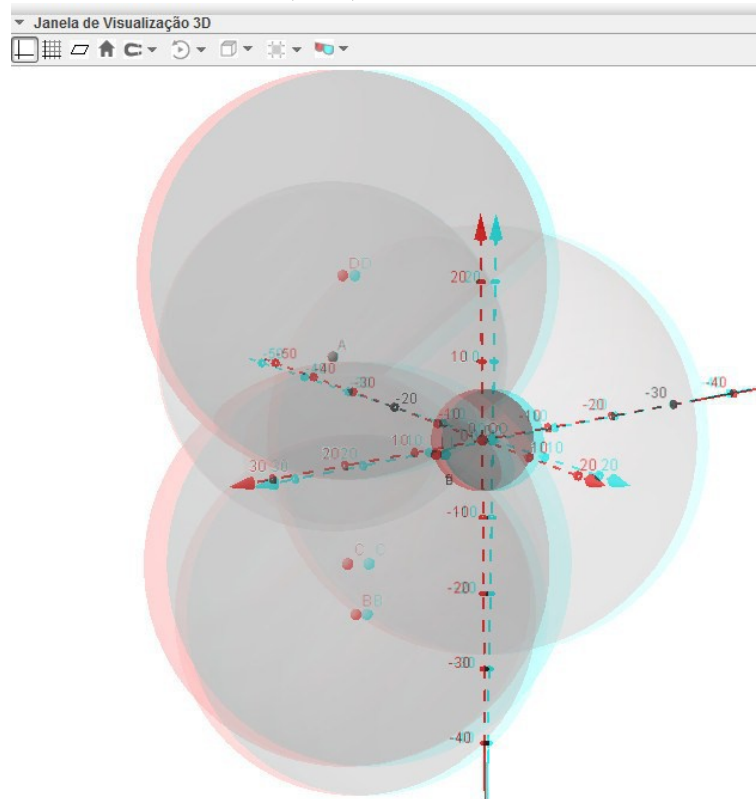


Figura 76: Esferas de centro $(0,0,0)$ e raios $6,37$ e $26,57$ – visualização 3D



viii) selecione **intersecção de duas superfícies** (figura 77) e clique nas equações das esferas **a** e **c**, depois **a** e **d**, depois **a** e **e**, depois **a** e **f**. Vá com a seta próximo ao centro do sistema cartesiano e gire o scroll do mouse para dar um zoom na figura. Assim é possível visualizar as intersecções das superfícies esféricas, que são as circunferências tracejadas.

