UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Rosana Silva Bonfim

Cônicas: Situações Didáticas para o Ensino Médio

São José do Rio Preto

2015

Rosana Silva Bonfim

Cônicas: Situações Didáticas para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto

2015

Bonfim, Rosana Silva.
Cônicas : situações didáticas para o ensino médio / Rosana Silva Bonfim. -- São José do Rio Preto, 2015
111 f. : il.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Seções cônicas. 4. Matemática – Metodologia. 5. Tecnologia educacional. 6. Ensino auxiliado por computador. I. Silva, Flávia Souza Machado da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Rosana Silva Bonfim

Cônicas: Situações Didáticas para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.ª Dr.ª Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Prof.ª Dr.ª Tatiana Bertoldi Carlos
UFMS – Paranaíba

São José do Rio Preto

2015

*Ao meu pai, **Durvalino** (in memorium)*
pelo seu legado de honra e honestidade;
*à minha mãe **Ana Maria**,*
pelo apoio e incentivo;
*ao meu esposo **Ailton**,*
pelo companheirismo e compreensão e
*à minha filha **Mariana**,*
por entender a necessidade dos momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que me concedeu a vida e a coragem para enfrentar todos os obstáculos durante esta caminhada sem desistir.

A Nossa Senhora Aparecida, pela intercessão para que eu não fracassasse nos momentos de provação.

Aos meus pais, pela educação e valores que plantaram em minha vida e que me possibilitaram às conquistas e sucessos em minha jornada profissional.

À minha mãe que, com carinho, compreensão e dedicação, cuidou das minhas tarefas domésticas para que eu pudesse dedicar-me aos estudos. Sem sua imprescindível ajuda não teria chegado até aqui!

À minha filha que, por muitas vezes contrariada, abriu mão de minha companhia para que eu me empenhasse aos estudos.

Ao meu esposo, pelo seu amor, paciência e companheirismo.

À minha orientadora Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva, pelo profissionalismo e sensatez com que me conduziu na realização deste trabalho, em especial pela paciência, compreensão e credibilidade depositadas em mim.

A todos os professores do Departamento de Matemática do Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto (IBILCE/UNESP) que atuam no PROFMAT, pela contribuição significativa à minha formação e pelo conhecimento que me proporcionaram.

A todos os colegas, que ingressaram comigo em 2012 no programa, pela boa convivência e partilha de conhecimentos.

Aos meus alunos da terceira série do ensino médio – turma 2013 da Escola Estadual "Joaquim Antônio Pereira" que, ao seu modo, cooperaram para o êxito deste trabalho.

À Prefeitura Municipal de Fernandópolis, pelo apoio e incentivo.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Por fim, a todos aqueles que direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse concluir esse curso, o meu muito obrigado...

“O principal objetivo de todas as investigações do mundo exterior deve ser descobrir a ordem racional e harmonia que tem sido imposta por Deus e que Ele nos revelou na linguagem da matemática”

Johannes Kepler (1571-1630)

RESUMO

As cônicas constituem um tópico de grande relevância no desenvolvimento tecnológico moderno; porém, o seu estudo no ensino médio, na maioria das vezes, é feito sob um enfoque puramente analítico, descontextualizado e fragmentado. O Currículo de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE) contempla as cônicas sob a perspectiva da geometria analítica e com poucas referências ao seu uso no nosso cotidiano. O ensino das cônicas, quando acontece, para a maioria dos alunos é de forma pouco profunda e restrita a um curto período de tempo, o que acarreta algum desprezo por parte dos alunos e, até mesmo, de alguns professores que, por falta de formação adequada, desconhecem a sua importância e utilidade. Buscamos, com este trabalho, apresentar alternativas diferenciadas para o ensino das Cônicas, embasados pela Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau, que indica a criação de situações didáticas que favoreçam a investigação do aluno aproximando-o do modo como é produzida a atividade científica. Apresentamos algumas situações didáticas que podem ser desenvolvidas no terceiro ano do ensino médio e que buscam um "fazer matemática" mais próximo da vida real do aluno, propiciando a exploração e a investigação através do uso de dobraduras e do software GeoGebra.

Palavras-chaves: Cônicas, Situações Didáticas, Dobraduras, GeoGebra.

ABSTRACT

The Conics make for a topic of great relevance in the modern technological development; however, their study at high school, most of the time, is made from a purely analytical decontextualized and fragmented approach. The Department of São Paulo State Education and the Curriculum of Mathematics include the Conics under a Geometry Analytic perspective and with little reference to its everyday use. The teaching of Conics is, for most students, when it happens, of a shallow and restricted way for a short period of time, which causes students and even some teachers some contempt, who lacking proper training, become unaware of its importance and usefulness. Our goal is to present different alternatives for teaching of Conics, based on the Theory of Didactic Situations developed by Guy Brousseau, which indicates the creation of didactic situations that favor the investigation of student and approaching the way that scientific activity is produced. We present some teaching procedures situations that can be developed in the third year of high school and seeking a "do math" closer to the real life of the student, allowing the exploration and the research through folding papers and GeoGebra software.

Keywords: Conics Forms, Teaching Procedures, Folding paper, GeoGebra.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Elementos da Elipse 33
Figura 2 - Elementos da Hipérbole 37
Figura 3 - Elementos da Parábola 40
Figura 4 - Plano Cartesiano 49
Figura 5 - Distância entre os pontos A e B 49
Figura 6: Coordenadas do ponto P nos eixos transladados 50
Figura 7 - Circunferência 51
Figura 8: O ponto P é equidistante dos extremos A e B 52
Figura 9: O ponto P pertence à mediatriz do segmento AB 53
Figura 10: Eixo Maior da Elipse 54
Figura 11: Eixo Menor, Centro e distância focal da Elipse 55
Figura 12: Ponto X pertencente à região entre os ramos da Hipérbole 57
Figura 13: Ponto X pertencente à região que contém o Foco $\boldsymbol{F1}$ 57
Figura 14: Ponto X pertencente à região que contém o foco $\boldsymbol{F2}$ 58
Figura 15: Eixo focal da Hipérbole 58
Figura 16: Eixo não focal da Hipérbole 59
Figura 17: Retângulo de base e Assíntotas da Hipérbole 59
Figura 18: Eixo de simetria da Parábola 61
Figura 19: Elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo Ox 62
Figura 20: Elipse com translação dos eixos 63
Figura 21: Hipérbole com eixo focal sobre o eixo Ox e centro na origem 64
Figura 22: Hipérbole com translação dos eixos 65
Figura 23: Parábola com reta diretriz paralela ao eixo y 65
Figura 24: Parábola com translação de eixo 66
Figura 25: Reta Tangente à Elipse 67
Figura 26: Construção da Elipse no GeoGebra 68
Figura 27: Tangente à Hipérbole 69
Figura 28: Construção da Hipérbole no GeoGebra 70
Figura 29: Reta tangente à Parábola 72
Figura 30: Construção da Parábola no GeoGebra 72
Figura 31: Simulação da construção da Elipse por dobraduras 73
Figura 32: Simulação da construção da Hipérbole por dobraduras 73

Figura 33: Simulação da construção da Parábola por dobraduras 74
Figura 34: Propriedade Refletora da Elipse 75
Figura 35: Propriedade Refletora da Hipérbole.. 76
Figura 36: Propriedade Refletora da Parábola.. 77
Figura 37: Secção perpendicular ao cone sem passar por V: Circunferência 77
Figura 38: Secção paralela a uma geratriz: Parábola 78
Figura 39: Secção com ângulo entre o plano $\boldsymbol{\alpha}$ e o eixo do cone $\boldsymbol{r}$ maior que $\boldsymbol{\theta}$ sem passar por V: Elipse 78
Figura 40: Secção com ângulo entre o plano $\boldsymbol{\alpha}$ e o eixo do cone $\boldsymbol{r}$ menor que $\boldsymbol{\theta}$ sem passar por V: Hipérbole 78
Figura 41: Secção com ângulo entre o plano $\boldsymbol{\alpha}$ e o eixo $\boldsymbol{r}$ igual a $\boldsymbol{\theta}$ passando por V: Reta Geratriz (parábola degenerada).. 79
Figura 42: Secção com ângulo entre o plano $\boldsymbol{\alpha}$ e o eixo $\boldsymbol{r}$ menor que $\boldsymbol{\theta}$ passando por $\boldsymbol{V}$: Par de Retas Concorrentes: (hipérbole degenerada) 79
Figura 43: Secção com ângulo entre o plano e o eixo maior que passando por V: ponto V Vértice do Cone 79
Figura 44: Secção do cilindro por um plano: Par de Retas Paralelas 80
Figura 45: As esferas de Dandelin e a Elipse 81
Figura 46: As esferas de Dandelin e a Hipérbole 82
Figura 47: As esferas de Dandelin e a Parábola 83
Figura 48: Alunos assistindo ao vídeo 86
Figura 49: Construções das atividades 2 e 3 feita pelos alunos 87
Figura 50: Construção da elispe realizada por alunos... 88
Figura 51: Construção da Elipse por dobraduras com os focos próximos............................. 89
Figura 52: Elipse construída por dobraduras com focos mais distantes 89
Figura 53: Construção da hipérbole por dobraduras... 89
Figura 54: Construção da parábola por dobraduras 89
Figura 55: Dobraduras com erros 90
Figura 56: Construção da hipérbole por aluno 90
Figura 57: Construção da parábola por aluno... 90
Figura 58: Forma geométrica que possui a mesma propriedade da circunferência................. 99
Figura 59: Forma geométrica da moeda de 50 pence inglesa e que possui a mesma propriedade da circunferência... 100
Figura 60: Buracos quadrados 100

Figura 61: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 2 seção 4.1 100
Figura 62: Resolução do problema da atividade 2 seção 4.1 100
Figura 63: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 3 seção 4.1 100
Figura 64: Janela de Álgebra do GeoGebra mostrando as equações de uma circunferência . 100
Figura 65: Construção da Elipse por dobradura 100
Figura 66: Construção da Hipérbole por dobradura 100
Figura 67: Construção da Parábola por dobradura 100
Figura 68: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 1 seção 4.3 100
Figura 69: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 2 seção 4.3 100
Figura 70: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 3 seção 4.3 100
Figura 71: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 4 seção 4.3 100
Figura 72: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 5 seção 4.3 100
Figura 73: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 6 seção 4.3 100
Figura 74: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (elipse) 100
Figura 75: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (hipérbole) 100
Figura 76: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (parábola)........... 100

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 AS ABORDAGENS DAS CÔNICAS NOS PROGRAMAS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS 17

3 SITUAÇÕES DIDÁTICAS, SOFTWARES E DOBRADURAS COMO RECURSOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 19

3.1 Um pouco da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau 19

3.2 Recursos Computacionais 20

3.3 O Recurso das Dobraduras 22

4 PROPOSTAS DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DAS CÔNICAS 23

4.1 Situações Didáticas Introdutórias 23

4.2 Situações Didáticas usando dobraduras 27

4.3 Situações Didáticas usando o Software Geogebra 31

5 OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS NAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS 46

5.1 Coordenadas e distâncias na reta e no plano 46

5.2 Lugares Geométricos 50

5.3 Elipse, Hipérbole e Parábola 53

6 RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA 86

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 95

REFERÊNCIAS 97

APÊNDICE 99

1 INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas foi exaustivamente estudado desde a antiguidade. Na Grécia, aproximadamente durante o primeiro século da Idade Helenística, viveram três matemáticos que se destacaram em relação aos seus contemporâneos, predecessores e sucessores. Euclides (c. 300 a.C.), Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (c. 225 a.C.) foram os escritores mais fecundos da geometria, e por causa deles, o período compreendido de 300 a 200 a.C. é denominado de "Idade Áurea" da matemática grega. Tudo o que se produziu de significativo em geometria até os dias atuais, tem semente nos trabalhos de um desses três geômetras.

Apolônio, considerado "o Grande Geômetra", fez um estudo completo sobre as cônicas. A sua obra *Secções Cônicas* supera todos os trabalhos escritos anteriormente sobre o assunto. Apesar dos nomes parábola e hipérbole terem sido usados antes, foi Apolônio que criou os termos *elipse*, *parábola* e *hipérbole* por significarem, respectivamente, falta, igualdade e excesso. Essas classificações referem-se a um número, chamado excentricidade da cônica, que na elipse é menor que 1 (falta), na parábola é igual a 1 (igualdade) e na hipérbole é maior que 1 (excesso).

A obra *Secções Cônicas* de Apolônio e *Os Elementos* de Euclides compõe o apogeu da matemática grega.

A obra de Apolônio foi duramente criticada por alguns estudiosos de sua época, que afirmavam que seu estudo não possuía nenhuma aplicação no mundo real. Contudo, o tempo se encarregou de mostrar que esses estudiosos estavam equivocados. Por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) descobriu que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol, estando o sol em um de seus focos. Em 1632 Galileu Galilei descreveu a trajetória de projéteis como parabólica. E em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é hiperbólica.

As propriedades e características das Secções Cônicas são importantes no desenvolvimento da tecnologia moderna e estão presentes em diversas áreas do conhecimento. Encontramos as secções cônicas presentes em muitas situações do nosso cotidiano, como a construção de antenas; espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos dos telescópios; nas trajetórias elípticas, parabólicas e hiperbólicas de astros celestes; na economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção e na arquitetura, principalmente, nas obras do arquiteto brasileiro, Oscar Niemeyer (1907-2012), que projetou e construiu a capital do Brasil, em 1960, Brasília.

As cônicas constituem, portanto, um tópico de grande relevância no desenvolvimento tecnológico moderno; porém, o seu estudo no ensino médio, na maioria das vezes, é feito sob um enfoque puramente analítico, descontextualizado e fragmentado. O Currículo de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE) contempla as cônicas inicialmente no último ano do ensino fundamental, sendo aprofundadas no ensino médio. No terceiro ano, as cônicas são estudadas sob a perspectiva da geometria analítica e com poucas referências ao seu uso no nosso cotidiano. E, ainda, muitas vezes, o ensino das cônicas não acontece para a maioria dos alunos e, quando acontece, é de forma pouco profunda e restrita a um curto período de tempo, o que acarreta algum desprezo por parte dos alunos e, até mesmo, de alguns professores que, por falta de formação adequada, desconhecem a sua importância e utilidade.

O quadro apresentado motivou a busca por uma alternativa diferenciada para o ensino das Cônicas, por meio da Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau, que indica a criação de situações didáticas que favoreçam a investigação do aluno aproximando-o do modo como é produzida a atividade científica. Neste trabalho serão apresentadas situações didáticas que podem ser desenvolvidas no terceiro ano do ensino médio. Essas foram propostas de modo a buscar um "fazer matemática" mais próximo da vida real do aluno, explorando construções e discutindo suas particularidades através das dobraduras e do uso do software GeoGebra.

As Situações Didáticas propostas neste trabalho fazem uso do software GeoGebra como uma ferramenta para entender e definir os conceitos abordados. E ainda, possibilitou a visualização das características algébricas e geométricas dos objetos construídos, em um único ambiente. O software Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, professor da Universidade de Salzburg, com o intuito de dinamizar o estudo da Matemática. Além disso, é um software gratuito e que está disponível para download na própria página do desenvolvedor do software: www.geogebra.org.

O conteúdo deste trabalho está dividido em seções. Na Seção 2: As Abordagens das Cônicas nos Programas Oficiais e nos Livros Didáticos, procuramos dar uma visão geral de como o assunto é abordado no material didático proposto à rede estadual de ensino pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e também em alguns livros indicados no

Programa Nacional do Livro Didático. As principais referências que utilizamos nesta seção são os Cadernos do Aluno da Secretaria de Estado da Educação (SÃO PAULO (ESTADO), 2014), Cadernos do Professor da Secretaria de Estado da Educação (SÃO PAULO (ESTADO), 2010); o Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2014); (BORDALLO, 2011) e (PAQUES e SEBASTIANI, [2009?]).

Na Seção 3: Situações Didáticas, Softwares e Dobraduras como Recursos no Ensino de Matemática, tratamos sobre a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida pelo educador matemático francês Guy Brousseau, sobre o uso dos softwares e das dobraduras como recursos no ensino de matemática. As referências que utilizamos são: (BROUSSEAU, 2011); (GURGEL, 2009); (MATTOS e YOKOYAMA, 2004); (OLIVEIRA, 2004); (POMMER, 2008); (FREIRE e PRADO, 2000) e (SÃO PAULO (ESTADO), 2010).

Na Seção 4: Propostas de Situações Didáticas para o Ensino de Cônicas fazemos a descrição das atividades referentes ao conteúdo das secções cônicas, cujo objetivo é apresentar alternativas para a abordagem deste assunto com os alunos da terceira série do ensino médio, favorecendo a investigação do aluno para a construção dos conceitos e compreensão da importância desta temática no desenvolvimento da tecnologia moderna. Para que estas atividades possam ser trabalhadas a contento, é necessário que os alunos possuam conhecimentos básicos de Geometria Plana, Desenho Geométrico, Geometria Analítica e, por último, saibam manipular o software GeoGebra. Em cada atividade destacamos o material necessário e o tempo previsto para a sua execuação. Para escrevermos as atividades nos inspiramos nos trabalhos de: (BALDIN e FURUYA, 2011); (ROCHA, 2012); (NETO, 2008); e (QUARANTA, COSTA e GUIMARÃES, 2008).

Na Seção 5: Os Conteúdos Matemáticos Abordados nas Situações Didáticas, discutimos os conteúdos matemáticos abordados e que justificam as construções geométricas feitas na seção 4, procurando oferecer um embasamento teórico sobre as cônicas para os professores que desejarem fazer uso deste trabalho em suas aulas. Para escrevermos esta seção utilizamos: (BALDIN e FURUYA, 2011), (BORDALLO, 2011), (CAMARGO e BOULOS, 2005), (DOLCE e POMPEO, 2013), (GUIMARÃES, 2008), (DELGADO, FRENSEL e CRISSAF, 2013 (Coleção PROFMAT)), (MONTEIRO, 2014), (ROCHA, 2012), (VALLADARES, 1998) e (WAGNER, 1997).

Na Seção 6: Relato de uma Experiência, fazemos uma pequena exposição sobre como foi trabalhar algumas das situações didáticas, propostas na seção 4, com os alunos de uma Escola Estadual situada na cidade de Fernandópolis/SP, apontando algumas dificuldades que nos deparamos no decorrer do percurso ensino aprendizagem das secções cônicas. Por fim, a Seção 7: Considerações Finais contém as nossas reflexões acerca da realização deste trabalho e o Apêndice traz as respostas das atividades propostas na seção 4.

2 AS ABORDAGENS DAS CÔNICAS NOS PROGRAMAS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS

O Currículo de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE) contempla as cônicas, inicialmente, no último ano do ensino fundamental e sendo aprofundadas no ensino médio.

No último ano do ensino fundamental, a hipérbole é introduzida como o nome da curva que representa graficamente a variação de duas grandezas inversamente proporcionais. E a parábola é explorada através da proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado da outra e também, por meio da representação gráfica das funções quadráticas (SÃO PAULO (ESTADO), 2014). No primeiro ano do ensino médio é retomado o estudo da hipérbole e da parábola, no mesmo contexto que fora introduzido anteriormente.

No terceiro ano do ensino médio, as cônicas são estudadas sob a perspectiva da geometria analítica e com poucas referências ao seu uso no nosso cotidiano. Inicialmente, a circunferência e a elipse são caracterizadas como secções de um cilindro circular e menciona-se que a elipse é uma "circunferência alongada em uma das duas direções" (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 36). Depois, é feita uma pequena menção aos estudos de Johanes Kepler (1571–1630), sobre as trajetórias elípticas dos planetas, e a elipse é caracterizada a partir da propriedade: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até dois pontos fixados, que são os focos, é constante. Em seguida, são propostos alguns exercícios de dedução e manipulação da equação da elipse, e da relação entre as medidas do semieixo maior, semieixo menor e semidistância focal (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 47).

A hipérbole é retomada no mesmo contexto estudado no último ano do ensino fundamental, seguido do conceito de que ela surge quando um cone circular reto é seccionado por um "plano que forma com o plano da base um ângulo maior que aquele formado por uma geratriz do cone com a base" (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 43). A diferença entre as distâncias de qualquer ponto da curva até dois pontos fixos (focos) ser uma constante é apresentada como uma propriedade característica da hipérbole e que, a partir dela, é possível traçar hipérboles e obter equações (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 51).

O estudo da parábola acompanha a mesma linha descrita para a elipse e para a hipérbole. No início do estudo da parábola retoma-se a ideia de que a parábola é a representação gráfica de duas grandezas tais que uma é diretamente proporcional ao quadrado da outra, como já estudado anteriormente no ensino fundamental. Discorre-se, a seguir, sobre alguns contextos onde a parábola é encontrada na natureza, como a trajetória dos projéteis lançados obliquamente à superfície da Terra, desconsiderando os efeitos do ar (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 55-56). O conceito da parábola como sendo a secção de um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, também é apontado; assim como, a propriedade que afirma que existe um ponto fixo e uma reta fixa tais que a distância de cada ponto da curva até o ponto fixado é igual a distância do mesmo ponto da curva até a reta fixada (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 56). E ainda, é ressaltada a propriedade refletora da parábola como justificativa para o uso da secção de um parabolóide, que é uma superfície gerada por uma parábola, na construção dos faróis dos automóveis (SÃO PAULO (ESTADO), 2014, p. 57).

A partir de uma análise superficial dos livros didáticos apresentados no Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015 (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2014) e, também da experiência cotidiana de sala aula, observa-se o predomínio da abordagem das cônicas por meio da definição como o lugar geométrico dos pontos cuja distância a dois pontos fixos é constante (no caso da elipse); cuja diferença das distâncias é constante (no caso da hipérbole); e as distâncias a uma reta fixa e um ponto fixo são iguais (no caso da parábola); conhecida como definição focal. Ou seja, uma tendência a reproduzir a abordagem adotada no material proposto pela SEE/SP. Em todos os livros analisados encontramos pequenos textos que contextualizam o uso das curvas, porém, sem muito aprofundamento, alguns poucos comentários a respeito da obtenção das curvas a partir de cortes feitos no cone para justificar o nome “cônicas” e uma pequena introdução histórica, tratando-se de um falso enfoque histórico.

Nesta abordagem, os alunos apresentam muitas dificuldades em compreender que as três curvas pertencem à uma mesma familia. O conceito que os alunos constroem é fragmentado e, na maioria das vezes, não conseguem estabelecer relações entre as três curvas. À eles parecem três curvas sem nenhuma ligação entre elas, como se fossem curvas independentes. Mesmo quando as curvas são apresentadas como as secções de um cone, os alunos apresentam dificuldades em estabelecer relações entre elas.

3 SITUAÇÕES DIDÁTICAS, SOFTWARES E DOBRADURAS COMO RECURSOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

No Brasil existe uma vasta produção bibliográfica abrangendo os novos paradigmas para o ensino e aprendizagem da matemática, fundamentados na chamada didática matemática francesa cuja Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, é um dos seus representantes. Esta teoria se fundamenta no princípio de que é possível conceber uma situação que pode determinar a aprendizagem de cada conhecimento matemático pelo aluno.

3.1 Um pouco da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau

Para Brousseau (2011, p. 19-20), uma "situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional [...]. [...] é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado".

De acordo com as ideias de Brousseau, o professor deve garantir as condições para que todos tenham acesso à cultura matemática e para que isso ocorra os métodos de ensino da disciplina devem ser feitos à moda dos matemáticos. O professor não deve informar, de antemão, o conhecimento que o aluno deve construir, mas sim fornecer meios para que a construção do pensamento matemático seja organizada a partir dos saberes próprios da disciplina (GURGEL, 2009).

Em entrevista concedida a Gurgel (2009), Brousseau afirma existir três categorias de situações didáticas que mais lhe interessam: "aquelas que convocam à tomada de decisões, ou seja, que colocam os alunos em ação (situação de ação), as que permitem formular ideias e colocá-las à prova (situação de formulação) e, por último, os debates, momento em que o grupo discute estratégias de resolução, avaliando quais opções são mais adequadas (situação de validação)". Porém, há, ainda, uma quarta categoria denominada situação de institucionalização, que consiste na sistematização do conteúdo. É o momento em que, sob a orientação do professor, o conhecimento do aluno sobre o objeto em estudo sai da *síncrese* (senso comum) e chega à *síntese*, isto é, ao nível do conhecimento científico estabelecido historicamente e culturalmente (BROUSSEAU, 2011).

Desse modo, cabe ao professor criar situações que possibilitam ao aluno tornar-se um pesquisador capaz de investigar, elaborar hipóteses, verificá-las, comprová-las e reformulá-las de forma a apropriar-se do conhecimento. Constitui, portanto, papel do professor, através da contextualização e descontextualização do saber, oportunizar situações onde o aluno possa vivenciar o conhecimento, à moda dos matemáticos, de forma a tornar o saber do aluno universal e reutilizável (POMMER, 2008). Assim, “[...] é o meio que deve ser modelado” (BROUSSEAU, 2011) sem interferência explicita do professor.

Neste contexto, segundo (BROUSSEAU, 2011), o contrato didático é o mecanismo que rege as ações do aluno e do professor diante da situação didática. A ação do aluno em enfrentar o problema proposto e a consciência do professor, que não deverá intervir explicitamente na construção do conhecimento pelo aluno, revela o aceite do contrato didático. O aluno sabe que o professor escolheu o problema para que ele construa um novo conhecimento, mas precisa saber também, que não terá adquirido esse saber até que seja capaz de utilizá-lo fora do contexto de ensino, em situações denominadas a-didáticas.

Na teoria das Situações Didáticas, o erro tem uma nova concepção, constitui um obstáculo para a aquisição do saber, pois provoca no aluno um desequilíbrio em relação ao seu saber. Quando o aluno supera esse desequilíbrio, demonstra que o novo conhecimento foi assimilado, conduzindo o aluno a um novo equilíbrio. Deste modo, para Brousseau, o erro constitui fonte de conhecimento, pois a cada desequilíbrio superado é um novo conhecimento integralizado.

A Teoria das Situações Didáticas visa uma aprendizagem significativa para o aluno, porém, aplicar os seus conceitos em sala de aula requer do professor, além da busca por situações que despertem o interesse dos alunos pela aprendizagem da matemática, um trabalho reflexivo e coletivo de modo a possibilitar que o aluno adquira uma cultura matemática mais significativa.

3.2 Recursos Computacionais

As Novas Tecnologias da Informação (NTI) promoveram mudanças nos paradigmas educacionais. A escola, atualmente, já não pode ser considerada a única detentora do conhecimento, mas é de fundamental importância que ela prepare seu aluno para continuar aprendendo em uma sociedade em que a informação é transmitida à velocidade da luz. O Currículo de Matemática da SEE/SP diz:

> Os computadores atualmente são considerados absolutamente imprescindíveis para jornalistas e escritores, mas é no terreno da Matemática que se abrem as mais naturais e promissoras possibilidades de assimilação consciente dos inúmeros

> recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer no terreno da Educação. (SÃO PAULO (ESTADO), 2010, p. 27)

A utilização das Novas Tecnologias da Informação em ambiente educacional traz uma discussão sobre o lugar do computador no ensino. Usar o computador para criação de ambientes que enfatizam a construção de conhecimentos exige uma visão pedagógica do uso do computador como “máquina para ensinar”, ou seja, por intermédio do computador o aluno constrói seu conhecimento. É preciso, portanto, que haja uma inter-relação entre o pedagógico e o técnico. “Sem o conhecimento técnico será impossível implantar soluções pedagógicas inovadoras e sem o pedagógico, os recursos técnicos disponíveis tendem a ser subutilizados.” (VALENTE in FREIRE e PRADO, 2000).

E para que essa inter-relação aconteça, o professor precisa de auxilio, pois o computador é uma nova forma de representar o conhecimento e o professor, neste contexto, deixa de ser um transmissor de informação para ser um facilitador da aprendizagem, organizando as situações didáticas que permitem ao aluno buscar suas próprias soluções para os problemas que lhe são apresentados. Sob a orientação do professor, o aluno deve tornar-se um grande pesquisador. Os softwares são os meios para que o aluno indague, investigue, levante hipóteses, as verifique, comprove e reformule de forma significativa. O professor é, portanto, o grande responsável pelo uso adequado dessa tecnologia em benefício da aprendizagem do aluno, sendo o computador uma ferramenta com a qual ele pode contar para melhor realizar o seu trabalho.

Com o uso do computador, diversas tarefas podem ser executadas sem a intervenção humana. A automatização tornou algumas habilidades menos importantes para serem aprendidas, enquanto aumentou a importância de outras, o que requer do professor um novo olhar matemático. Acredita-se que, através do uso das novas tecnologias, podemos dinamizar e inovar os processos de ensino e aprendizagem porque se cria meios de estimular o pensamento rigoroso e sistemático, aproximando-se do modo como a atividade científica é produzida e desvencilhando-se da ideia de que a aquisição do conhecimento passa apenas pela memorização. Assim, afirmamos que o uso do computador, com todo o aparato tecnológico (softwares, objetos de aprendizagem, wikis, plataformas de gerenciamentos etc.) que temos à disposição, pode ser um modo prático de aplicarmos os conceitos da Teoria das Situações Didáticas.

3.3 O Recurso das Dobraduras

A geometria tem importante papel no desenvolvimento cultural da humanidade, pois sua aplicação no dia a dia das pessoas, para a tecnologia e até mesmo para o desenvolvimento da criatividade, é fundamental na formação dos alunos. Porém, o seu ensino tem sido negligenciado nas abordagens atuais do ensino, que priorizam os métodos analíticos, fazendo com que a geometria perca destaque nos currículos escolares.

Desse modo, a dobradura pode constituir-se uma abordagem motivadora para o estudo da geometria, pois tem suas raízes na experimentação, na exploração concreta, na resolução de problemas, na modelagem e na habilidade de visualização dos entes geométricos, aproximando-se, desse modo, dos conceitos propostos por Guy Brousseau.

Origami é a arte tradicional japonesa de dobrar papéis. De uma ou mais folhas simples de papel, surge um universo de formas. Dobraduras de papel (origami) compõe um particular elemento para o trabalho geométrico com alunos. Segundo Mattos e Yokoyama (2004), a partir de uma folha de papel, definido como o plano Origami, pode-se realizar dobras, que formam vincos, que representam as retas no plano Origami. As intersecções de vincos distintos determinam os pontos deste plano. As retas e os pontos são os elementos fundamentais para qualquer construção por dobraduras.

O Origami pode ser adotado como importante recurso metodológico no ensino da matemática, sendo indicado para a exploração das propriedades geométricas das figuras planas e espaciais. O trabalho com dobraduras traz outras contribuições para a formação do aluno, como diz Oliveira:

> O trabalho manual das dobraduras estimula também as habilidades motoras com uma ênfase no desenvolvimento da organização, na elaboração de sequências de atividades, na memorização de passos e coordenação motora fina do aluno. Atividades em grupo favorecem a cooperação, bem como a paciência e a socialização. O resultado das dobraduras, além de um incentivo à realização pessoal e à autoestima, é um motivo especial para presentear pais, amigos criando uma saudável conexão escola/casa (OLIVEIRA, 2004, p. 6).

Podemos construir as cônicas por meio das dobraduras utilizando o método conhecido como Método de Van Schooten, holandês que construiu aparatos para a construção das cônicas. O método baseia-se no fato de que se conhecendo a reta tangente em um ponto de uma curva plana, pode-se presumir acerca da natureza da curva, independente da posição dela no plano. O processo de construção das cônicas por dobraduras usa a caracterização das cônicas por meio das suas propriedades focais e das retas que tangenciam a curva.

