UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E MÚSICA: UMA PROPOSTA DE MODELAGEM

PALMAS

2014

LENIEDSON GUEDES DOS SANTOS

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E MÚSICA: UMA PROPOSTA DE MODELAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre – Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz

PALMAS

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

L864m Santos, Leniedson Guedes dos
Progressões Geométricas e Música: Uma Proposta de Modelagem / Leniedson Guedes dos Santos. - Palmas, 2014.
62f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, 2014.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr.Pedro Alexandre da Cruz.

1. Progressões. 2. Música. 3. Modelagem Matemática. I. Cruz, Pedro Alexandre. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 516.24

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2 / 1309
TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Leniedson Guedes dos Santos

Progressões Geométricas e Música: Uma Proposta de Modelagem

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em matemática

Trabalho aprovado. Gurupi - TO, 17 de outubro de 2014:

Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz
Orientador

Professor Dr.
Crystian de Assis Siqueira

Professora Dra.
Lady Sakay

Gurupi - TO
Outubro - 2014

Dedico esse trabalho a toda minha família, personificada no nome de Elias Barbosa Guedes,às pessoas que mais contribuíram para que esse sonho fosse realizado, a Alice Guedes, Ainda Guedes Corado e suas maravilhosas famílias que me acolheram muito bem em suas casas e, pincipalmente, a Lenir Barbosa Guedes a quem devo tudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. A CAPES, a SBM e a UFT por terem viabilizado o mestrado. Ao professor Dr. Pedro Alexandre da Cruz pela grande contribuição em minha formação, tanto como professor como orientador. Aos meus colegas de mestrado pelas grandes amizades que fiz principalmente a cúpula do norte-nordeste da classe: Francisco Cláudio (CE), Welington Brás (PB), Tiago Beirigo Lopes (PA) e ao intruso da turma do nordeste Flávio Noleto (GO). Agradeço também a meus colegas e professores UNEBianos da graduação, principalmente a Sóstenes Souza, Rosemar Almeida, Ápio Rodrigo, Darlan Regis, Lúcio Coité e Marcos André Teles,Valdemiro Carlos e Taise Meneses.

Aos meus amigos de todas as horas, principalmente a Flávio Santos, Maurílio Messias Bomfim, Paulo Messi e Anderson Alves. A minha namorada Carolina Diamantino, pelo amor e paciência, a meu pai, Elson dos Santos, e mais uma vez à Lenir Barbosa Guedes por tudo.

"A utopia está lá no horizonte. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: Para que eu não deixe de caminhar."

Eduardo Galeano

RESUMO

O presente trabalho é voltado principalmente para os professores de matemática do ensino médio e tem como objetivo propor uma atividade didática que utilize a relação entre a matemática e a música para auxiliar no ensino das progressões geométricas, na medida em que se apresenta uma aplicação para tal conteúdo, utilizando para isso a metodologia de ensino denominada modelagem matemática. Dessa forma, será apresentado primeiramente um estudo sobre os conceitos e os aspectos de ensino das progressões geométricas, para em seguida apresentarmos uma breve explicação sobre a relação histórica entre alguns conteúdos de matemática, inclusive as progressões, e a música. Posteriormente exibiremos a metodologia da modelagem matemática, utilizada apropriadamente para este trabalho, explicitando suas etapas (a interação, a matematização, a resolução e interpretação, e a validação dos dados), e, finalmente, concluímos com uma proposta de atividade didática onde se aplica as progressões geométricas para modelar uma situação problema de natureza musical através de uma oficina.

Palavras-chave: Progressões, Música, Modelagem Matemática.

RESUMEN

El presente trabajo se centra principalmente en los profesores y los objetivos de matemáticas de secundaria para proponer una actividad educativa que utiliza la relación entre las matemáticas y la música para ayudar en la enseñanza de las progresiones geométricas, en la medida en que se presenta una solicitud de tal contenido, haciendo uso de la metodología de enseñanza llamado modelado matemático. Por lo tanto, primero se presentará un estudio sobre los conceptos y aspectos didácticos de progresiones geométricas, para ofrecer a continuación una breve explicación de la relación histórica entre algunos contenidos de matemáticas, incluyendo progresiones, y música. Más tarde vamos a mostrar la metodología de elaboración de modelos matemáticos, se utiliza adecuadamente para este trabajo, explicando sus etapas (interacción, matematización, resolución e interpretación, y la validación de datos), y finalmente concluye con una propuesta de actividad didáctica en su caso progresiones geométricas para modelar un problema de la situación de naturaleza musical a través de un taller.

Palabras clave: Progresiones, Música, Modelamiento Matemátic

ABSTRACT

The present work is focused primarily on high school math teachers and aims to propose an educational activity that uses the relationship between mathematics and music to assist in the teaching of geometric progressions, to the extent that it presents an application for such content, making use of teaching methodology called mathematical modeling. Thus, first will be presented a study on the concepts and teaching aspects of geometric progressions, to then provide a brief explanation of the historical relationship between some math content, including progressions, and music. Later we'll show the methodology of mathematical modeling, appropriately used for this work, explaining its stages (interaction, mathematization, resolution and interpretation, and data validation), and finally conclude with a proposal of didactic activity where applicable geometric progressions to model a problem of musical nature situation through a workshop.

Keywords: Progressions, Music, Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1INTRODUÇÃO

O presente trabalho é voltado para estudantes de matemática e principalmente para professores do ensino médio, na medida em que possam utilizar a música na sala de aula a fim de despertar o interesse dos alunos para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos.

Será utilizada nessa abordagem uma metodologia de ensino conhecida como modelagem matemática. Essa metodologia é muito adequada quando se trabalham problemas de diversas áreas do conhecimento, mas que demandem a aplicação da matemática para resolvê-los.

Por sua dimensão abstrata, a matemática é a área de conhecimento em que os estudantes mais têm dificuldade para compreender. As metodologias de ensino baseadas apenas no conhecimento livresco e pouco prático, só agravam a situação. Vemos que "Há uma dificuldade de relacionar o que é ensinado ao uso prático e com isso percebe-se o desinteresse e a falta de estímulo dos alunos na escola em compreender e significar o que é ensinado" (SILVA, 2009, p.15).

A matemática é utilizada constantemente pelas outras áreas do conhecimento como instrumento de validação de seus estudos. Assim a matemática se relaciona com a biologia, a física, a química, e várias outras áreas.

Utilizar a música com o objetivo de despertar o interesse dos alunos com relação a matemática é interessante já que a música é um tema muito apreciado pelos estudantes. É muito raro encontrar alguém que não aprecie nenhum gênero musical. Talvez até inexista.

Dessa maneira, a presente dissertaçãotem a pretensão de responder o seguinte questionamento: De que maneira pode-se utilizar a música para facilitar o ensino das progressões geométricas?

Aqui devemos salientar que o conteúdo matemático foi escolhido em função da atividade proposta, em forma de oficina, que encerrará este trabalho. Porém cabe o esclarecimento de que a música pode ser envolvida com diversos conteúdos matemáticos como as frações (que também são abordadas aqui), as funções trigonométricas, os logaritmos e até teoria de grupos.

Assim, será proposta uma atividade didática que utilize a música no ensino das progressões geométricas. Para isso fez-se necessário um estudo bibliográfico sobre a música e sua relação com a matemática; uma consulta a livros que tratam das progressões geométricas e de modelagem matemática; montar uma proposta de atividade utilizando a modelagem matemática como metodologia e que relacione a música com as progressões geométricas.

Portanto o trabalho foi dividido em três partes: Progressões Geométricas, Matemática e Música, e Modelagem Matemática.

No Capítulo 2 será apresentada a consulta feita a livros que tratam das progressões geométricas, mostrando conceitos importantes, pontos de vista diferentes entre autores, bem como o que dizem as Orientações Curriculares Nacionais voltadas para o ensino médio, sobre o ensino das progressões.

No Capítulo 3 apresentaremos primeiramente alguns conceitos físicos importantes da onda, posteriormente particularizando esses conceitos na onda sonora. Ainda neste capítulo faremos uma pequena revisão histórica mostrando a experiência pitagórica com o monocórdio, bem como a construção da escala pitagórica, passando para a escala temperada ou de temperamento igual.

No capítulo 4 faremos um pequeno resumo sobre a modelagem matemática, primeiramente como metodologia de pesquisa para depois abordarmos a sua utilização como metodologia de ensino. Apresentaremos assim uma breve conceituação em torno dos modelos, assim como as etapas do processo de modelagem, para finalmente apresentar uma atividade de modelagem matemática envolvendo a música e as progressões geométricas.

O uso da modelagem matemática como metodologia de ensino traz as vantagens de mostrar ao aluno a utilidade da matemática, provoca a interdisciplinaridade, sugere o uso das novas tecnologias e principalmente incentiva os estudantes à pesquisa.

2PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Um dos conteúdos mais abordados em vestibulares e exames de nível médio são as progressões. Mas a grande motivação de se abordar esses conteúdos no ensino médio é que inúmeros são os exemplos de situações-problemas que são resolvidas utilizando esse conteúdo.

As progressões são vistas na matemática moderna (assim é chamada as disciplinas formais da matemática como álgebra, análise e etc. e que são estudadas apenas no ensino superior) como casos particulares de seqências. Estas por sua vez são definidas como funções cujo domínio éo conjunto dos números naturais.

Seguindo a concepção de progressões da matemática moderna definimos as sequências como uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Representaremos o valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como x_n e o chamaremos de termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência.

Assim, por exemplo, a sequência $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ pode ser representada, termo a termo, como $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 8, x_4 = 16, \dots, x_n = 2^n$. Para fins didáticos não utilizamos o zero. Temos que o termo geral dado por $x_n = 2^n$ foi obtido indutivamente, porém, tendo em vista a definição, não será em toda sequência que isso será possível.

Em particular podemos definir a progressão aritmética como:

> Uma sequencia de números $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r. Assim uma progressão aritmética de razão r é uma sequencia (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$, para todo n natural. (MORGADO; SANI; WAGNER, 2001, p.1)

As progressões aritméticas poderão ser representadas como funções de domínio natural. Tais funções são chamadas de discretas por terem como domínio um conjunto de pontos.