Figura 77: Selecionando *intersecção de duas superfícies*



Figura 78: Intersecções das superfícies esféricas

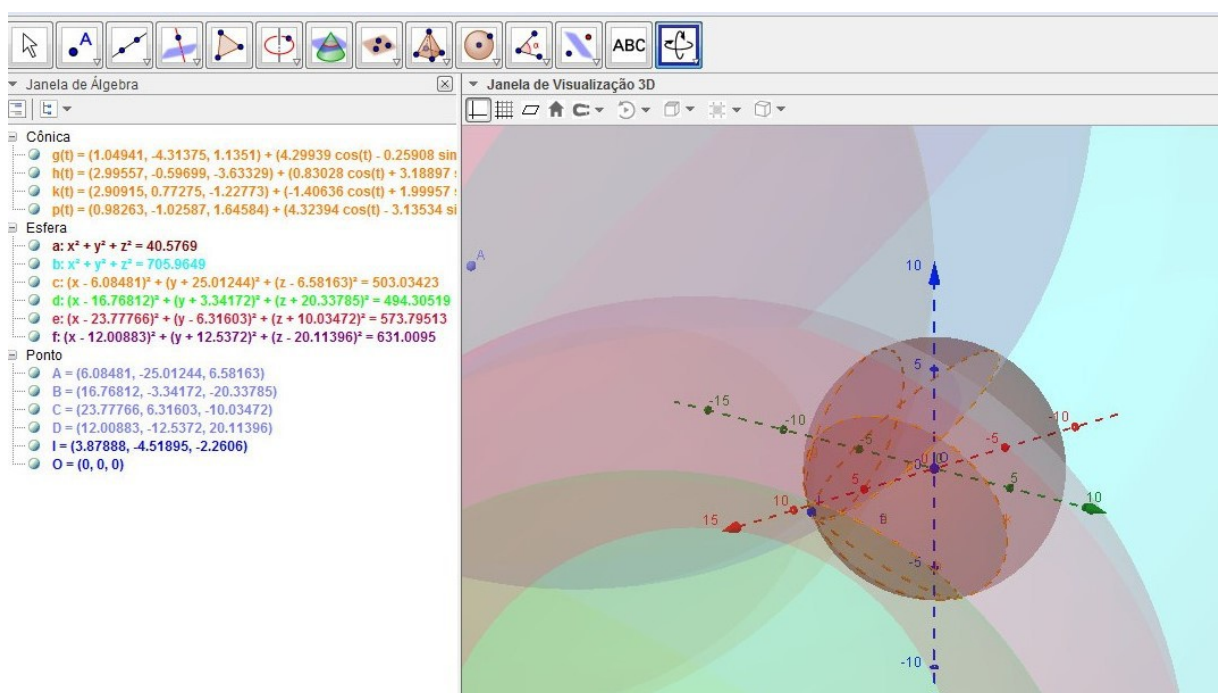
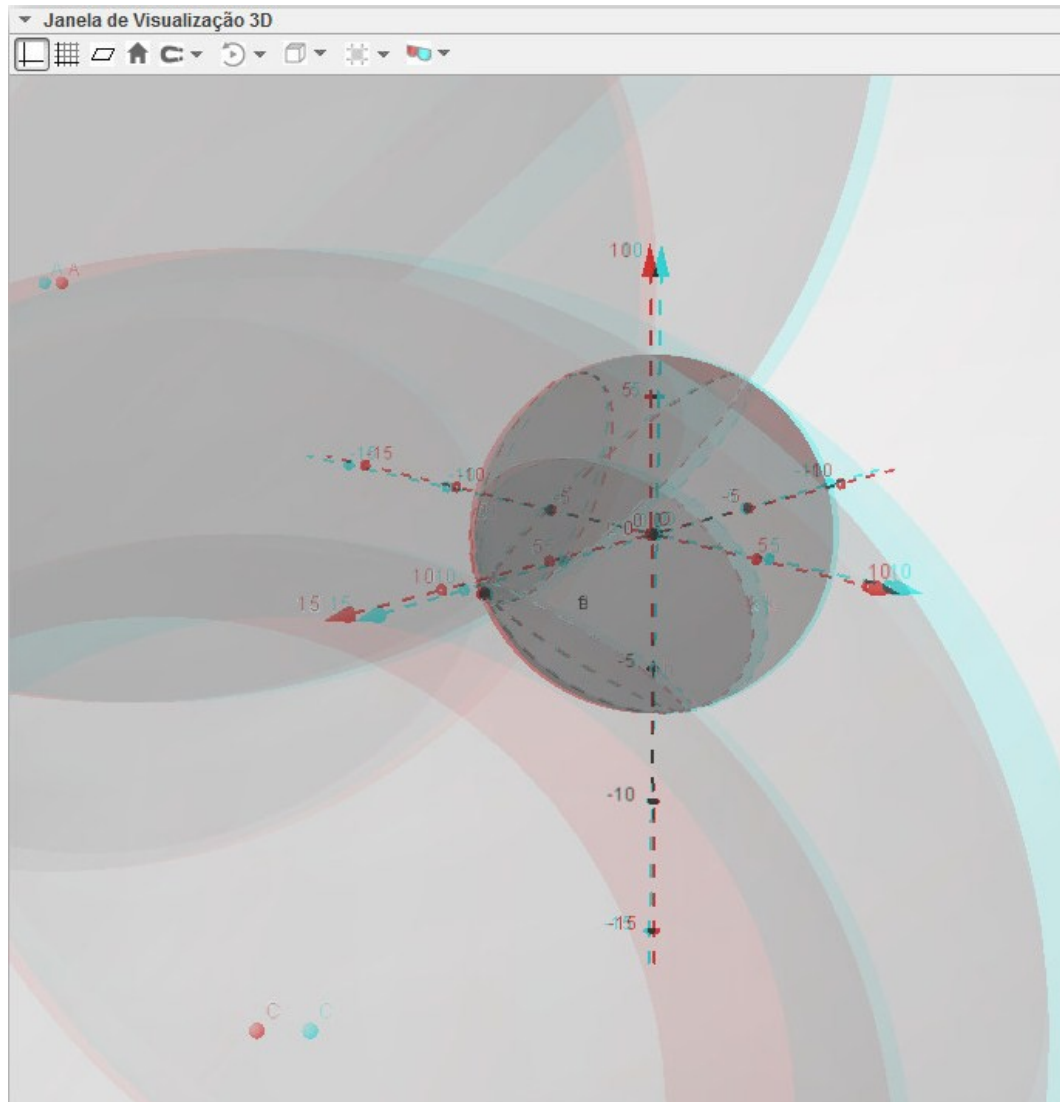