4 PROPOSTAS DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DAS CÔNICAS

Apresentaremos situações didáticas diferenciadas para o ensino das cônicas a alunos da terceira série do ensino médio, objetivando oferecer alternativas que favoreçam a investigação do aluno para a construção dos conceitos das cônicas a partir de uma definição única para as três curvas (elipse, hipérbole e parábola), numa perspectiva de unificação dos conceitos dessas curvas, facilitando a aquisição das habilidades de expressar por meio da linguagem algébrica e geométrica suas propriedades, reconhecendo-as em diferentes situações do cotidiano.

Apresentamos a seguir as Atividades, com seus objetivos, procedimentos, material de apoio necessário e tempo previsto. Recomendamos, no entanto, caso o professor opte por esta sugestão de trabalho para o ensino das cônicas, que escolha um dos modos utilizados (a dobradura ou o software Geogebra) nas atividades de construção das cônicas, em conformidade com o desenvolvimento de sua turma. Acreditamos que, aplicar todas as situações didáticas aqui propostas, demandaria muito tempo e poderia comprometer a evolução dos demais conteúdos destinados à turma.

Caso o professor julgue necessário, após a realização das situações descritas abaixo, pode-se propor a realização de alguns exercícios envolvendo os conceitos e propriedades estudadas. Exercícios sobre o assunto poderão ser encontrados em diversos sites da internet e também nos livros didáticos, e também, podem ser elaborados pelo próprio professor.

4.1 Situações Didáticas Introdutórias

As atividades propostas, nesta seção, visam introduzir o aluno ao tema das Cônicas, bem como, oferecer oportunidades para que o estudante possa retomar alguns conceitos que devem ter sido objetos de estudos em séries anteriores e que serão necessários para o desenvolvimento do estudo das cônicas do modo como foi proposto nas situações didáticas posteriores, além de abordar o conceito de lugar geométrico.

ATIVIDADE 1: Reinventando a roda

Objetivos Específicos: Através de um vídeo da série “Isto é Matemática”, promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e apresentado pelo professor universitário e matemático Rogério Martins, mostrar, de forma simples e realista, como a Matemática está presente no nosso cotidiano e faz parte da nossa vida. E ainda, explicar o uso das formas circulares, motivando o estudo das cônicas.

Material necessário: sala multimídia**.**

Tempo previsto: 1 aula de 50 min**.**

Desenvolvimento:

1. Exibir para os alunos o vídeo “Reinventar a roda”, disponível na internet em http://www.youtube.com/watch?v=fK_v-hyMrUo.
2. Responder ao questionário:
   a) Qual é o assunto do vídeo?
   b) Qual é a característica dos círculos e das circunferências que é citada no vídeo? Qual o nome que se dá a essa característica?
   c) A circunferência e o círculo são as únicas formas geométricas que possuem essa característica? Explique.
   d) Cite algumas aplicações dessas formas geométricas no nosso cotidiano.
   e) Quais as vantagens dessa característica para o uso dessas formas geométricas no dia a dia?

ATIVIDADE 2: Mediatriz de um segmento

Objetivos específicos: Caracterizar a mediatriz de um segmento como um lugar geométrico; deduzir a equação da mediatriz de um segmento e resolver problemas gráficos envolvendo a mediatriz de um segmento.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 2 aulas de 50 min cada.

Desenvolvimento:

1. Propor aos alunos o seguinte problema: Deseja-se perfurar um poço equidistante de duas casas em uma propriedade rural. A empresa responsável mapeou a região para facilitar o trabalho de pesquisa do local mais apropriado para fazer a perfuração. Suponha que você seja um dos engenheiros da empresa, investigue o local onde a pesquisa deverá ser efetuada de forma a aperfeiçoar o seu trabalho**.**

2. Pedir aos alunos que utilizem o software GeoGebra para resolver o problema proposto, seguindo a construção descrita abaixo:

a) Represente dois pontos A e B quaisquer, na janela de visualização.
b) Usando a ferramenta S**egmento**, construa o segmento AB, clicando primeiro no ponto A e depois no B.
c) Com a ferramenta **Círculos Dados Centro e Um dos seus Pontos**, obtenha a representação geométrica de duas circunferências, a primeira com centro em A passando por B e outra de centro em B passando por A.
d) Obtenha os pontos C e D, pontos de interseção das duas circunferências construídas no passo anterior. Para isso, utilize a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**.
e) Construa a reta que passa por C e D, com a ferramenta **Reta.**
f) Marque o ponto E, um ponto qualquer pertencente à reta CD.
g) Com a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro**, meça as distâncias do ponto E até os pontos A e B.
h) Obtenha o ponto F, intersecção da reta CD com o segmento AB, usando a ferramenta **Intersecção de Dois objetos**.
i) Utilizando a ferramenta **Ângulo**, meça os ângulos $A\hat{F}C$ e $B\hat{F}C$.
j) Animar o ponto E e observar qual a relação entre as distâncias do ponto$E$ aos pontos A e B.
k) Animar o ponto E e observar o que acontece com as medidas dos ângulos $A\hat{F}C$ e $B\hat{F}C$.

3. Responder às questões:

a) Que figura $\mathcal{F}$ do plano foi obtida?
b) Qual é a propriedade satisfeita pelos pontos pertencentes à reta CD?
c) Caracterize a figura $\mathcal{F}$ como um lugar geométrico, sabendo que: uma figura plana $\mathcal{L}$ (ou seja, um conjunto de pontos de um plano) é chamada lugar geométrico (abreviadamente LG) de uma propriedade $\mathcal{P}$ se $\mathcal{F}$ for constituída exatamente pelos pontos do plano que têm a propriedade $\mathcal{P}$, nem mais nem menos.
d) Obtenha uma equação que expresse a relação entre a abscissa x e a ordenada y de um ponto P pertencente à figura $\mathcal{F}$.
e) Resolva o problema proposto no início da atividade.

ATIVIDADE 3: A circunferência

Objetivos específicos: Caracterizar circunferência como um lugar geométrico e obter a equação reduzida e/ou geral de uma circunferência.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 2 aulas de 50 min cada.

Desenvolvimento:

1. Propor aos alunos o seguinte problema: Na construção de uma estrada, a detonação de uma dinamite ocorreu em um determinado local. Considerando que o som da detonação pode ser ouvido num raio de 5 km, obtenha a região onde o som da detonação poderá ser ouvido.

2. Pedir aos alunos que utilizem o software GeoGebra para resolver o problema proposto, seguindo a construção descrita abaixo:

   a) Represente na **Janela de Visualização** do GeoGebra o local de detonação da dinamite, ou seja, um ponto A qualquer. Para isso selecione a ferramenta **Ponto** e depois clique em qualquer lugar da **Janela de Visualização**.

   b) A região procurada é obtida do seguinte modo: considerando que a unidade adotada nos **Eixos** é o quilômetro, digite no C**ampo de Entrada** o comando: "***Segmento [A,5]***" e depois aperte a tecla **Enter**. Aparecerá um segmento AB de comprimento 5. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B e selecione **Habilitar Rastro**. Novamente, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B e, agora, selecione **Animar**. Quando desejar parar, na **Janela de Álgebra** clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B e selecione **Animar** ou clique no **botão Play/Pause** na parte inferior esquerda da **Janela de Visualização**.

3. Agora responda:

   a) Que figura $\mathcal{F}$ do plano foi obtida com o rastro do ponto B, ou seja, qual a região que o som da detonação poderá ser ouvido?

   b) Qual é a propriedade satisfeita pelos pontos obtidos pelo rastro do ponto B?

   c) Caracterize a figura $\mathcal{F}$ como um lugar geométrico.

   d) Obtenha uma equação que expresse a relação entre a abscissa x e a ordenada y de um ponto P pertencente à figura $\mathcal{F}$. Para isso, no campo entrada digite o comando "**C*írculo [A,5]***", depois aperte a tecla **Enter** e observe a equação que aparece na **Janela de**

Álgebra. Clicando novamente, na **Janela de Álgebra**, sobre a equação que apareceu, teremos outro tipo de equação.

4. Ainda utilizando o comando descrito no item d da questão 3, obtenha uma equação para o lugar geométrico dos pontos do plano que distam 6 unidades do ponto $C(2,5)$.

5. Observando as construções que você realizou, como podemos expressar uma equação do lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância conhecida r (um número real positivo) de um ponto dado $C(a,b)$?

ATIVIDADE 4: Introdução às cônicas

Objetivos Específicos: Motivar o estudo das cônicas;

Material Necessário: sala de multimídia

Tempo previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Exibir para os alunos o vídeo "*Na cauda do cometa*", disponível na internet em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137.

2. Responder ao questionário:

   a) Qual o assunto do vídeo?

   b) Vários cientistas são citados no vídeo. Quais são eles e quais suas contribuições para a astronomia?

   c) Um dos objetivos do vídeo é introduzir o nome das curvas cônicas. Quais são elas? Por que essas curvas são chamadas de cônicas?

   d) Kepler e Newton, a partir de suas observações e da teoria gravitacional, respectivamente, afirmaram que as órbitas de um astro qualquer pode ser uma das três cônicas. Explique esse fato.

4.2 Situações Didáticas usando dobraduras

Nesta seção propomos atividades de construção das cônicas por meio das dobraduras. A ideia ocorreu-nos ao realizarmos as atividades com os alunos e termos tido que interromper o trabalho devido à problemas com os computadores da escola. Percebemos, assim, a necessidade de contemplarmos professores e alunos que não têm acesso à tecnologia.

É conveniente lembrar aos professores que optarem por aplicar essas atividades aos seus alunos, que é necessário uma revisão dos conceitos de semirretas e do postulado do transporte da geometria euclidiana, bem como, de algumas noções de desenho geométrico, tais como, a construção de reta perpendicular com régua e compasso.

ATIVIDADE 1: Construção da Elipse com dobradura

Objetivos Específicos: Construir a elipse através de dobraduras; compreender as características e as propriedades da elipse.

Material Necessário: Papel vegetal ou manteiga, régua, compasso, lápis ou caneta hidrocor.

Tempo previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Entregue uma folha de papel-manteiga ou vegetal para cada aluno e peça que eles executem os seguintes passos:
   a) Marque um ponto F_2 da folha de papel. Com o auxílio do compasso, desenhe uma circunferência com centro em F_2.

   b) Marque um ponto F_1 no interior da circunferência e diferente de F_2. Com o auxílio da régua trace o segmento F_1F_2.

   c) Escolha um ponto D sobre a circunferência e dobre o papel de tal maneira que o ponto D coincida com o ponto F_1. Tenha certeza de que a dobra seja bem marcada no papel e, então, desdobre o papel.

   d) Repita o passo anterior, para diferentes escolhas do ponto D, de modo a "contornar" toda a circunferência.

2. Agora, faça o que se pede:

   a) Depois que você tiver realizado todos os passos anteriores, poderá observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Marque a curva $\mathcal{E}$ obtida com lápis ou caneta hidrocor. Que nome se dá a essa curva?

   b) Usando a régua, trace a reta r, passando pelos pontos F_1 e F_2. Marque os pontos A_1 e A_2, intersecção da curva $\mathcal{E}$ com a reta r.

   c) Tome um ponto P qualquer da curva $\mathcal{E}$. Com o compasso, transporte os segmentos PF_1 e PF_2 sobre uma semirreta de origem O, de modo a obter um segmento OX de comprimento igual à soma dos comprimentos desses segmentos. Transporte, também, sobre a mesma semirreta o segmento A_1A_2. Repita esse procedimento para outras escolhas do ponto P. O que acontece com a medida do segmento OX? Compare as medidas dos segmentos OX e A_1A_2, o que você nota?

d) Baseado em suas observações, elabore uma definição para a curva $\mathcal{E}$.

ATIVIDADE 2: Construção da hipérbole com dobraduras

Objetivos Específicos: Construir a hipérbole através de dobraduras; compreender as características e as propriedades da hipérbole.

Material Necessário: Papel vegetal ou manteiga, régua, compasso, lápis ou caneta hidrocor.

Tempo previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Entregue uma folha de papel-manteiga ou vegetal para cada aluno e peça que eles executem os seguintes passos:

   a) Marque um ponto F_2 da folha de papel. Com o auxílio do compasso, desenhe uma circunferência com centro em F_2.

   b) Marque um ponto F_1 no exterior da circunferência e trace o segmento F_1F_2.

   c) Escolha um ponto D sobre circunferência e dobre o papel de tal maneira que o ponto D coincida com o ponto F_1. Tenha certeza de que a dobra seja bem marcada no papel e, então, desdobre o papel.

   d) Repita o passo anterior, para diferentes escolhas do ponto D, de modo a “contornar” toda a circunferência.

2. Agora, faça o que se pede:

   a) Depois que você tiver realizado todos os passos anteriores poderá observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Marque a curva $\mathcal{H}$ obtida com lápis ou caneta hidrocor. Que nome se dá a essa curva?

   b) Usando a régua, trace a reta r, passando pelos pontos F_1 e F_2. Marque os pontos A_1 e A_2, intersecção da curva $\mathcal{H}$ com a reta r.

c) Tome um ponto P qualquer da curva $\mathcal{H}$. Com o compasso, transporte os segmentos PF_1 e PF_2 sobre uma semirreta de origem O, de modo a obter um segmento OX de comprimento igual à diferença entre os comprimentos desses segmentos. Transporte, também, sobre a mesma semirreta o segmento A_1A_2. Repita esse procedimento para outras escolhas do ponto P. O que acontece com a medida do segmento OX? Compare as medidas dos segmentos OX e A_1A_2, o que você nota?

d) Baseado em suas observações, elabore uma definição para a curva $\mathcal{H}$.

ATIVIDADE 3: Construção da parábola com dobradura

Objetivos Específicos: Construir a parábola através de dobraduras; compreender as características e as propriedades da parábola.

Material Necessário: Papel vegetal ou manteiga, régua, compasso, lápis ou caneta hidrocor.

Tempo previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Entregue uma folha de papel-manteiga ou vegetal para cada aluno e peça que eles executem os seguintes passos:

   a) Desenhe uma reta d e marque um ponto fixo F "fora dessa reta".

   b) Selecione um ponto D sobre a reta e dobre o papel de forma a fazer coincidir os pontos D e F.

   c) Repita o passo anterior, para diferentes escolhas do ponto D.

2. Agora, faça o que se pede:

   a) Realizando a operação descrita acima um número suficiente de vezes, podemos observar que as dobras parecem tangenciar uma curva. Marque a curva $\mathcal{P}$ obtida com lápis ou caneta hidrocor. Que nome se dá a essa curva?

   b) Tome P um ponto qualquer da curva. Com a ponta seca do compasso em P e abertura maior que a distância entre P e d, construa um arco de circunferência e marque os pontos A e B, intersecção do arco e da reta d.

   c) Com a ponta seca do compasso em A e abertura qualquer trace outro arco em sentido oposto ao ponto P. Repita o passo anterior para o ponto B, porém mantendo a abertura do compasso. Marque a intersecção dos arcos e nomeie por P'. Com a régua trace a reta PP', obtendo o ponto O, intersecção da reta PP' e da reta d.

d) Transporte os segmentos PF e PO para uma semirreta. Repita esse procedimento para outras escolhas do ponto P. O que você nota?

e) Baseado em suas observações, elabore uma definição para a curva $\mathcal{P}$.

4.3 Situações Didáticas usando o Software Geogebra

Nesta seção, abordamos a construção das cônicas por meio da utilização do software GeoGebra. Buscamos nestas atividades uma interligação entre as simulações que o software propicia com o espírito investigador que a matemática requer, objetivando colocar o aluno em ação para a formulação das ideias e conceitos envolvidos no contexto do estudo das cônicas.

A última atividade desta seção visa introduzir as cônicas partindo da ideia da unificação do conceito das três curvas, através da funcionalidade dinâmica do GeoGebra.

Vale ressaltar que, caso os alunos não tenham tido nenhum contato anterior com o software GeoGebra, é importante que eles conheçam as ferramentas do software antes que lhes sejam apresentadas as Situações Didáticas. Neste caso, será necessário despender um tempo maior para a execução das atividades que ora propomos.

ATIVIDADE 1: Construção da Elipse

Objetivos Específicos: Compreender a definição da elipse como lugar geométrico, identificar seus principais elementos e deduzir sua equação reduzida.

Material Necessário: Computador com o software GeoGebra

Tempo Previsto: 3 aulas de 50 min. cada.

Desenvolvimento:

1. Propor aos alunos o seguinte problema: João Carlos é um designer de interiores, admirador das curvas de Oscar Niemeyer. Está projetando o interior de uma casa e deseja construir um jardim de inverno num espaço retangular cujas medidas são 4 m e 3,3 m. Na reta que passa pelo centro do retângulo, paralelamente ao maior lado do retângulo e a uma distância de 0,89 m dos menores lados do retângulo, serão colocados dois drenos para captação da água. Porém o proprietário da casa impôs uma condição a João Carlos: a soma das

distâncias entre qualquer ponto que pertença à linha limite do jardim e os drenos deve ser constante. Isto é possível? Que forma geométrica João Carlos deverá dar ao jardim para que atenda as condições impostas pelo proprietário da casa?

2. Pedir aos alunos que utilizem o software GeoGebra para resolver o problema proposto, executando a construção descrita a seguir:

a) Coloque dois pontos A e B na janela de visualização do GeoGebra. Renomeie os pontos para F_1 e F_2, respectivamente.

b) Com a ferramenta **Semirreta** trace a semirreta de origem em F_1 passando por F_2. Note que o GeoGebra nomeou a semirreta por a.

c) Marque um ponto A na semirreta a construída no item anterior sendo A não pertencente ao segmento F_1F_2.

d) Usando a ferramenta **Círculo Dados Centro e Um de seus Pontos**, trace o círculo com centro em F_1 passando por A. Observe que o círculo é denominado por c pelo Geogebra.

e) Marque um ponto qualquer B sobre o círculo c construído no passo anterior.

f) Trace a reta F_1B, usando a ferramenta **Reta**.

g) Utilizando a ferramenta **Segmento** trace o segmento F_2B.

h) Com a ferramenta **Mediatriz**, trace a reta mediatriz do segmento F_2B.

i) Usando a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos** marque o ponto de intersecção da mediatriz e da reta F_1B. Renomeie o ponto para P.

j) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

s = distância[P,F_1] + distância[P,F_2] e

Texto["soma das distâncias de P a F_1 e F_2=" s].

k) Habilitar no ponto P a opção de rastro, animar o ponto B.

l) Ocultar os objetos círculo c, reta F_1F_2, reta F_1B, mediatriz do segmento F_2B e o segmento BF_2.

m) Clicar no botão **Play/Pause** e observar o valor da soma das medidas das distâncias do ponto P aos pontos F_1 e F_2.

3. Responda às questões:

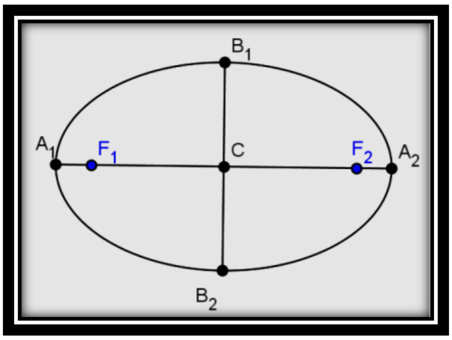
   a) Qual a curva obtida com a construção acima?

   b) O que você nota ao observar o valor da soma s, ou seja, a distância do ponto P ao ponto F_1 adicionada á distância do ponto P ao ponto F_2, enquanto o ponto P descreve a curva?

   c) Baseado em suas observações, elabore uma definição para esta curva e responda o problema proposto no início desta situação.

4. Observe a FIGURA 1:

Figura 1 - Elementos da Elipse



Definimos:

Segmento A_1A_2: **eixo maior da elipse**;

Segmento B_1B_2: **eixo menor da elipse**;

Pontos F_1 e F_2: **focos da elipse**;

Segmento F_1F_2: **distância focal da elipse**;

Ponto C: **centro da elipse**;

Soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos: $\boldsymbol{2a}$, com $a > 0$;

Distância entre os focos F_1 e F_2: $\boldsymbol{2c}$, com $c > 0$ e

Distância entre os pontos B_1 e B_2: $\boldsymbol{2b}$, com $b > 0$.

Baseado nas definições acima responda as questões:

   a) Geometricamente, verifique que a medida do eixo maior da elipse é constante e igual a $2a$ com $a > 0$.

   b) Verifique que é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$ sendo a a medida do semieixo maior, b a medida do semieixo menor e c metade da distância entre os focos.

c) Baseando-se na definição que você elaborou para a elipse, faça a dedução da equação de uma elipse com centro na origem do sistema cartesiano e focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

d) Mostre que a equação de uma elipse com centro no ponto $C(m,n)$ e focos $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$ é dada por $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ onde $b^2=a^2-c^2$. Note que, neste caso, os focos da elipse estão sobre a reta $y=n$, paralela ao eixo Ox.

e) Deduza a equação da elipse cujo centro está localizado no ponto de coordenadas $C(m,n)$ e focos nos pontos $F_1(m,n-c)$ e $F_2(m,n+c)$. Note que neste caso, os focos da elipse estão sobre a reta $x=m$, paralela ao eixo Oy.

ATIVIDADE 2: Propriedade Refletora da Elipse

Objetivos Específicos: Verificar a propriedade refletora da elipse.

Material Necessário: Computador com o software GeoGebra

Tempo Previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Solicitar aos alunos que investiguem a solução para o seguinte problema: "O grande salão oval estava cheio de espiões, contraespiões e contra contraespiões. Contudo, o primeiro-ministro tinha absoluta necessidade de comunicar-se, imediatamente, à Sua Majestade o grande segredo que acabara de se inteirar. Como quem não quer nada, se aproxima do Rei e diz-lhe em alto e bom som: "Majestade, parece que os focos de rebeldes reclamam a nossa atenção". Todos os espiões se dirigem às paredes do salão para retirar dos forros das suas capas as chaves das mensagens cifradas. Seguiram-nos, naturalmente com grande sigilo, os contraespiões e, a estes, os contra contraespiões. O rei, com passo tranquilo, mas decidido, dirigiu-se a um lado do salão oval. O ministro, por sua vez, com o mesmo passo decidido, mas também tranquilo, dirigiu-se na direção contrária, para o outro lado do salão oval. Os espiões os observaram de soslaio enquanto consultavam nos seus livros de códigos as palavras-chaves "parecem", "focos", "rebeldes" e "exigem". Os contraespiões estavam atentos aos espiões e os contra contraespiões não perdiam de vista nem por um momento os seus contraespiões correspondentes. O rei parou por um momento e o ministro, respeitoso, parou também. Estavam a mais de 20 metros de distância quando um espião mais astuto observou e anotou no seu livro secreto: "Este ministro ou fala sozinho ou esta rezando". Mas

ninguém pode ouvir nada do que o Ministro balbuciava. Só o Rei pode ouvir claramente a mensagem do Ministro: “Majestade, com todo o meu respeito, a sua braguilha esta totalmente aberta” (ROCHA, 2012, p. 40)”.

Como a comunicação entre o Ministro e o Rei foi possível?

2. Pedir aos alunos que utilizem o software GeoGebra para resolver o problema proposto, executando a construção descrita a seguir:
   a) Usando a ferramenta **Elipse** construa uma elipse de focos A e B passando pelo ponto C. Renomeie os pontos A, B e C para F_1, F_2 e P, respectivamente.
   b) Obtenha a reta tangente à elipse pelo ponto P usando a ferramenta **Reta Tangente**. Observe que o GeoGebra nomeou esta reta por a.
   c) Com a ferramenta **Segmento**, trace os segmentos PF_1 e PF_2.
   d) Marque dois pontos quaisquer A e B pertencentes à reta tangente a, de tal modo, que estejam em lados opostos em relação ao ponto P.
   e) Usando a ferramenta **Ângulo**, meça os ângulos $A\hat{P}F_1$ e $B\hat{P}F_2$.
3. Responda às questões:
   a) O que você observa em relação aos ângulos $A\hat{P}F_1$ e $B\hat{P}F_2$.
   b) Movimente o ponto P sobre a elipse. A sua observação em relação aos ângulos é a mesma?
   c) Enuncie a propriedade que você observou e explique o segredo do salão oval.

ATIVIDADE 3: Construção da hipérbole

Objetivos Específicos: Compreender a definição da hipérbole como lugar geométrico; identificar os principais elementos da hipérbole e deduzir a equação reduzida da hipérbole.

Material Necessário: Computador com o software GeoGebra

Tempo Previsto: 3 aulas de 50 min. cada.

Desenvolvimento:

1. Propor aos alunos o problema: O prefeito de uma cidade deseja construir uma praça num terreno onde há duas árvores centenárias que não podem ser cortadas. Esta praça deverá ter um gramado entorno das árvores e um caminho destinado ao passeio das

pessoas. Assim o prefeito fez a seguinte solicitação ao arquiteto: o módulo da diferença entre as distâncias de um ponto qualquer que pertença à linha limite, que separa o gramado e o caminho do passeio, e as árvores deve ser constante. Isto é possível? Que forma geométrica o arquiteto deverá dar à praça para atender a exigência do prefeito?

2. Utilizando o software GeoGebra, peça aos alunos que execute os passos descritos, para investigarem a solução para o problema proposto:

a) Coloque dois pontos A e B na janela de visualização do GeoGebra. Renomeie os pontos para F_1 e F_2, respectivamente.

b) Com a ferramenta **Semirreta** trace a semirreta de origem em F_1 passando por F_2. Note que o GeoGebra nomeou a semirreta por a.

c) Marque o ponto A na semirreta a construída no item anterior sendo A pertencente ao segmento F_1F_2.

d) Usando a ferramenta **Círculo Dados Dentro e Um de seus Pontos**, trace o círculo com centro em F_1 passando por A. Observe que o círculo é denominado por c pelo GeoGebra.

e) Marque um ponto qualquer B sobre o círculo c construído no passo anterior.

f) Trace a reta F_1B, usando a ferramenta **Reta**.

g) Utilizando a ferramenta **Segmento** trace o segmento F_2B.

h) Com a ferramenta **Mediatriz**, trace a reta mediatriz do segmento F_2B.

i) Usando a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos** marque o ponto de intersecção da mediatriz e da reta F_1B. Renomeie o ponto para P.

j) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

s = abs(distância[P,F_1] - distância[P,F_2]) e

Texto["diferença das distâncias de P a F_1 e F_2=" s].

k) Habilitar no ponto P a opção de rastro, animar o ponto B.

l) Clicar com o botão direito do mouse sobre os objetos círculo c, reta F_1F_2, reta F_1B, mediatriz do segmento F_2B e o segmento BF_2 e selecionar a opção exibir objeto.

m) Clicar no botão **Play/Pause** e observar o valor da soma das medidas das distâncias do ponto P aos pontos F_1 e F_2.

3. Responda as questões:

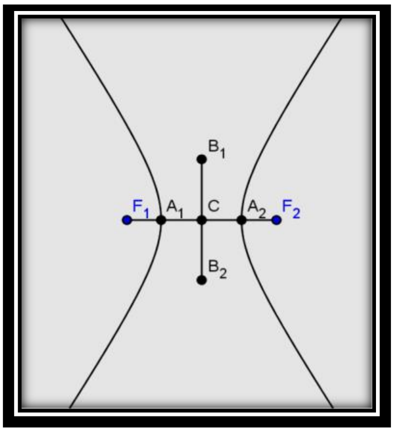
a) Qual a curva obtida com a construção acima?

b) O que você nota ao observar o valor da diferença s, ou seja, a diferença entre a distância do ponto P ao ponto F_1 e a distância do ponto P ao ponto F_2, enquanto o ponto P descreve a curva?

c) Baseado em suas observações, elabore uma definição para esta curva e responda o problema proposto no início desta situação.

4. Observe a Figura 2:

Figura 2 - Elementos da Hipérbole



Definimos:

Segmento A_1A_2: e**ixo focal da hipérbole**;

Segmento B_1B_2: **eixo não focal da hipérbole**;

Pontos F_1 e F_2: **focos da hipérbole**;

Segmento F_1F_2: **distância focal da hipérbole**;

Ponto C: **centro da hipérbole**;

Diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos: $\mathbf{2a}$, com $a > 0$;

Distância entre os focos F_1 e F_2: $\mathbf{2c}$, com $c > 0$e

Distância entre os pontos B_1 e B_2: $\mathbf{2b}$, com $b > 0$.

Traçado do eixo não focal da hipérbole

Tracemos uma reta r perpendicular ao eixo transverso da hipérbole, passando pelo vértice A_1. Tracemos, também, a mediatriz s do segmento F_1F_2 e determinemos C o ponto médio de F_1F_2e centro da hipérbole. Construamos a circunferência de centro C e raio igual à semidistância focal da hipérbole. Sejam Be B' os pontos de intersecção da circunferência com a reta r. Tomemos B_1 e B_2 as projeções de B e B' sobre a mediatriz, respectivamente. O segmento B_1B_2 é denominado eixo imaginário da hipérbole.

Baseado nas definições acima responda as questões:

a) Geometricamente, demonstre que a medida do eixo transverso da hipérbole é constante igual a $2a$ com $a > 0$.

b) Prove que é válida a relação $c^2 = a^2 + b^2$ sendo a a medida do semieixo transverso, b a medida do semieixo imaginário e c metade da distância entre os focos.

c) Baseando-se na definição que você elaborou para a hipérbole, faça a dedução da equação de uma hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

d) Mostre que a equação de uma hipérbole com centro no ponto $C(m, n)$ e focos $F_1(m - c, n)$ e $F_2(m + c, n)$ é dada por $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ onde $b^2 = c^2 - a^2$.

e) Deduza a equação da hipérbole cujo centro está localizado no ponto de coordenadas $C(m, n)$ e focos nos pontos $F_1(m, n - c)$ e $F_2(m, n + c)$.

ATIVIDADE 4: Propriedade Refletora da Hipérbole

Objetivos Específicos: Verificar a propriedade refletora da hipérbole.

Material Necessário: Computador com o software GeoGebra

Tempo Previsto: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Utilizando o software GeoGebra, executar a construção descrita:

   a) Usando a ferramenta **Hipérbole** construa uma hipérbole de focos A e B passando pelo ponto C. Renomeie os pontos A e B para F_1 e F_2, respectivamente.

   b) Marque um ponto P qualquer entre os ramos da hipérbole e com a ferramenta **Segmento**, trace os segmentos PF_1 e PF_2.

c) Com a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, obtenha os pontos A e B, intersecção da hipérbole com os segmentos PF_1 e PF_2, respectivamente.

d) Obtenha a reta tangente à hipérbole pelos pontos A e B usando a ferramenta **Reta Tangente**. Observe que o GeoGebra nomeou estas retas por d e e, respectivamente.

e) Com a ferramenta **Segmento**, trace os segmentos BF_1 e AF_2.

f) Marque dois pontos quaisquer D e E pertencentes à reta tangente d, de tal modo que estejam em lados opostos em relação ao ponto A. Faça o mesmo para reta tangente e, obtendo os pontos F e G.

g) Usando a ferramenta **Ângulo**, meça os ângulos $\widehat{PAD}$ e $\widehat{EAF_2}$. Meça, também, os ângulos $\widehat{PBF}$ e $\widehat{GBF_1}$.

2. Responda às questões:

a) O que você observa em relação aos pares de ângulos $\widehat{PAD}$ - $\widehat{EAF_2}$ e $\widehat{PBF}$ - $\widehat{GBF_1}$.

b) Movimente o ponto P para as regiões onde se encontra o foco F_1 e também onde se encontra o foco F_2. A sua observação em relação aos ângulos é preservada?

c) Enuncie a propriedade que você observou.

ATIVIDADE 5: Construção da Parábola

Objetivos Específicos: Compreender a definição da parábola como lugar geométrico; identificar os principais elementos da parábola e deduzir a equação reduzida da parábola.