Para início definiremos a função afim: "Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando cada $x \in \mathbb{R}$estiver associado o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$”. (IEZZI; MURAKAMI, 1977, p.96)

Resumidamente:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to ax + b, a \neq 0$$

Cabe aqui uma observação importante. Pela definição acima, são excluídas da classificação da função afim o caso em que a função é constante, ou seja,$f(x) = b$, já que aparece na definição a condição $a \neq 0$. Essa restrição não é feita por todos os autores.

Entendemos que qualquer classificação atende a um determinado objetivo, e a classificação sugerida pela definição acima se faz necessária se usarmos como critério o grau dos polinômios que definem as funções polinomiais, sendo, portanto diferente a função constante (de grau zero) e a função afim (de grau um). O aprofundamento desse tema não é objetivo desse trabalho.

Assim, de acordo com as características das funções afins e exponencial poderemos associá-las as progressões aritméticas e geométricas, respectivamente. Para isso enunciaremos os teoremas das caracterizações de tais funções.

Teorema da caracterização da função afim:

"Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim." (CARVALHO*et al.*, 2006, p.100)

Com relação ao teorema acima, cabe ressaltar que as hipóteses "monótona e injetiva" podem ser substituídas pela hipótese "contínua". A escolha do autor pela primeira opção remete ao fato de se usar o conceito de limite na segunda, conteúdonão abordado no ensino médio. A demonstração desse teorema pode ser feita se utilizando do teorema fundamental das proporções e não será exposta por não cumprir com os objetivos do presente trabalho.

Essa caracterização pode ser vista em termos de um conceito matemático muito utilizado no cálculo diferencial chamado de taxa de variação. Podemos definir a taxa de variação da seguinte maneira:

"Dados $x, x+h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se a taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x+h$." (CARVALHO *et al.*, 2006, p.88)

De fato, sejam x_1 e x_2 pontos quais quer do domínio $\mathbb{R}$ da função afim dada pela equação $f(x) = ax + b$. Assim teremos:

$f(x_1) = ax_1 + b$e$f(x_2) = ax_2 + b$. Obteremos dessa maneira:

$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$, logo

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Será aberto um parêntese agora para que seja feito outro importante esclarecimento. As palavras "taxa de variação" e "taxa de crescimento", ao contrário do que sugere acima a obra citada, não serão utilizadas como sinônimo nesse trabalho. Isso porque definiremos futuramente um conceito de taxa de crescimentocompletamente diferente da citada acima.

Assim podemos afirmar que uma função afim é aquela em que a taxa de variação é constante. Essa taxa de variação coincide com o coeficiente a da função. Por sua vez o coeficiente b desta função representa a imagem dessa função para $x = 0$. Essas informações são fundamentais para que as situações-problemas sejam modeladas de forma adequada em relação à função afim.

Contrariamente ao que é recomendado por diversos autores, Como Eduardo Wagner (2006) e Paulo César Morgado (2006), o tratamento que comumente é dado na escola no estudo de funções se restringe ao estudo das equações algébricas que asrepresentam. Assim a prática escolar vigente ignora a importância da caracterização das funções, fazendo com que o discente tenha uma visão restrita do comportamento das funções e sintam dificuldades em encontrar a função que melhor representa os problemas estudados.

> A fim de saber qual o tipo de função que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Esse processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. Sem tal conhecimento é impossível aplicar satisfatoriamente os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia-a-dia como nas aplicações da Matemática às outras ciências e à tecnologia. (CARVALHO *et al.*, 2006, p.1)

Uma observação útil do teorema da caracterização da função afim é que se ao invés de uma função cujo domínio é real, tivermos uma função de domínio natural veremos que a imagem desta formará uma progressão aritmética, já que a sequência de números cuja diferença é constante caracteriza este tipo de progressão.

Como uma progressão aritmética pode ser abordada, do ponto de vista geométrico, como um conjunto de pontos $(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots)$igualmente espaçados em uma reta, ou seja $x_{i+1} - x_i = h$. Se considerarmos uma função afim cujo domínio é essa progressão temos que: $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) = ah$. Como a e h são constantes, temos que a imagem $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots)$ também é uma progressão aritmética.

Reciprocamente, podemos afirmar que se uma função monótona $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma uma progressão aritmética em outra, esta será uma função afim.

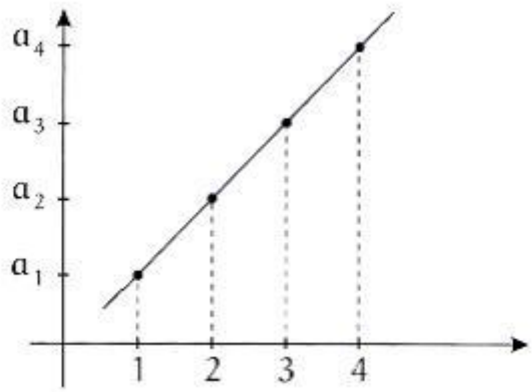

Figura 1 - Funções Afins e Progressões Aritméticas
Fonte: (MORGADO; SANI; WAGNER, 2001, p.6).

É célebre a história de que Carl F. Gaus (1777 - 1855), grande matemático alemão, com apenas sete anos de idade deduziu a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. O professor dele pediu à classe que calculasse a soma dos números naturais de 1 a 100 em seus cadernos. Esperando que o trabalho das crianças demorasse pelo menos uma hora, este foi surpreendido pelo menino Gaus que em minutos apresentou a resposta: 5050. Maior foi sua surpresa ao descobrir que o menino estava correto. O pequeno Gaus percebeu que nesta sequencia se somasse o primeiro termo e o último, o segundo com o penúltimo, O terceiro com o antepenúltimo e assim por diante, encontraria o mesmo resultado: 101. De fato, $1+100=2+99=3+98=\cdots=49+52=50+51=101$. Assim, bastaria multiplicar esses resultados pela quantidade de soma, que por sua vez seria a metade da quantidade de termos: 50. Esse raciocínio se verifica para qualquer progressão aritmética, originando a fórmula da soma de seus termos: $\frac{(a_1+a_2)n}{2}$.

Da mesma forma que fizemos com a progressão aritmética podemos definir uma progressão geométrica e associá-la com uma função exponencial.

Uma progressão geométrica seria assim definida como: "uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por q e chamado razão." (MORGADO; SANI; WAGNER, 2001, p.8)

Se definirmos taxa de crescimento como a razão entre a variação de uma grandeza e seu valor inicial veremos facilmente que uma progressão geométrica é uma sequência cuja taxa de crescimento é constante. No exemplo anterior vimos que sua taxa de crescimento é um, ou $100\ \%$. O que significa que cada termo é exatamente o dobro do anterior.

Utilizamos esse conceito de taxa de crescimento por acreditarmos mais adequado do que igualá-lo ao conceito de taxa de variação. Vamos a um exemplo. Seja a função exponencial

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 2^x$$

Consideremos os pontos $(3,8)$ e $(5,32)$. Temos que a taxa de variação entre esses pontos é $\frac{32-8}{5-3} = 12$. O que significa que ouve uma variação de 12 por unidade. Já a taxa de crescimento seria de $\frac{32-8}{8} = 3$. O que significa que o valor inicial, oito, cresceu 300%.

Definiremos a função exponencial como:

> Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$: 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^1 = a$; 3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$. (CARVALHO*et al.*, 2006, p.178)

Cabe registrar que o conjunto $\mathbb{R}^+$ é definido pelo autor como $\{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

É importante observar se uma função que tem a propriedade 1) então ela não pode assumir o valor 0. Se isso fosse verdade teríamos uma função identicamente nula. Com efeito, se existisse um x_0 tal que $f(x_0) = 0$ então para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$.

Também por conta da propriedade 1) temos que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito: $f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$.

Outra observação importante é que a definição acima é feita com o seu contradomínio o conjunto $\mathbb{R}^+$. Poderíamos sem sombra de dúvidas definir a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, porém a definição acima nos dá a vantagem de ter uma inversa, no caso a função logarítmica.

Se a função f tem as propriedades 1) e 2) acima, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$.

Obviamente podemos estender essa definição para $x \in \mathbb{R}$.

Enquanto isso a propriedade 3) afirma que se $a > 1$ a função é crescente e se $0 < a < 1$ a função é decrescente.

O livro citado acima ainda apresenta mais três propriedades importantes sobre as funções exponenciais: 4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definido por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente; 5) A função exponencial é contínua; e 6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.

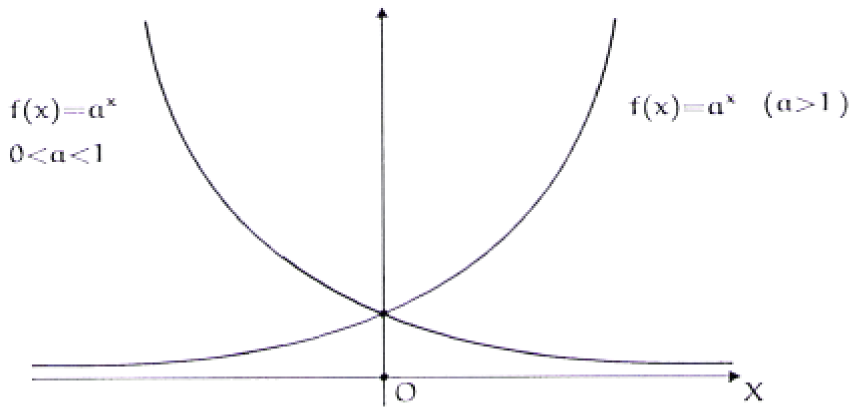

Figura 2 - Funções Exponenciais
Fonte: (CARVALHO*et al.*, 2006, p.182).

Da mesma forma das funções afins, podemos enunciar a caracterização da função exponencial.

Teorema da caracterização da função exponencial:

"Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva, as seguintes informações são equivalentes: 1) $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e todo $x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$; 3)$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$." (CARVALHO *et al.*, 2006, p.183)

Destacamos também que a hipótese "monótona" e "injetiva" pode ser substituída pela hipótese "contínua". Mais uma vez não demonstraremos esse teorema, pois envolvem conceitos que perpassam os objetivos desse trabalho. Porém reafirmamos que estes teoremas da caracterização são muito importantes para que se possa modelar um fenômeno. Somente através das características das funções pode-se escolher o modelo que melhor represente a situação real que se deseja estudar.