Figura 79: Intersecções das superfícies esféricas – visão ampliada e com visualização 3D



ix) selecione **distância, comprimento e perímetro** – clique nos pontos **A e I, B e I, C e I, D e I** respectivamente, para medir as distâncias entre esses pontos. Clique nas bolinhas ao lado de cada palavra **distância** para apagar o segmento de reta que une os pontos (figura 80).

Temos agora as informações necessárias na janela de álgebra (figura 81).

Figura 80: Selecionando *distância, comprimento e perímetro*

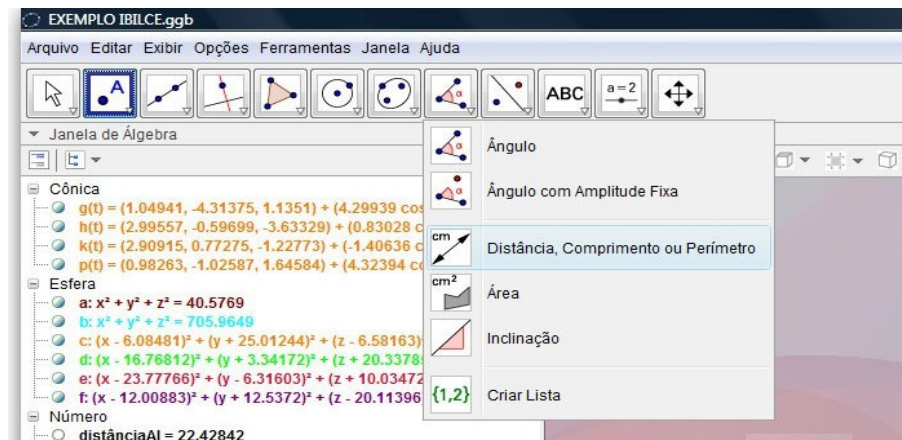
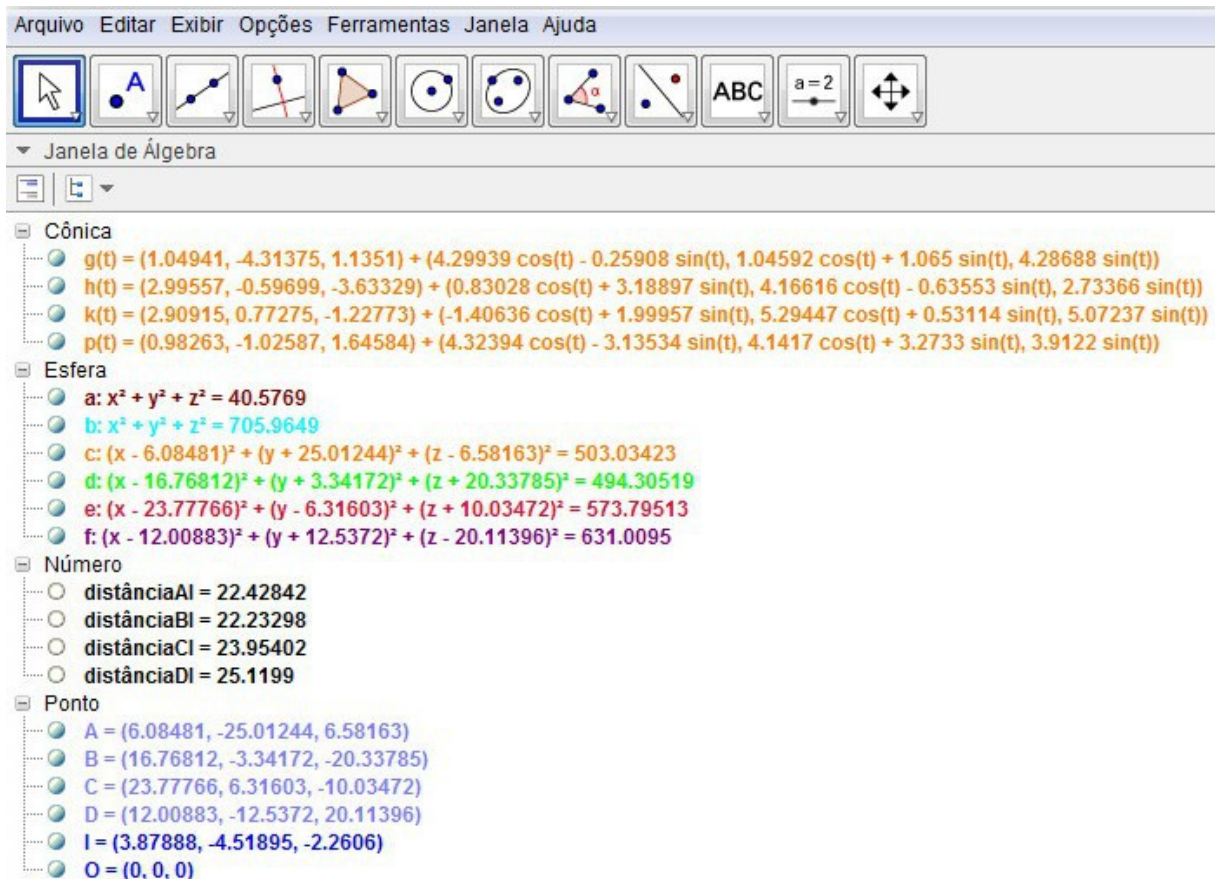


Figura 81: Dados iniciais da atividade



Veja que as coordenadas dos pontos A, B, C e D são as efemérides dos satélites A, B, C e D indicadas no início da atividade.

Para calcular os lapsos de tempo, basta dividir cada distância pela velocidade da luz. Como as distâncias estão em milhares de km, vamos transformar a velocidade da luz de m/s para km/s:

$$299792458 \text{ m/s} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 299,792458 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 299,792458 \text{ km/s}.$$

Dividindo cada distância pela velocidade da luz com o auxílio do Mathematics, obtemos os lapsos de tempo.

Figura 82: Cálculo dos lapsos de tempo

43	Entrada	$\frac{22.42842}{299.792458}$	44	Entrada	$\frac{22.23298}{299.792458}$
	Saída	$\frac{1602030}{21413747}$		Saída	$\frac{1588070}{21413747}$
	Saída Decimal	0.0748131562402		Saída Decimal	0.0741612385726
45	Entrada	$\frac{23.95402}{299.792458}$	46	Entrada	$\frac{25.1199}{299.792458}$
	Saída	$\frac{11977010}{149896229}$		Saída	$\frac{12559950}{149896229}$
	Saída Decimal	0.0799020100766		Saída Decimal	0.0837909671497

Veja que há pequenas diferenças em relação aos dados iniciais (tabela 3).