Material Necessário: computador, software GeoGebra

Tempo previsto: 3 aulas de 50 min. cada.

Desenvolvimento:

1. Utilizando o software Geogebra, seguir os passos a seguir:

a) Trace uma reta qualquer horizontal na janela de visualização do GeoGebra usando a ferramenta **reta definida por dois pontos**. Renomeie essa reta para d.

b) Marque um ponto qualquer que não pertença a reta d usando a ferramenta **Novo Ponto**. Renomeie esse ponto para F.

c) Com a ferramenta **Novo Ponto**, marque um ponto Dqualquer pertencente à reta d.

d) Por D trace uma reta perpendicular á reta d usando a ferramenta **Reta Perpendicular**. Observe que o Geogebra nomeou essa reta como a.

e) Trace a o segmento FD usando a ferramenta **Segmento definido por dois pontos**.

f) Trace a mediatriz do segmento FD com a ferramenta **Mediatriz**. Essa reta foi denominada c pelo Geogebra.

g) Com a ferramenta **Intersecção de dois objetos**, obtenha o ponto P intersecção da reta a e da reta c.

n) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

s=distância[P,F]

t=distância[P,d]

texto["distância de P a F= "s]

texto["distância de P a d= "t]

o) Habilitar no ponto P a opção de rastro e animar o ponto D.

p) Clicar com o botão direito do mouse sobre os objetos reta a, reta c e os pontos A e B e selecionar a opção exibir objeto, ocultando esses objetos.

q) Clicar no botão Play/Pause e observar o valor das distâncias de P a F e de P a d.

2. Responda as questões:

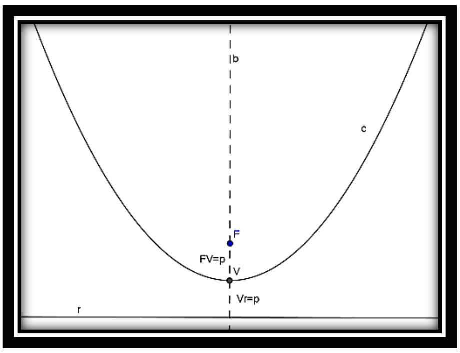
a) Essa construção nos forneceu qual curva?

b) O que podemos afirmar sobre as distâncias de P a F e de P a d enquanto o ponto P descreve a curva?

c) Baseado em suas observações, elabore uma definição para esta curva.

3. Observe a Figura 3:

Figura 3 - Elementos da Parábola



Definimos

Ponto F: **foco da parábola**;

Reta r: **diretriz da parábola**;

Reta b: **eixo de simetria da parábola**;

Ponto V: **vértice da parábola**;

Distância do foco ao vértice: **parâmetro da parábola (p)**

Baseado nas definições acima faça o que se pede:

a) Usando a definição que você elaborou para a parábola, faça a dedução da equação de uma parábola com foco $F(0, p)$, reta diretriz em $y = -p$ com $p > 0$, concavidade para cima e vértice na origem do sistema cartesiano.

b) Faça a dedução da equação de uma parábola com foco $F(0, -p)$, reta diretriz em $y = p$ com $p > 0$, concavidade para baixo e vértice na origem do sistema cartesiano.

c) Faça a dedução da equação de uma parábola com foco $F(p, 0)$, reta diretriz em $x = -p$ com p$>$ 0, concavidade voltada para a direita e vértice na origem do sistema cartesiano.

d) Faça a dedução da equação de uma parábola com foco $F(-p, 0)$, reta diretriz em $x = p$ com $p > 0$, concavidade voltada para a esquerda e vértice na origem do sistema cartesiano.

e) Mostre que a equação reduzida de uma parábola com vértice V(m, n) e reta diretriz $y = n - p$ é dada por $(x - m)^2 = 4p(y - n)$.

ATIVIDADE 6: Propriedade Refletora da Parábola

Objetivo: Verificar a propriedade refletora da parábola.

Material Necessário: computador, software GeoGebra

Tempo de atividade: 1 aula de 50 min.

Desenvolvimento:

1. Propor inicialmente a seguinte questão: Por que as antenas são parabólicas?

2. Utilizando o software GeoGebra, executar a construção descrita a seguir:

   a) Na janela de visualização do GeoGebra, marque um ponto A e renomeie-o para F.

   b) Usando a ferramenta **Reta** trace uma reta qualquer e renomeie-a para d. Oculte os pontos A e B, com a ferramenta **Exibir objetos**.

c) Usando a ferramenta **Parábola** construa uma parábola de foco F e diretriz d.

d) Trace o eixo da parábola, isto é, construa a reta perpendicular a d por F, com a ferramenta reta perpendicular e renomeie-a para e.

e) Marque um ponto P qualquer pertencente à parábola com a ferramenta **Ponto**, preferencialmente, $P \neq V$, onde V é o vértice da parábola.

f) Construa a reta r paralela ao eixo da parábola e por P usando a ferramenta **Reta Paralela**.

g) Obtenha a reta tangente à parábola pelo ponto P usando a ferramenta **Reta Tangente**. Renomeie esta reta para t.

h) Reflita a reta r através de t, para fazer isso digite no campo entrada o comando: **r' = reflexão [r,t].**

i) Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre as retas r, e e r', selecione propriedades e na aba altere a cor destas retas. Obviamente, cores diferentes para retas distintas.

3. Responda as questões:

a) A reta r', traçada no passo h da construção descrita acima, passa por qual outro ponto além do ponto P?

b) Ao movimentar o ponto P sobre a parábola, o que você observa em relação à reta r' e e?

c) Com o comando **V=vértice[c]**, determine o vértice da parábola. Faça o ponto P coincidir com o ponto V. O que você observa em relação às retas r, r' e e

d) Enuncie a propriedade que você observou e responda a questão proposta no início dessa situação.

ATIVIDADE 7: Caracterização Geral das Cônicas

Objetivos específicos: Entender que a partir do conceito de excentricidade é possível elaborar uma caracterização geral das cônicas; elaborar uma definição geral para as cônicas; deduzir a equação geral para as cônicas.

Materiais Necessários: sala de informática com computadores contendo o software GeoGebra.

Tempo previsto: 3 aulas de 50 min. cada.

Desenvolvimento:

1. Utilizando o software GeoGebra, faça a construção descrita abaixo:

   a) Coloque um ponto A sobre o eixo Ox na janela de visualização do GeoGebra. Renomeie o ponto para D.

   b) Na janela de visualização do GeoGebra, coloque um **Controle Deslizante** e configure mínimo=0 e máximo=3. Renomeie-o para $excentricidade$.

   c) Trace uma reta perpendicular ao eixo Ox passando por D, usando a ferramenta **Reta Perpendicular**. Renomeie esta reta para $diretriz$. Clique com o botão direito do mouse sobre a reta **Diretriz**, selecione **Propriedades**. Na aba **cor**, altere a cor da reta.

   d) À direita da reta diretriz marque um ponto sobre o eixo Ox. Renomeie-o para F.

   e) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

   distânciaDF=distância[D,F]

   distânciaVF=(excentricidade*distânciaDF)/(1+excentricidade)

   c=Círculo[F,distânciaVF]

   f) Com a ferramenta **Ponto**, marque o ponto de intersecção do círculo c com o eixo Ox. Renomeie-o como V.

   g) Utilizando a ferramenta **Mediatriz**, trace a reta mediatriz de V e F. Observe que o GeoGebra nomeou esta reta por a.

   h) Marque o ponto de intersecção da reta a com o eixo Ox, usando a ferramenta **Intersecção de dois objetos**. Renomeie o ponto como A_0.

   i) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

   distânciaDA_0= Distância[D, A_0]

   distânciaAF=excentricidade*distânciaDA_0

   d=Círculo[F,distânciaAF]

   j) Marque os pontos de intersecção da reta a e do círculo d, usando a ferramenta **Intersecção de dois objetos**. Renomeie os pontos como A_1 e A_2.

k) Com a ferramenta **Mediatriz**, trace a reta mediatriz do segmento de extremidades A_0 e F. Observe que o GeoGebra nomeou a reta por b.

l) Marque o ponto de intersecção da reta b com o eixo Ox, usando a ferramenta **Intersecção de dois objetos** e renomeie-o para B_0.

m) No campo entrada digite os comandos (um por vez):

distânciaDB_0=Distância[D,B_0]

distânciaBF=excentricidade*distânciaDB_0

t=círculo[F,distânciaBF]

n) Marque os pontos de intersecção da reta b e do círculo t, usando a ferramenta **Intersecção de dois objetos**. Renomeie os pontos como B_1 e B_2.

o) Usando a ferramenta C**ônica definida por cinco pontos**, trace a cônica clicando nos pontos B_1, A_1, V, A_2, B_2. Renomeie-a como **cônica**. Clique com o botão direito do mouse sobre a **Cônica**, selecione **propriedades**. Na aba **cor**, altere a cor da cônica.

p) Usando a ferramenta **Ponto**, marque a intersecção da cônica com o eixo Ox e renomeie este ponto como V'.

q) Com a ferramenta **Ponto Médio ou Centro**, marque o ponto médio do segmento VV'. Chame este ponto por C. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, selecione **Propriedades**. Na aba **cor**, altere a cor do ponto.

r) Trace a reta perpendicular ao eixo Ox por C, usando a ferramenta **Reta Perpendicular**. Renomeie esta reta para l.

s) Trace o círculo com centro em C passando por D com a ferramenta **Círculo dados o seu Centro e um de seus Pontos**. Note que o Geogebra chamou este círculo por f.

t) Marque o ponto de intersecção do círculo f com o eixo Ox, oposto ao ponto D. Renomeie-o como D'.

u) Trace a reta perpendicular ao eixo Ox passando por D' com a ferramenta **Reta Perpendicular**. Note que o GeoGebra nomeou a reta por g.

v) No campo entrada, digite os comandos (um por vez):

distânciaA_1F=distância[A_1,F]

distânciaA_1diretriz=distância[A_1,diretriz]

e=distânciaA_1F/distânciaA_1diretriz

w) Clicar com o botão direito do mouse sobre os objetos, selecionar a opção **Exibir Objetos** e ocultar os círculos c, d, f, t, as retas a, b, j, l, os pontos $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, D, D'$.

2. Responda as questões:

a) Quando o controle excentricidade assume valor entre zero e um que curva é obtida? E quando o valor é igual a um? E quando o valor é maior que um?

b) Utilizando a ferramenta **distância, comprimento ou perímetro** determine a distância de um ponto P qualquer da curva ao ponto F e a distância de P a reta diretriz. Calcule a razão entre estas medidas. O que você nota?

c) A observação que você fez na questão anterior continua válida quando você altera a curva utilizando o controle excentricidade?

3. Faça o que se pede:

a) Baseado em suas observações e na construção que você realizou, elabore uma definição geral para as cônicas.

b) Usando a definição geral que você elaborou faça a dedução de uma expressão algébrica que caracterize essas cônicas.

5 OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS NAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta seção abordaremos os conteúdos matemáticos utilizados e os resultados que justificam as construções geométricas feitas na seção anterior. Procuramos, também, oferecer um pouco de embasamento teórico sobre as cônicas para os professores que optarem por enveredar-se pelo estudo de tão belas curvas e que possui papel importante na evolução tecnológica e constituem, portanto, tópico fundamental na formação do aluno de ensino médio.

5.1 Coordenadas e distâncias na reta e no plano

A **Geometria Analítica**, também chamada geometria das coordenadas, se baseia nos estudos da Geometria através da utilização da Álgebra, criada pelos matemáticos franceses René Descartes (1596 - 1650) e Pierre Fermat (1601 – 1665). A Geometria Analítica, transitando entre a Geometria Euclidiana e a Álgebra, possibilita a representação de entes geométricos através da linguagem algébrica, por meio de pares ordenados, equações e inequações.

Para introduzirmos os conceitos da Geometria Analítica necessários ao estudo das cônicas, admitiremos que o leitor tenha conhecimento sobre os principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana Plana que estão relacionados com pontos, retas e planos; e que podem ser encontrados em (DOLCE e POMPEO, 2013).

Veremos a seguir, de forma breve, como representar pontos (da reta e do plano) por meio de coordenadas cartesianas; em seguida, apresentamos a expressão da distância euclidiana entre dois pontos obtida por meio das coordenadas dos pontos.

Definição 5.1: *Distância entre dois pontos* A e B, denotada por $d(A,B)$, é o número real, fixada uma unidade de comprimento, que satisfaz:

a) $d(A,B) \geq 0$;
b) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
c) $d(A,B) = d(B,A)$ e
d) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, para qualquer ponto C.

Observação 1: Também escreveremos AB para denotar a distância entre os pontos A e B.

Definição 5.2: Sejam A, B e C três pontos colineares, distintos dois a dois. Dizemos que B *está entre A e C* se $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$.

Definição 5.3: Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um *segmento de reta* e é indicado por AB. Os pontos A e B são as *extremidades do segmento AB*.

Definição 5.4: Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a *semirreta AB* (indicada por $\overrightarrow{AB}$).

Definição 5.5: Sejam r uma reta e $\overrightarrow{AO}$ uma semirreta de r com origem em $O \in r$. Seja B um ponto de r tal que O está entre B e A. A semirreta $\overrightarrow{OB}$ é dita *oposta* à semirreta $\overrightarrow{OA}$.

Vale lembrar que, dados uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ e um número real $\lambda > 0$, existe um único ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(A,C) = \lambda$.

Estabelece-se uma correspondência biunívoca (correspondência um a um) entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta r da seguinte maneira:

Sejam O, A e B pontos quaisquer de r, sendo O um ponto entre A e B. O número 0 (zero) corresponde á origem da semirreta $\overrightarrow{OA}$; cada número real positivo x corresponde um ponto $X \neq O$ da semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $x = d(O,X)$; cada número real negativo x corresponde um ponto X da semirreta $\overrightarrow{OB}$, oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$, tal que $x = -d(O,X)$.

Definição 5.6: *Coordenada de um ponto X* pertencente a uma reta r é o número real x obtido conforme a correspondência biunívoca estabelecida acima.

Definição 5.7: Dizemos que o *ponto Y está à direita do ponto X* se, e somente se, $x < y$ com X e Y pontos da reta r com coordenadas x e y, respectivamente.

Dessa forma, os pontos da semirreta $\overrightarrow{OA}$ distintos de O estão à direita de O e os pontos da semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$ estão à esquerda de O. Assim, a semirreta $\overrightarrow{OA}$ estabelece um *sentido de percurso* na reta r.

Uma reta sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\overrightarrow{OA}$ é denominada *eixo* E de origem O e direção induzida pela semirreta.

Proposição 5.1: Sejam x e y as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo E, respectivamente. Então $d(X,Y) = |y - x|$.

Demonstração:

No caso em $X = Y$ ou $X = O$ ou $Y = O$, é fácil verificar que o resultado é válido.

Suponhamos que X, Y e O são três pontos distintos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que X está à esquerda de Y, ou seja, $x < y$. Consideremos três casos:

1º caso: $0 < x < y$

Temos que X está entre O e Y, pois, senão, Y estaria entre O e X e $d(O,Y) = y$ seria menor que $d(O,X) = x$. Logo, $d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y) \Rightarrow y = x + d(X,Y) \Rightarrow d(X,Y) = y - x = |y - x|$.

2º caso: $x < y < 0$

Analogamente ao caso anterior, temos que Y está entre O e X. Logo, $d(X,O) = d(X,Y) + d(Y,O) \Rightarrow -x = d(X,Y) - y \Rightarrow d(X,Y) = y - x = |y - x|$.

3º caso: $x < 0 < y$

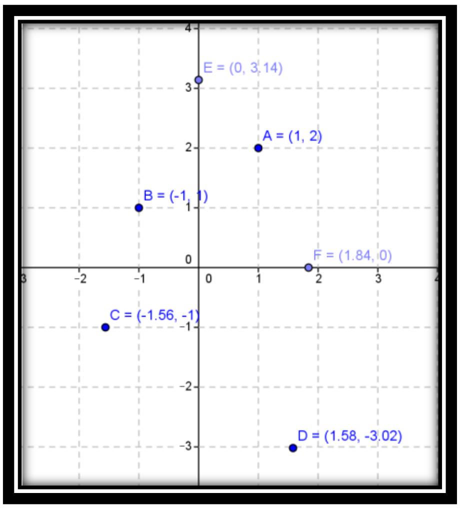
Neste caso X está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e Y está na semirreta oposta à $\overrightarrow{OA}$. Assim, $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) \Rightarrow d(X,Y) = -x + y = |y - x|$.

Definição 5.8: Considere um plano π. Um sistema ortogonal de coordenadas em π consiste de um par de eixos OX e OY que estão contidos em π, têm a mesma origem e são perpendiculares em O. Denotamos tal sistema por OXY.

A escolha de um sistema ortogonal de coordenadas num plano π estabelece, de modo natural, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$. Ao ponto $P \in \pi$ fazemos corresponder o par ordenado (x,y) se P não está sobre os eixos, x é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo OX por P e y é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo OY por P. Os números x, $y \in \mathbb{R}$ associados ao ponto P são chamados de *coordenadas cartesianas* do ponto P e escrevemos $P(x,y)$; x é a *abscissa* de P e y é a *ordenada* de P.

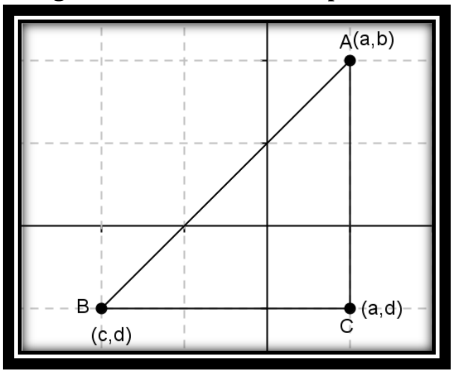
Reciprocamente, ao par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto de abscissa x, com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto de ordenada y.

Figura 4 - Plano Cartesiano



Consideremos fixado um sistema ortogonal de coordenadas num plano π. Sejam $A(a,b)$, $B(c,d)$ e $C(a,d)$ pontos do plano π. A distância de A a B é a medida da hipotenusa AB do triângulo retângulo ΔABC de catetos BC e AC. Pela Proposição 5.1, $d(B,C) = |a-c|$ e $d(A,C) = |b-d|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABC, vem que $d(A,B) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Figura 5 - Distância entre os pontos A e B



Definição 5.9: Sejam P um ponto e r uma reta do plano π, definimos a distância entre o ponto P e a reta r por $d(P,r) = min\{d(P,P')|P' \in r\}$.

É fácil verificar que o ponto P' é o pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P. Assim, $d(P,r) = min\{d(P,P')|P' \in r\} = d(P,P')$.

Translação de eixos

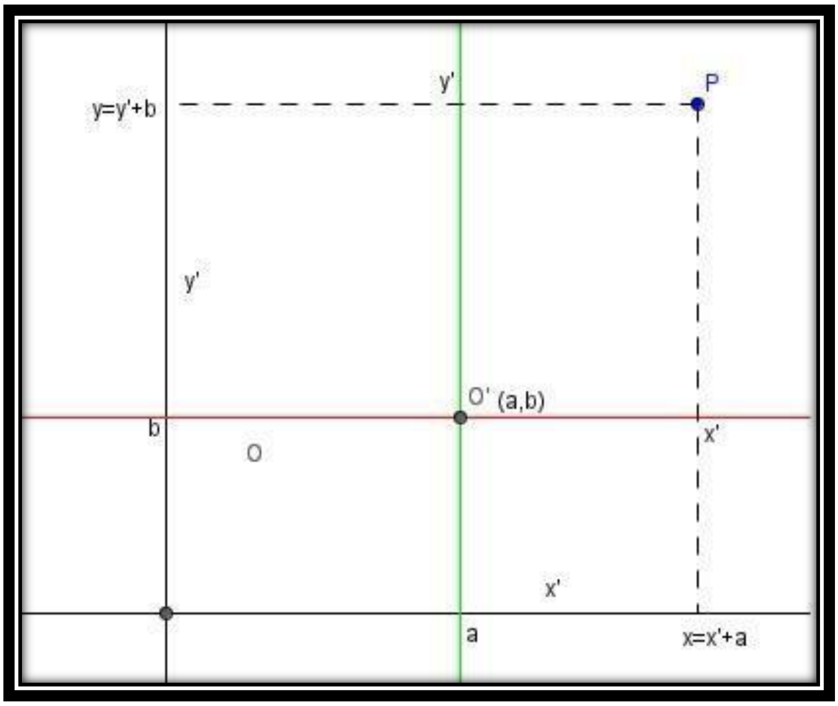
Considere um sistema ortogonal de coordenadas OXY. Desejamos obter um novo sistema ortogonal de coordenadas $O'X'Y'$ de tal modo que a origem O' tem coordenadas (a,b)

no sistema OXY e os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente. Grosseiramente falando, queremos obter um novo sistema de coordenadas no qual a origem foi transladada.

Tomemos um ponto P de coordenadas (x, y) em OXY e de coordenadas (x', y') em $O'X'Y'$. As relações entre as coordenadas do ponto P no sistema OXY e as coordenadas do ponto P no sistema $O'X'Y'$ são dadas pelo seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \sim \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

Figura 6: Coordenadas do ponto P nos eixos transladados



5.2 Lugares Geométricos

O conceito de lugar geométrico aparece nas soluções de diversos problemas históricos contribuindo enormemente para a evolução da Geometria e, por consequência, da Matemática. A definição de diversas curvas como lugares geométricos está associada a conceitos mais modernos e por isso, na maioria dos livros didáticos, é apresentada sem nenhum enfoque histórico. Porém, há uma variedade enorme de problemas históricos envolvendo o conceito de lugar geométrico. Deste modo, é conveniente, neste trabalho, dedicarmos alguma atenção a esse conceito dando a possibilidade ao aluno de redescobrir a importância do papel dos lugares geométricos na matemática.

Definição 5.10: Dada uma propriedade $\wp$ relativa a pontos do plano, o *lugar geométrico* (abreviadamente ***LG***) dos pontos que possuem a propriedade $\wp$ é o subconjunto $\mathcal{L}$ do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

(i) Todo ponto do subconjunto $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\wp$.

(ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade $\wp$ pertence ao subconjunto $\mathcal{L}$.

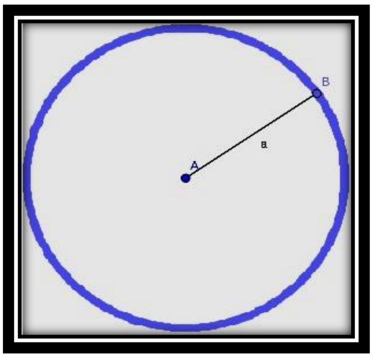
Geralmente, no plano, os lugares geométricos são retas, circunferências, arcos e pares de retas.

Definição 5.11: Seja A um ponto e r um número real positivo. Definimos a *circunferência de centro A e raio r* como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto A.

Os pontos do plano cuja distância a A é menor que r são chamados de *pontos interiores* à circunferência, enquanto que os pontos cuja distância a A é maior que r são chamados *pontos exteriores* à circunferência.

Exemplo 5.1: (Circunferência) Dado um ponto $A(a,b)$ qualquer no plano e um número real $r > 0$, a circunferência de centro A e raio r é o lugar geométrico dos pontos que distam r de A, cuja equação é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Figura 7 - Circunferência



De fato: Se P é um ponto da circunferência de centro A e raio r, então a distância do ponto P ao ponto A é r.

Agora, seja P um ponto do plano cuja distância até o ponto A é r. Logo, o ponto P pertence à circunferência de centro A e raio r.

Para obter uma equação da circunferência de centro A e raio r, considere um sistema ortogonal de coordenadas e $A(a,b)$. Pelo que acabamos de provar acima, um ponto $P(x,y)$ pertence à circunferência de centro A e raio r se, e somente se, $d(P,A)=r$. Assim, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$; elevando ambos os membros da equação ao quadrado, vem que:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

A equação acima é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro $A(a,b)$ e raio r. Ao desenvolvermos essa equação obtemos a equação geral ou normal da circunferência, qual seja:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0.$$

Definição 5.12: A *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.

Exemplo 5.2: (Mediatriz de um segmento) Dados dois pontos $A(a,b)$ e $B(c,d)$ no plano, o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades do segmento AB é a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio, ou seja, é a mediatriz do segmento AB, cuja equação é dada por $2(c-a)x+2(d-b)y+a^2+b^2-c^2-d^2=0$

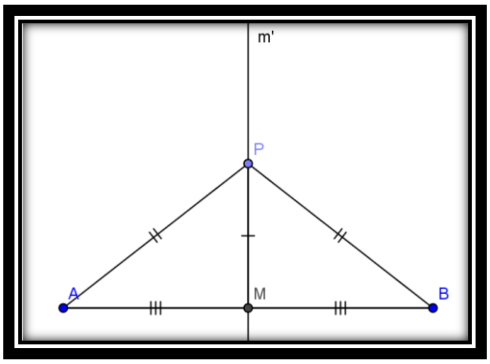
De fato: Seja M o ponto médio do segmento AB e m a mediatriz do segmento AB.

Seja P um ponto equidistante das extremidades do segmento AB.

Se P pertence ao segmento AB, segue que P coincide com o ponto médio M, e, consequentemente, P pertence à mediatriz m.

Consideremos o caso em que P não pertence ao segmento AB.

Figura 8: O ponto P é equidistante dos extremos A e B

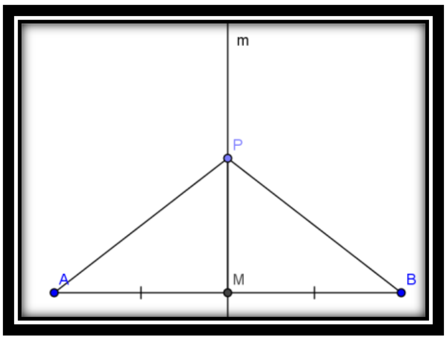


Como $PM=PM$, $MA=MB$ e $PA=PB$, segue, pelo caso de congruência de triângulos LLL, que os triângulos PMA e PMB são congruentes. Logo, os ângulos $P\widehat{M}A$ e

$P\widehat{M}B$ são ângulos retos, e, portanto, a reta m' que passa pelos pontos P e M é perpendicular ao segmento AB. Sabemos que todo segmento tem exatamente um ponto médio, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular. Assim, a reta m' coincide com a mediatriz m e, portanto, P pertence a reta m.

Agora, seja P um ponto pertencente à mediatriz m.

Figura 9: O ponto P pertence à mediatriz do segmento AB



Se P pertence ao segmento AB, então P coincide com o ponto médio M. Pela definição de ponto médio, segue que P é equidistante das extremidades do segmento AB.

Se P não pertence ao segmento AB, então temos $PM = PM$, $MA = MB$ e que os ângulos $P\widehat{M}A$ e $P\widehat{M}B$ são retos. Logo os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso de congruência de triângulos LAL. Assim, $PA = PB$, ou seja, P é equidistante das extremidades do segmento AB.

Para obter uma equação da mediatriz do segmento AB, considere um sistema ortogonal de coordenadas e tomemos um ponto $P(x, y)$ pertencente a mediatriz do segmento AB, e sejam $A(a, b)$ e $B(c, d)$. Como P equidista de A e B, temos que:

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} \Rightarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2dy + d^2 \Rightarrow$$

$$2(c-a)x + 2(d-b)y + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0.$$

5.3 Elipse, Hipérbole e Parábola

Trataremos, neste tópico, das definições das cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Deduziremos suas equações reduzidas, bem como, os resultados que justificam as construções descritas nas seções 4.1, 4.2 e 4.3. E ainda, que essas cônicas podem ser vistas como a intersecção de um plano com um cone reto e a caracterização geral das mesmas.

5.3.1 Definições e elementos

Definição 5.13: Uma *elipse* $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $F_1F_2 = 2c$, $\mathcal{E} = \{P \in \pi | PF_1 + PF_2 = 2a\}$.

Observação 2: Quando $c = 0$ na definição anterior, então $F_1 = F_2$ e, portanto, $\mathcal{E} = \{P \in \pi | PF_1 = a\}$ é uma circunferência de centro F_1 e raio a.

Definição 5.14: Sejam A_1 e A_2 dois pontos de uma elipse, que são colineares com os focos. O segmento A_1A_2 é denominado *eixo maior* da elipse.

Nos resultados e definições que se seguem estaremos considerando as notações e nomenclaturas utilizadas na definição 5.12.

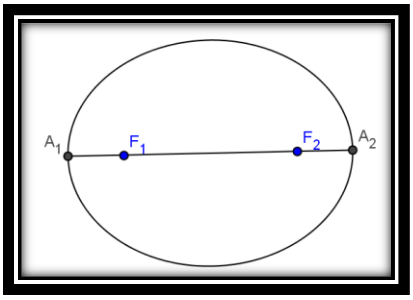
Proposição 5.2: O eixo maior de uma elipse tem medida igual a $2a$.

Demonstração:

De fato, sejam A_1 e A_2 dois pontos de uma elipse, colineares com os focos F_1 e F_2 (Figura 10).

Temos que A_1 e A_2 são pontos da elipse, logo vale a relação $A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$ (I) e $A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$ (II). Observe que $A_1F_1 + A_2F_1 = A_1A_2 = A_2F_2 + A_1F_2$. Fazendo $I + II$ temos que $A_1F_1 + A_2F_1 + A_2F_2 + A_1F_2 = 2a + 2a = 4a \Rightarrow 2A_1A_2 = 4a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$. Portanto o eixo maior da elipse tem comprimento igual a $2a$.

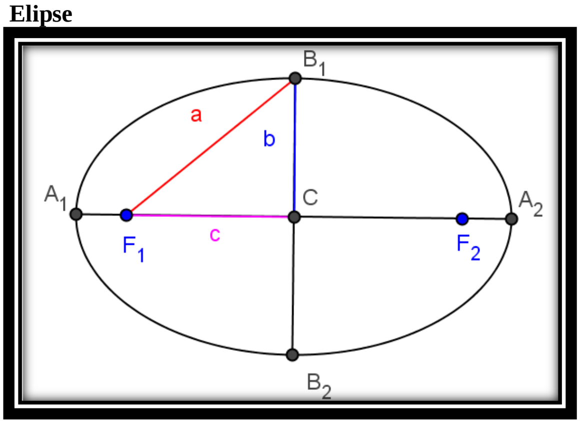
Figura 10: Eixo Maior da Elipse



Definição 5.15: Sejam F_1 e F_2 os focos de uma elipse e B_1 e B_2 os pontos de intersecção da

mediatriz do segmento F_1F_2 com a elipse. O segmento B_1B_2 é denominado *eixo menor* da elipse e atribuímos a medida $2b$ com $b > 0$. O ponto médio C do segmento F_1F_2 é dito *centro* da elipse e dizemos que a distância entre os focos F_1 e F_2 é a *distância focal*.

Figura 11: Eixo Menor, Centro e distância focal da Elipse



Proposição 5.3: (Relação Fundamental da Elipse) Em toda elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração:

Como B_1 e B_2 pertencem à mediatriz do segmento F_1F_2, tem-se, pela propriedade de mediatriz, que $B_1F_1 = B_1F_2$. Como B_1 é um ponto da elipse, é válida a relação $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$ com $a > 0$. De modo análogo, mostramos que $B_2F_1 = a$.

Vamos mostrar, agora, que C é ponto médio do segmento B_1B_2. De fato, consideremos os triângulos B_1F_1C e B_2F_1C, retângulos em C, pois C é ponto médio do segmento F_1F_2. Temos que as hipotenusas desses triângulos são congruentes, pois, $B_1F_1 = B_2F_1 = a$ e o cateto F_1C é comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso especial de congruência, os triângulos B_1F_1C e B_2F_1C são congruentes e $B_1C = B_2C$. Portanto C é ponto médio do segmento B_1B_2.