Assim, percebemos que a função exponencial se caracteriza principalmente por transformar somas em produto. Dessa maneira, se tivermos uma sequência de números igualmente espaçados no domínio de uma função exponencial (e, portanto, uma progressão aritmética) veremos que, pela propriedade referida, teremos como imagem desses números, valores que se dispõe em uma progressão geométrica.

De fato, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do tipo $f(x)ba^x$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, temos que:

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2} = ba^{x_1+h} = ba^{x_1} \cdot a^h,$$

$$f(x_3) = ba^{x_3} = ba^{x_2+h} = ba^{x_2} \cdot a^h, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n} = ba^{x_{n-1}} \cdot a^h, \ldots$$

Ou seja, temos uma progressão geométrica de razão a^h.

A recíproca também é verdadeira, desde que se tenha uma função injetiva e monótona.

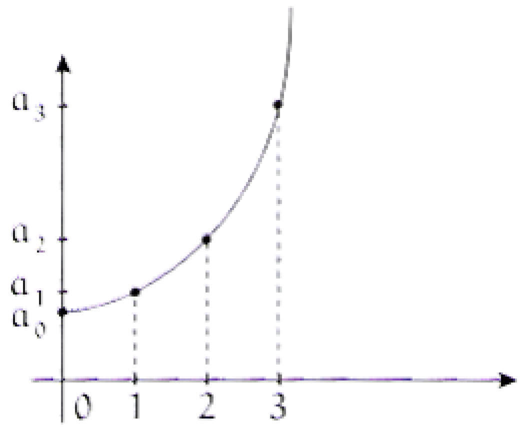

Figura 3 - Funções Exponenciais e Progressões Geométricas
Fonte: (CARVALHO*et al.*, 2006, p.32).

Uma história muito conhecida sobre as progressões geométricas é a da lenda do xadrez. Diz-se que o criador do xadrez foi agraciado por um rei com a realização de um de seus desejos em agradecimento pela sua criação. Entretanto o desejo do criador não agradou o rei que achou ser uma afronta, entre tantos pedidos que poderiam ser feitos a um rei, que o pedido tenha sido tão insignificante: Um grão para a primeira casa, dois grãos de trigo para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta e assim sucessivamente, até a última casa. Feito os cálculos pelos sábios do reino, foi constatado que com este número: 18.446.744.073.709.551.615, a safra inteira do reino não seria suficiente para que o desejo do inventor fosse realizado.

Essa abordagem utilizando propriedades que relacionam as funções com as progressões apesar de ser raros em livros didáticos do ensino médio, não só é trabalhado em livros da Sociedade Brasileira de Educação Matemática como é recomendado pelas Orientações Curriculares Nacionais.

> As progressões aritméticas e geométricas podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o

> aluno não as reconhece com funções já estudadas. Devem-se evitar a exaustiva coletânea de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo..."). (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 2006, p.75)

Além disso, outra orientação oficial que é ignorada pelos livros didáticos é a recomendação de que se trabalhe no ensino médio com a caracterização das funções para que isso facilite o discente a identificar, nas situações-problemas, qual o tipo de função que ele deve usar.

> É pertinente discutir o alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo de crescimento/decrescimento exponencial $(f(x) = a^x)$. É interessante discutirem as características desses dois modelos, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial– juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa– a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos. (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 2006, p.74-75)

No trecho acima vemos mais uma vez a "confusão" teórica entre taxa de crescimento e taxa de variação, usadas nesse caso como sinônimos. Nesse caso, os dois termos são usados no sentido de taxa de variação. Outro fato interessante para o nosso trabalho é que a todo o momento é usada a palavra "modelo" para se referenciar ao uso das funções na resolução de problemas e a recomendação da utilização destes em diversas aplicações.

Por último, vale o registro de que não é recomendado o estudo "exaustivo" de logaritmos. Isso nos dá a entender que os logaritmos devem ser trabalhados apenas na sua definição e propriedades, afim de que sejam meros instrumentos de resoluções de algumas funções exponenciais.

3MATEMÁTICA E MÚSICA

Neste capítulo iremos discutir sobre a música e a matemática relacionada a ela, desde os primeiros experimentos pitagóricos até a escala temperada, a mais utilizada hoje. Para isso começaremos abordando o fenômeno físico chamado de som.

3.1 O Som

Uma definição popular para a música é a de que ela é a arte de combinar os sons. Portanto o som é a matéria prima da música e por isso se faz necessário compreender o som e suas propriedades antes de estudarmos a música em si.

> O som é a propagação de uma frente de compressão mecânica ou ONDA MECÂNICA; esta onda é longitudinal e se propaga de forma circuncêntrica apenas em meios materiais (sólidos, líquidos ou gases). Não é possível perceber o som, se não existir um meio material entre o corpo que exerce pressão em algum meio e propaga-se por esse meio em forma de ondas. (PRADO, 2013, p.87)

A seguir iremos discutir sobre algumas propriedades do som, inicialmente algumas propriedades das ondas em geral para em seguida discutirmos as propriedades específicas do som.

Cabe a observação de que algumas propriedades do som como a tridimensionalidade de sua onda ou a longitude de sua propagação no ar não serão abordadas. Apesar de importante, o conhecimento sobre taispropriedades não serão determinantes para o cumprimento dos objetivos do presente trabalho, cabendo aos interessados em maiores aprofundamentos pesquisá-las na literatura sobre a física.

3.1.1 Propriedades da Onda

A física estuda basicamente dois tipos de ondas: as ondas mecânicas e as ondas eletromagnéticas (existe um terceiro tipo de onda estudado pela mecânica quântica chamado de onda de matéria, mas seu estudo foge aos objetivos do presente trabalho). Ao contrário da segunda, a primeira precisa de um meio material para se propagar. As ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo, como o raiox, a luz e etc. Assim, o som é uma onda mecânica. Ele é produzido por uma vibração, e essa vibração gera, no meio de propagação, normalmente o ar, zonas de compressão e rarefação, resultando assim em uma onda.

É por isso que quase todos os instrumentos musicais produzem sons por vibrações. Normalmente os instrumentos musicais naturais são classificados em instrumentos de corda (produzem os sons ao se fazer vibrar cordas), de sopro (os sons são produzidos pela vibração de colunas de ar) e percussão (ao se fazer vibrar a pele que recobre esses instrumentos os sons são produzidos).

Dessa forma, ao se tocar em uma corda de violão esta vibrará e fará vibrar as partículas de ar que estão em volta, provocando zonas de compressão (ar comprimido) e zonas de rarefação (ar rarefeito) que se alternarão em forma de onda, de maneira que esta onda chegue a impressionar o ouvido humano.

A parte da física que estuda as ondas, e, portanto a onda sonora, é a ondulatória.

> Há ondas sonoras no ar e na água e também ondas sísmicas na crosta , no manto e no núcleo da terra. As principais características de todas as ondas mecânicas são que, além de governadas pelas leis de Newton, necessitam de meio físico como o ar, a água, uma bandeira, uma corda esticada ou uma haste de aço para existir. (HALLIDAY, 1993, p.112)

O som apresenta algumas propriedades fundamentais. Para entender essas propriedades se faz necessário antes conhecer as partes da onda.

Uma onda pode ser descrita como uma curva periódica, ou seja, uma curva cujo comportamento se repete ao longo de um período, apresentando sempre os mesmos valores de máximos e de mínimos (que chamaremos de cristas e vales respectivamente) que alternam concavidades pra cima e pra baixo, além de apresentarem uma simetria ao longo de um eixo horizontal central. Melhor do que tentar descrever uma onda é mostrá-la.

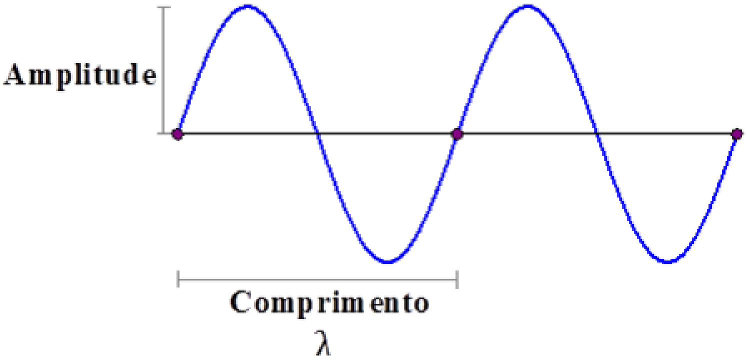

Figura 4 - A Onda
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.45).

Cabe ressaltar que a onda se propaga, ou seja, não podemos imaginar a figura acima como algo estático, mas como algo que está a oscilar.

Vemos na figura acima alguns dos elementos da onda harmônica que foram referidos anteriormente: a amplitude e o comprimento.

A amplitude de uma onda diz respeito ao valor máximo da altura da onda, ou seja, a distância entre o eixo de simetria central e sua crista ou a distância entre o eixo central e seu vale. Enquanto seu comprimento diz respeito a distância percorrida pela onda e essa distância é medida entre o seus picos ou entre os seus vales.

Outra propriedade fundamental da onda é o período. Se fixarmos um ponto numa corda (por exemplo) e balançarmos ela de modo a produzir uma onda, veremos que esse ponto se movimenta repetitivamente. O tempo gasto por esse ponto a percorrer esse padrão de repetição é que chamamos de período. Assim o período é o tempo gasto para se completar uma onda ou ciclo.

A propriedade da onda sonora que melhor será explorada nesse trabalho será a frequência. A frequência consiste no número de oscilações que se completa em um determinado período de tempo. Assim, a frequência é uma medida inversa do período. A unidade de medida que se utiliza é o hertz (Hz).

A velocidade é outra propriedade importante da onda. O som, por exemplo, possui uma velocidade que depende, entre outras coisas, do meio em que se propaga. Sua velocidade no ar é de aproximadamente 340 m/s.