Cópia da Tabela 3

Satélite A	0,0748142692
Satélite B	0,07416117463
Satélite C	0,0799014754
Satélite D	0,0837913752

Isto implicará diferença na localização do local esperado quando inserir as coordenada no Google Earth, mas provavelmente o local obtido estará a poucos quilômetros do esperado. Se assim o for, ainda é uma ótima aproximação para uma atividade didática, visto que um erro de um milésimo de segundo provoca diferença de 300 km. Isto se deve ao fato de que usamos aproximações e arredondamentos. Se quiser minimizar estes erros, basta substituir os valores de x , y e z obtidos, nas equações do sistema inicial (aquele com as quatro equações das superfícies esféricas) e reajustar os termos independentes. Depois extrair a raiz quadrada de cada novo termo independente reajustado, obtendo as distâncias de I até A , B , C e D , respectivamente. Finalmente, dividir cada distância obtida pela velocidade da luz para obter os lapsos de tempo.

Considerações finais

A Matemática dos sistemas de posicionamento por satélites, apresentada nesse trabalho, foi tratada de maneira contextualizada e embasada na real necessidade do homem em se localizar. Foram apresentados alguns instrumentos utilizados pelo homem para a navegação, alguns não tão recentes e nem tão eficazes como o astrolábio, o quadrante e o sextante. Esta apresentação possibilita ao aluno compreender a evolução desses equipamentos e a necessidade de possuir equipamentos mais confiáveis e eficazes.

Pretende-se dessa forma motivar o aluno a aprender a Matemática utilizada nos sistemas de localização por satélites, mostrando que a Matemática não é uma disciplina estática e que pode ser aprendida e utilizada em diversos contextos. Dessa maneira compreendemos propiciar aos alunos uma abordagem mais dinâmica e contextualizada da Matemática para que, a partir dessa abordagem, possam refletir não somente sobre a importância dessa disciplina enquanto conteúdo curricular do ensino básico, mas também sobre a importância da Matemática vinculada aos equipamentos que utilizamos todos os dias.

O presente trabalho propõe atividades para serem desenvolvidas pelos professores do Ensino Médio que podem ser adaptadas de acordo com a realidade e possibilidade de cada escola. Acredita-se que o uso de softwares educacionais, no caso os softwares gratuitos Geogebra e Microsoft Mathematics, nas atividades é mais um fator facilitador para o aprendizado do aluno.

Esperamos alcançar os objetivos propostos nesse trabalho, contribuindo para o enriquecimento de minha formação profissional, com demais colegas de profissão e também com nossos alunos, sendo estes últimos, nossa principal motivação em aprimorar e a continuar em busca de novos conhecimentos para melhoria da nossa prática docente.

Referências Bibliográficas

- ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/Apostila6.pdf>>. Acesso em Jan/2013.
- ALVES, S. **A Matemática do GPS**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 59. p.17-26, 2006.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: SBM 2005
- CRATO, N. **A Matemática das Coisas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar. v. 10**. São Paulo: Atual, 2005.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar. v. 7**. São Paulo: Atual, 2005.
- FASCIONI, L. **GPS Para Curiosos**. Disponível em <http://www.ligiafascioni.com.br/wp-content/uploads/2013/04/GPS_Book.pdf> Acesso em Jun/2014.
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em Sala de Aula**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar. v. 4**. São Paulo: Atual, 2004.
- JANOS, M. **Matemática e Natureza**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- LIMA, E. L. **Coordenadas no Espaço**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio. v. 2**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

MORAIS FILHO, D. C. **Manual de Redação Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

ROCHA, J. A. M. R. **O “ABC” do GPS**. Recife: Bagaço, 2005.

APÊNDICE

Nas secções 1, 2 e 3 utilizamos, em algumas proposições e teoremas, algumas propriedades de determinantes. Veremos nesse apêndice essas propriedades. A referência utilizada foi IEZZI; HAZZAN. (2004).

Definição 1: Seja o conjunto das matrizes quadradas de ordem n , para $n = 1, 2$ ou 3 . Seja M uma matriz desse conjunto. Chamamos **determinante** da matriz M , e indicamos por $\det M$, o número obtido operando os elementos de M da seguinte forma:

(i) Se $n = 1$, então $\det M$ é o único elemento de M .