Tem-se, ainda, que o triângulo B_1CF_1 é retângulo em C, logo, pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 = B_1{F_1}^2 = B_1C^2 + F_1C^2 = (\frac{1}{2}B_1B_2)^2 + (\frac{1}{2}F_1F_2)^2 = (\frac{1}{2}2b)^2 + (\frac{1}{2}2c)^2 = b^2 + c^2.$$

Definição 5.16: Uma *hipérbole* $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$. $\mathcal{H} = \{P \in \pi | PF_1 - PF_2| = 2a\}$, 0$< a < c$, $F_1F_2 = 2c$.

Podemos, sem perda de generalidade, considerar que o foco F_2 está à direita do foco F_1. Os pontos da hipérbole distribuem-se por dois conjuntos disjuntos contido em semiplanos opostos em relação à mediatriz do segmento F_1F_2. O primeiro, indicado por $\mathcal{H}_1$, é formado pelos pontos de $\mathcal{H}$ mais próximos de F_1 do que de F_2. O segundo, indicado por $\mathcal{H}_2$, pelos pontos de $\mathcal{H}$ mais próximos de F_2 do que de F_1. Cada um deles chama-se *ramo* da hipérbole. Note que, se um ponto P pertence ao ramo $\mathcal{H}_1$ temos $PF_1 - PF_2 = -2a$ e se P pertence ao ramo $\mathcal{H}_2$, $PF_1 - PF_2 = 2a$.

Desse modo, a hipérbole divide o plano em três regiões: uma que contém o foco F_1, outra, o foco F_2 e uma terceira, situada entre os dois ramos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$.

Nos resultados e definições que se seguem estaremos considerando as notações e nomenclaturas utilizadas na definição 5.15.

Lema 5.1: Se X pertence à região situada entre os dois ramos, então

$$-2\mathrm{a} < XF_1 - XF_2 < 2\mathrm{a}.$$

Demonstração: Tomemos um ponto X pertencente à região entre os dois ramos. Seja X_1 o ponto de intersecção do segmento XF_1 com o ramo $\mathcal{H}_1$ (Figura 12). Então

$$XF_1 - XF_2 = XX_1 + X_1F_1 - XF_2 = XX_1 + X_1F_1 - X_1F_2 + X_1F_2 - XF_2 \text{ (I)}$$

Como X_1 pertence ao ramo $\mathcal{H}_1$, temos que $X_1F_1 - X_1F_2 = -2a$.

Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo XX_1F_2, temos

$$XF_2 < XX_1 + X_1F_2 \Rightarrow XX_1 + X_1F_2 - XF_2 > 0 \text{ (II)}$$

Substituindo II em I, temos que $XF_1 - XF_2 > -2a$ (1).

Consideremos, agora, X_2 o ponto de intersecção de XF_2 com o ramo $\mathcal{H}_2$ (Figura 12). Então

$$XF_1 - XF_2 = XF_1 - XX_2 - X_2F_2 = XF_1 - XX_2 - X_2F_1 + X_2F_1 - X_2F_2 \text{ (III).}$$

Como X_2 pertence ao ramo $\mathcal{H}_2$, temos que $X_2F_1 - X_2F_2 = 2a$.

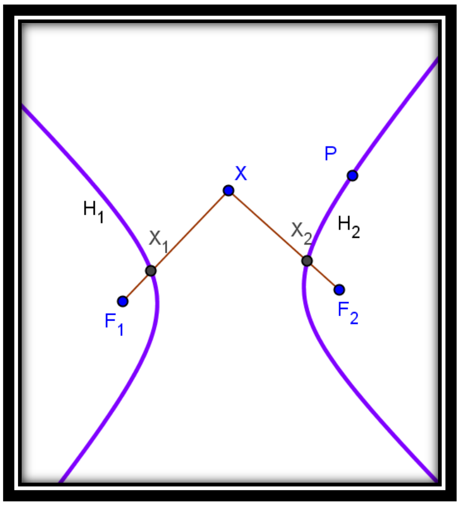
Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo XX_2F_1, tem-se que:

$$XF_1 < XX_2 + X_2F_1 \Rightarrow XF_1 - XX_2 - X_2F_1 < 0 \text{ (IV).}$$

Substituindo III em IV vem que $XF_1 - XF_2 < 2a$ (2)

Portanto, de (1) e (2) vem que $-2a < XF_1 - XF_2 < 2a$.

Figura 12: Ponto X pertencente à região entre os ramos da Hipérbole



Lema 5.2: Se X pertence à região que contém o foco F_1, então $XF_1 - XF_2 < -2a$.

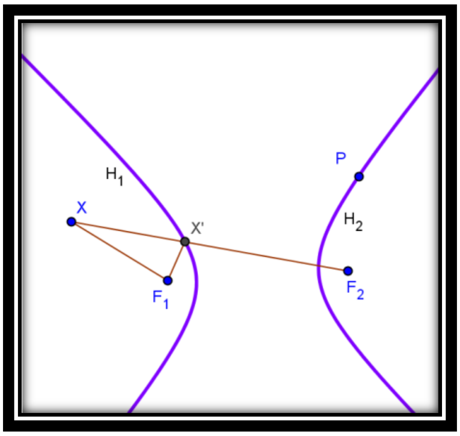
Demonstração: Tomemos um ponto X pertencente à região que contém o foco F_1, então XF_2 intersecta ramo $\mathcal{H}_1$ em um ponto X' (Figura 13). Assim, $XF_1 - XF_2 = XF_1 - (XX' + X'F_2) = XF_1 - XX' - X'F_2$ (I).

Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $XX'F_1$,

$$F_1X < F_1X' + XX' \Rightarrow F_1X - XX' < F_1X' \text{ (II).}$$

Substituindo II em I vem que $XF_1 - XF_2 < F_1\,X' - F_2\,X' = -2a$.

Figura 13: Ponto X pertencente à região que contém o Foco F_1



Lema 5.3: Se X pertence à região que contém o foco $\mathrm{F_2}$, então $\mathrm{XF_1 - XF_2 > 2a}$.

Demonstração:

Tomemos, agora, um ponto X pertencente à região que contém o ramo $\mathcal{H}_2$, então XF_1 intersecta o ramo $\mathcal{H}_2$ em um ponto X' (Figura 14). Logo,

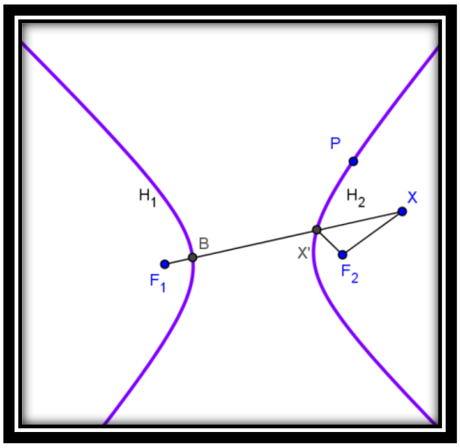
$$XF_1 - XF_2 = XX' + X'F_1 - XF_2 \qquad (I).$$

Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $XX'F_2$,

$$XF_2 < XX' + X'F_2 \Rightarrow XF_2 - XX' < X'F_2 \Rightarrow XX' - XF_2 > -X'F_2 \text{ (II)}$$

Substituindo II em I vem que $XF_1 - XF_2 > X'F_1 - X'F_2 = 2a$.

Figura 14: Ponto X pertencente à região que contém o foco F_2



Definição 5.17: Considere A_1 e A_2 dois pontos de uma hipérbole, os quais são colineares com os focos. O segmento A_1A_2 é denominado *eixo focal* da hipérbole.

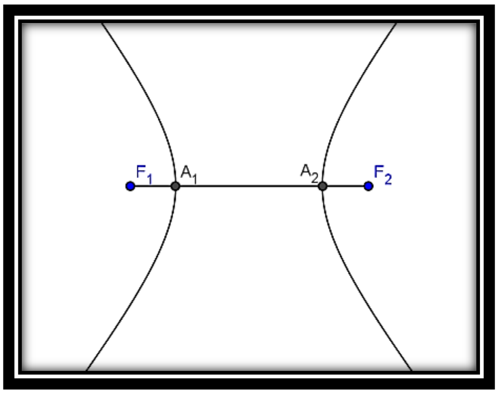
Proposição 5.4: O eixo focal de uma hipérbole tem medida igual a $2a$.

Demonstração:

De fato, sejam A_1 e A_2 dois pontos de uma hipérbole, colineares com os focos F_1 e F_2 (Figura 15).

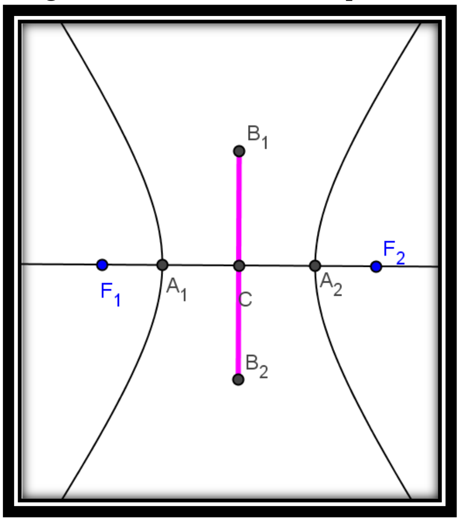
Temos que A_1 e A_2 são pontos da hipérbole, logo vale a relação $|A_1F_1 - A_1F_2| = 2a$ (I) e $|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$ (II). Observe que $|AF_1 - A_2F_1| = A_1A_2 = |A_2F_2 - A_1F_2|$. Somando as equações (I) e (II) temos que $|AF_1 - AF_2| + |A_2F_1 - A_2F_2| = 2a + 2a = 4a \Rightarrow 2A_1A_2 = 4a \Rightarrow AA_2 = 2a$. Portanto o eixo focal da hipérbole tem comprimento igual a $2a$.

Figura 15: Eixo focal da Hipérbole



Definição 5.18: O ponto médio C do eixo focal é dito *centro* da hipérbole e a distância entre os focos F_1 e F_2, *distância focal*. O segmento B_1B_2, perpendicular ao eixo focal e que tem ponto médio C e comprimento $2b$ com $b > 0$ é denominado *eixo não focal* da hipérbole e os pontos B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole.

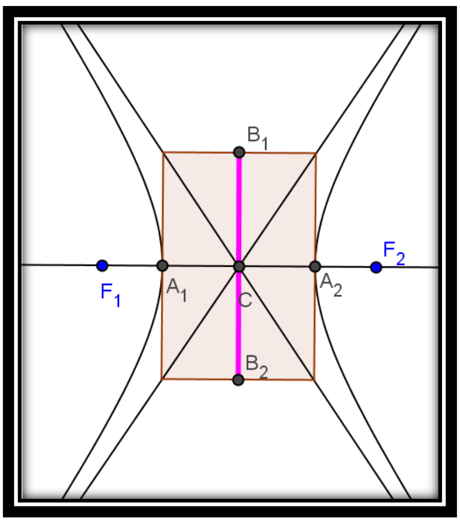
Figura 16: Eixo não focal da Hipérbole



Observe que o ponto médio do segmento F_1F_2 coincide com o centro C da hipérbole.

Definição 5.19: O *retângulo de base* da hipérbole é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as assíntotas da hipérbole (Figura 17).

Figura 17: Retângulo de base e Assíntotas da Hipérbole



Proposição 5.5: (Relação Fundamental da hipérbole) Em toda hipérbole vale a relação

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

Demonstração:

Tracemos a mediatriz s do segmento F_1F_2 e determinemos C o ponto médio de F_1F_2. Construamos a circunferência de centro C e raio igual à semidistância focal da hipérbole. Sejam B_1 e B_2 os pontos de intersecção da circunferência com a reta s. Como CB_1 é raio da circunferência, temos que $CB_1 = c$, semidistância focal, CA_1 é o semieixo focal, logo $CA_1 = a$ e façamos $A_1B_1 = b$. O triângulo B_1CA_1 é retângulo em C. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Definição 5.20: Sejam r uma reta e F um ponto do plano não pertencente a r. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r é o lugar geométrico de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a r.

$$\mathcal{P} = \{P \in \pi \mid PF = d(P,r)\}$$

Definição 5.21: Fixado um plano, consideremos a parábola $\mathcal{P}$ com foco F e diretriz r, $F \notin r$. O eixo da parábola (ou eixo de simetria) é a reta s passando por F perpendicular a r e o vértice, V, é o ponto de $\mathcal{P} \cap s$, equidistante de F e r (Figura 18).

Proposição 5.6: O eixo da parábola divide-a em duas partes simétricas.

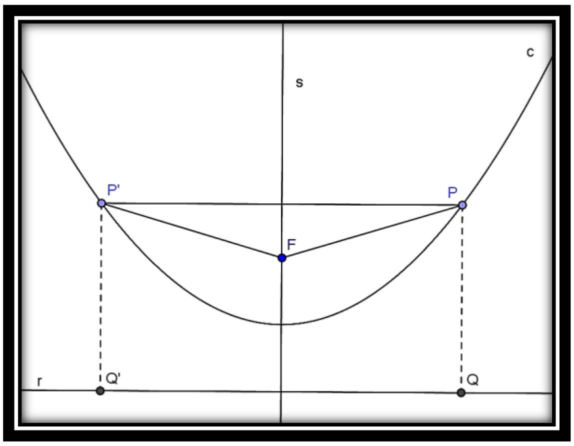
Demonstração:

De fato, sejam r a reta diretriz da parábola e s a reta perpendicular a r e que passa pelo foco F. Tomemos um ponto P pertencente à parábola e P' o simétrico de P em relação à s. Logo s é mediatriz de PP' e, portanto $FP = FP'$ (I).

Consideremos Q e Q' as projeções ortogonais de P e P' sobre r, respectivamente. Então, $PQ = P'Q'$. Como P pertence à parábola, então, $FP = PQ$, pela definição da parábola. Daí tem-se que $FP = P'Q'$ (II).

De (I) e (II) temos que $FP' = P'Q'$, ou seja, $d(P',r) = P'Q'$, isto é, P' é equidistante de F e r e, portanto pertence à parábola, provando que a reta s é eixo de simetria da parábola.

Figura 18: Eixo de simetria da Parábola



5.3.2 Equações reduzidas

A seguir estaremos considerando fixado um sistema OXY ortogonal de coordenadas num plano π.

Equação reduzida da elipse

Consideremos uma elipse com centro no ponto O (origem do sistema de coordenadas adotado) e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse. Da definição da elipse temos que $PF_1 + PF_2 = 2a$ com $0 < c < a$. Usando a condição de existência da elipse e a expressão da distância entre dois pontos no plano tem-se que x e y devem satisfazer:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e realizando os cálculos convenientes, obtêm-se:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo ambos os membros por -4 temos:

$$-cx = -a^2 + a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando, novamente, ao quadrado ambos os membros da equação e realizando as simplificações, obtêm-se:

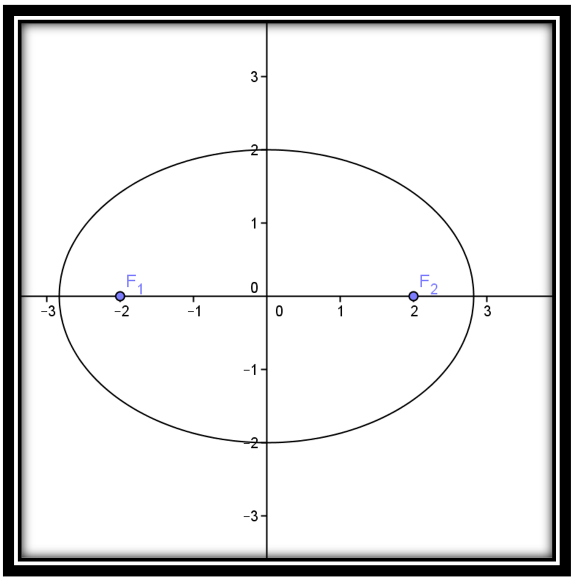
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como já vimos, na elipse vale a relação: $b^2 = a^2 - c^2$. Como $b^2 > 0$, então $a^2 > c^2$. E ainda, $a^2 > 0$ o que nos garante que $a^2(a^2 - c^2) = a^2b^2$ é um número positivo. Assim, dividindo a expressão acima por a^2b^2 vem que:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que é a *equação reduzida da elipse com centro* $O=(0{,}0)$ *e focos* $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

Figura 19: Elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo Ox



De modo análogo mostra-se que, se uma elipse possui seu centro no ponto O e os focos sobre o eixo OY, sua equação é dada por: $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$.

Agora, consideremos uma elipse com centro no ponto $C(m,n)$ e focos $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$, vamos mostrar que sua equação é dada por $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ onde $b^2=a^2-c^2$. Neste caso, os focos da elipse estão sobre a reta $y=n$, paralela ao eixo Ox.

De fato, considere um sistema $O'X'Y'$ ortogonal de coordenadas de tal modo que a origem O' tem coordenadas (m,n) no sistema OXY e os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente. Seja P um ponto da elipse cujas coordenadas cartesianas são (x,y) no sistema OXY e $(x'y')$ no sistema $O'X'Y'$. Pelo que obtemos anteriormente, a equação reduzida da elipse no sistema $O'X'Y'$ é

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1. \qquad (*)$$

Usando as relações obtidas na seção 5.1, temos:

$$\begin{cases} x'=x-m \\ y'=y-n \end{cases}$$

onde (m,n) é o centro da elipse e também a origem do sistema de coordenadas $O'X'Y'$.

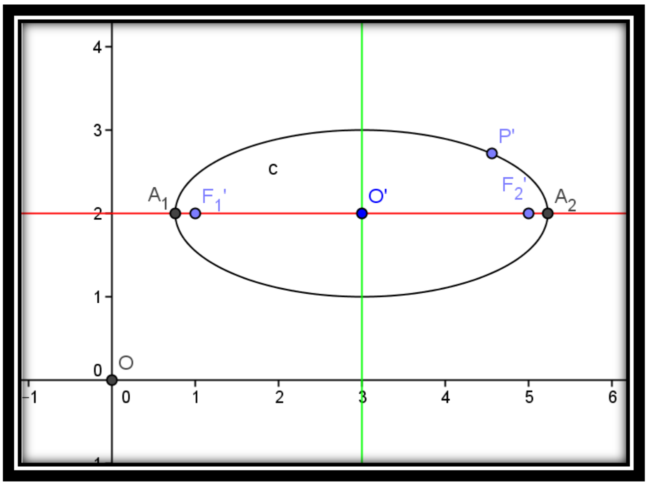
Logo, substituindo as equações acima na equação (*), temos que

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

é a *equação reduzida da elipse de centro no ponto* $C(m,n)$ *e focos* $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$.

De modo análogo mostra-se que, se os focos da elipse estão sobre a reta $x=m$, paralela ao eixo Oy, sua equação é dada por $\boxed{\frac{(y-n)^2}{a^2}+\frac{(x-m)^2}{b^2}=1}$.

Figura 20: Elipse com translação dos eixos



Equação reduzida da hipérbole

Consideremos uma hipérbole com centro no ponto O e focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Seja $P(x,y)$ um ponto da hipérbole. Da definição da hipérbole, temos $|PF_1-PF_2|=2a$ com $0<c<a$. Usando a condição de existência da hipérbole e a fórmula da distância entre dois pontos no plano tem-se que x e y devem satisfazer:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Daí pode-se escrever que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e realizando os cálculos convenientes, obtêm-se:

$$4cx=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dividindo ambos os membros por 4 temos:

$$cx = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando, novamente, ao quadrado ambos os membros da equação e realizando as simplificações, obtêm-se:

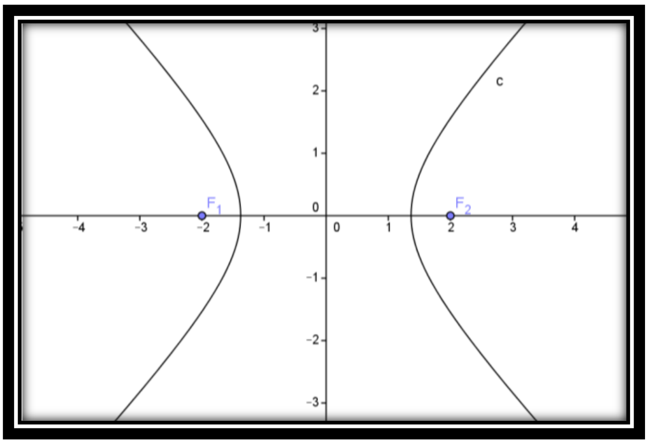
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$, segue que $c^2 - a^2 > 0$. Já vimos, anteriormente, que $b^2 = c^2 - a^2$. Logo, dividindo a expressão acima por a^2b^2 vem que:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

é a *equação reduzida da hipérbole com centro* $O = (0,0)$ *e focos* $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Figura 21: Hipérbole com eixo focal sobre o eixo Ox e centro na origem



Agora, consideremos uma hipérbole com centro no ponto $C(m,n)$ e focos $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$. Neste caso, os focos da hipérbole estão sobre a reta $y = n$, paralela ao eixo Ox. Usando o mesmo raciocínio utilizado na obtenção da equação reduzida de uma elipse com centro no ponto $C(m,n)$ e focos $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$, obtemos que

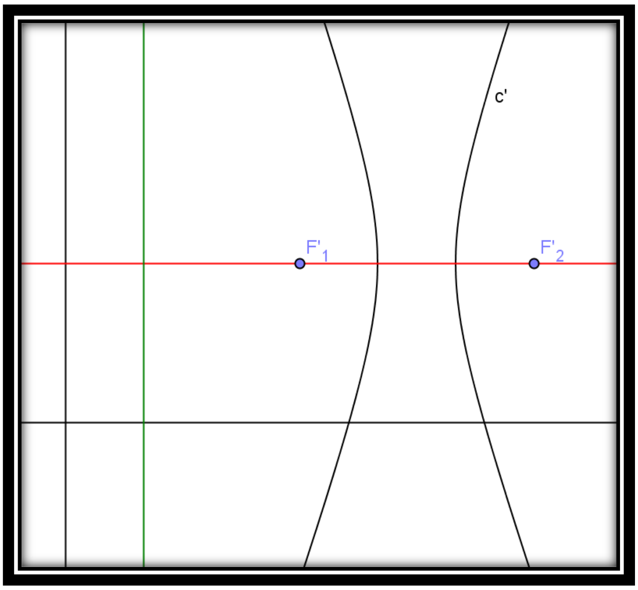
$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$$

é a *equação reduzida da hipérbole de centro no ponto* $C(m,n)$ *e focos* $F_1(m-c,n)$ e $F_2(m+c,n)$.

De modo análogo, mostra-se que a equação da hipérbole com centro no ponto de coordenadas $C(m,n)$ e focos nos pontos $F_1(m, n-c)$ e $F_2(m, n+c)$ é dada por

$$\boxed{\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.}$$

Figura 22: Hipérbole com translação dos eixos



Equação reduzida da parábola

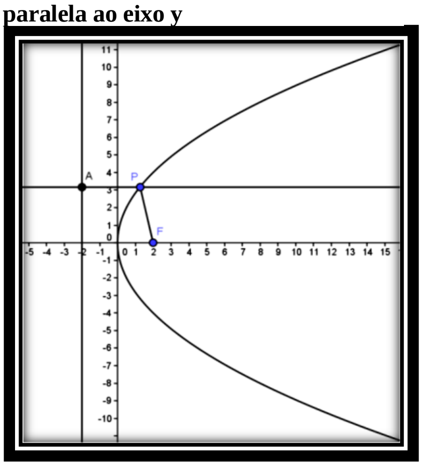
Consideremos uma parábola de foco no ponto de coordenadas $F(c, 0)$ e diretriz $x = -c$. Seja $P(x, y)$ um ponto da parábola e $A(-c, y)$ o pé da perpendicular à reta diretriz passando por P (Figura 23). Da definição de parábola, as medidas dos segmentos PF e PA são iguais. Usando a expressão da distância entre dois pontos no plano temos: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2}$. Simplificando a equação obtemos

$$\boxed{x = \frac{y^2}{4c}}$$

que é *equação reduzida da parábola com foco* $F(c, 0)$ *e diretriz* $x = -c$.

De modo análogo, mostra-se que se uma parábola possui foco $F(0, c)$ e diretriz $y = -c$ sua equação é dada por: $\boxed{y = \frac{x^2}{4c}}$.

Figura 23: Parábola com reta diretriz paralela ao eixo y

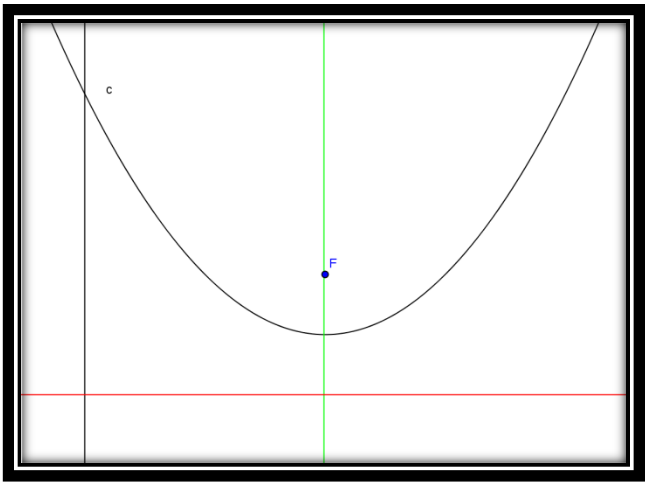


Agora, consideremos a parábola com foco $F(m, n+c)$ e reta diretriz $y = n - c$. Usando o mesmo raciocínio utilizado na obtenção da equação reduzida de uma elipse com centro no ponto $C(m, n)$ e focos $F_1(m-c, n)$ e $F_2(m+c, n)$, obtemos que

$$\boxed{y = \frac{(x-m)^2}{4c} + n}.$$

é a *equação reduzida da parábola com foco* $F(m, n+c)$ *e reta diretriz* $y = n - c$.

Figura 24: Parábola com translação de eixo



5.3.3 Retas tangentes

A partir da utilização das dobraduras e do Geogebra, feitas nas atividades descritas nas seções 4.2 e 4.3, o aluno deverá ser capaz de definir as três cônicas: elipse, hipérbole e parábola. As justificativas dessas construções necessitam do conceito de reta tangente à elipse, à hipérbole e à parábola.

Definição 5.22: Uma reta t é tangente a uma elipse $\mathcal{E}$ se t $\cap$ $\mathcal{E}$ contém apenas um ponto, T, chamado ponto de tangência.

Proposição 5.7: Sejam uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 e $P \in \mathcal{E}$. Se a reta t contém a bissetriz do ângulo determinado pela semirreta PD, oposta a semirreta PF_1, e pela semirreta PF_2·, então t é a tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

Demonstração:

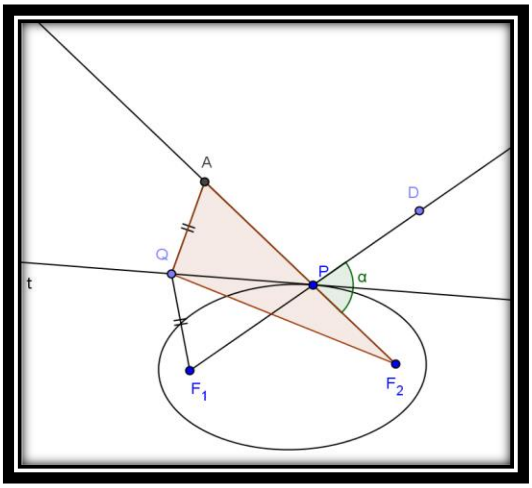
Seja $Q \in t$ tal que $Q \neq P$, conforme Figura 25, abaixo. Tomemos A pertencente à semirreta oposta a semirreta PF_2 tal que $PA = PF_1$. Temos, então, que os triângulos PAQ e PF_1Q são congruentes, pois, $PA = PF_1$ por construção, $F_1\hat{P}Q = Q\hat{P}A$ porque t contém a bissetriz de $F_1\hat{P}A$ oposto pelo vértice de $F_2\hat{P}D$ e PQ é lado comum. Logo $QF_1 = QA$.

Pela desigualdade triangular aplicada no triângulo F_2QA, temos que,

$$QA + QF_2 > F_2A \Rightarrow$$
$$QF_1 + QF_2 > PF_2 + PA \Rightarrow$$
$$QF_1 + QF_2 > PF_2 + PF_1 \Rightarrow$$
$$QF_1 + QF_2 > cte, \text{ pois, } P \in \mathcal{E}.$$

Portanto, $Q \notin \mathcal{E}$ e P é o único ponto pertencente à $t \cap \mathcal{E}$. Então, por definição, t é a tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

Figura 25: Reta Tangente à Elipse



Proposição 5.8: Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro F_1 e raio r e F_2 um ponto interior a $\mathcal{C}$ tal que F_1 e F_2 são pontos distintos. Se $D \in \mathcal{C}$ e t é a mediatriz do segmento F_2D, então o ponto de interseção do segmento F_1D com a reta t pertence à elipse de focos F_1 e F_2 e a reta t é a tangente a essa elipse.

Demonstração:

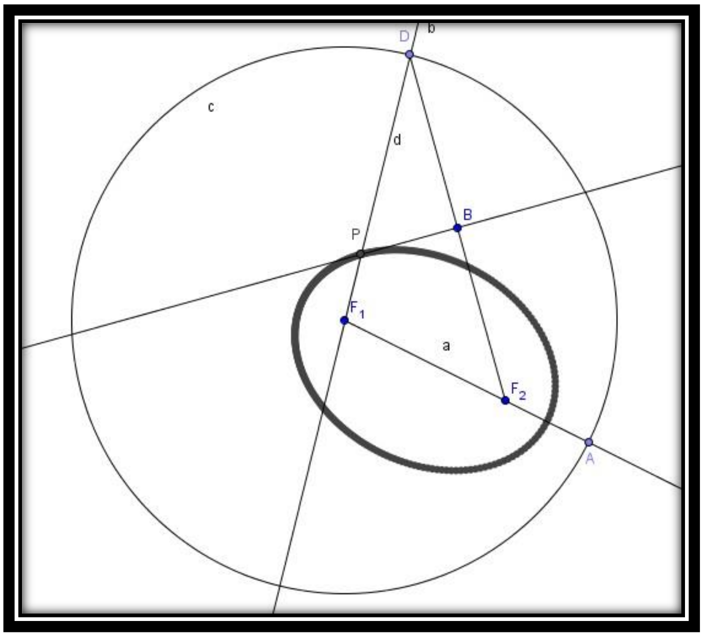
Tomemos $P \in F_1D \cap t$. Como a reta t é a mediatriz do segmento F_2D, temos

$$F_2P = PD \Rightarrow F_2P + F_1P = PD + F_1P = F_1D = r.$$

Portanto, P é um ponto de uma elipse de focos em F_1 e F_2 qualquer que seja o ponto D da circunferência.

Além disso, provemos que t é tangente à elipse de focos F_1 e F_2. De fato, seja $B \in t \cap F_2D$, temos que os triângulos PF_2B e PDB são congruentes, pelo caso LAL, pois são retângulos em B, têm o lado comum PB e $F_2B = BD$, logo $B\hat{P}D = B\hat{P}F_2$, ou seja, t é bissetriz do ângulo $D\hat{P}F_2$, então, pela proposição anterior, t é tangente à elipse de focos F_1 e F_2.