3.1.2 As Propriedades do Som

Apesar de essas propriedades se referirem a qualquer tipo de onda, os sons precisam ser particularizados, pois suas características são perceptíveis e se relacionam com essas propriedades gerais das ondas. Dessa forma, costuma-se classificar como propriedades do som: a intensidade, a altura e o timbre.

3.1.2.1 A Intensidade

A intensidade diz respeito a amplitude da onda sonora. Quanto maior a amplitude da onda sonora maior será a sua intensidade. No dia-a-dia chamamos a intensidade do som de som "forte" ou som "fraco". Nos aparelhos eletrônicos podemos aumentar ou reduzir a intensidade do som através de um botão em que costuma estar escrito "volume".

Algo bastante curioso acontece com as unidades de medidas de intensidade. O ouvido humano possui uma particular propriedade de sentir a intensidade do som variar linearmente enquanto que este na verdade varia exponencialmente. Assim, ao invés de se usar a unidade de medida de intensidade do som, indicada por watt por metro quadrado (w/m^2), por conta dessa propriedade, se associa a unidade de volume a níveis de intensidade sonora. A estes níveis se utiliza a unidade decibel (Db) em homenagem a Alexander Graham Bell (1847 - 1922).

A utilização desta unidade de medida é explicada da seguinte forma:

> Há uma intensidade sonora abaixo da qual as pessoas não conseguem ouvir os sons. Esta intensidade sonora é chamada de “intensidade de referência” ou “limiar da audibilidade”. Seu símbolo é I_0. (...) Assim, todo som acima de 0dB pode ser ouvido. Dez decibels (10dB) representam um som 10 vezes mais intenso do que a “intensidade de referência”. Em outras palavras, 10dB indica uma intensidade de 10 I_0. (...)Vinte decibels (20dB) se refere a 100 vezes a intensidade de referência. Então 20dB está associado a um som de intensidade 100 I_0. Trinta decibels (30dB) relaciona-se a um som com 1.000 vezes a intensidade de referência (1.000I_0). O raciocínio pode ser repetido infinitamente. Cada vez que a intensidade sonora é multiplicada por 10, o nível de intensidade sonora aumenta 10dB. (http://www.sbfisica.org.br/v1/novopion/index.php/publicacoes/artigos/471-60-60-63)

Dessa maneira, temos que a escala em decibéis é uma escala logarítmica e sua medida pode ser representada com a utilização da seguinte fórmula: $NIS = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ com $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ e NIS significando nível de intensidade sonora. Os limites da audição humana para a intensidade do som vão de zero Db (limite de audição) a 120 Db (limiar da dor).

Outra sugestão de modelagem para funções logarítmicas seria o uso dessa escala.

Erroneamente no cotidiano se confunde a intensidade do som com a altura. Veremos o que essa última propriedade significa.

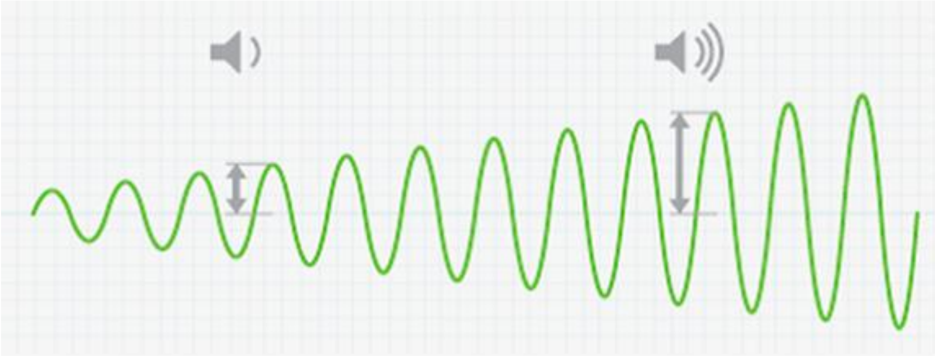

Figura 5 - A Intensidade do Som
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.46).

Na figura acima vemos uma onda sonora de mesma frequência em toda a sua extensão, e, portanto mesmo comprimento de onda, porem com uma amplitude crescente, o que indica que o som produzido por essa onda está aumentando a sua intensidade gradativamente.

3.1.2.2 A Altura

A altura diz respeito a frequência da onda sonora. Quanto maior a frequência da onda maior será a altura do som. Quanto mais alto o som mais agudo ele será e quanto mais baixo o som mais grave ele será. É muito comum o exemplo de que a voz masculina é uma voz grave, ou seja, de uma frequência mais baixa do que a voz feminina. A frequência sonora será mais bem discutida posteriormente.

Como referido anteriormente, a frequência do som é medida em hertz. Quando um som é produzido e o medidor de frequências sonoras acusa uma frequência de 440 Hz, isso significa que a onda completa 440 ciclos por segundo.

Estima-se que a audição humana consiga captar sons de 20 Hz a 20.000 Hz. Sons de frequência abaixo dessa faixa audível aos seres humanos são chamados de infrassons, enquanto que sons acima dessa frequência são chamados de ultrassons. Como há animais que possuem uma capacidade de ouvir sons mais agudos ou mais graves do que a audição humana pode perceber, como morcegos, golfinhos, elefantes e cães. Reza a lenda de que os Beatles, grupo de rock inglês, utilizaram em um de seus discos sons muito agudos para que apenas os cães dos ouvintes pudessem perceber.

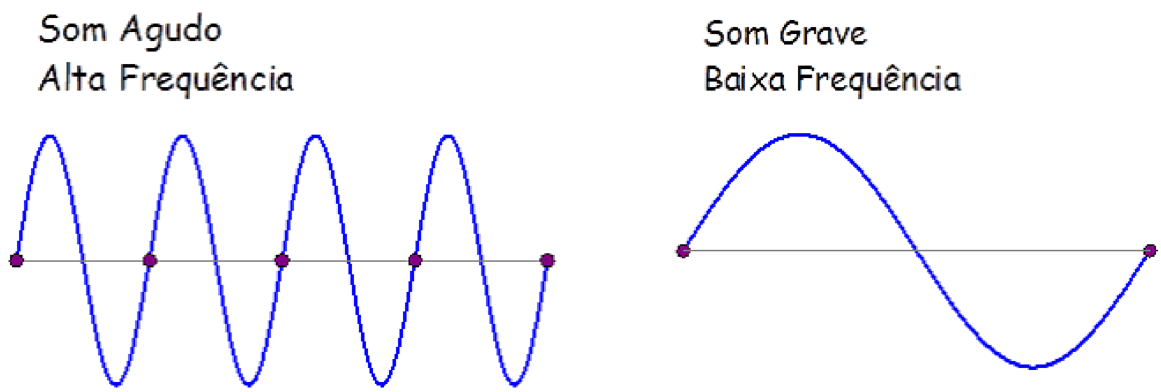

Figura 6 - Som Grave e Som Agudo
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.46).

Vemos na figura acima uma onda de maior frequência à esquerda e, portanto, menor comprimento de onda, enquanto que à direita vemos uma onda com menor frequência e com um maior comprimento de onda. Assim essa figura representa um som alto à esquerda (mais agudo) e um som baixo à direita (mais grave).

3.1.2.3 O Timbre

A última propriedade a ser abordada é o timbre. O timbre é conhecido popularmente como "a cor do som" e representa a propriedade de identificarmos o instrumento que está produzindo a nota, ou seja, se uma flauta e um violino produzirem a mesma nota, de mesma altura, identificaremos o instrumento pelo seu timbre característico.

Quando alguém diz que a voz de algum cantor é bonita, este está se referindo ao timbre de voz do cantor.

As ondas sonoras produzidas pelos instrumentos musicais não são puras como os exemplos acima. Elas possuem uma série de pequenas frequências sonoras embutidas que chamamos de harmônicos. São esses harmônicos que compõe a nota que diferencia uma nota lá 440 Hz produzida pelo piano da mesma nota produzida por uma flauta, por exemplo.

> Toda nota musical, ao ser tocada num instrumento qualquer, fornece não apenas um som puro, mas uma série de frequências sonoras que, soando em sequência, produzem a característica que nos permite identificar a fonte sonora: o timbre. Essa série de sons é chamada de série harmônica. Quando se ouve uma nota, numa determinada frequência, na verdade, ouve-se também uma série de outras frequências secundárias mais agudas que a principal, que não podem ser percebidas isoladamente. Esse conjunto de sons é 'interpretados' por nossos ouvidos como

> sendo o timbre que caracteriza o instrumento musical (a fonte). (PEREIRA, 2013, p.55)

Quando tocamos uma corda, ela vibra primeiramente em toda a sua extensão, e depois efetua uma série de vibrações, mas não na corda inteira e sim em sua metade, na terça parte, quarta parte e assim por diante, Essas vibrações posteriores éque produzem os harmônicos.

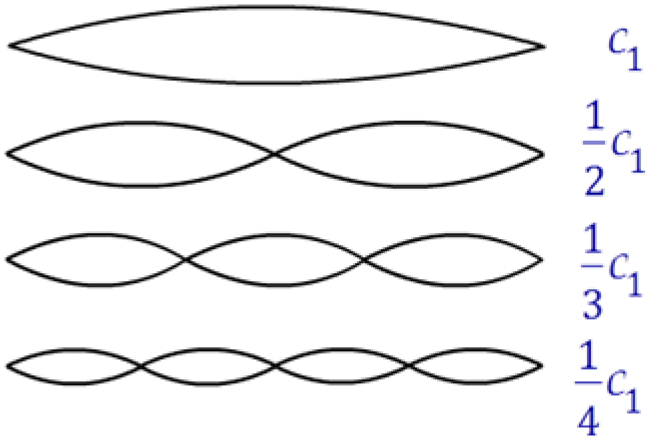

Figura 7 - Vibrações de uma Corda
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.56).

Assim, nenhum instrumento musical apresenta um som puro, mas sim cheio de pequenas oscilações chamadas de harmônicos. Como é fácil perceber na figura acima, primeiramente a corda c_1 vibra integralmente, para depois se dividir e vibrar apenas as suas metades, posteriormente ela se divide em três partes para que elas comecem a vibrar e assim por diante. O resultado dessa sequência de vibrações é uma onda não pura ou composta, resultado da soma das ondas de seus harmônicos que, obviamente, são mais agudos do que a nota original.