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}.$$

(ii) Se $n = 2$, $\det M$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

(iii) Se $n = 3$, ou seja,

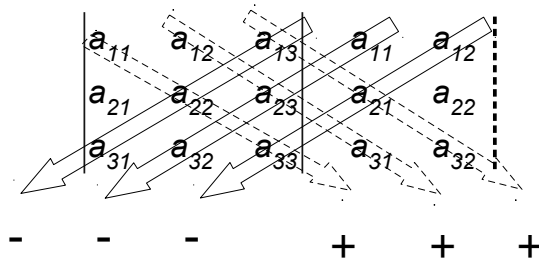
$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ definimos:}$$

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Um dispositivo prático conhecido como **regra de Sarrus** permite memorizar a definição mais facilmente, da seguinte forma:

- 1) Repetimos ao lado direito da matriz a suas duas primeiras colunas.
- 2) Os termos precedidos de sinal $+$ são obtidos multiplicando-se os 3 elementos segundo as flechas na direção da diagonal principal.

3) Analogamente, os termos precedidos de sinal $-$ são obtidos na direção da diagonal secundária.



Definição 2: Consideremos uma matriz M de ordem n , $n \geq 2$. Seja a_{ij} um elemento de M . Definimos **menor complementar do elemento a_{ij}** , e indicamos por D_{ij} , como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M .

Exemplo: seja $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e calculemos D_{11}, D_{21} e D_{31} .

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad \text{e} \quad D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11.$$

Definição 3: Consideremos uma matriz de ordem n , $n \geq 2$. Seja a_{ij} um elemento de M . Definimos o **cofator** (ou **complemento algébrico**) do elemento a_{ij} e indicamos por A_{ij} , o número $(-1)^{(i+j)} \cdot D_{ij}$.

No exemplo anterior temos:

$$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) = -13,$$

$$A_{21} = (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6) = 6 \quad \text{e}$$

$$A_{31} = (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 = 11.$$

Definição 4: Seja M uma matriz de ordem n . Definimos determinante da matriz M , e denotamos por **det M** , da seguinte forma:

(i) Se M é de ordem 1, então $M = [a_{11}]$ e $\det M = a_{11}$.

(ii) Se M é de ordem $n \geq 2$, então

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ e definimos } \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \cdots + a_{n1} \cdot A_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot A_{i1}.$$

Ou seja, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna pelos seus respectivos cofatores.

Teorema 1 (Teorema fundamental de Laplace): O determinante de uma matriz M , de ordem n , $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Assim,

(i) Se escolhermos a linha i da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então $\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$.

(ii) Se escolhermos a coluna j da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então $\det M = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$.

Assim, não precisamos necessariamente dos elementos da primeira coluna e seus cofatores para calcular um determinante. Qualquer fila (linha ou coluna) e seus cofatores permitem o cálculo.

Por exemplo, para calcularmos o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

escolhendo a terceira linha, temos:

$$D = 1 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{34} = 1 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{34}$$

e teremos que calcular somente dois cofatores, ao passo que se fizéssemos pela definição seriam quatro cofatores.

Assim, quanto mais zeros houver em uma fila, mais fácil será o cálculo do determinante se usarmos essa fila. Em particular, se uma matriz tiver uma fila toda de zeros, seu determinante será zero.

Nas propriedades a seguir, seja M uma matriz quadrada de ordem n , $n \geq 2$, e elementos a_{ij} , com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Quando dizemos uma fila de uma matriz, significa uma linha ou uma coluna.

(d1) Matriz transposta

Se M^t é a matriz transposta de M , então $\det M^t = \det M$.

Demonstração: Utilizando o PIF (princípio da indução finita):

Para $n=1$ a propriedade é válida, pois $M^t = M = [a_{11}]$.