Figura 26: Construção da Elipse no GeoGebra



Definição 5.23: Uma reta t é *tangente a uma hipérbole* $\mathcal{H}$ se t não é paralela a nenhuma das assíntotas e t $\cap \mathcal{H}$ contém apenas um ponto, T, chamado ponto de tangência.

Proposição 5.9: Sejam uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 e P um ponto de $\mathcal{H}$. Se a reta t contém a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas PF_1 e PF_2, então t é a tangente à hipérbole no ponto P.

Demonstração:

Seja $Q \in t$ tal que $Q \neq P$, conforme Figura 27, abaixo. Tomemos um ponto A da semirreta PF_1 tal que $PA = PF_2$. Como $P \in \mathcal{H}$, temos que $|PF_1 - PF_2| = 2a$ com $a > 0$ onde a é o semieixo focal. Por outro lado, temos que $|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow |PF_1 - PA| = F_1A$ o que acarreta que $F_1A = 2a$.

Tomemos $B \in t$ tal que $B \neq Q$ e $B \neq P$ e consideremos os triângulos PBA e PBF_2. Temos que PB é comum, $B\hat{P}A = B\hat{P}F_2$, pois t é bissetriz de $A\hat{P}F_2$ e $PA = PF_2$ por construção, logo os triângulos PBA e PBF_2 são congruentes, pelo caso LAL, daí $AB = BF_2$ e, portanto, B é ponto médio de AF_2, isto é, B é um ponto da mediatriz de AF_2. Como P também é um ponto da mediatriz de AF_2, por construção e $P \in t$, vem que t é mediatriz de AF_2. Como $Q \in t$, temos que $QA = QF_2$.

Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo QAF_1 tem-se que

$$QA < QF_1 + F_1A \Rightarrow QA - F_1A < QF_1 \text{ (I)}$$

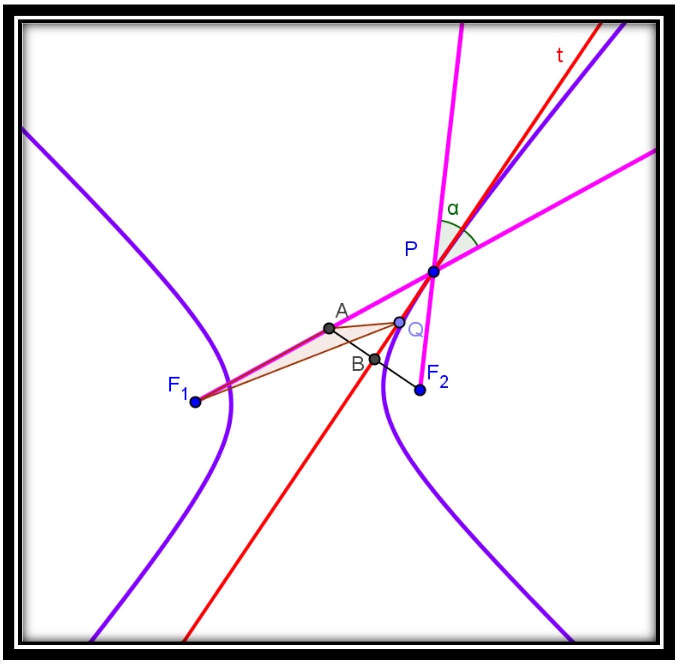
$$QF_1 < QA + F_1A \text{ (II).}$$

De I e II vem que

$$QA - F_1A < QF_1 < QA + F_1A \Rightarrow -F_1A < QF_1 - QA < F_1A \Rightarrow |QF_1 - QA| < F_1A = 2a \Rightarrow |QF_1 - QF_2| < 2a. \text{ (III)}$$

Portanto, $Q \notin \mathcal{H}$ e t intercepta $\mathcal{H}$ apenas no ponto P.

Figura 27: Tangente à Hipérbole



Mas, para provarmos que t é tangente à $\mathcal{H}$, resta mostrarmos que t não é paralela a nenhuma assíntota.

Por III, temos que $\forall Q \in t,\ Q \neq P,\ |QF_1 - QF_2| < 2a \Rightarrow -2a < QF_1 - QF_2 < 2a$. Portanto, pelos lemas 5.2 e 5.3, concluímos que todos os pontos da reta t, distintos de P, estão situados na região entre os dois ramos.

Note que a reta t não é paralela à assíntota, pois caso contrário, como $P \in t \cap \mathcal{H}$, a reta t possuiria pontos situados na região entre os ramos e pontos situados na região que contém um dos focos, o que contradiria a conclusão feita acima. Portanto, a reta t é tangente à hipérbole.

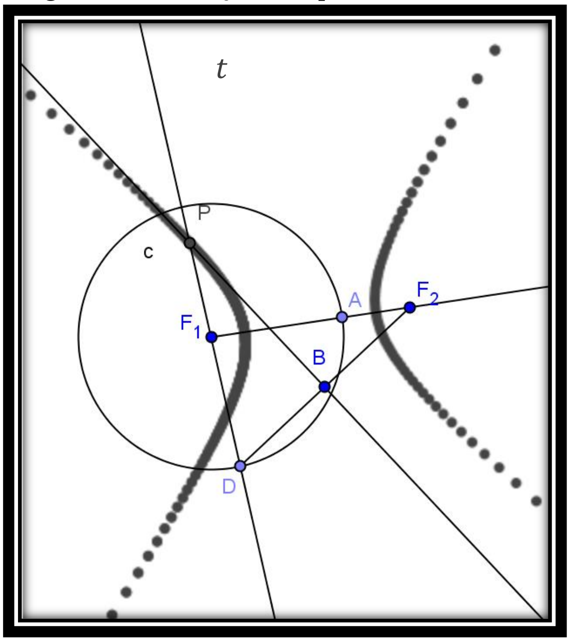
Proposição 5.10: Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro F_1 e raio r e F_2 um ponto exterior a $\mathcal{C}$ tal que F_1 e F_2 são pontos distintos. Se $D \in \mathcal{C}$ e t é a mediatriz do segmento F_2D, então o ponto de interseção do segmento F_1D com a reta t pertence à hipérbole de focos F_1 e F_2 e a reta t é a tangente a essa hipérbole.

Demonstração:

Seja $P \in t \cap F_1D$ e como t é a mediatriz do segmento F_2D temos $PF_2 = PD \Rightarrow PF_2 - PF_1 = PD - PF_1 = F_1D = r$, pois F_1 é o centro da circunferência $\mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{C}$. Provando, portanto, que P pertence a uma hipérbole de focos F_1 e F_2, pois $r < d(F_1, F_2)$.

Além disso, provemos que t é tangente à hipérbole. De fato, tomemos $B = t \cap F_2D$ e consideremos os triângulos ΔF_2PB e ΔPDB. Temos que: PB é comum e, como t é mediatriz do segmento F_2D, $\hat{B}$ é um ângulo reto e $F_2B = BD$, logo os triângulos são congruentes, pelo caso, LAL. Portanto, $B\hat{P}D = B\hat{P}F_2$, ou seja, t contém a bissetriz do ângulo $D\hat{P}F_2$, então, pela proposição 5.9, t é tangente à hipérbole de focos F_1 e F_2.

Figura 28: Construção da Hipérbole no GeoGebra



Definição 5.24: Uma reta *tangente a uma parábola* $\mathcal{P}$ é uma reta t que não é paralela ao eixo da parábola e t $\cap$ $\mathcal{P}$ contém apenas um ponto, T, chamado ponto de tangência.

Lema 5.4: Seja P um ponto qualquer da parábola $\mathcal{P}$ e D o pé da perpendicular à diretriz r, passando por P. Se a reta t contém a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, então t não é paralela ao eixo de simetria de $\mathcal{P}$.

Demonstração:

Seja, V é o vértice da parábola. Temos dois casos a considerar:

i. $P = V$

Neste caso, P pertence ao eixo de simetria da parábola que contém os segmentos FP e PD, ou seja, $F\hat{P}D = 180°$.

Como t contém a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$ vem que o ângulo entre t e PD é 90°, isto é, t é perpendicular a PD e, portanto t não é paralela ao eixo de simetria de $\mathcal{P}$.

ii. $P \neq V$

Neste caso, P, D e F são não alinhados, ou seja, $0 < F\hat{P}D < 180°$.

Como t contém a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$ vem que $0 < \angle(t, PD) < 90°$, o que garante que t não é paralela ao eixo de simetria, pois PD é perpendicular à diretriz r e, portanto, paralelo ao eixo de simetria.

Proposição 5.11: Seja P um ponto qualquer da parábola $\mathcal{P}$ e D o pé da perpendicular a diretriz r por P. Se a reta t contém a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, então t é tangente à parábola em P.

Demonstração:

Para mostrarmos que t é tangente á parábola devemos provar que:

(i) t não é paralela ao eixo de simetria, o que já foi feito no lema 5.4.

(ii) P é o único ponto tal que $P \in \mathcal{P} \cap t$.

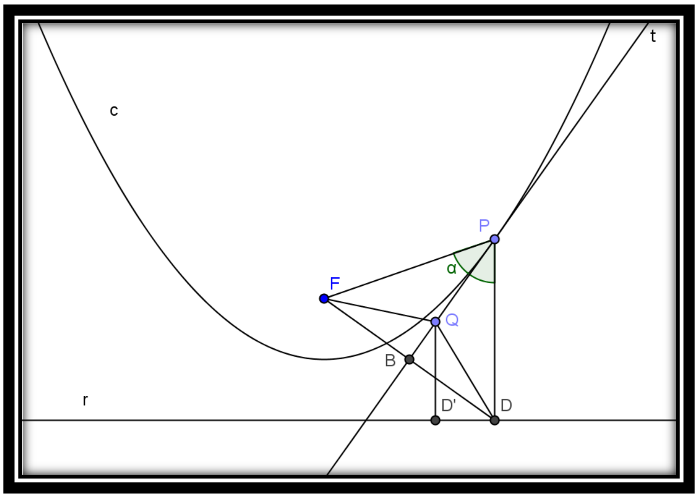
Tomemos $B \in t$ tal que $B \neq P$. Temos que os triângulos FPB e PBD são congruentes, pelo caso, LAL, pois PB é comum, $B\hat{P}F = B\hat{P}D$, porque t contém a bissetriz de $F\hat{P}D$ e $FP = PD$, pois $P \in \mathcal{P}$. Logo $FB = BD$, ou seja, B é um ponto da mediatriz de FD Ainda, como $P \in t$ e $FP = PD$ temos que P, também, é um ponto da mediatriz de FD, e, portanto, t é mediatriz de FD, conforme Figura 29.

Tomemos $Q \in t$ tal que $Q \neq P$ e seja D' o pé da perpendicular a r por Q. Como t é mediatriz de FD, temos que $FQ = QD$.

Como o triângulo QDD' é retângulo em D' temos, pelo teorema de Pitágoras, $QD^2 = QD'^2 + DD'^2 \Rightarrow QD^2 > QD'^2 \Rightarrow QD > QD' \Rightarrow FQ > QD'$. Logo, $Q \notin \mathcal{P}$ e P é o único ponto tal que $P \in \mathcal{P} \cap t$.

Portanto t é tangente á parábola $\mathcal{P}$.

Figura 29: Reta tangente à Parábola

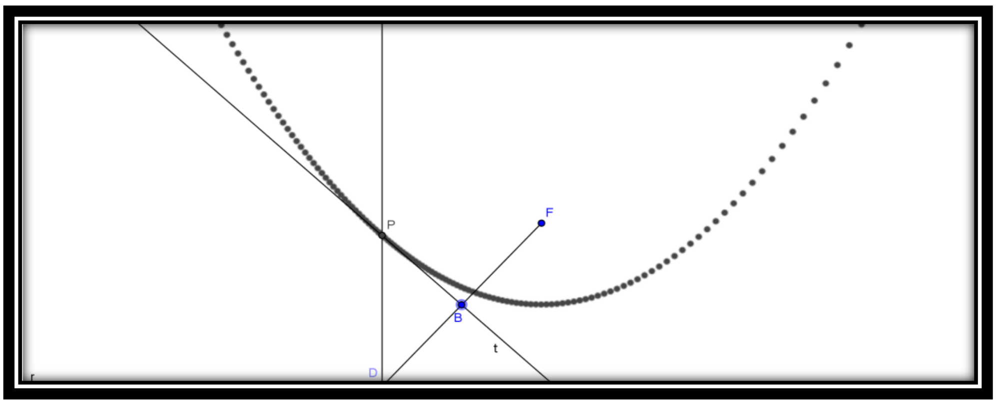


Proposição 5.12: Sejam r uma reta, F um ponto do plano não pertencente a r. Se $D \in r$ e t é a mediatriz do segmento FD, então o ponto de interseção da reta t com a reta perpendicular à reta r por D pertence à parábola de foco F e diretriz r e a reta t é a tangente a essa parábola.

Demonstração: Tomemos P um ponto obtido da intersecção entre t e a perpendicular a r por D. Como t é a mediatriz do segmento FD, temos que $FP = PD$ o que mostra que P pertence a uma parábola de foco F e diretriz d qualquer que seja $D \in d$.

Além disso, provemos que t é tangente à parábola. De fato, seja $B = t \cap FD$ e consideremos os triângulos FPB e PBD. Como PB é lado comum, $FP = PD$ e $FB = BD$ pois t é mediatriz do segmento FD, vem que os triângulos são congruentes, pelo caso LLL, logo $D\hat{P}B = B\hat{P}F$, ou seja, t contém a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$. Pela proposição 5.11, t é tangente à parábola.

Figura 30: Construção da Parábola no GeoGebra



Observação: As construções descritas nas atividades 1, 2 e 3 da seção 4.2 e nas atividades 1, 3 e 5 da seção 4.3 se justificam pelas proposições 5.8, 5.10 e 5.12.

Note que, nas atividades 1 e 2 da seção 4.2, ao dobrar o papel de forma a fazer o ponto D coincidir com o ponto F_2, obtemos que cada dobra é a mediatriz t do segmento F_2D. Logo, pelas proposições 5.8 e 5.10, a curva obtida pelos pontos pertencentes à interseção do segmento F_1D com a reta t, quando D "percorre" a circunferência, é uma elipse (**Erro! Fonte e referência não encontrada.**) ou uma hipérbole (FIGURA 32) de focos F_1 e F_2.

Figura 31: Simulação da construção da Elipse por dobraduras

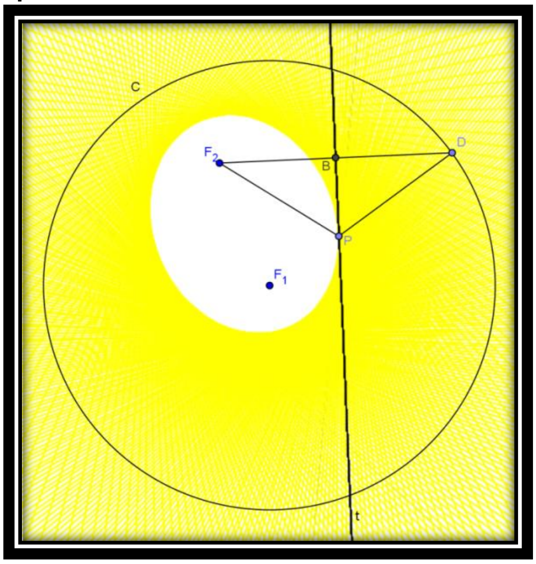
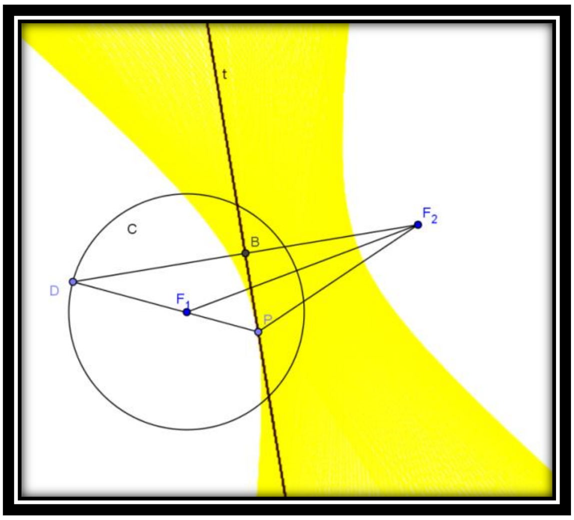
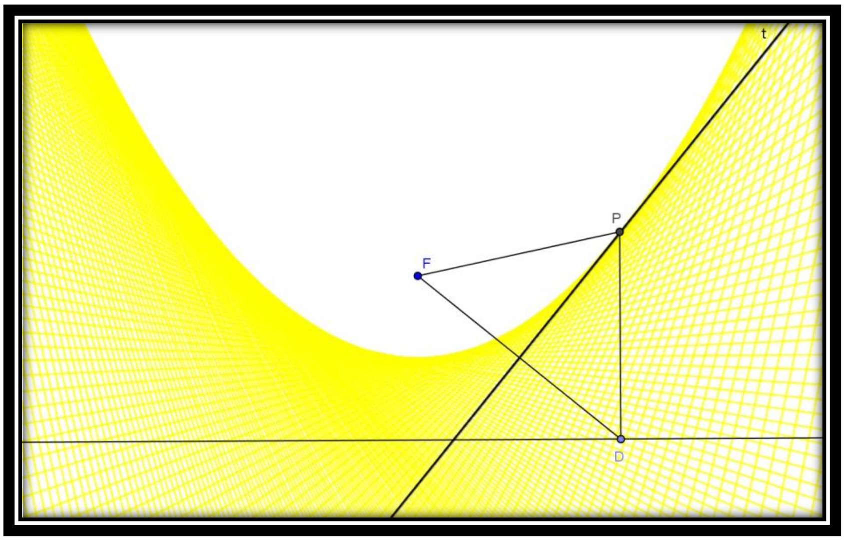


Figura 32: Simulação da construção da Hipérbole por dobraduras



Na construção descrita na atividade 3 da seção 4.2 temos que cada dobra foi obtida dobrando-se o papel de forma a fazer o ponto D coincidir com o ponto F. Logo, podemos concluir que cada dobra é a mediatriz t do segmento FD. Portanto, pela proposição 5.12, a curva obtida pelos pontos P obtidos da intersecção entre t e a perpendicular a r por D, quando D "percorre" a circunferência, é uma parábola (Figura 33).

Figura 33: Simulação da construção da Parábola por dobraduras



5.3.4 Propriedade de reflexão

As atividade 2, 4 e 6 descritas na secção 4.3 referem-se a propriedade de reflexão da elipse, hipérbole e parábola que enunciamos e demonstramos a seguir.

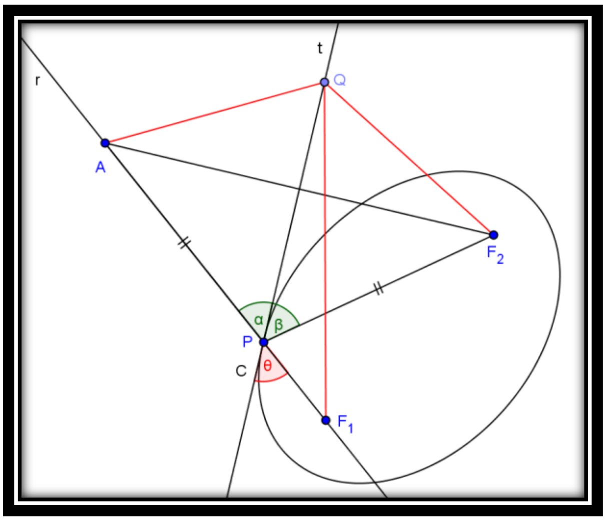
Proposição 5.13: Se P é um ponto da elipse de focos F_1 e F_2, então os segmentos PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente à elipse em P.

Demonstração:

Sejam $\mathcal{E}$ a elipse de focos F_1 e F_2, $P \in \mathcal{E}$ e r a reta determinada por P e F_1. Tomemos um ponto $A \in r$ tal que $PA = PF_2$. Seja t a mediatriz do segmento F_2A, logo $P \in t$. Vamos mostrar que t é tangente a $\mathcal{E}$ no ponto P. Tomemos $Q \in t$, $Q \neq P$. Como t é mediatriz de F_2A temos que $QA = QF_2$. Logo, $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QA > AF_1$, pela desigualdade triangular aplicada ao ΔAF_1Q. Por construção, temos que $AF_1 = PF_1 + PA = PF_1 + PF_2 = 2a$, onde a é a medida do semieixo focal da elipse. Logo, $QF_1 + QF_2 > 2a$, isto é, $Q \notin \mathcal{E}$, $\forall Q \in t$, o que acarreta $Q \neq P$. Portanto a reta t é tangente a

$\mathcal{C}$. Como o triângulo ΔPAF_2 é isósceles de base AF_2, temos que t contém a bissetriz do ângulo $A\hat{P}F_2$. Sendo α, β e θ os ângulos representados na Figura 34, abaixo. Temos que $\alpha = \beta$ e como α e θ são opostos pelo vértice, vem que $\beta = \theta$.

Figura 34: Propriedade Refletora da Elipse



Proposição 5.14: Se P é um ponto da hipérbole de focos F_1 e F_2, então os segmentos PF_1 e PF_2, formam ângulos iguais com a reta tangente à hipérbole em P.

Demonstração:

Sejam $\mathcal{H}$ a hipérbole de focos F_1 e F_2, $P \in \mathcal{H}$ e r a reta que contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.

Afirmamos que r é tangente à hipérbole no ponto P. De fato, tomemos um ponto $A \in r$ e um ponto $D \in PF_1$ tal que $PA = PD = PF_2$.

Consideremos os triângulos ΔAPD e ΔAPF_2.

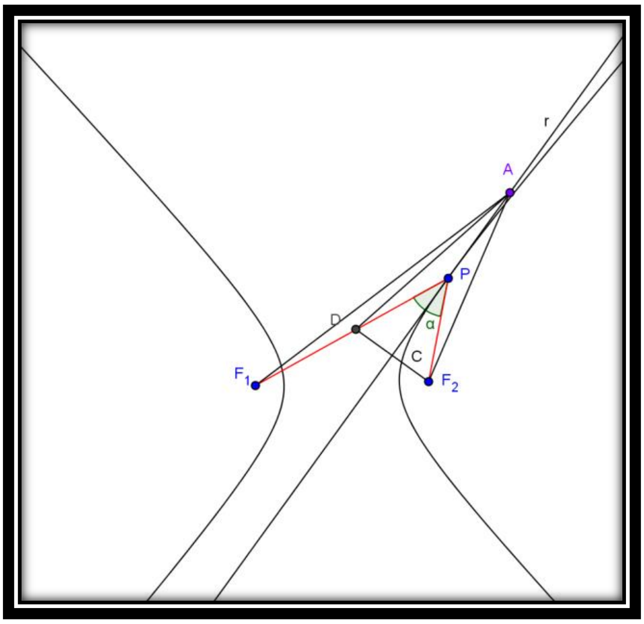
Temos que $PD = PF_2$, por construção. $D\hat{P}A = A\hat{P}F_2$ pois, sendo $\beta = D\hat{P}A$, $\gamma = A\hat{P}F_2$ e $\alpha = F_1\hat{P}F_2$. Lembrando que r é a bissetriz de $F_1\hat{P}F_2$ tem-se que $\frac{\alpha}{2} + \beta = 180°$ e $\frac{\alpha}{2} + \gamma = 180°$ o que acarreta $\beta = \gamma$ e PA é lado comum, logo pelo caso LAL, o ΔAPD é congruente ao ΔAPF_2 e daí $AD = AF_2$. Portanto, o ΔADF_2 é isósceles.

Pela desigualdade triangular aplicada no ΔAPF_1 vem que $AF_1 < AD + DF_1 \Rightarrow AF_1 - AF_2 < AD + DF_1 - AF_2$. Mas $AD = AF_2$, então $AF_1 - AF_2 < DF_1$. Note na Figura 35, abaixo, que $DF_1 = PF_1 - PD$, daí vem que

$$AF_1 - AF_2 < DF_1 = PF_1 - PD = PF_1 - PF_2 = 2a$$

onde a é a medida do semieixo focal. Portanto $A \notin \mathcal{H}$ o que significa que a reta r é tangente à hipérbole no ponto P.

Figura 35: Propriedade Refletora da Hipérbole



Proposição 5.15: Uma reta paralela ao eixo de simetria, incidente num ponto P da parábola, forma com a reta tangente à parábola em P um ângulo igual ao ângulo que a reta tangente forma com a reta que passa por P e F.

Demonstração

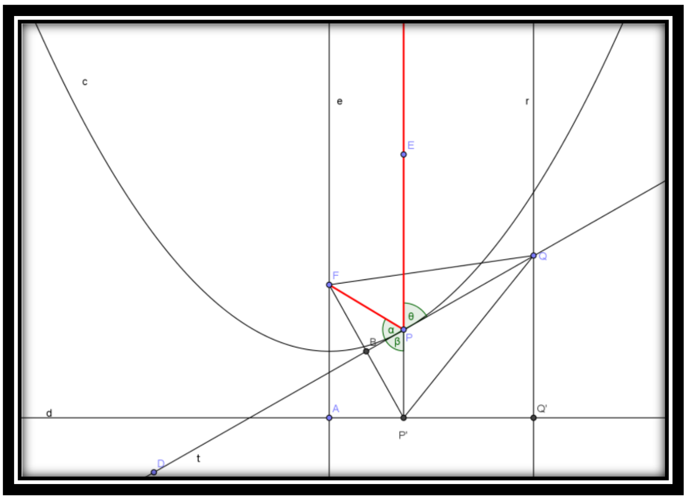
Sejam $\mathcal{P}$ a parábola de foco F e diretriz d, $P \in \mathcal{P}$, P' projeção de P sobre d, t bissetriz do ângulo $F\hat{P}P'$ e s a reta paralela ao eixo de simetria da parábola por P, conforme representado na Figura 36, abaixo.

Como $P \in \mathcal{P}$, temos que $PF = PP'$, então t é mediatriz de FP'.

Tomemos $Q \neq P$ tal que $Q \in t$, então $QF = QP'$. Seja Q' a projeção de Q sobre d, logo, $QP' > QQ'$, pois QP' é a hipotenusa do $\Delta QP'Q'$, ou seja, $QF > QQ'$ o que acarreta que $Q \notin \mathcal{P}$. Portanto, t é tangente a $\mathcal{P}$ por P.

Sejam α o ângulo entre PF e t, β o ângulo entre t e PP' e θ o ângulo entre s e t. Como t é bissetriz de $F\hat{P}P'$, temos que $\alpha = \beta$. Por outro lado, $\beta = \theta$, pois são ângulos opostos pelo vértice, donde se conclui que $\alpha = \theta$.

Figura 36: Propriedade Refletora da Parábola



5.3.5 Teorema de Dandelin

As cônicas podem ser vistas como curvas planas que se originam da intersecção de um cone circular por um plano. As diversas posições desse plano em relação ao cone dão origem à elipse, à parábola e à hipérbole. Mas,

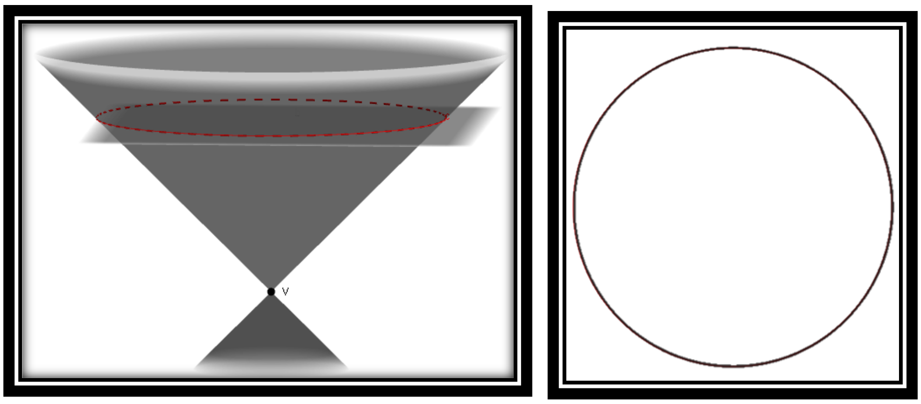
> Em 1822, um matemático belga chamado Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) introduziu uma nova ideia que ajudaria a demonstrar as propriedades das secções cônicas. Adolphe Quetelet, também belga, e colega de Dandelin foi um importante colaborador deste trabalho. (GUIMARÃES, 2008 apud MONTEIRO, 2014).

Nesta secção, vamos apresentar o Teorema de Dandelin, bem como, as secções do cone circular por um plano originando as cônicas.

Seja $\mathcal{C}$ um cone circular de vértice V e eixo r. Seja θ o ângulo entre as geratrizes e o eixo do cone. Tomemos α um plano que secciona o cone. Temos, então, os seguintes casos para a intersecção do cone com o plano:

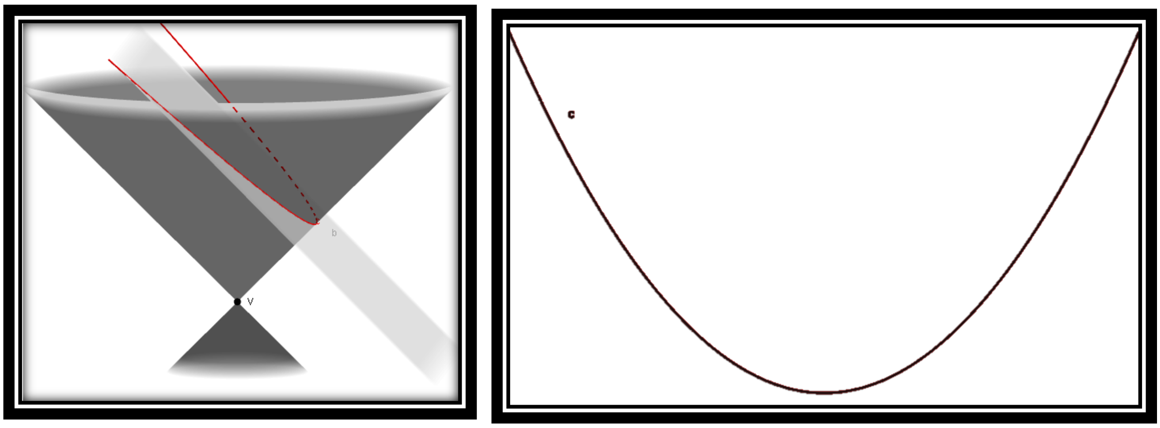
1. Se o plano α é perpendicular ao eixo do cone, mas não passa pelo vértice V, então a secção é uma circunferência. Portanto, a circunferência é uma cônica.

Figura 37: Secção perpendicular ao cone sem passar por V: Circunferência



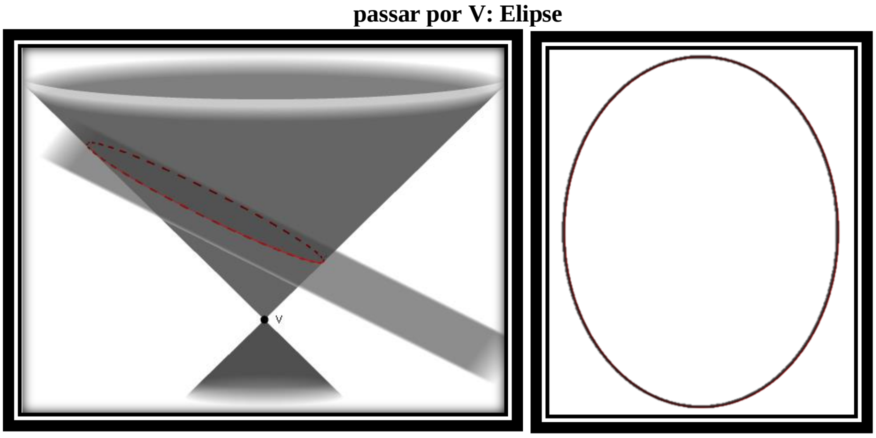
2. Se o plano α é paralelo a uma geratriz do cone e não contém V, então a intersecção entre o plano α e o cone é a parábola.