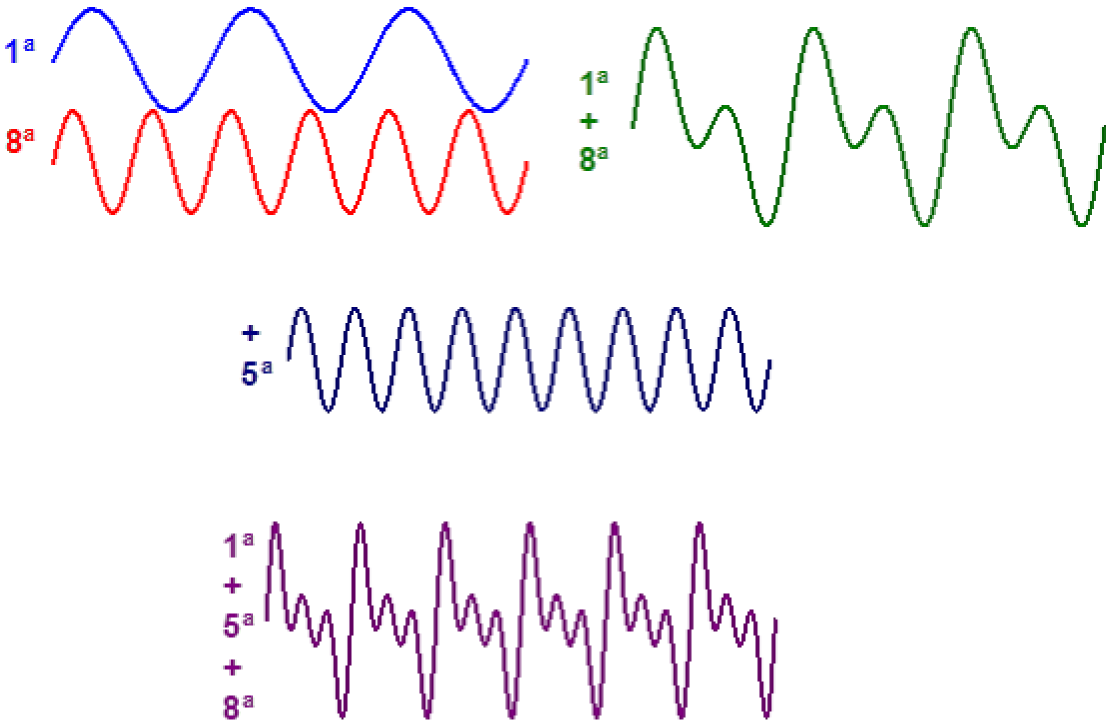

Figura 8 - Composição de Ondas
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.55).

A figura acima mostra o resultado dessa composição de ondas. Estamos aqui chamando de 1ª a onda pura da nota emitida. Já a 5ª e a 8ª são frequências que se relacionam com a primeira em 3/2 e o dobro de sua frequência respectivamente (essa nomenclatura de intervalos de frequência será abordada com mais atenção na próxima seção).

O mesmo fenômeno ocorrido com a corda c1 ocorre com o som produzido por um instrumento qualquer. Assim, o que diferencia o som da mesma nota tocada por instrumentos diferentes são a intensidade dos harmônicos.

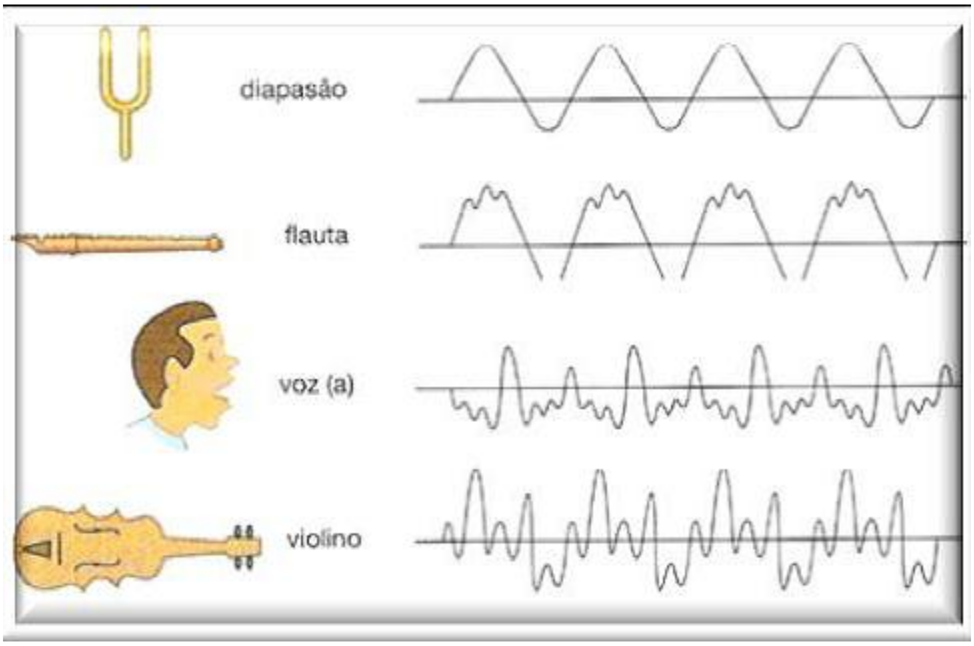

Figura 9 - O Timbre
Fonte: (PRADO, 2013, p.88).

Na figura acima vemos o exemplo de timbres de diferentes instrumentos. Percebemos que o som do diapasão é o que mais se aproxima de uma onda sonora pura. Vemos que a flauta tem em suas ondas formas mais arredondadas o que indica que os harmônicos de maior intensidade são harmônicos inferiores, ou seja, de baixa frequência, enquanto que o violino tem em suas ondas formas mais pontiagudas, o que indica que os harmônicos de maior intensidade nesse instrumento são os harmônicos superiores (os mais agudos).

Tendo em mente as propriedades do som, podemos agora abordar diretamente a música e suas relações com a matemática.

3.2 A Música

Neste item mostraremos a utilização da matemática na construção de duas das mais conhecidas escalas musicais: a escala pitagórica e a escala temperada.

3.2.1 A Experiência de Pitágoras

A relação entre a música e a matemática é conhecida desde os primórdios desses dois produtos culturais. Uma das primeiras experiências que se tem notícia, foi a de Pitágoras de Samos (570a.c-500 a.c.) com o som produzido por um instrumento chamado monocórdio.

Pitágoras esticou uma corda sobre uma caixa de ressonância e começou a tocar essa corda. Primeiramente solta e depois dividindo em frações, sempre destacando quais frações representavam sons consonantes, sons que melhor se combinam, com o som produzido pela corda solta. Com a sua experiência Pitágoras elaborou uma escala chamada hoje de escala pitagórica.

Essa experiência se deve ao fato de Pitágoras observar que a corda vibra primeiramente em sua extensão total e posteriormente em sua metade, depois em seu terço e etc. Os pontos em que a corda se divide naturalmente durante a vibração chamamos de nós, enquanto que os intervalos são chamados de ventre.

Ao colocar o traste móvel do monocórdio, ou o dedo, em um dos nós dá para visualizar perfeitamente os ventres da corda em vibração, dividindo-se assim a corda em frações da corda original.

Das frações que Pitágoras notou que produziam sons consonantes com a corda solta em seu instrumento as principais foram $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\ e\ \frac{3}{4}$.

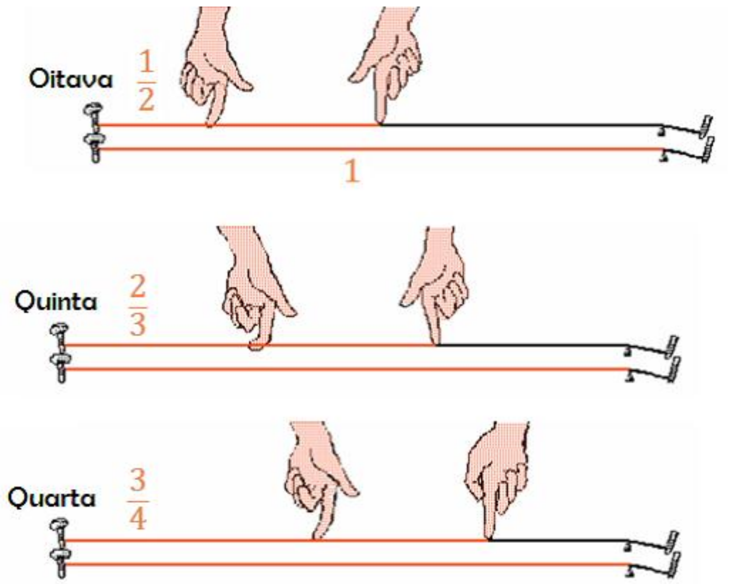

Figura 10 - O Monocórdio
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.20).

Hoje sabemos que a frequência do som gerado pela corda é inversamente proporcional ao comprimento dessa corda, ou seja, se a corda esticada gera, quando tocada, um som de 110Hz, isso significa que ao dividir a corda pela metade, essa metade gerará um som cuja frequência é de 220 Hz. A esse intervalo chamamos hoje de oitava.

3.2.2 A Escala Musical

Essa experiência de Pitágoras foi muito importante para que se construísse a escala musical que conhecemos hoje. Por motivos culturais a escala mais utilizada no mundo possui 12 notas, sendo que sete delas possuem nomes próprios: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. As outras cinco notas são notas intermediárias entre o dó e o ré (dó#), ré e o mi (ré#), fá e o sol (fá#), sol e o lá (sol#) e entre o lá e o si (lá#). Ao símbolo # damos o nome de sustenido.

Construímos assim a escala cromática. Este é o nome que damos a escala de 12 notas: dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si. À escala de notas naturais:dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, damos o nome de escala diatônica.

O nome das notas, como conhecemos, devemos a influência da igreja católica durante a idade média. Estes nomes foram dados pelo monge beneditino Guido D' Arezzo (992-1050) e remetemas primeiras sílabas de cada um de seus versos do hino de São João Batista em latim.