Vamos supor que a propriedade é válida para matrizes de ordem $(n-1)$ (hipótese de indução) e mostrar que ela também é válida para matrizes de ordem n .

$$\text{Sejam } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } M^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Temos

$$\det M = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \cdots + a_{n1} \cdot A_{n1}$$

e

$$\det M^t = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \cdots + b_{1n} \cdot B_{1n}$$

Pela definição de matriz transposta, segue

$$b_{11} = a_{11}, b_{12} = a_{21}, b_{13} = a_{31}, \dots, b_{1n} = a_{n1}.$$

Da hipótese de indução:

$A_{11} = B_{11}, A_{21} = B_{21}, A_{31} = B_{13}, \dots, A_{n1} = B_{1n}$, pois, quando se eliminam a linha i e a coluna j de M e a linha j e a coluna i de M^t , as matrizes restantes são de ordem $(n - 1)$ e ainda são transpostas uma da outra.

Assim, $\det M^t = \det M$, pois

$$\det M = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \cdots + a_{n1} \cdot A_{n1} \quad \text{e}$$

$$\det M^t = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \cdots + b_{1n} \cdot B_{1n}.$$

Portanto, pelo PIF, a propriedade é válida para matrizes de ordem n , $\forall n \geq 1$. ■

(d2) Multiplicação de uma fila por uma constante real

Multiplicando uma fila de M por um número real k constante, obtemos uma nova matriz N tal que $\det N = k \cdot \det M$.

Demonstração: Vamos multiplicar a linha i de M por k :

$$\text{Sendo } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ temos que } N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \cdots & k \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Os cofatores dos elementos da i -ésima linha de M são os mesmos que os da i -ésima linha de N .

Desenvolvendo os determinantes pela i -ésima linha de M e N , temos:

$$\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (1)$$

e

$$\det N = k \cdot a_{i1} \cdot A_{i1} + k \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + k \cdot a_{in} \cdot A_{in}.$$

$$\text{Assim, } \det N = k \cdot (a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}).$$

De (1) e (2) temos que $\det N = k \cdot \det M$.

Analogamente mostra-se que a propriedade é válida para a j -ésima coluna de M . ■

(d3) Fila nula

Se os elementos de uma fila de M forem todos nulos, então $\det M = 0$.

Demonstração: Vamos supor que a i -ésima linha de M tenha todos os elementos nulos, ou seja, $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = \cdots = a_{in} = 0$.

Desenvolvendo o determinante por esta linha, temos:

$$\det M = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} + \cdots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

Analogamente mostra-se que a propriedade é válida para a j -ésima coluna de M . ■

(d4) Troca de filas paralelas

Se trocarmos de posição duas filas paralelas de M , obteremos uma nova matriz N tal que $\det N = -\det M$.

Demonstração: Utilizando o PIF:

Para $n = 2$:

$$\text{Se } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ então } \det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Trocando as linhas de posição, obtemos:

$$N = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \text{ e } \det N = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = -\det M.$$

Trocando as colunas de posição, obtemos:

$$N = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \text{ e } \det N = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -\det M.$$

Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.

Vamos agora supor que a propriedade é válida para matrizes de ordem $(n - 1)$ (hipótese de indução) mostrar que ela também é válida para matrizes de ordem n .

Tomemos as linhas i das matrizes M e N , admitindo que esta linha não seja nenhuma das duas que tenham sido trocadas de posição. Desenvolvendo $\det M$ e $\det N$ por esta i -ésima linha nas duas matrizes, temos:

$$\det M = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ e } \det N = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A'_{ij}, \text{ onde } A'_{ij} \text{ é obtido de } A_{ij}$$

trocando de posição duas linhas.

Por hipótese de indução $D'_{ij} = -D_{ij}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pois tanto D_{ij} como D'_{ij} são determinantes de matrizes de ordem $(n - 1)$.

Assim, $A'_{ij} = -A_{ij}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e, portanto, pelo PIF, temos $\det N = -\det M$.

Analogamente mostra-se a validade da propriedade quando se troca de posição duas colunas. ■

(d5) Filas paralelas iguais

Se M tem duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente iguais, então $\det M = 0$.