Figura 38: Secção paralela a uma geratriz: Parábola



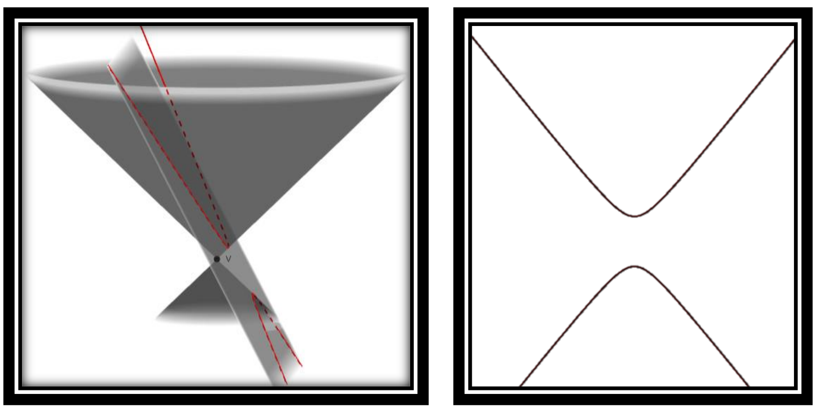
3. Se o ângulo entre o plano α e o eixo r é maior que o ângulo θ entre a geratriz e o eixo, e α não passa pelo vértice, a curva resultante da intersecção entre o plano α e o cone é a elipse.

Figura 39: Secção com ângulo entre o plano α e o eixo do cone r maior que θ sem passar por V: Elipse



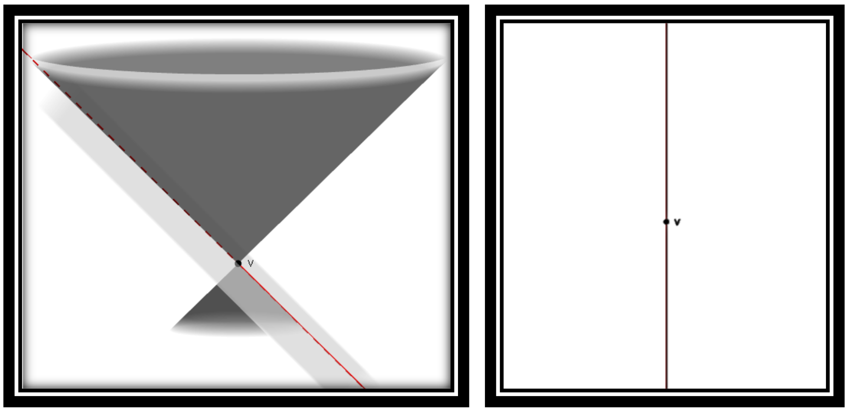
4. Se o ângulo entre o plano α e o eixo r é menor que o ângulo θ entre a geratriz e o eixo, e α não passa pelo vértice, a curva resultante da intersecção entre o plano α e o cone é a hipérbole.

Figura 40: Secção com ângulo entre o plano α e o eixo do cone r menor que θ sem passar por V: Hipérbole



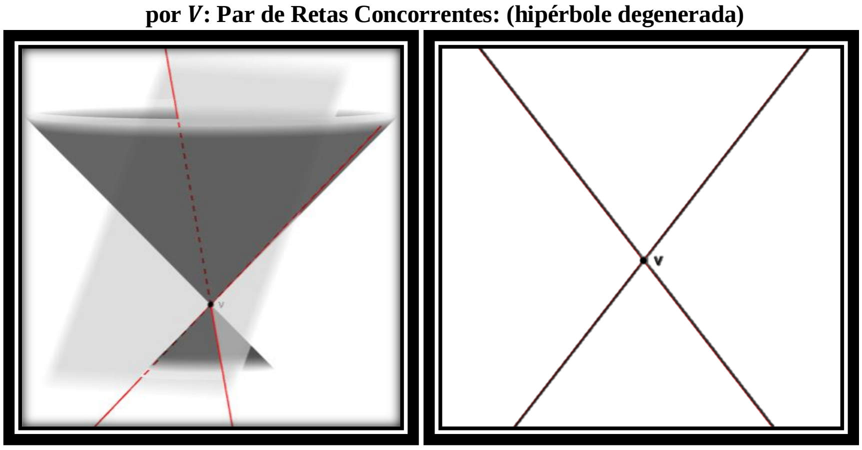
5. Se o plano α passa pelo vértice V e o ângulo entre α e o eixo r é igual a θ, a intersecção é uma reta, que é uma geratriz do cone.

Figura 41: Secção com ângulo entre o plano α e o eixo r igual a θ passando por V: Reta Geratriz (parábola degenerada)



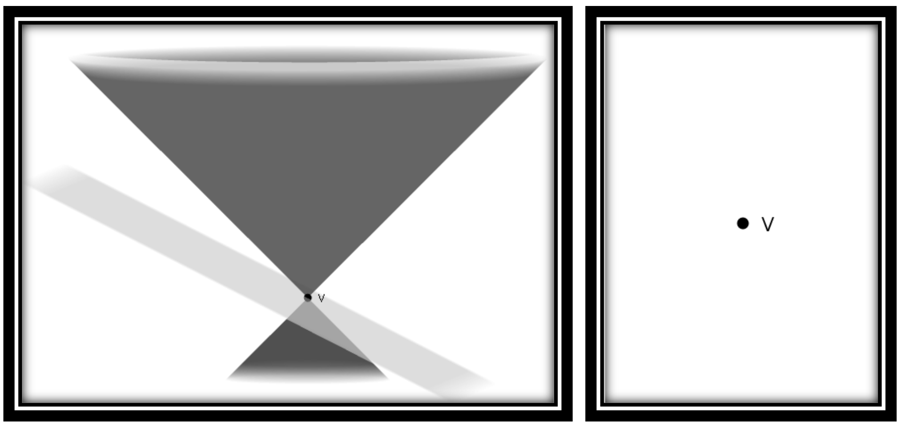
6. Se o plano α passa pelo vértice V e o ângulo entre α e o eixo r é menor que θ, a intersecção é um par de retas concorrentes.

Figura 42: Secção com ângulo entre o plano α e o eixo r menor que θ passando por V: Par de Retas Concorrentes: (hipérbole degenerada)



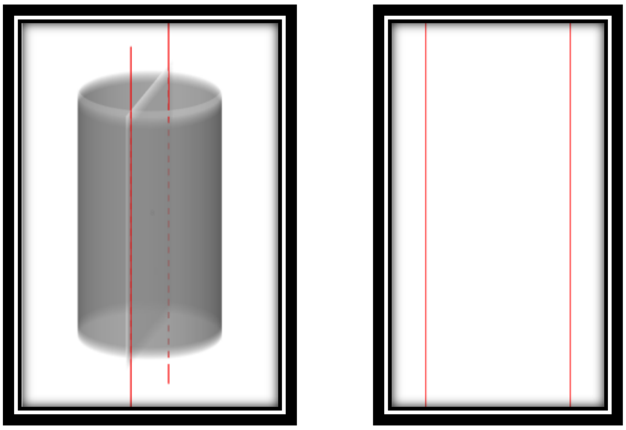
7. Se o plano α passa pelo vértice V e o ângulo entre α e o eixo r é maior que θ, a intersecção é o ponto V, vértice do cone.

Figura 43: Secção com ângulo entre o plano e o eixo maior que passando por V: ponto V Vértice do Cone



As cônicas obtidas da intersecção do cone com planos que passam pelo vértice, são chamadas de cônicas degeneradas. Há dois outros casos de cônicas degeneradas que não aparecem na intersecção do cone circular com o plano, que são: par de retas paralelas e o conjunto vazio. Essas cônicas são obtidas como intersecção do cilindro com um plano. Na Geometria Projetiva, o cilindro é considerado um cone com vértice no “infinito”.

Figura 44: Secção do cilindro por um plano: Par de Retas Paralelas



Conforme descrevemos anteriormente, as cônicas são curvas planas que se originam da intersecção do cone circular por um plano. Uma secção cônica, formada pela intersecção de um plano e um cone de duas folhas, tem uma ou duas esferas de Dandelin. Definimos esferas de Dandelin como aquelas que tangenciam o plano e o cone e que estão no interior do cone. Cada cônica tem uma esfera para cada foco, sendo assim, a elipse e a hipérbole têm duas esferas de Dandelin e a parábola, apenas uma. A elipse, porém, tem ambas em uma mesma folha do cone, enquanto a hipérbole tem uma em cada folha do cone.

Teorema 5.1: Os pontos onde as esferas tocam o plano são focos da secção cônica.

Demonstração:

Temos três casos a considerar:

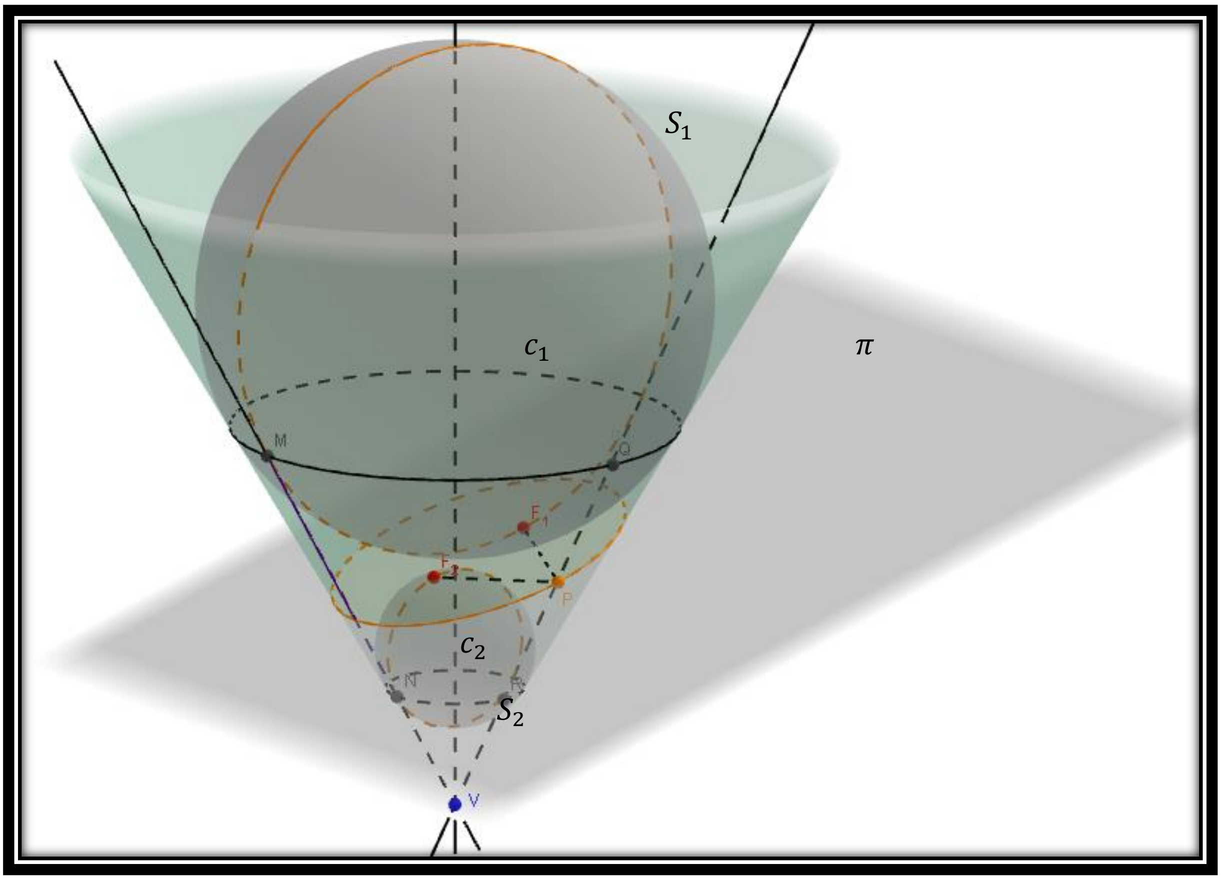
a) Elipse

Sejam um cone $\mathcal{C}$, duas esferas S_1 e S_2 internas ao cone tangenciando todas as geratrizes do cone e o plano π que intersecta o cone, conforme Figura 45, abaixo.

Observe que os círculos c_1 e c_2 são as curvas de intersecção das esferas S_1 e S_2 com o cone. Sejam P um ponto qualquer da intersecção do plano π com o cone, R e Q as intersecções da geratriz do cone que passa por P com os círculos c_1 e c_2, respectivamente.

Note que cada geratriz do cone forma segmentos congruentes entre os círculos; seja, pois, RQ o comprimento do segmento entre c_1 e c_2 que passa por P. Pela propriedade das tangentes às esferas, temos que $PF_1 = PQ$ e $PF_2 = PR$. Logo, $PF_1 + PF_2 = PQ + PR = RQ$. Como RQ é constante, independente da posição de P na intersecção do plano π com o cone, temos, por definição, que a curva resultante dessa intersecção é uma elipse.

Figura 45: As esferas de Dandelin e a Elipse



Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/152787

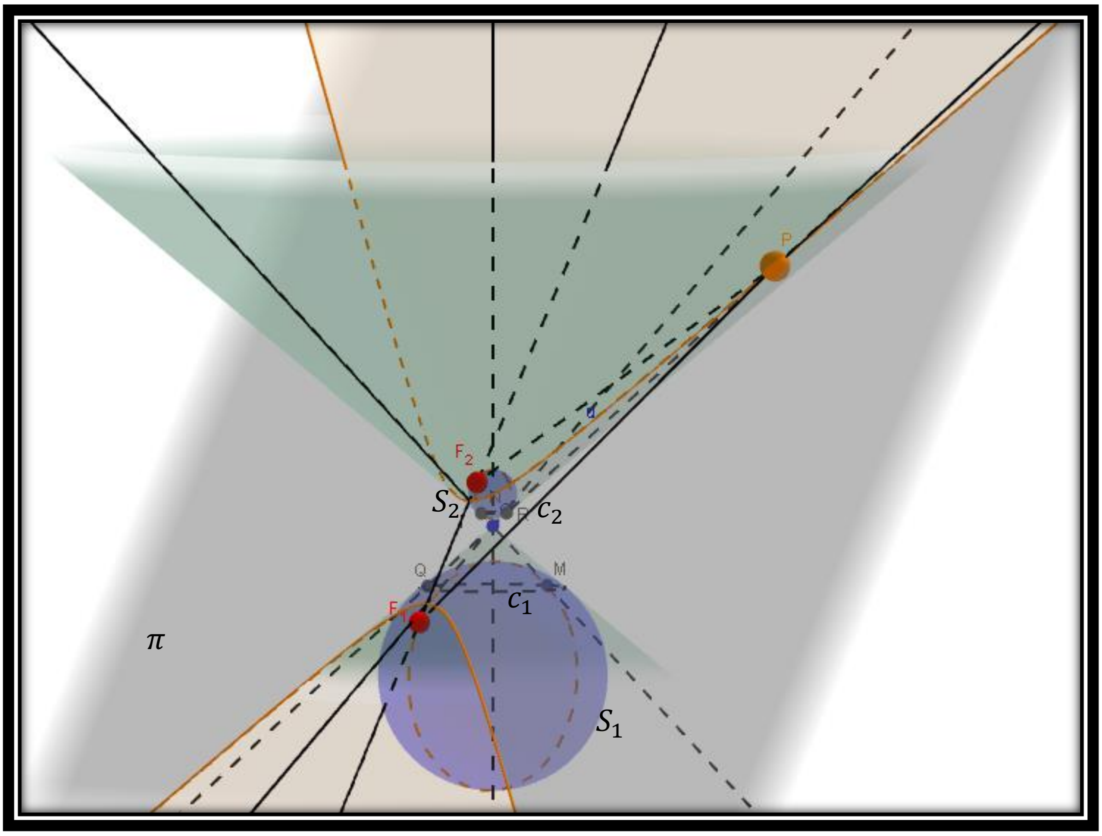
b) Hipérbole

Sejam um cone $\mathcal{C}$, duas esferas S_1 e S_2 internas ao cone tangenciando todas as geratrizes do cone e o plano π que intersecta o cone, conforme Figura 46, abaixo. Observe que os círculos c_1 e c_2 são as curvas de intersecção das esferas S_1 e S_2 com o cone.

Tomemos $P \in \pi \cap \mathcal{C}$. Traçamos a geratriz do cone passando por P. Como as esferas S_1 e S_2 são tangentes ao cone, esta geratriz será tangente às esferas nos pontos R e Q. Seja RQ o comprimento do segmento entre c_1 e c_2 que passa por V. Pela propriedade das tangentes às esferas, temos que $PF_1 = PR$ e $PF_2 = PQ$. Logo, $PF_1 - PF_2 = PR - PQ = RQ$.

Como as geratrizes do cone formam segmentos congruentes entre os círculos, vem que $PF_1 - PF_2$ é constante independente da posição do ponto de P na intersecção de $\mathcal{C}$ e de π. Portanto, a curva resultante da intersecção de $\mathcal{C}$ e de π é uma hipérbole.

Figura 46: As esferas de Dandelin e a Hipérbole



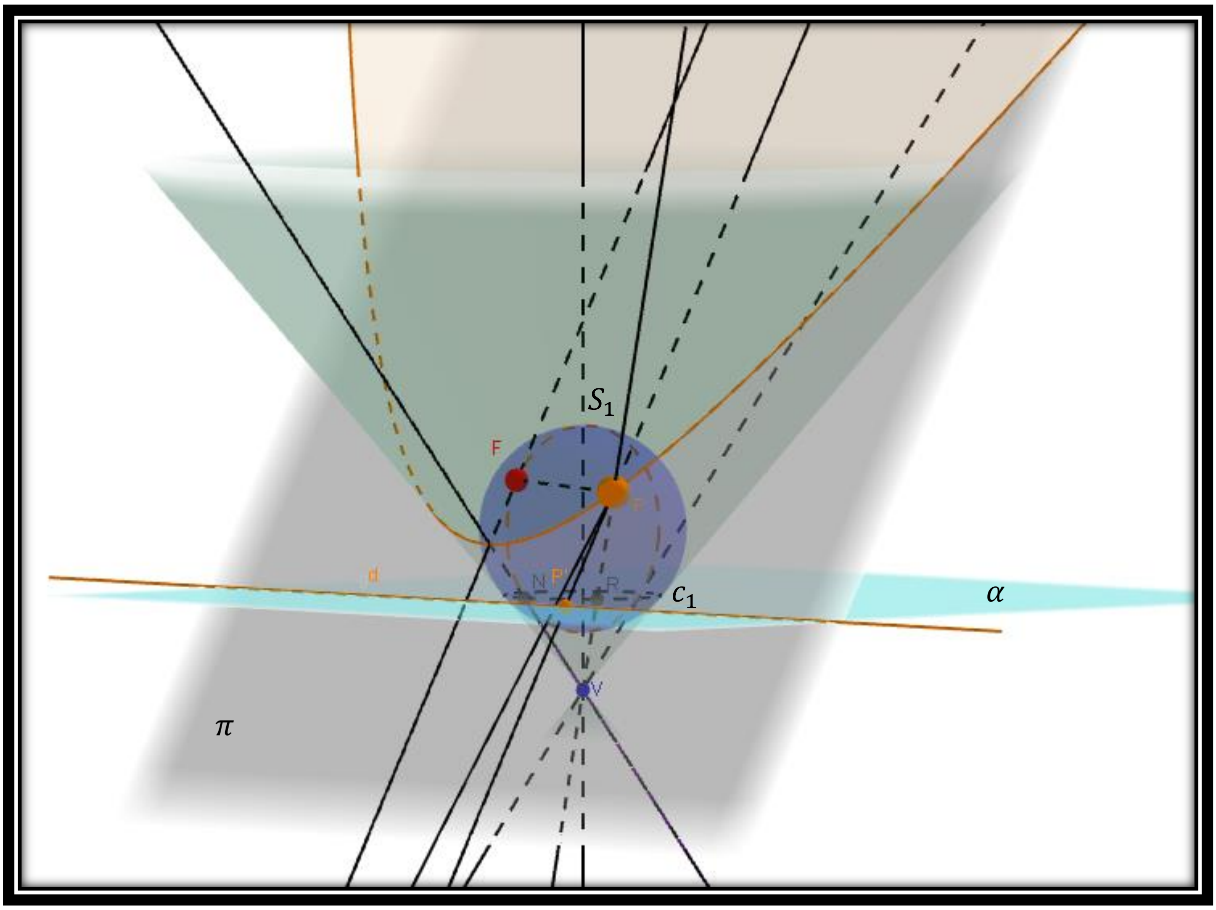
Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/152787

c) Parábola

Seja d a reta diretriz da parábola que resulta da intersecção entre o plano π e o plano α que contém o círculo c_1 resultante da intersecção entre a esfera S_1 e o cone $\mathcal{C}$, conforme Figura 47, abaixo. Tomemos Q o ponto de intersecção de c_1 com uma geratriz do cone $\mathcal{C}$ e P o ponto de intersecção entre a curva resultante da intersecção de π com o cone $\mathcal{C}$. Seja R o ponto de c_1 onde a esfera S_1 intersecta a geratriz do cone que passa por P e P' a projeção ortogonal de P sobre a reta d. Pela propriedade das tangentes às esferas, temos que $VQ = VR$ e $PR = PF$.

O triângulo isósceles VQR é semelhante ao triângulo RPP', logo $PP' = PR$ o que acarreta que $PF = PP'$. Assim, a distância entre o ponto P e o foco F é igual a distância entre o ponto P e a diretriz d. Portanto, a curva resultante da intersecção do cone $\mathcal{C}$ e o plano π, por definição, é uma parábola.

Figura 47: As esferas de Dandelin e a Parábola



Fonte: http://www.geogebratube.org/material/show/id/152787

5.3.6 Caracterização geral de uma cônica

Podemos definir as cônicas de uma forma geral:

Definição 5.25: Dados uma reta r e um ponto fixo F tal que $F \notin r$. Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja razão entre as distâncias de P a F e entre P e r é uma constante real positiva. Esta constante é chamada de *excentricidade* da cônica. A reta r é a *diretriz* e F o *foco* da curva.

Partindo da definição acima podemos obter a expressão analítica de uma cônica.

Consideremos uma reta r de equação $x = k$ e um ponto fixo F de coordenadas $F(c, 0)$ com $c > 0$ tal que $F \notin r$. Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da cônica e $e > 0$ uma constante real. Pela definição acima, tem-se que: $\frac{distância\ de\ P\ a\ F}{distância\ de\ P\ a\ r} = e$.

Tomemos D o pé da perpendicular à reta r passando por P, então $distância\ de\ P\ a\ r = d(P, D)$. Usando a fórmula da distância entre dois pontos no plano temos que: $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\sqrt{(x-k)^2}} = e$. Elevando os membros da expressão ao quadrado vêm que:

$$(x-c)^2 + y^2 = (x-k)^2e^2 \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2kx + k^2)$$

$$\Rightarrow x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2cx - c^2 - 2ke^2x + k^2e^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{(1-e^2)x^2 + y^2 = 2x(c - ke^2) + d^2e^2 - c^2} \text{ Equação geral da cônica}$$

Temos três casos a considerar, a saber: $e = 1$, 0< $e < 1$ ou $e > 1$.

Caso $\boldsymbol{e} = 1$, a equação geral da cônica fica reduzida a:

$y^2 = 2x(c - k1^2) + k^2 1^2 - c^2$. Sem perda de generalidade, suponhamos $k = -c$, logo $y^2 = 2x(c - (-c)) + (-c)^2 - c^2 \Rightarrow y^2 = 4xc \Rightarrow \boxed{x = \frac{y^2}{4c}}$ que é a equação da parábola de vértice na origem, foco $F(c, 0)$ e reta diretriz $x = -c$.

Caso $0 < e < 1$, temos que $1 - e^2 > 0$, então podemos dividir a equação geral da cônica por $1 - e^2$ reduzindo a:

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{2(c-ke^2)}{1-e^2}x + \frac{k^2e^2 - c^2}{1-e^2}$$

Completando quadrados e efetuando as simplificações, temos que:

$$\left(x - \frac{c-ke^2}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2(k-c)^2}{(1-e^2)^2}$$

Dividindo cada membro por $\frac{e^2(k-c)^2}{(1-e^2)^2} = \left(\frac{e(k-c)}{1-e^2}\right)^2$ vem que:

$$\boxed{\frac{\left(x - \frac{c-ke^2}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{e(k-c)}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e(k-c)}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1}$$

É a equação da elipse de centro $C\left(\frac{c-ke^2}{1-e^2}, 0\right)$, semieixo maior $a = \frac{e(k-c)}{1-e^2}$, semieixo menor $b = \frac{e(k-c)}{\sqrt{1-e^2}}$, focos $F_1\left(\frac{e(k-c)}{1-e^2}, 0\right)$ e $F_2\left(-\frac{e(k-c)}{1-e^2}, 0\right)$.

Caso $e > 1$, temos que $e^2 - 1 > 0$, então dividindo a equação geral da cônica por $e^2 - 1$ e invertendo os sinais, temos que:

$$x^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{2(c-k)}{e^2 - 1}x - \frac{k^2e^2 - c^2}{e^2 - 1}$$

Completando quadrados e efetuando as simplificações, temos que:

$$\left(x + \frac{c - ke^2}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^2(c-k)^2}{(e^2 - 1)^2}$$

Dividindo cada membro por $\frac{e^2(c-k)^2}{(e^2-1)^2} = \left(\frac{e(c-k)}{e^2-1}\right)^2$ vem que:

$$\boxed{\frac{\left(x + \frac{c - ke^2}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{e(c-k)}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{e(c-k)}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1}$$

É a equação da hipérbole de centro $C\left(\frac{c-ke^2}{e^2-1}, 0\right)$, semieixo transverso $a = \frac{e(c-k)}{e^2-1}$, semieixo imaginário $b = \frac{e(c-k)}{\sqrt{e^2-1}}$, focos $F_1\left(\frac{e(c-k)}{e^2-1}, 0\right)$ e $F_2\left(-\frac{e(c-k)}{e^2-1}, 0\right)$.

6 RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

Algumas das atividades descritas neste trabalho foram aplicadas em três turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma Escola Estadual que se situa na cidade de Fernandópolis/SP onde atuamos como professora efetiva do quadro do magistério da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, no decorrer do quarto bimestre do ano de 2013. Apesar do conteúdo relacionado às cônicas ser programado para ocorrer durante o primeiro bimestre letivo, nas turmas de 2013 da referida escola foi realizado no final do ano devido à necessidade de retomada de outros conteúdos que os alunos demonstraram possuir defasagens de acordo com a Avaliação da Aprendizagem em Processo, que foi aplicada no início do ano letivo.

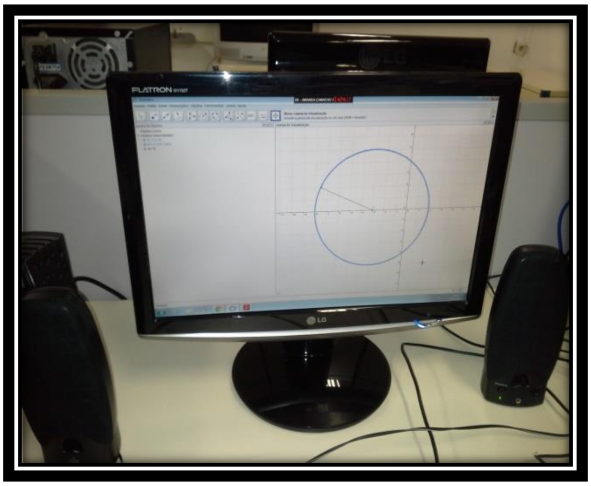
Iniciamos o trabalho com a apresentação do vídeo “Reinventar a roda” da série “Isto é Matemática”, promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e apresentado pelo professor universitário e matemático Rogério Martins. Com o vídeo, discutimos como a Matemática está presente no nosso cotidiano e faz parte da nossa vida, mostrando o uso das formas circulares e motivando o estudo das cônicas.

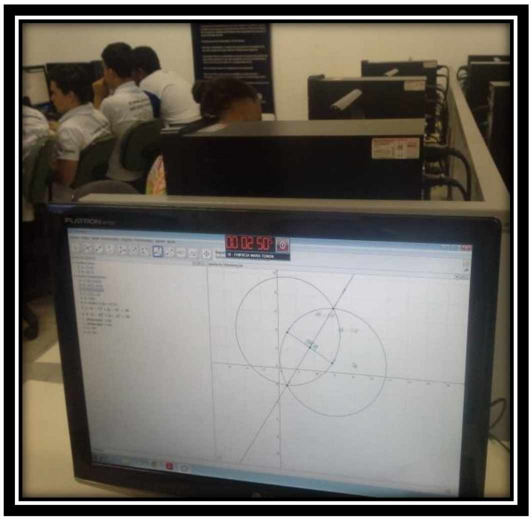
Figura 48: Alunos assistindo ao vídeo

Depois que os alunos assistiram ao vídeo, responderam o questionário proposto demonstrando, durante a correção coletiva, boa compreensão do assunto tratado pelo filme.

Na sequência do trabalho, propomos a resolução das atividades 2 e 3 descritas na secção 4.1 deste trabalho. Os alunos não apresentaram dificuldade na realização da construção dos objetos geométricos em relação ao uso do software GeoGebra, porque já dominavam as ferramentas presentes no software, haja vista, que já vínhamos, no decorrer do ano, desenvolvendo diversas outras atividades utilizando o software.

Figura 49: Construções das atividades 2 e 3 feita pelos alunos





Na continuidade do trabalho apresentamos o vídeo "Na cauda do cometa" com o intuito de motivar o estudo das cônicas (vide atividade 4 descrita na seção 4.1). Neste filme é mostrado um pouco da história da astronomia, as Leis de Kepler e a Teoria Gravitacional de Newton. Os alunos responderam ao questionário sobre o vídeo e podemos perceber um pouco mais de interesse por parte dos alunos no assunto abordado pelo filme.

Aproveitando o entusiasmo das turmas em realizar o trabalho proposto, solicitamos a resolução da atividade 1 descrita na seção 4.3 deste trabalho. Sem nenhuma dificuldade em manipular o software, realizaram a construção e elaboraram a definição da elipse, como podemos constatar nos escritos de alguns alunos abaixo.