Hino a São João	
Ut queant laxis	Para que possam, livres,
Resonare fibris	Ressoar nas fibras
Mira gestorum	Os admiráveis feitos,
Famuli tuorum	Os servos teus,
Solve polluti	Remove, do impuro
Labii reatum	Lábio, o pecado
Sancte Ioannes	Ó São João

Figura 11 - Hino a São João Batista
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.34).

Com o passar do tempo, pela dificuldade de se solfejar (entoar a música com nome das notas), a nota Ut se transformou em Dó. O si vem das iniciais de São João em latim e coincide com as iniciais das duas palavras do último verso.

Muito comum também é a notação inglesa, usada com frequência na harmonia musical, ilustrada no quadro abaixo.

Quadro 1 - Notação Inglesa

Nota	Lá	Si	Dó	Ré	Mil	Fá	Sol
Notação	A	B	C	D	E	F	G

Fonte: Autoria própria.

Aos intervalos entre duas notas consecutivas na escala cromática damos o nome de semitom, enquanto que a um intervalo de dois semitons damos o nome de tom. Dessa maneira, podemos observar que o símbolo # (sustenido) apresenta a propriedade de elevar a nota original a um semitom. Para abaixar a nota a um semitom temos um outro símbolo ba que chamamos de bemol. Assim, um Lá# equivale a uma Sib.

O que é muito importante para entender a música é que essas escalas são cíclicas, ou seja, depois da nota si, a próxima nota, um semitom mais aguda, será de novo o dó, recomeçando assim a escala. Obviamente esse novo dó, não será igual ao dó inicial, pois será bem mais agudo do que o original. Porém a audição humana o percebe quase como se fosse o mesmo som, só que mais agudo. Essa sensação se dá porque esse novo dó terá exatamente o dobro da frequência do anterior. A esse intervalo, de dó a dó, damos o nome de oitava. O nome é por causa das notas naturais que são sete.

Assim, observamos que, de fato, a frequência das notas é inversamente proporcional ao comprimento da corda, ou seja, se dividirmos a corda ao meio obteremos um som cuja frequência é o dobro da nota gerada pela corda solta.

Outro intervalo importante observado por Pitágoras é o de 2/3 de corda. Esse intervalo é muito consonante com a nota de corda solta, e por isso, foi importantíssimo para a obtenção de toda a escala. Antes de trabalharmos esse intervalo vamos entender melhor a classificação de todos os intervalos.

Musicalmente o intervalo de um semitom é conhecido como intervalo de segunda menor, enquanto que o intervalo de um tom é chamado de segunda maior. Os intervalos de terceira menor e de terceira maior são respectivamente os intervalos de um tom e meio e dois tons. O intervalo de quarta justa se refere ao intervalo de dois tons e meio, enquanto que o intervalo de quarta aumentada (ou quinta diminuta) e quinta justa representa os intervalos de três tons e três tons e meio, respectivamente. Os intervalos de quatro tons e quatro tons e meio representam a sextas menores e maiores, nesta ordem. Enquanto que as sétimas menores e maiores são os intervalos de 5 e 5 tons e meio. Por fim o intervalo de oitava de 6 tons.

Muitas vezes em música se utiliza intervalos maiores que a oitava: nonas e décimas terceiras, por exemplo. Nesse contexto o intervalo de nona representa um intervalo de segunda oitavada.

3.2.2.1 A Escala Pitagórica

Assim a nota que representa 2/3 da corda representa o que hoje chamamos de intervalo de quinta justa. Essa nota combina tão bem com a nota original que esse intervalo foi utilizado para se obter as relações fracionárias das outras frequências na escala cromática por um processo chamado de ciclo das quintas.

Musicalmente o ciclo das quintas consiste em subir a escala em intervalos de quintas justas. Assim, se começarmos na nota Dó, a próxima nota do ciclo será Sol, pois esta nota está a um intervalo de quinta justa em relação à nota Dó. A terceira nota do ciclo se obtém ao se encontrar a quinta justa de Sol, que neste caso será Ré. A terceira será a quinta justa de Ré que será a nota Lá, e assim por diante.

Subindo de quinta em quinta encontraremos todas as notas da escala cromática e, ao se encontrar todas as notas da escala cromática, voltaremos a nota inicial formando um verdadeiro ciclo. Se começarmos em dó, obteremos o seguinte ciclo das quintas: Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si, Fá#, Dó#, Sol#, Ré#, Lá#, Fá, Dó.

Para sabermos que fração temos que dividir a corda para obter a notas da escala cromática teremos que fazer alguns cálculos.

Para o primeiro Dó usaremos a corda toda, portanto faremos Dó=1. A nota Sol será então 2/3 da corda. Seguindo o ciclo das quintas, a nota Ré será 2/3 do comprimento da corda que produz a nota Sol, ou seja, será 2/3 de 2/3, portanto 4/9. Mas observamos que 4/9 é um comprimento de corda inferior a 1/2. Como sabemos que 1/2 é a medida de corda que produz a nota Dó da oitava seguinte, observamos que a nota Ré 4/9 seria mais aguda que o Dó 1/2. Assim a nota Ré 4/9 estaria, portanto na oitava seguinte. Para voltarmos o Ré para primeira oitava utilizaremos o seguinte raciocínio:

Como a nota Ré está na segunda oitava, esta fração que obtemos é na realidade a metade do comprimento da corda Ré da oitava anterior. Portanto, multiplicaremos por 2 a fração encontrada para voltarmos a oitava original e obtemos 8/9. Continuando o procedimento obteremos os comprimentos de todas as notas da escala cromática.

Quadro 2 - O Comprimento da Corda na Escala Diatônica Pitagórica

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Razão	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Fonte: Autoria própria.

Lembramos que a nota Fá não acompanha esse raciocínio. Isso porque os pitagóricos perceberam empiricamente que a fração 3/4 combina com o som produzido pela corda inteira solta. Observe que a nota inicial Dó é a quinta justa de Fá e, assim, 2/3 de 3/4 é 1/2, ou seja, o Dó mais agudo.

Acima temos a escala diatônica, mas temos abaixo a escala cromática. Como para montar esse ciclo das quintas temos que multiplicar por 2/3 e por 2, por questões estéticas fizemos uma tabela com utilizando potências de dois e de três. No subscrito o número da oitava a qual pertence a nota.

Quadro 3 - Comprimento da Corda no Ciclo das Quintas

Nota	$Dó_1$	Sol_1	$Ré_2$	$Lá_2$	Mi_3	Si_3	$Fá\ \#_4$	$Dó\ \#_5$	$Sol\ \#_5$	$Ré\ \#_6$	$Lá\ \#_6$	$Fá_7$	$Dó_8$
Razão	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{2^3}{3^3}$	$\frac{2^5}{3^4}$	$\frac{2^6}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^6}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^{13}}{3^9}$	$\frac{2^{14}}{3^{10}}$	$\frac{2^{16}}{3^{11}}$	$\frac{2^{18}}{3^{12}}$

Fonte: Autoria própria.

Por exemplo, se a corda tiver 65 cm de comprimento, tamanho da corda da maioria dos violões, e emitir a nota Dó ao ser tocada, as outras notas da escala diatônica serão tocadas se dividirmos a corda nas seguintes frações:

Quadro 4 - Comprimento da Corda na Escala Diatônica Pitagórica

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Valores	65	57,77	51,35	48,75	43,33	38,51	34,23	32,5

Fonte: Autoria própria.

Observe que há algumas imprecisões que dizem respeito as frações de corda se compararmos o Quadro 3 com o Quadro 4. Percebemos então que a nota Fá pode ser representada pela fração inicial 3/4 e no ciclo das quintas pela fração$\frac{2^{17}}{3^{11}}$. Observe que

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ e que $\frac{2^{17}}{3^{11}} = 0{,}7399$ que são valores diferentes, porém muito próximos. Outra imprecisão diz respeito ao último Dó. $\frac{1}{2} = 0{,}5$e$\frac{2^{18}}{3^{12}} = 0{,}4932$ são, mais uma vez, valores diferentes porém muito próximos.

No caso das frequências das notas as frações serão inversas. Assim se chamarmos de f a frequência da primeira nota da oitava, no nosso caso o primeiro Dó, Teremos a seguinte tabela de frequências:

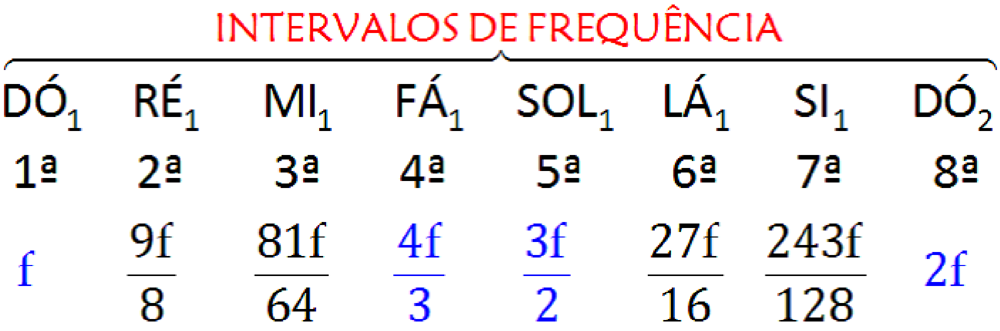

Figura 12 - Intervalos de Frequências
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.67).

Assim, se tivermos um Dó de 130,37 Hz teremos uma escala diatônica com as seguintes frequências:

Quadro 5 - Frequências de uma Escala Diatônica

Notas	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Frequências (Hz)	130,37	146,66	164,99	173,82	195,55	220	247,49	260,74

Fonte: Autoria própria.

Apesar de bastante interessante, essa escala pitagórica trazia alguns sérios problemas. Um deles, já abordado, é que o ciclo de oitavas (subindo de oitava em oitava) não coincide com o ciclo das quintas. Aos subirmos todo o ciclo das quintas com relação ao comprimento de uma corda partindo do Dó1 (Dó da primeira oitava)encontraremos, no final do ciclo e sem trazer a nota para a oitava original, o Dó12. Se ao invés de subirmos o ciclo das quintas, subirmos o ciclo das oitavas encontraremos o mesmo Dó12, porém a fração obtida terá um valor diferente da dos ciclo das quintas.