Demonstração: Vamos supor que as linhas de índices i e k de M sejam formadas por elementos respectivamente iguais, ou seja, $a_{ij} = a_{kj}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pela propriedade (d4), trocando de posição estas duas linhas de M , obteremos uma nova matriz N tal que $\det N = -\det M$. (1)

Como as filas paralelas que foram trocadas são iguais, temos que $N = M$ e, conseqüentemente, $\det N = \det M$. (2)

De (1) e (2) concluímos que: $\det M = -\det M \Rightarrow 2 \det M = 0 \Rightarrow \det M = 0$.

Analogamente mostra-se a validade da propriedade para o caso de duas colunas iguais. ■

(d6) Teorema de Cauchy

A soma dos produtos dos elementos de uma fila de M , ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Demonstração: Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Substituindo em M a p -ésima linha pela k -ésima linha, obtemos a matriz

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

← p -ésima linha

Pela propriedade (d5), $\det N = 0$.

Por outro lado, os cofatores dos elementos da p -ésima linha de M são os mesmos que os da p -ésima linha de N . Desenvolvendo o $\det N$ pela p -ésima linha:

$$\det N = a_{k1} \cdot A_{p1} + a_{k2} \cdot A_{p2} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{pn}$$

Portanto, $a_{k1} \cdot A_{p1} + a_{k2} \cdot A_{p2} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{pn} = 0$.

Analogamente, mostra-se que a propriedade é válida se tomarmos duas colunas de M . ■

(d7) Filas paralelas proporcionais

Se M tem duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então $\det M = 0$.

Dem.: Vamos supor que as linhas i e p de M sejam formadas por elementos proporcionais, ou seja, $a_{ij} = k \cdot a_{pj}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\text{Assim: } \det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k \cdot a_{p1} & k \cdot a_{p2} & \cdots & k \cdot a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

← i -ésima linha

← p -ésima linha

Pelas propriedades (d2) e (d5):

$$\det M = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Analogamente, mostra-se que a propriedade é válida se tomarmos duas colunas de M. ■

(d8) Adição de determinantes

$$\text{Sejam: } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e}$$


$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & (b_{3j} + c_{3j}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, M é uma matriz quadrada de ordem n , onde os elementos da j -ésima coluna são:

$$a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}, a_{2j} = b_{2j} + c_{2j}, a_{3j} = b_{3j} + c_{3j}, \dots, a_{nj} = b_{nj} + c_{nj}.$$

Se B , C e M são da forma acima, então $\det M = \det B + \det C$. Isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & (b_{3j} + c_{3j}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$



$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Os cofatores da j -ésima coluna de M são os mesmos que os da j -ésima coluna de B e C .

Desenvolvendo o determinante de M pela j -ésima coluna:

$$\det M = (b_{1j} + c_{1j}) \cdot A_{1j} + (b_{2j} + c_{2j}) \cdot A_{2j} + \cdots + (b_{nj} + c_{nj}) \cdot A_{nj}.$$

Assim, $\det M = b_{1j} \cdot A_{1j} + b_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + b_{nj} \cdot A_{nj} + c_{1j} \cdot A_{1j} + c_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + c_{nj} \cdot A_{nj}.$

Logo, $\det M = \det B + \det C$. ■

(d9) Teorema de Jacobi

Adicionando a uma fila de M uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz N , tal que $\det N = \det M$.

Demonstração: Seja $M =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja N a matriz obtida de M quando adicionamos à j -ésima coluna de M a p -ésima coluna, previamente multiplicada por uma constante k . Assim,

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & (a_{1j} + k \cdot a_{1p}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & (a_{2j} + k \cdot a_{2p}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & (a_{3j} + k \cdot a_{3p}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & (a_{nj} + k \cdot a_{np}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade (d8),

$$\det N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & k \cdot a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & k \cdot a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & k \cdot a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & k \cdot a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade (d7),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & k \cdot a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & k \cdot a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & k \cdot a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & k \cdot a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Logo, } \det N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a_{1p}} & \cdots & \mathbf{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \mathbf{a_{2p}} & \cdots & \mathbf{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \mathbf{a_{3p}} & \cdots & \mathbf{a_{3j}} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{np}} & \cdots & \mathbf{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \det M. \quad \blacksquare$$