"É o conjunto de pontos do plano a qual a soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante." (aluna T)

"A elipse é um conjunto de pontos que a soma das distâncias a dois pontos fixos são constantes." (aluna Th)

"É o conjunto dos pontos do plano que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a." (aluna B)

"Elipse é uma secção cônica, é um conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante." (aluna L)

"A elipse é o conjunto dos pontos P do plano tal que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante." (aluna A)

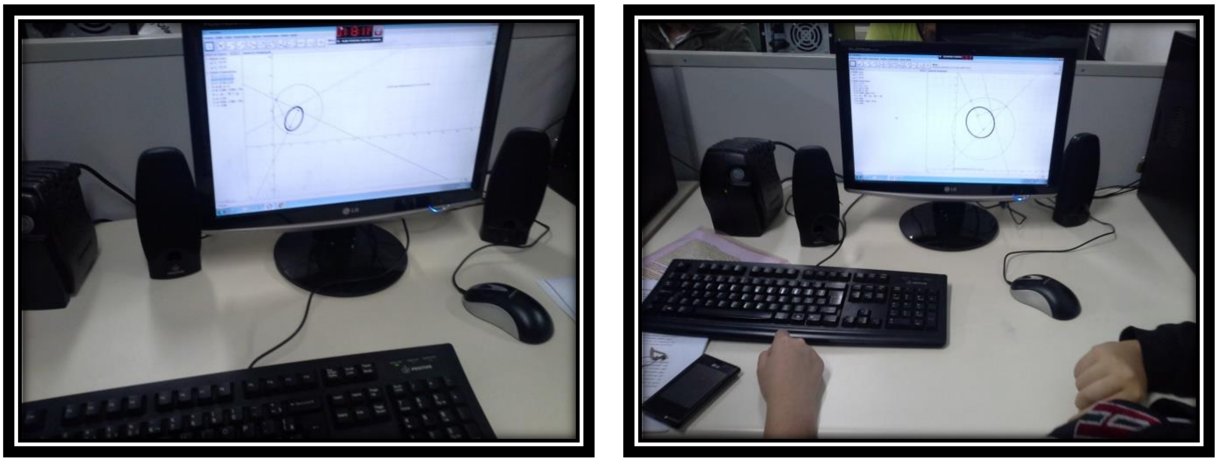
“Elipse é uma secção cônica, é um conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.” (aluno Bo)

Houve também definições equivocadas como pode ser observado nas transcrições abaixo, exigindo que interviéssemos para a reelaboração da definição da curva. Essa intervenção foi realizada com auxílio da manipulação da construção realizada no Geogebra e de alunos monitores. Abaixo algumas transcrições de definições um tanto equivocadas.

“Elipse é a soma das distâncias e os pontos são constantes, elipse é obtido a partir do cone duplo que é cortado.” (alunos M e H)

“Elipse é uma forma oval” (aluna Ba)

Figura 50: Construção da elispe realizada por alunos



Quando nos preparávamos para a realização da atividade 3, também descrita na seção 4.3 deste trabalho, houve um problema com os computadores da sala ambiente de informática da escola e ficamos impossibilitados de darmos continuidade ao estudo das cônicas. Para não desperdiçarmos o entusiasmo dos alunos com o estudo que vinha sendo feito, tivemos a ideia de propormos as atividades de dobraduras também descritas neste trabalho.

Foi um trabalho bem proveitoso e motivador, propiciando-nos a reflexão de que era necessário contemplarmos em nosso trabalho os professores e alunos que não possuem acesso às novas tecnologias. Com as atividades de dobraduras é possível desenvolver todo o conteúdo sobre cônicas, constituindo desse modo, uma possível escolha aos colegas professores.

Figura 51: Construção da Elipse por dobraduras com os focos próximos

Figura 52: Elipse construída por dobraduras com focos mais distantes

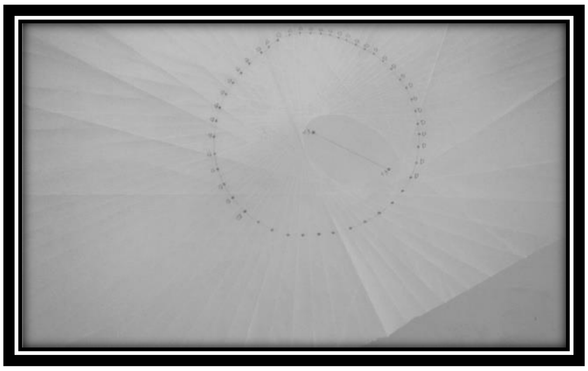


Figura 53: Construção da hipérbole por dobraduras

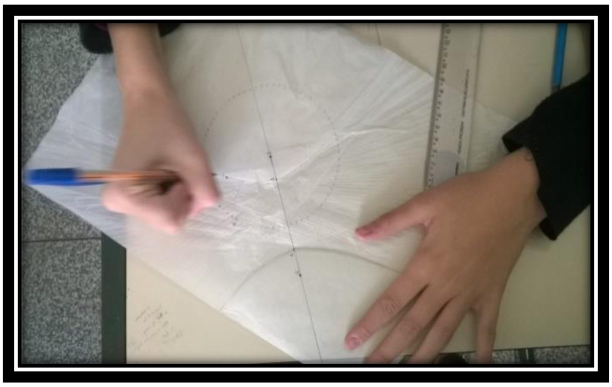


Figura 54: Construção da parábola por dobraduras

Como já havíamos realizado o estudo da elipse, a dobradura serviu como constatação das suas propriedades. Em relação à parábola e à hipérbole, além da constatação de suas propriedades, foram construídas, também, suas definições, como podemos notar nas transcrições:

"Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano tal que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distancia entre eles." (aluna La)

"A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P do plano tal que o módulo da diferença $|d_1 - d_2|$ é constante." (aluna D)

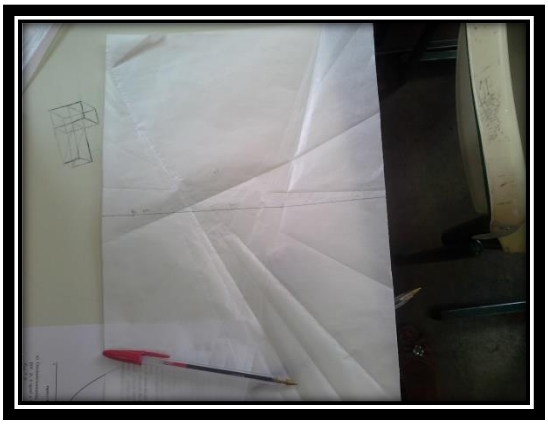
"Hipérbole é o conjunto de todos os pontos coplanares para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos (chamados de focos) é constante." (aluno E)

“Parábola é um conjunto de pontos equidistantes de um ponto F e de uma reta d.” (aluno He).

“Uma parábola pode ser definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz).” (aluna Ls)

Houve também algumas construções pouco precisas devido à falta de cuidados ao executar as dobras, interpretações equivocadas das comandas e, sobretudo a falta de habilidades de manuseio do compasso e régua, como podemos observar nas imagens abaixo:

Figura 55: Dobraduras com erros



Após realizarmos o trabalho com as dobraduras, podemos retomar as atividades na sala ambiente de informática, pois os computadores já haviam sidos consertados. Realizamos então as atividades 3 e 5 descritas na seção 4.3 deste trabalho. Como já tínhamos trabalhado as definições da parábola e da hipérbole, o trabalho ficou muito mais ágil. Com as manipulações das construções possibilitadas pela dinâmica do software GeoGebra, os alunos puderam compreender as principais propriedades das curvas, como observamos nas imagens abaixo:

Figura 56: Construção da hipérbole por aluno

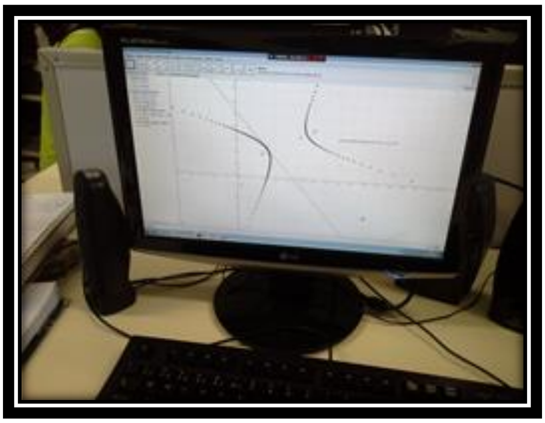
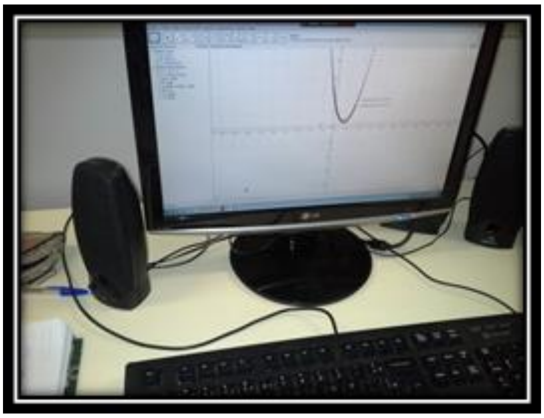


Figura 57: Construção da parábola por aluno



Ao concluirmos as construções e manipulações dos objetos construídos com o auxílio do software Geogebra, propusemos aos alunos que fizessem uma pesquisa sobre as aplicações das cônicas no cotidiano. Dividimos as turmas em grupos e distribuímos um tema para cada dois grupos, a saber: “O segredo do salão oval”, “A luminária do dentista”, “Litotripsia”, “A trajetória dos planetas e cometas em torno do sol”, “Por que as antenas são parabólicas?”, “Farol dos carros, lanternas, telescópios e espelhos parabólicos”, “Trajetórias de projéteis”, “Sistemas Hiperbólicos de Navegação” e “Hipérbole e telescópicos”. Nas três turmas foram formados 19 grupos, tendo apenas dois que não apresentaram o trabalho. Os alunos fizeram as apresentações utilizando o software Power point e cada grupo apresentou o trabalho para a sua turma. As apresentações dos grupos foram registradas em vídeos. Houve bons trabalhos, outros nem tanto, porém, foi possível constatar que a aprendizagem foi satisfatória. Os trabalhos dos alunos podem ser vistos em http://matem-agil.blogspot.com.br/p/blog-page.html.

Algumas das dificuldades enfrentadas na realização das atividades foram merecedoras de nossa reflexão e constituem, talvez, fontes de investigações futuras e que por isso serão registradas abaixo. Para atenuar essas dificuldades e conduzir os alunos para a construção do conhecimento foi proposto aos alunos que buscassem, através de pesquisa na rede mundial de computadores e livros didáticos, as informações que pudessem auxiliá-los na resolução dos problemas. Ainda assim, muitas perguntas eram feitas no decorrer das aulas. Em nossas intervenções, partíamos sempre das pesquisas realizadas por eles e, geralmente, respondíamos com outra pergunta, incentivando-os a buscarem suas próprias soluções e sanarem por si mesmos suas dúvidas.

a) Interpretação das comandas das atividades e não conhecimento da linguagem geométrica.

Durante a realização do trabalho podemos perceber uma forte dificuldade dos alunos em interpretar as comandas das atividades. Inquietou-nos esta dificuldade! Seriam o não desenvolvimento da capacidade leitora de textos matemáticos, principalmente, os que envolvem os conhecimentos geométricos? É consenso que a linguagem matemática é específica, logo, ter domínio da língua materna não é sinônimo de compreensão da língua matemática. Dominar a linguagem matemática é como aprender a ler, a escrever e a se comunicar em outra língua, é preciso ser desenvolvida de modo que seja tão natural quanto à língua materna.

Nossa experiência em sala de aula aponta-nos o fato de que a Geometria ainda está bastante ausente das salas de aula, principalmente na Educação Infantil e Ensino Fundamental, o que poderia justificar o não reconhecimento dos alunos do Ensino Médio de conceitos básicos da geometria com relação à visualização, representação, percepção de relações existentes entre os objetos geométricos e propriedades das figuras constituindo um obstáculo a mais para a interpretação das comandas das atividades.

b) Dedução das equações das curvas

Esta dificuldade nos conduziu a reflexão sobre o ensino da álgebra ligada à geometria perpassando pela aritmética e podemos perceber que, também neste contexto, a aprendizagem da linguagem é importante porque exige do aluno o conhecimento tanto da língua materna como da língua matemática para que se possa realizar a ligação entre uma e outra. Novamente a interpretação é requisito necessário e diversas vezes o aluno não é capaz de formalizar as informações pela deficiência em ler e interpretar textos matemáticos.

Além da dificuldade de realizar a tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica podemos observar que, quando conhecem o vocabulário da geometria, são capazes de realizar as construções, mas apresentam dificuldades em situações onde precisam efetuar deduções de cunho lógico-matemático. Acreditamos que grande parte desta dificuldade reside nas poucas oportunidades que propiciamos aos nossos alunos para que expliquem as suas formas de raciocínio quando resolvem problemas. Ao oportunizarmos momentos onde terão que explicitar seus raciocínios, asseguramos espaços para que organizem suas ideias e as comuniquem de modo que possam ser compreendidos, desenvolvendo a linguagem e garantindo uma produção de significados e não simplesmente a reprodução de modelos, pois tudo aquilo que não faz sentido, acaba no esquecimento.

c) Falta de habilidades com o manuseio do compasso e régua

A falta de habilidades dos alunos com o manuseio de instrumentos de construção geométrica, talvez, tenha suas raízes na retirada da disciplina de Desenho Geométrico dos currículos de matemática. Durante o nosso percurso profissional como professora de ensino fundamental e médio podemos constatar o abandono do ensino de Geometria nas séries iniciais pelos mais variados motivos: livros e textos didáticos que colocam a Geometria no final, ocasionando a não apresentação do conteúdo aos alunos porque não é possível cumprir todo o conteúdo programático de cada série/ano; a dificuldade do professor em trabalhar a

Geometria porque não teve formação adequada, o não rompimento do professor com aulas expositivas e a dificuldade de programar experiências investigativas a cerca dos conceitos matemáticos em suas aulas.

O trabalho com o desenho geométrico, através da utilização dos equipamentos usados nas construções geométricas, tais como, régua, compasso, esquadros etc., contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, a organização e a criatividade; requisitos necessários na aprendizagem matemática para que os alunos possam adquirir embasamento para a compreensão da Trigonometria, Geometria Analítica, Plana e Espacial desenvolvida no ensino médio.

d) Resistência à investigação matemática

Numa aula de experiências investigativas de matemática, o papel desempenhado por cada um dos envolvidos é imprescindível para o resultado da aprendizagem. Para que se efetive a construção do conhecimento é necessária a disposição do professor em ensinar e a do aluno em aprender. Logo, o papel do professor não é o de expor ou apresentar os conteúdos ao aluno e deste, por sua vez, não é o de ficar esperando que o professor lhe forneça o conhecimento. Porém, percebemos, talvez devido a uma cultura de que o professor é o detentor do conhecimento e que é obrigação dele passar esse conhecimento, que muitos alunos resistem e ficam esperando que o professor lhe dê as respostas prontas e as informações necessárias para realizar as atividades, contrapondo-se à investigação e à busca de soluções por si mesmos.

No contexto de uma aula investigativa, essa postura do aluno dificulta o processo de ensino aprendizagem, pois o professor não se exime de sua responsabilidade pela aprendizagem do aluno, mas deve possibilitar ao aluno uma atuação ativa na construção do seu conhecimento, intervindo, didaticamente, sempre que necessário.

e) Tempo de realização das atividades

Apesar de todo o planejamento que realizamos anterior à aplicação das atividades, nos deparamos com a dificuldade de lidar com o tempo disponível para a execução das mesmas pelos alunos, principalmente, aquelas que foram feitas na sala ambiente de informática. Interromper ou apressar a produção dos alunos em aulas de investigação matemática pode comprometer a construção do conhecimento pelo aluno, não lhe dando tempo suficiente para assimilação e acomodação do conteúdo aprendido. Respeitar o tempo de aprendizagem de cada aluno e trabalhar as diferenças em turmas heterogêneas constitui um desafio à efetiva inclusão das investigações matemáticas no currículo escolar.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho evidenciamos que o ensino das cônicas nos estabelecimentos oficiais de ensino no Brasil é relegado a uma apresentação sem contexto e fragmentado. Buscamos, então, neste trabalho, estabelecer situações didáticas que, fazendo uso da investigação matemática, auxiliada pelas novas tecnologias e pautada nos estudos de Guy Brousseau e que trazem ao estudo de tão relevantes curvas uma visão unificadora das cônicas propiciada pelo Teorema de Dandelin. Acreditamos que esta abordagem aumenta a compreensão das definições, conceitos e propriedades das cônicas, além de permitir a análise de várias situações concretas que favorecem o estabelecimento de conjecturas e facilitam a construção de suas demonstrações.

É importante destacarmos, e que podemos constatar ao longo do desenvolvimento deste trabalho, o descaso com o ensino da Geometria. Muitos pesquisadores ressaltam a importância do seu ensino, especialmente as demonstrações, e consideram que há perdas significativas ao aluno, em relação ao desenvolvimento do raciocínio lógico, organização e criatividade. Deste modo, as construções por dobraduras podem ajudar os alunos a melhorarem a percepção dos objetos geométricos, o que facilita a sua aplicabilidade na resolução de situações problemas, melhora a prática de sala de aula resgatando o interesse deles e diminuindo as dificuldades presentes no ensino da geometria.

A realização deste trabalho nos fez crer que o uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, e de outros, podem contribuir para uma aprendizagem mais significativa, pois além de estimular o interesse do aluno, propiciam a exploração de diversas situações oportunizando o levantamento de hipóteses e elaboração de conjecturas para, em seguida, partir às demonstrações. Este modo de executar o trabalho em sala de aula aumenta a autoconfiança do aluno na sua capacidade de fazer matemática, fazendo com que ele se torne sujeito da construção do seu conhecimento num processo de desenvolvimento da autonomia e capacidade gestora de situações sociais, culturais e econômicas da sociedade onde ele está inserido.

Podemos observar, ainda, que o uso de softwares facilita a prática pedagógica do professor quanto à criação de aulas mais dinâmicas e voltadas à investigação, exploração e problematização dos conteúdos contribuindo na compreensão dos conceitos da matemática pelos alunos.

Outra evidência que cabe ressaltarmos, ao final deste trabalho, refere-se à importância das atividades investigativas para uma aprendizagem significativa. Porém, o estranhamento dos alunos em relação a esta prática pode constituir um entrave para a realização de aulas deste caráter. Durante a nossa observação no decorrer do nosso trabalho, podemos perceber a falta de comprometimento de alguns alunos e pouco esforço para a realização das atividades propostas oferecendo respostas desconexas. Pensamos que seja pela falta de hábito em realizar esse tipo de atividades ao longo da vida estudantil. Por isso, acreditamos que, para um maior comprometimento dos alunos, é preciso introduzir a investigação matemática desde o ensino infantil e séries iniciais do ensino fundamental, aproveitando-se da curiosidade que é inerente à criança desta faixa de escolarização.

Em suma, o estudo realizado mostra indícios de que o desenvolvimento de investigações matemáticas aliada ao uso das novas tecnologias representa um campo fértil e desafiador de aprendizagem, tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno, porque ele torna-se protagonista da construção do próprio conhecimento, aproximando-se do modo como é produzido o saber científico. Para o professor, porque através das investigações matemáticas, pode encontrar um modo mais significativo para ensinar a matemática fazendo com que os alunos se interessem mais pelas aulas.

Por fim, nosso objetivo de encontrarmos formas diferenciadas para o estudo das cônicas no ensino médio foi alcançado com bom êxito, pois percebemos que houve um avanço significativo na aprendizagem do conteúdo proposto pelos alunos. Isto nos leva a acreditar que a metodologia que propomos é eficaz e este trabalho constitui uma fonte de pesquisa para alunos do ensino médio e superior e professores que se interessem por alternativas diferenciadas para o ensino deste tópico de Geometria Analítica. Embora as cônicas sejam conhecidas e estudadas desde o primeiro século da Idade Helenística, muitos são os tópicos sobre o assunto que podem ser explorados. Por exemplo, as diversas aplicações no nosso cotidiano, a definição das cônicas através da forma quadrática, as cônicas determinadas por cinco pontos, entre outros.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**. São Carlos: EdUFSCAR, 2011.

BORDALLO, M. **As cônicas na matemática escolar brasileira:** História, Presente e Futuro. 2011. 71f. Dissertação (mestrado) – UFRJ/ IM. Programa de Pós-graduação. Rio de Janeiro: [s.n.], 2011.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas:** Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo: Ática, 2011.

CAMARGO, I. D.; BOULOS, P. **Geometria Analítica:** Um tratamento Vetorial. 3ª. ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF,. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria Plana**. 9ª. ed. São Paulo: Atual, v. 9, 2013.

FREIRE, F. M. P.; PRADO, M. E. B. B. **O computador em sala de aula:** articulando saberes. Campinas: UNICAMP/NIED, 2000.

GEOGEBRA. Disponivel em: <http://tube.geogebra.org/>. Acesso em: 18 Dezembro 2014.

GUIMARÃES, C. S. **Matemática em Nível IME ITA**. São José dos Campos: Vestseller, v. 2, 2008.

GURGEL, T. Guy Brousseau:"A cultura matemática é um instrumento para a cidadania". **Revista Nova Escola**, São Paulo, Outubro 2009. Disponivel em: <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/cultura-matematica-instrumento-para-cidadania-guy-brousseau-calculo-518776.shtml?page=0#>. Acesso em: 21 Abril 2014.

MATTOS, F. R. P.; YOKOYAMA, L. A. Construções Geométricas por Dobraduras Origami, 2004. Disponivel em: <https://www.academia.edu/541055/CONSTRUÇÕES_GEOMÉTRICAS_POR_DOBRADURAS_ORIGAMI>. Acesso em: 16 Agosto 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2014.

MONTEIRO, R. M. **Resgate do Teorema de Dandelin no Estudo de Cônicas com o Geogebra**. Vitória: Dissertação (Profmat), 2014.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philipe de La Hire - 1679) e sua relevância para o ensino de Matemática. 2008. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2008.

OLIVEIRA, F. F. D. Origami: Matemática e Sentimento, 2004. Disponivel em: <http://nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>. Acesso em: 16 Agosto 2014.

OLIVEIRA, R. S. Guia do professor do vídeo "Na cauda do cometa". **Matemática Multimídias**, [2009-2012]. Disponivel em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137>. Acesso em: 15 Mar 2013.

PAQUES, O. T. W.; SEBASTIANI, F. Uma história do ensino das cônicas na matemática escolar no Brasil. **Associação de Professores de Matemáitcia Portuguesa**, [2009?]. Disponivel em: <http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf>. Acesso em: 10 Outubro 2012.

POMMER, W. M. Brousseau e a idéia de Situação Didática. **SEMA – Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP**, 2008. Disponivel em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 22 Abril 2014.

QUARANTA, F.; COSTA, L. F. D.; GUIMARÃES, L. C. Geometria Dinâmica: Abordagens interligadas para o estudo de cônicas. **IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, 2008. Disponivel em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/54.pdf>. Acesso em: 15 Outubro 2012.

ROCHA, A. S. **Construções Concretas e Geometria Dinâmica:** Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas. São Carlos: SBMAC, v. 44, 2012. 82 p. ISBN 978-85-8215-004-7.

SÃO PAULO (ESTADO). **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemáticas e suas Tecnologias. Sâo Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO (ESTADO). **Caderno do Aluno:** Matemática Ensino Médio 3ª série. São Paulo: [s.n.], v. 1, 2014.

SÃO PAULO (ESTADO). **Caderno do Aluno:** Matemática.Ensino Fundamental 8ª série. São Paulo: [s.n.], v. 1, 2014.

VALLADARES, R. J. C. Elipse, sorrisos e sussurros. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 36, p. 24-28, 1° quadrimestre 1998.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 33, p. 10-15, 1° Quadrimestre 1997.

APÊNDICE

Neste tópico apresentamos a resolução das atividades propostas neste trabalho.

Atividades da seção 4.1

ATIVIDADE 1: Reinventando a Roda

Questionário referente ao vídeo "*Reinventar a roda*":

a) Formas circulares.

b) A sua largura independe da posição que a circunferência se encontra. Damos o nome de diâmetro.

c) *Não, existem outras formas geométricas que possuem essa característica. Podemos citar, como exemplo, se tomarmos um triângulo equilátero e com auxílio do compasso traçar arcos com centro em um dos vértices de forma a unir os outros dois vértices obtemos uma forma geométrica (*Figura *) que possui a mesma característica que a circunferência, isto é, a sua largura independe da posição em que a figura se encontra. A moeda de 50 pense inglesa é obtida usando o mesmo procedimento, mas a partir de um heptágono* (Figura 59).

d) Confecção de moedas, engenhocas para a engenharia, tampas de bueiros entre outras.

e) Quando introduzimos uma moeda numa máquina de venda automática o fato da sua largura ser a mesma independente de sua posição é importante para evitar que a moeda não encrave, além disso, é muito mais fácil para o equipamento identificar a moeda. Na mecânica, essas formas são utilizadas para transformar movimento de rotação em movimento de translação e assim, podemos construir "buracos" quadrados como podemos ver na Figura 60*. Outra aplicação que podemos perceber no nosso dia a dia é as tampas dos esgotos espalhadas pela cidade. O fato de terem largura constante impedem que caiam dentro dos esgotos durante a manutenção e também evitam que se desloquem quando os carros passam sobre essas tampas.*

Figura 58: Forma geométrica que possui a mesma propriedade da circunferência

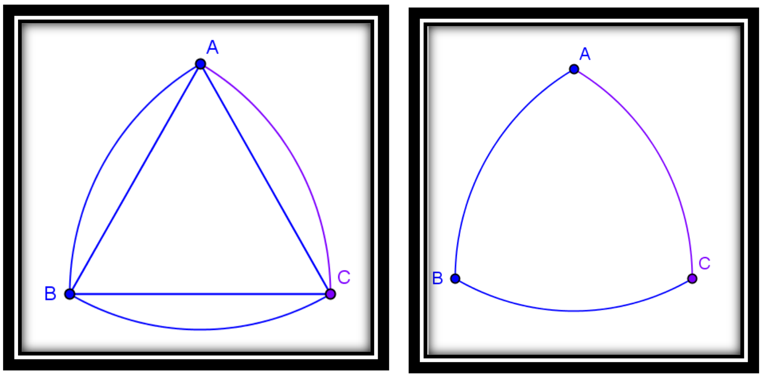


Figura 59: Forma geométrica da moeda de 50 pence inglesa e que possui a mesma propriedade da circunferência

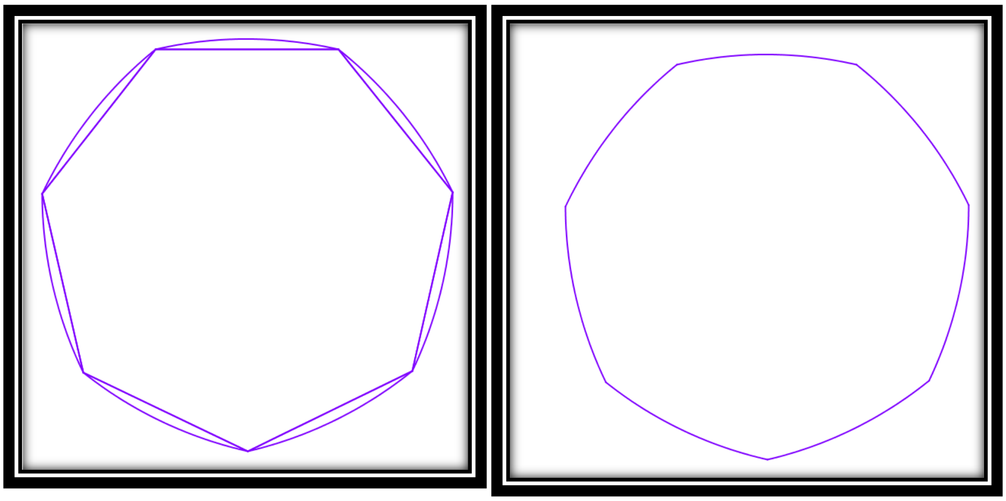
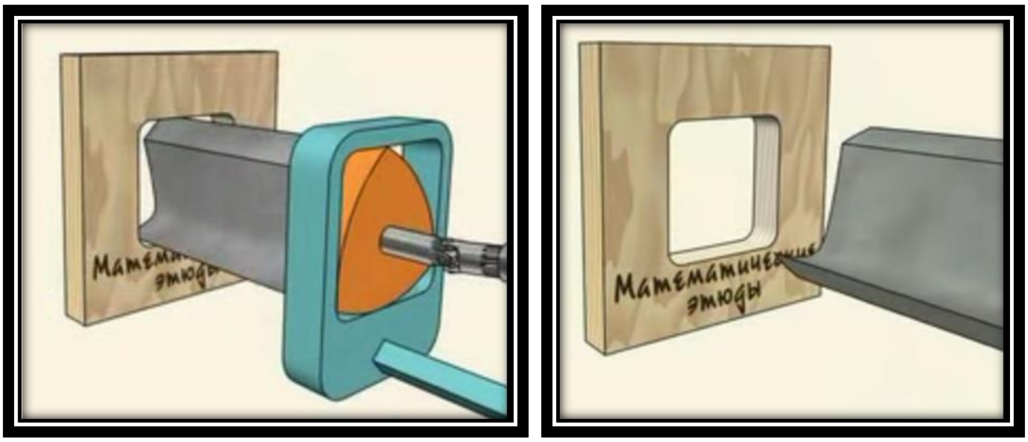


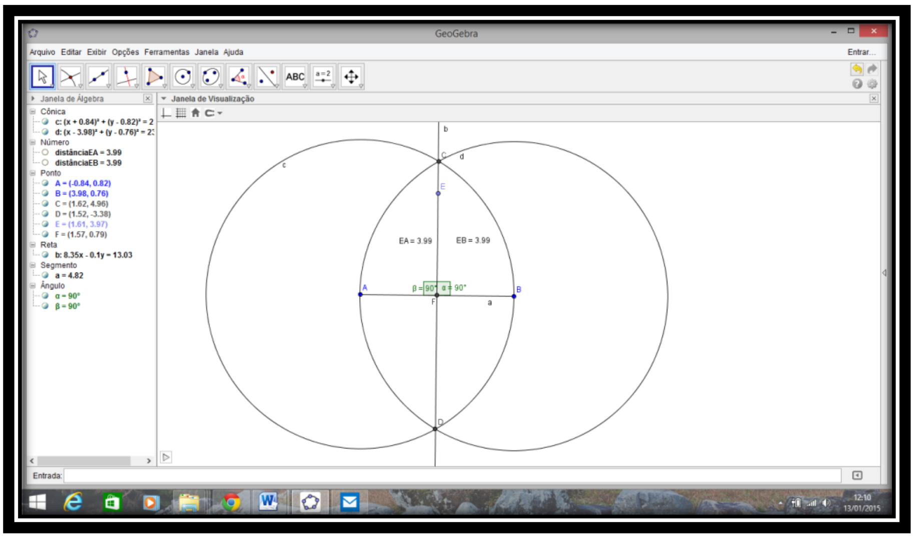
Figura 60: Buracos quadrados



Fonte: Vídeo Reinventar a roda disponível em https://www.youtube.com/watch?v=fK_v-hyMrUo

ATIVIDADE 2: Mediatriz de um segmento

Figura 61: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 2 seção 4.1



a) *Foi obtida a reta CD, mediatriz do segmento AB.*

b) *Todos os pontos da reta CD são equidistantes dos extremos do segmento AB.*

c) *Mediatriz de um segmento é o conjunto de pontos do plano que são equidistantes dos extremos do segmento, isto é, se* P *é um ponto da mediatriz do segmento* AB, *então* $d(P,A) = d(P,B)$ *e vice-versa.*

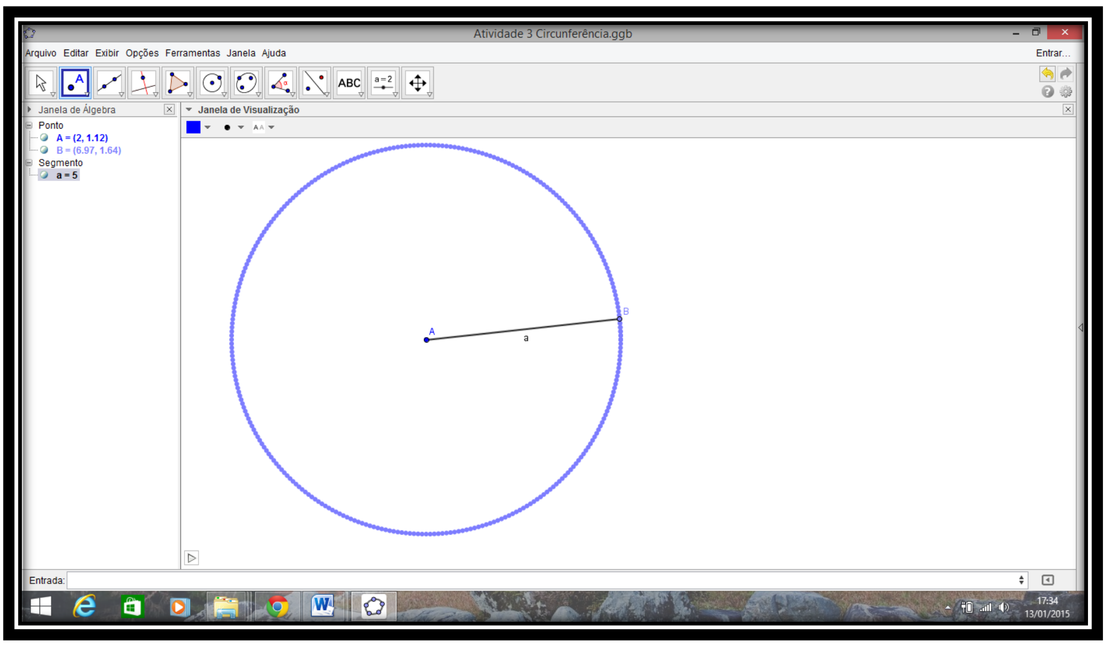
d) *Vide exemplo 5.2.*

e) *Com base na construção que foi feita, o local a ser investigado para a perfuração do poço deve ser a mediatriz do segmento cujos extremos são determinados pelas casas. Veja a* ***Erro! Fonte de referência não encontrada.****.*

Figura 62: Resolução do problema da atividade 2 seção 4.1

ATIVIDADE 3: A circunferência

Figura 63: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 3 seção 4.1



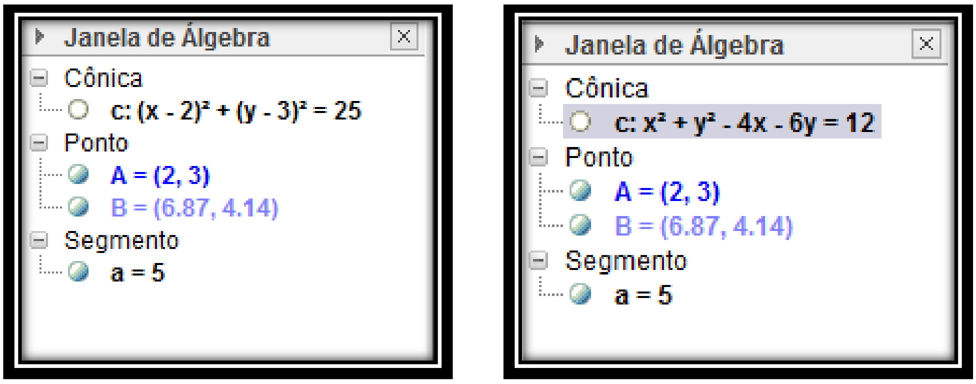
a) Uma circunferência de raio 5 unidades.

b) O conjunto de pontos obtidos pelo rastro do ponto B é equidistante do ponto A, isto é, dista 5 unidades do ponto A.

c) A figura obtida é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo.