> Enquanto os intervalos de quinta pitagóricos (puros) associam-se a relações de 2/3, os intervalos de oitavas possuem relações correspondentes a 1/2. Se contarmos, passarão 12 quintas puras e teremos os valores$\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$. Pelo outro percurso de intervalos, passarão 7 oitavas e teremos o números $\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$. Esses dois valores

> encontrados deveriam ser iguais, pois se tratam da mesma nota, mas há uma diferença, chamada de coma pitagórica, que conseguimos dividindo esses dois valores encontrados anteriormente: $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \div \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 1{,}01136432\ldots$(SILVA, 2009, p.64)

Isso representava uma dificuldade para os músicos antigos, pois, ao se utilizar instrumentos afinados em tons diferentes, estes teriam que ser reafinados para que a música a ser executada não soasse desafinada. É por isso que se compararmos as medidas da figura 4 com o comprimento da corda de um violão dividida por trastes, veremos que essas medidas não serão as mesmas. Para que esse problema fosse superado surgiu então a escala temperada ou de temperamento igual.

Antes de prosseguirmos com a escala temperada fazemos uma pausa para mostrar as partes do violão, já que parte desse conhecimento será necessário para o entendimento do presente trabalho.

Figura 13 - Partes do Violão
Fonte: (http://oficinadevioloes.blogspot.com.br/p/apostila-do-curso.html).

Acima temos as partes do violão que se divide claramente em três partes: cabeça, braço e caixa de ressonância.

Na cabeça o violão possui as tarrachas que são os dispositivos onde se afina a corda do violão, aumentando ou diminuindo a tensão sobre elas. No braço o violão possui os trastes que são as hastes de metal que dividem a corda. Entre a cabeça e o braço do violão existe a pestana onde se apoia a corda. Essa pestana funciona como o primeiro traste. A caixa de ressonância, dividida em tampo, lateral e fundo, serve para amplificar o som produzido pelas vibrações das cordas. Nele existe o cavalete que é onde as cordas são fixadas. O rastilho, presente no cavalete, funciona como o último traste do violão.

3.2.2.2 A Escala Temperada

A escala temperada surgiu de uma ideia muito simples. Primeiramente, sabemos que no intervalo de uma oitava a frequência do som é dobrada. Assim, o que se fez foi dividir o intervalo de dobro em 12 partes para se obter as frequências das outras notas. Obviamente esses intervalos não poderiam ser iguais, pois, criaria um problema para a próxima oitava que abrangeria um intervalo de dobro da frequência da nota original até o quádruplo dessa frequência. Dessa maneira foi utilizado o modelo exponencial das progressões geométricas.

A ideia consistiu em interpolar as frequências das 11 notas restantes em uma progressão geométrica cujo último termo tem exatamente o dobro da nota do primeiro termo. Para fazer isso se fez necessário encontrar a razão desse tipo de progressão.

Seja $a_1, a_2, ..., a_{13}$ os termos dessa progressão geométrica. Temos que $a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$, com q representando a razão dessa progressão, ao mesmo tempo em que temos $a_{13} = 2 \cdot a_1$. Assim temos que $a_1 \cdot q^{12} = 2 \cdot a_1$. Dividindo os dois membros da igualdade por a_1 veremos que $q^{12} = 2$, e, portanto $q = \sqrt[12]{2}$. Encontramos por tanto a razão da progressão.

Dessa maneira as frequências de uma escala cromática de temperamento igual possuem as seguintes relações:

1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2
Ou												
Do	Do#	re	re#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si	do
1	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	$2^{\frac{3}{4}}$	$2^{\frac{5}{6}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

Figura 14 - Escala Cromática de Temperamento Igual
Fonte: (SILVA, 2009, p.94).

Sabemos que $2^{\frac{1}{12}}$ é aproximadamente 1,05946, o que significa que cada frequência aumenta 5,946% para se atingir a frequência da nota seguinte. Esse valor, portanto, representa a taxa de crescimento da função exponencial:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = f_0 \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$$

Função esta que representa a progressão geométrica acima.

Utilizando a nota do diapasão, instrumento utilizado pelos músicos para afinar seus instrumentos já que este produz a nota Lá 440 Hz quase pura, podemos elaborar duas escalas, uma pitagórica e outra temperada, e compara-las.

NOTA	PITAGÓRICA	TEMPERADA
$DÓ_4$	f = 260,7 Hz	f = 261,6 Hz
$DÓ_4\#$	f = 278,4 Hz	f = 277 Hz
$RÉ_4$	f = 293 Hz	f = 294 Hz
$RÉ_4\#$	f = 309 Hz	f = 311 Hz
MI_4	f = 330 Hz	f = 330 Hz
$FÁ_4$	f = 347,7 Hz	f = 349 Hz
$FÁ_4\#$	f = 371 Hz	f = 370 Hz
SOL_4	f = 391 Hz	f = 392 Hz
$SOL_4\#$	f = 417 Hz	f = 415 Hz
$LÁ_4$	**f = 440 Hz**	**f = 440 Hz**
$LÁ_4\#$	f = 463,5 Hz	f = 466 Hz
SI_4	f = 495 Hz	f = 494 Hz
$DÓ_5$	f = 521,4 Hz	f = 523 Hz

Figura 15 - A Escala Cromática Pitagórica e a Escala Cromático Temperada
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.42).

Pode-se observar que as frequências das notas da escala pitagórica foram obtidas utilizando-se as frações encontradas pelos pitagóricos, enquanto que as frequência das notas na escala temperada foram obtidas multiplicando cada frequência por 1,05946, valor aproximado de $2^{\frac{1}{12}}$.

A nota Lá 440 Hz, única nota dada pelo Diapasão, é a nota referência para a afinação de instrumentos e corresponde a tecla central do piano.

Figura 16 - O Diapasão
Fonte: (PEREIRA, 2013, p.48).

Essa nova escala facilitou bastante o trabalho dos músicos a partir do século XVI. Ela foi proposta pelo músico alemão Andréas Werckmeister (1645-1706) em 1691 e difundido pelo também músico alemão Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) que escreveu 1722 "O Cravo Bem Temperado", peça musical que explora as 12 tonalidades da nova escala musical.

Um grande nome da matemática que também ficou encantado com a nova escala musical foi o suíço Leonhard Euler (1707-1783) que publicou em 1739 "O Tratado da Nova Teoria Musical", Trabalho considerado muito musical para matemáticos e muito matemático para os músicos.

Dificilmente os pitagóricos elaborariam tal escala, pois a razão dessa progressão é um número irracional. Os pitagóricos não admitiam religiosamente a existência dos números irracionais.

> Uma especulação plausível é a de que, mesmo percebendo algumas discrepâncias na escala, nem Pitágoras, nem os filósofos pitagóricos poderiam consertar os erros, visto que eles só trabalhavam com números inteiros e racionais (razão de inteiros). Os pitagóricos não aceitavam, por assim dizer, os números irracionais, porque estes não poderiam ser escritos como a razão de inteiros, porém como razão de segmentos incomensuráveis e contradiziam a base da filosófica de sua escola, a máxima de que todas as coisas do Universo poderiam ser representada por números (inteiros!) (PEREIRA, 2013, p.32)

A utilização dessa nova escala também repercutiu na maneira de se construir os instrumentos musicais. Se observarmos um violão veremos que os trastes do braço do violão não são igualmente espaçados. A distância entre eles obedece a escala temperada.

Sabemos que na escala pitagórica o comprimento da corda é inversamente proporcional a frequência da nota produzida por esta. Essa propriedade se mantém na escala temperada cabendo-nos descobrir os comprimentos correspondentes às outras notas. Esse é o mesmo procedimento feito anteriormente só que com algumas adaptações.

Agora considere a progressão geométrica $c_1, c_2, \ldots, c_{13}$ tal que $c_{13} = \frac{c_1}{2}$. Chamando de k a razão da progressão temos que $c_{13} = c_1 \cdot k^{12}$. Logo $\frac{c_1}{2} = c_1 \cdot k^{12}$. Dividindo os dois membros da igualdade por c_1, temos que $k^{12} = \frac{1}{2}$. Temos que $k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$, que é aproximadamente 0,9438. Isso significa que para encontrarmos os lugares onde ficam os trastes no braço do violão, basta multiplicar o comprimento da corda inteira e multiplicar por 0,9438.

Dessa forma se a corda de um violão tem 65 cm de comprimento, e a nota dada por essa corda solta for Dó, a posição dos trastes no braço do violão para se tocar as outras notas obedecerá à tabela abaixo.

Quadro 6 - Posição das Trastes do Violão

Notas	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Valores	65	57,78	51,36	48,75	43,33	38,53	34,24	32,5

Fonte: Autoria própria.

Assim como essa escala influencia a construção dos violões, ela também está presente no comprimento dos cilindros que compõe a flauta Pã, comprimento das cordas de um piano e etc.

4MODELAGEM MATEMÁTICA

Abordaremos neste capítulo a modelagem matemática definindo o que é um modelo, discutindo as etapas na modelagem matemática, primeiramente como metodologia de pesquisa e posteriormente como metodologia de ensino, e finalmente propondo uma atividade de modelagem para a sala de aula utilizando a música e a matemática.

4.1 Modelos

Uma característica importante sobre a modelagem matemática na educação matemática é a sua origem. Ao contrario das demais tendências de educação matemática, a modelagem tem sua gênese na matemática aplicada. É notório o fato de que até meados do século XIX não havia uma clara distinção entre a matemática e a física, mas a partir do momento em que o positivismo classificou as ciências e se dividiu a matemática em pura e aplicada, a metodologia da modelagem teve um destaque muito grande.

A palavra "modelo" tem a sua origem na palavra modellum, que em latim significa "medida em geral". A partir daí dá-se a ideia de que um modelo será a representação de algo. O modelo matemático por sua vez é a representação de algo através da linguagem matemática, muito peculiar por sinal.