*d) Veja abaixo a Janela de Álgebra do GeoGebra (*Figura 64*) com as equações que expressam a relação entre a abscissa x e a ordenada y de um ponto P pertencente à figura $\mathcal{F}$ (circunferência). Note que as coordenadas do ponto A é (2,3).*

Figura 64: Janela de Álgebra do GeoGebra mostrando as equações de uma circunferência



4. $$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 36 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 36 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 10y = 7$$

5. $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = r^2 - a^2 - b^2$$

ATIVIDADE 4: Introdução às cônicas

a) As teorias usadas para explicar as órbitas dos planetas e de outros corpos celestes necessárias para prever suas localizações no espaço, bem como, as formas cônicas das suas órbitas.

b) Copérnico e o modelo Heliocêntrico, ou seja, o sol no centro do sistema solar; Galilei utilização da luneta para melhor visualizar os corpos celestes mais próximos da terra; Kepler pelo desenvolvimento de modelos para as órbitas dos planetas; as órbitas dos planetas são elípticas com o sol em um dos focos da elipse; Newton pela sua teoria da gravitação que comprovou as órbitas cônicas dos corpos celestes e as três leis que descrevem o comportamento dos corpos em movimento: Inércia, Mecânica e Ação e Reação; Gauss usando as leis de Newton calculou a órbita de um cometa prevendo quando seria sua próxima aparição; John Couch Adams e Urbain Le Verrier descobriram o planeta Netuno através de uma previsão matemática e da observação de perturbações *na órbita de Urano que só poderiam ocorrer pela força gravitacional de outro corpo celeste exercida sobre o planeta Urano.* (OLIVEIRA, [2008-2012]).

c) *São elas: circunferência, elipse, parábola e hipérbole. São chamadas de cônicas porque originam de diferentes cortes feitos num cone duplo.*

d) *Kepler a partir de suas observações, concluiu que as órbitas dos planetas são elipses com o sol em dos focos e Newton, a partir da sua teoria gravitacional, que a órbita de qualquer corpo celeste sujeito à atração gravitacional do sol é uma das três cônicas. Nos casos da elipse e da circunferência, a órbita é fechada e periódica. Nos casos da hipérbole e da parábola é aberta e não periódica.* (OLIVEIRA, [2008-2012])

Atividades da seção 4.2

ATIVIDADE 1: Construção da elipse com dobraduras

Figura 65: Construção da Elipse por dobradura

a) *O nome dado a essa curva é elipse.*

b) *Construção geométrica.*

c) *O segmento OX tem a mesma medida que A_1A_2, ou seja, $PF_1 + PF_2 = A_1A_2$.*

d) *Elipse é o lugar geométrico dos pontos P cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual à distância entre A_1A_2.*

ATIVIDADE 2: Construção da Hipérbole com dobraduras

Figura 66: Construção da Hipérbole por dobradura

a) Damos o nome de Hipérbole.

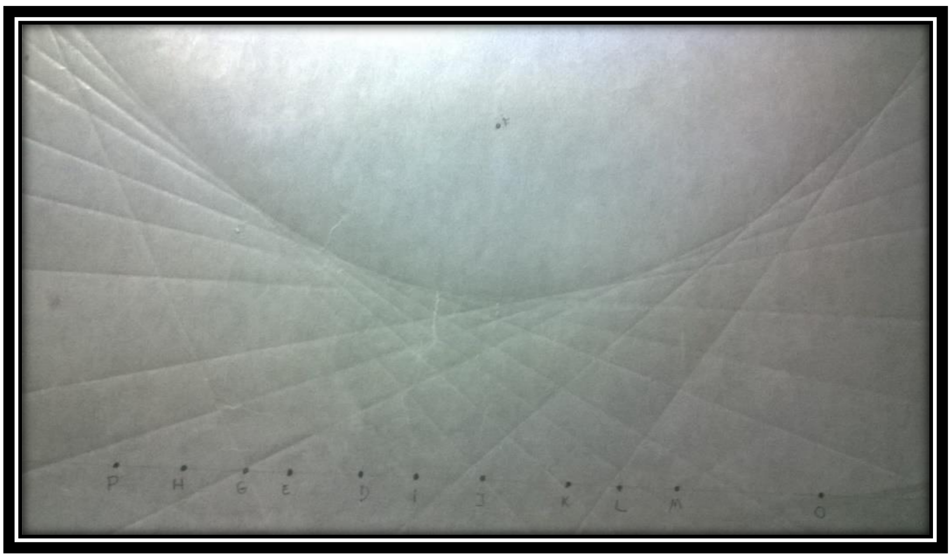
b) Construção Geométrica.

c) O segmento OX é a diferença entre as medidas dos segmentos PF_1 e PF_2, isto é, $|PF_1 - PF_2| = A_1A_2$.

d) Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual à distância entre A_1 e A_2.

ATIVIDADE 3: Construção da parábola com dobradura

Figura 67: Construção da Parábola por dobradura



a) Damos o nome de Parábola.

b) Construção Geométrica.

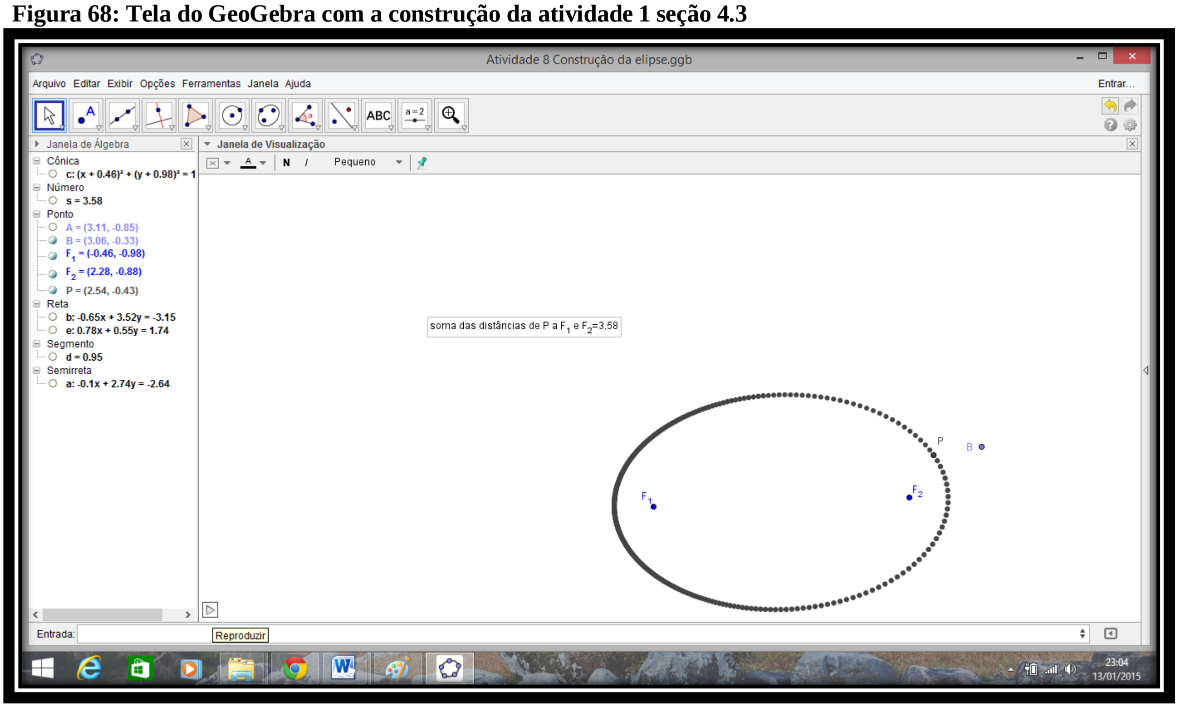
c) Observamos que $PF = PO$.

d) Parábola é o lugar geométrico dos pontos P equidistantes do ponto F e da reta d diretriz da parábola.

Atividades da seção 4.3

ATIVIDADE 1: Construção da Elipse

Figura 68: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 1 seção 4.3



3.a) Obtivemos uma elipse.

3.b) O valor da soma é constante.

3.c) Elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante e esta constante deve ser maior que a distância entre os dois pontos fixos.

Para solucionar o problema proposto pelo proprietário da casa que João Carlos está projetando, basta que ele construa o jardim em forma de elipse com os focos na posição dos drenos e eixo maior igual a 4, ou seja, 2a=4.

4.a) Vide proposição 5.2.

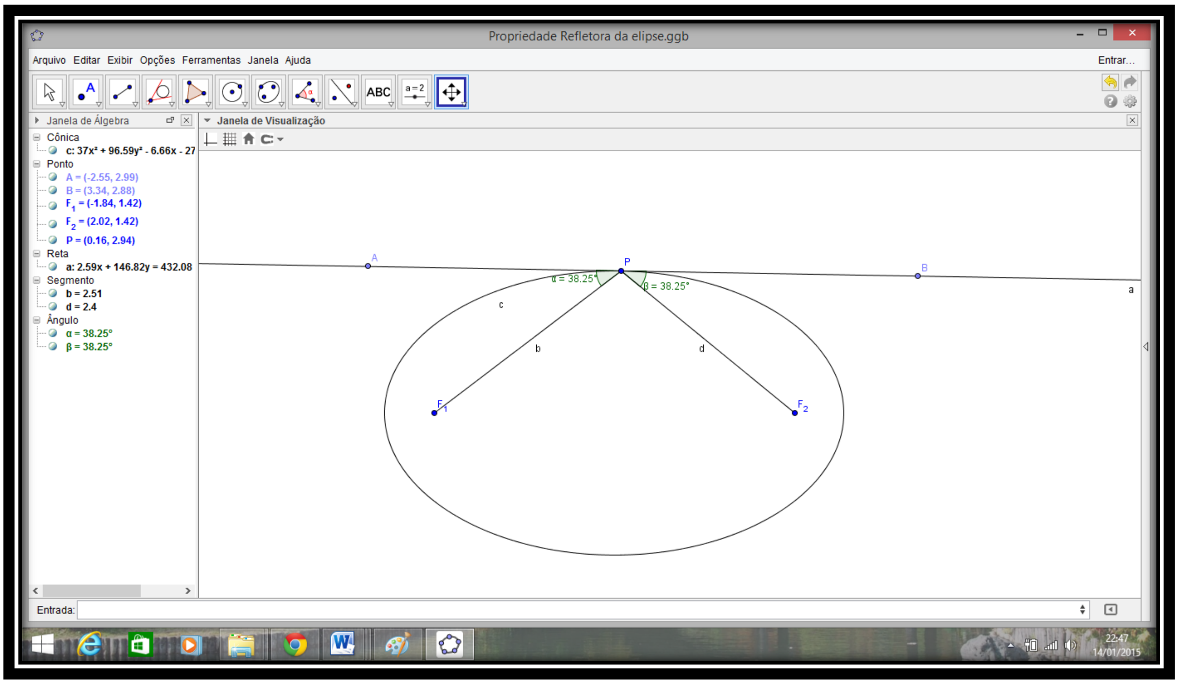
4.b) Vide proposição 5.3

4.c) Vide seção 5.3.2

4.d) Vide seção 5.3.3

ATIVIDADE 2: Propriedade Refletora da Elipse

Figura 69: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 2 seção 4.3



3.a) Podemos observar que os ângulos são iguais.

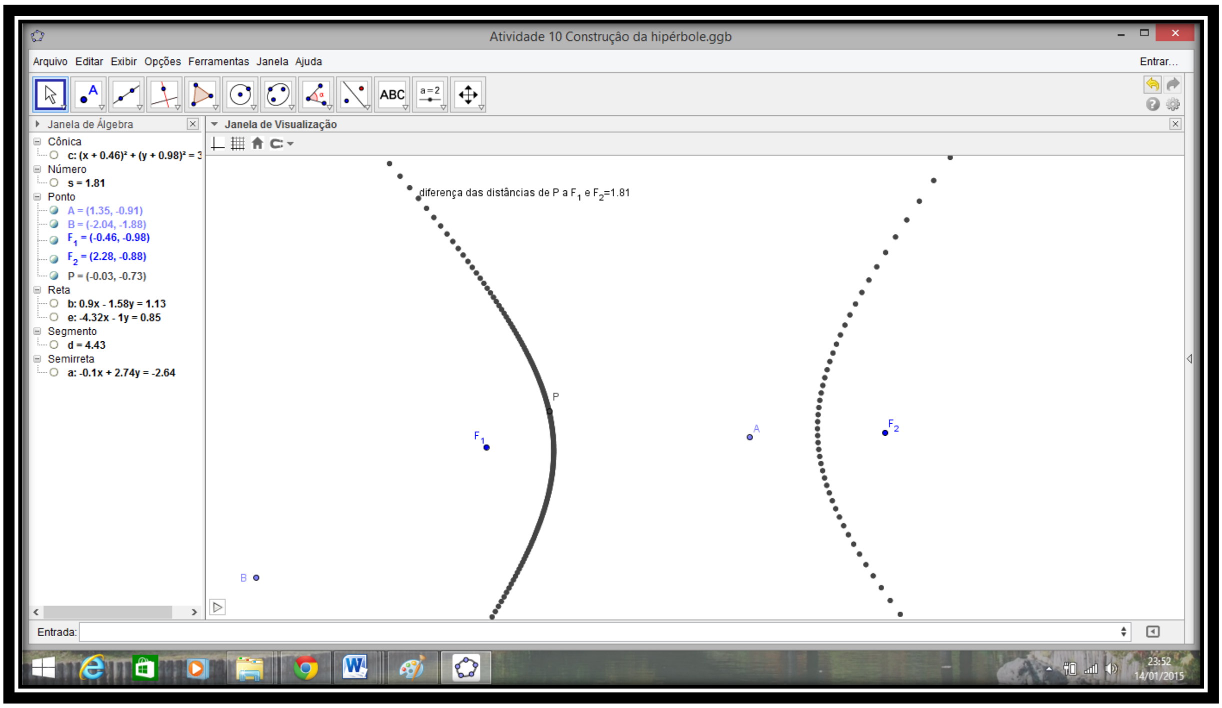
3.b) Sim, ou seja, os ângulos continuam iguais independentes da posição do ponto P na elipse.

3.c) Seja t uma reta tangente à elipse no ponto P, então os ângulos entre a reta t e as retas que unem P aos focos F_1 e F_2 são congruentes.

As salas de sussurro ou salão oval são construções de forma oval onde estão assinalados, no chão, dois pontos. Duas pessoas em pé, uma em cada um desses pontos, podem ser comunicar em voz sussurrada sem que sejam ouvidas no restante da sala. Isso é possível graças a propriedade refletora da elipse. Essas salas são projetadas de tal modo que os dois pontos fixados ficam na altura da cabeça das pessoas e toma-se uma elipse que admita esses pontos como focos e a sala são construídos de modo que qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse. Como a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos é constante, então todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos, ao se refletirem nas paredes da sala, terão percorrido a mesma distância ao chegar ao segundo foco e a propriedade refletora garante que todo som emitido em um dos focos se dirigirá ao outro foco após a reflexão. Assim, associando-se essas duas propriedades, podemos concluir que todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos *chegarão ao mesmo tempo no outro foco, o que proporciona uma amplificação do som, tornando-se possível a comunicação entre as duas pessoas.* (VALLADARES, 1998)

ATIVIDADE 3: Construção da hipérbole

Figura 70: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 3 seção 4.3



3.a) *Obtivemos uma hipérbole*

3.b) *Podemos observar que é constante.*

3.c) *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante e esta constante deve ser menor que a distância entre os dois pontos fixos. Para atender a exigência do prefeito, basta que o arquiteto dê a praça o formato de uma hipérbole com focos nas duas árvores que não pode ser retirada da praça e a região entre os dois ramos fica sendo o passeio por onde as pessoas poderão andar pela praça.*

4.a) Vide proposição 5.4.

4.b) Vide proposição 5.5.

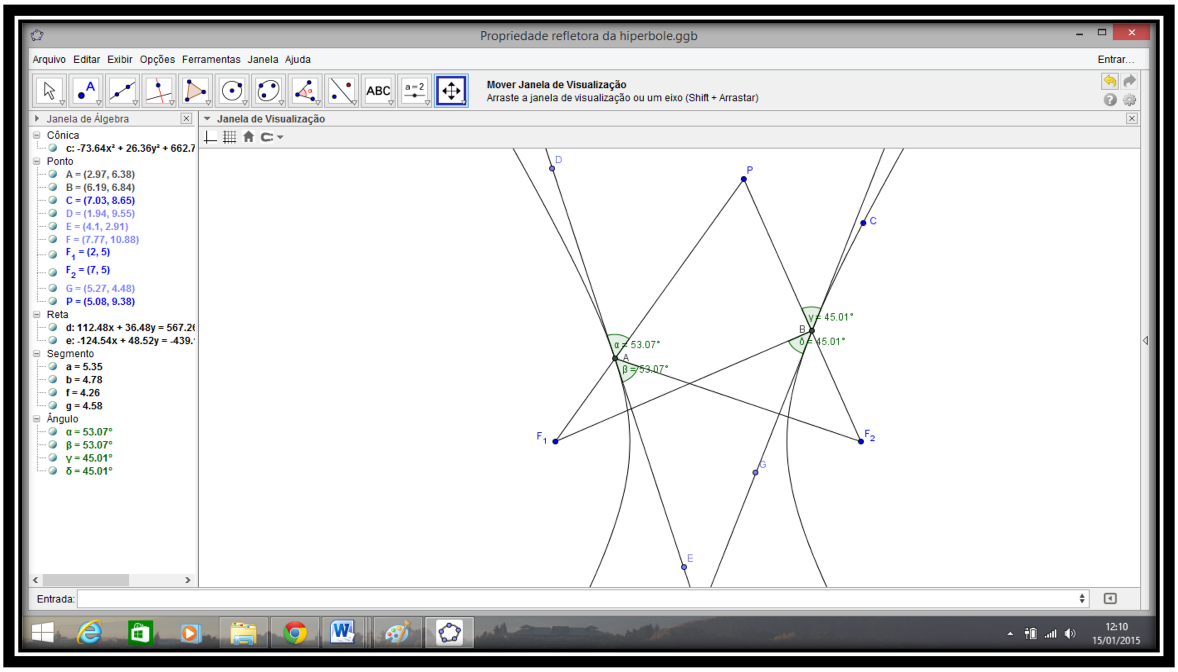
4.c) Vide seção 5.3.2

4.d) Vide seção 5.3.3

4.e) Vide seção 5.3.3

ATIVIDADE 4: Propriedade Refletora da Hipérbole

Figura 71: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 4 seção 4.3



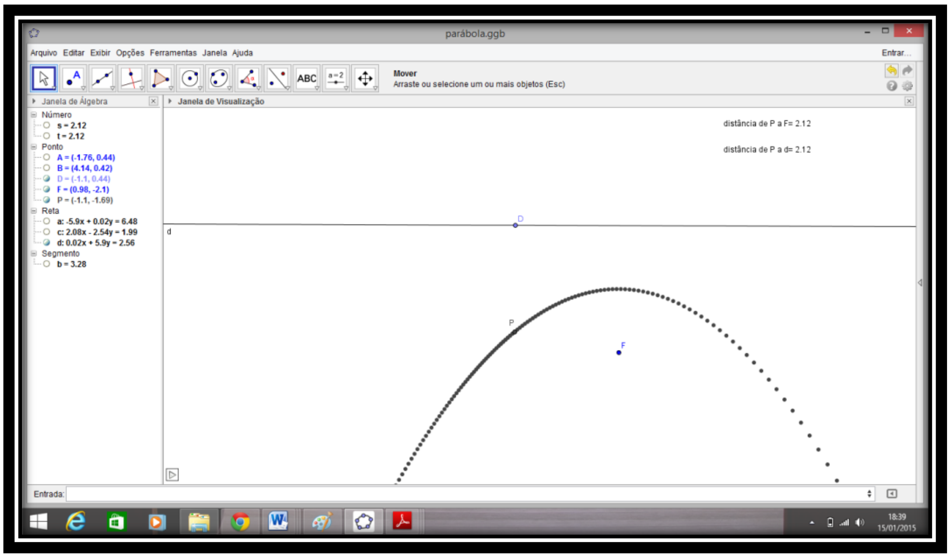
2.a) Os pares de ângulos são congruentes.

2.b) Sim, independente da posição do ponto P os ângulos são sempre congruentes.

2.c) Seja t uma reta tangente à hipérbole no ponto P, então os ângulos entre a reta t e as retas que unem P aos focos F_1 e F_2 são congruentes.

ATIVIDADE 5: Construção da Parábola

Figura 72: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 5 seção 4.3



2.a) Forneceu-nos uma parábola.

2.b) Podemos afirmar que as distâncias são iguais.

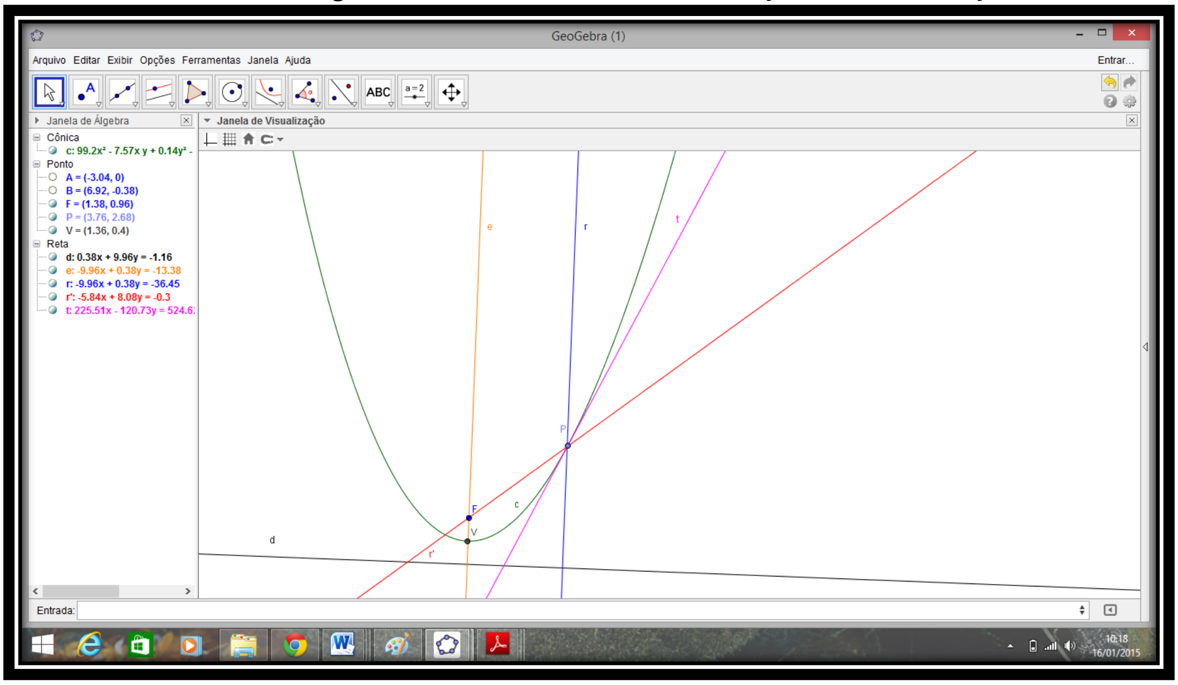
2.c) Parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam do ponto F e da reta d.

3.a) Vide seção 5.3.2.

3.b) Vide seção 5.3.3.

ATIVIDADE 6: Propriedade Refletora da Parábola

Figura 73: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 6 seção 4.3



3.a) A reta r' passa pelo foco da parábola, isto é, pelo ponto F.

3.b) As retas r' e e são paralelas, independentes da posição do ponto P.

3.c) As três retas são coincidentes.

3.d) Toda reta que incide em um ponto pertencente à parábola, paralelamente ao seu eixo, reflete pelo foco da parábola.

Os sinais que recebemos dos satélites são muito fracos, devido a distância da Terra. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam amplificados. Sabendo que os sinais dos satélites propagam-se em linha reta, apesar de que isso não é absolutamente verdadeiro, mas para um observador da Terra podemos admitir como tal, a antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos para um único ponto, sendo, portanto, a parabólica a que possui tal propriedade. (WAGNER, 1997)

ATIVIDADE 7: Caracterização Geral das Cônicas

Figura 74: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (elipse)

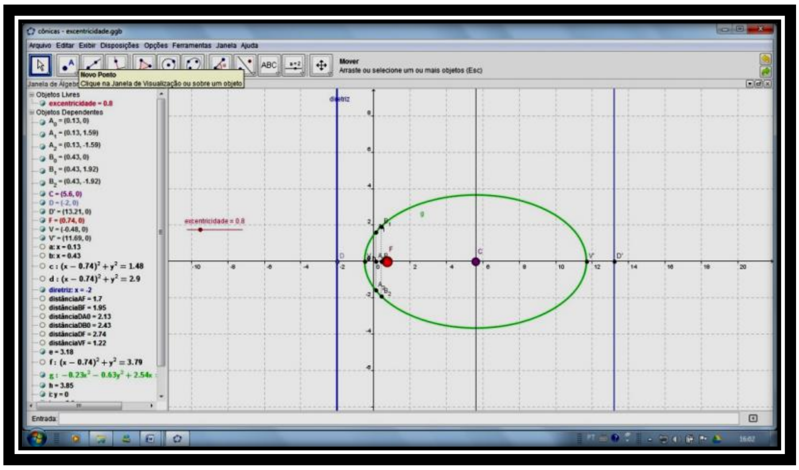


Figura 75: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (hipérbole)

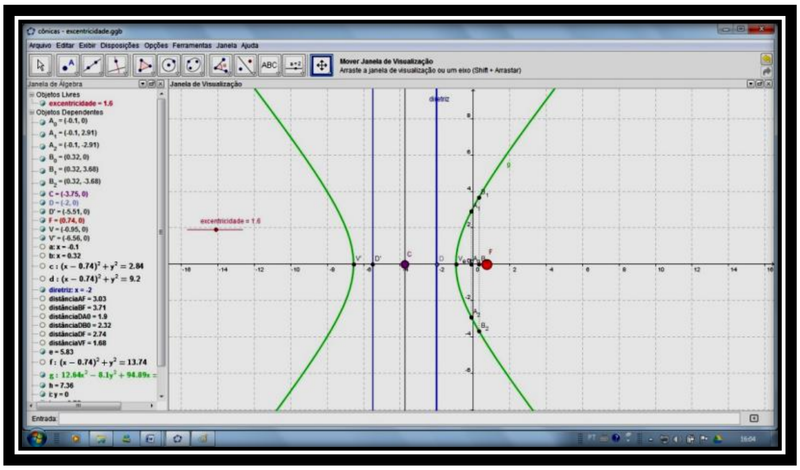
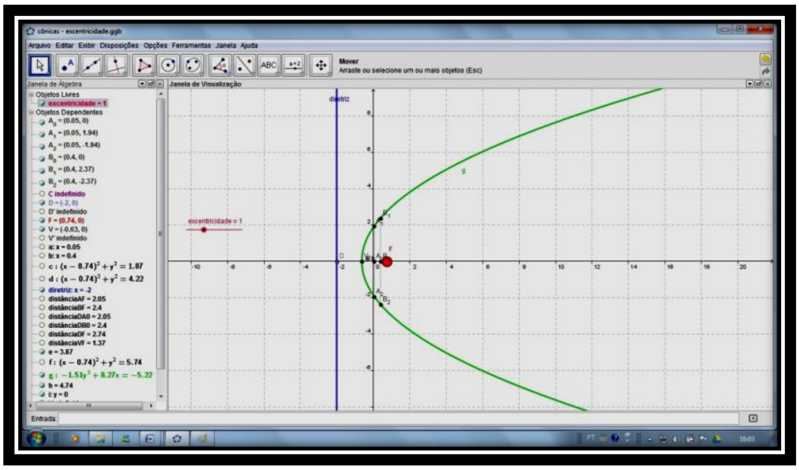


Figura 76: Tela do GeoGebra com a construção da atividade 7 seção 4.3 (parábola)



2.a) Quando o controle excentricidade assume valor entre zero e um obtemos a elipse, valor igual a um a parábola e maior que um, a hipérbole.

2.b) A razão entre estas medidas é igual à excentricidade.

2.c) Sim, continua válida.

3.a) Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P cuja razão entre as distâncias de P a F e entre P e r é uma constante real positiva. Esta constante é chamada de excentricidade da cônica.

3.b) Vide seção 5.3.7.