Sobre um modelo matemático podemos concluir que: "Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema." (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13)

A definição de modelo dada acima pode suscitar um debate histórico sobre as concepções da matemática que os pensadores tiveram ao longo do tempo. Influenciada por Platão (328-348 a.c.), que acreditava em dois mundos paralelos, o mundo real imperfeito e o mundo das ideias, de onde tudo o que existe no mundo real é uma cópia imperfeita do que existe no mundo das ideias, uma concepção de matemática que vigorou durante muito tempo era de que a matemática seria uma lei que regia a natureza. Assim, o matemático teria o papel de mero descobridor das leis que regem a natureza, não agindo sobre o conhecimento em si.

A concepção de matemática vigente nos dias de hoje é sintetizada na seguinte Ideia:

"Pensamos na matemática como um bem cultural de interesse absolutamente geral, que ninguém pode ignorar completamente sem efeitos colaterais indesejáveis." (MACHADO, 2005, p.8)

Assim a matemática é um bem cultural, ou seja, um conhecimento produzido pelo homem. Apesar de essa ideia nos parecer bastante clara hoje, ela ganhou força apenas no final do século XIX quando a construção de geometrias não- euclidianas (geometrias que não utilizava o quinto postulado de Euclides de Alexandria (300 a.c - ?) foram validadas pela matemática axiomática. Dessa forma caiu por terra a ideia de que somente poderia existir a matemática que rege a realidade, que era vista como uma realidade euclidiana. Mal sabiam os matemáticos daquela época que as geometrias não-euclidianas serviriam para explicar um nova realidade: a teoria da relatividade de Albert Einstein (1879-1955).

Dessa maneira os axiomas, que eram tratados como dogmas inquestionáveis por suas obviedades, passaram a ser encarados apenas como hipóteses em que se poderia construir uma teoria matemática.

A relação entre a matemática e a realidade é de suma importância quando se estuda os modelos matemáticos, pois diversas foram as interpretações filosóficas sobre os modelos matemáticos ao longo da história.

Como dito acima o modelo é uma representação simplificada da realidade e, portanto, incompleta. A razão para se utilizar modelos nos mais diversos ramos do conhecimento humano reside justamente nessa simplificação. A realidade possui uma série de "variáveis" ou circunstâncias que impossibilita o pesquisador de controlá-la. Já um modelo é perfeitamente controlável.

A física, a economia, a biologia, a química, são exemplos de áreas do conhecimento que se utilizam de modelos. Chamaremos de modelo matemático aquele que se utiliza da linguagem matemática. Assim, uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de representações que poderão ser associados a um modelo matemático.

A modelagem matemática parte, portanto de uma realidade a qual se quer examinar e se obter uma resposta.

> Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (...). Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados), servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo.

(ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.12)

Assim percebemos a relação entre a realidade, que nos apresenta uma situação-problema e um modelo, que nos auxiliará a resolvê-la.

4.2 Etapas da Modelagem Matemática

A modelagem matemática, como um processo de obtenção de modelos, obedece a uma série de procedimentos aos quais iremos detalhar a seguir: A interação, a matematização, a resolução e a interpretação e validação dos dados.

A interação, como o nome sugere, é o processo em que o pesquisador, após delineado o tema de estudo, busca informações sobre o tema colhendo dados quantitativos e qualitativos e o estudando de modo direto (por meio de experiências e dados experimentais já obtidos por especialistas) ou indireto (livros, revistas especializadas e etc.). O objetivo da interação é definir claramente o problema e as metas para resolvê-lo.

Alguns autores, como Biembengut (2000), dividem esta etapa em: reconhecimento da situação-problema e familiarização. Neste sentido seria o reconhecimento o processo pelo qual se define ou se conhece a situação-problema, e a familiarização seria o processo de obtenção das informações acerca do tema.

Apesar de estar colocada no início, essa etapa pode se estender ao longo da investigação na medida em que surgir novas informações e a necessidade de tornar a situação-problema mais clara com o advento dessas informações.

Depois de definida e estruturada a situação-problema, surge a necessidade de traduzir a linguagem natural em que esta surge para a linguagem matemática. A esse processo de "tradução" chamamos de matematização. É fundamental perceber que esse processo depende da relação entre as características da situação-problema e dos conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos.

> A segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por "matematização", considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de interação. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.16)

A etapa de matematização, portanto, se objetiva em encontrar objetos matemáticos (expressões, fórmulas, gráficos e etc.) que permitam a resolução para o problema.

Cabe aqui ressaltar que nessa etapa é utilizado o conhecimento matemático, e a limitação desse conhecimento pode limitar o modelo obtido. Dessa maneira se o conhecimento matemático utilizado é básico o modelo ficará delimitado a esses conceitos. Da mesma maneira que um conhecimento de uma matemática mais sofisticada aumentarão as possibilidades de se resolver certos tipos de problemas. Vale ressaltar também que a validade do modelo não se restringe a sofisticação da matemática utilizada.

Assim, por exemplo, se o único modelo de crescimento que o pesquisador conhece é o linear, ele não conseguirá modelar adequadamente um fenômeno cujo crescimento é exponencial.

A etapa seguinte à matematização é a resolução. Nessa etapa são utilizadas as ferramentas matemáticas construídas na etapa anterior para resolver a situação-problema. Além de responder a situação se faz necessário que o modelo matemático permita a descrição, análise e até mesmo realizar previsões acerca do problema estudado.Para alguns autores a etapa de resolução faz parte da matematização.

A última etapa é a interpretação de resultados e a validação. Nessa etapa se faz uma avaliação sobre o nível da aproximação do modelo com a situação problema, bem como o grau de confiabilidade da sua utilização. Essa etapa se faz necessária, pois pode acontecer do modelo não ser adequado a situação-problema, ou seja, não representa adequadamente a situação, como por exemplo, se houver um fenômeno de crescimento exponencial e o pesquisador utilizou um modelo linear.

Dessa forma na validação o pesquisador irá verificar se o modelo utilizado represemta realmente ao fenômeno estudado. Quando o modelo não atende as necessidades o processo deve ser retomado na etapa da matematização mudando as hipóteses, variáveis e etc.

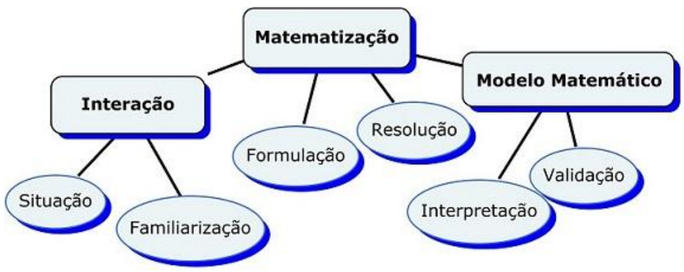

Figura 17 - Etapas da Modelagem Matemática
Fonte: (http://pdecianorte-suzamber.blogspot.com.br/2010/08/modelagem-matematica.html).

4.3 A Modelagem Matemática como Metodologia de Ensino

Uma das grandes queixas dos especialistas em educação em relação ao ensino da matemática diz respeito a aproximação do conteúdo matemático com a realidade concreta. É consenso entre os especialistas que o ensino da matemática sem conexão com a realidade é um dos grandes motivos do desinteresse do discente a respeito dessa disciplina. Sobre esses aspecto é importante termos em vista que:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômeno em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 2006, p.69)

Assim, a Modelagem Matemática pode ajudar a alcançar pelo menos quatro dos cinco objetivos elencados acima no que diz respeito ao estudante do ensino médio. Obviamente o estudante, ao se utilizar a modelagem, percebe a utilização da matemática para resolver problemas do cotidiano, ao mesmo tempo que modela fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento, estimulando assim a interdisciplinaridade, vislumbrando a importância do conhecimento matemático para o desenvolvimento tecnológico e, por fim, entendendo a matemática como um bem cultural.

É óbvio que a metodologia da Modelagem Matemática precisa de algumas adaptações para ser aplicada na escola regular. Aspectos como o grau de escolaridade dos alunos e a disponibilidade para trabalhos extraclasse devem ser levados em consideração no momento do planejamento do trabalho de Modelagem.

Por esse aspecto é preferível que se faça um diagnóstico para se verificar a realidade socioeconômica dos alunos, bem como o grau de conhecimento matemático e a disponibilidade para a realização de trabalhos extraclasse. Alunos que trabalham têm a vantagem de possibilitarem uma aplicação matemática em sua profissão, porém dispõem de menos tempo para as atividades. Nessa realidade é recomendável que as atividades sejam feitas em sala de aula. Junto com o diagnóstico, o número de alunos e o horário da aula serão decisivos para um bom planejamento.

Após o diagnóstico, a escolha do tema se faz necessário. Neste ponto é importante perceber que na escola regular um currículo a ser cumprido. O professor, na medida do possível, pode dar alguma liberdade de os alunos escolherem.

O desenvolvimento do tema deve seguir os mesmos passos da Modelagem; a Interação, a Matematização, a Resolução da questão e a Interpretação dos Resultados e Validação.

A interação pode ser feita em sala por exemplo com uma breve exposição sobre o tema e em seguida, fazendo-se um levantamento de questões. Esta etapa favorece ao estudante, ao se deparar com a situação-problema, uma busca pela compreensão e produz uma representação mental da situação. Para haver essa transição entre a situação-problema e a representação mental o estudante deve desenvolver algumas habilidades como o entendimento da situação, apreensão de significado, interpretação de informações e agrupamento de ideias.

O processo de matematização poderá ser feito selecionando alguma das questões levantadas na etapa anterior. Neste momento deve ser incentivada ao discente a participação, a criatividade e a liberdade para que se busquem as informações acerca da problemática. Também, na medida em que se demandar, deve-se possibilitar um aprofundamento do conteúdo matemático necessário para a resolução do problema, mesmo que isso signifique uma interrupção das discussões referentes ao problema.

Nesse processo se faz necessário que se resolva exemplos análogos ao trabalho inicial. Isso para que o conteúdo matemático não se restrinja ao modelo e para que o aluno tenha uma visão mais clara do conteúdo.

Posteriormente o estudante deve se voltar para o problema inicial na etapa de resolução da questão, verificando assim a importância da matemática como ferramenta.Por fim, deve-se promover a análise do modelo em relação a situação-problema no processo de validação do modelo.

Figura 18 - Etapas da Modelagem Matemática II
Fonte: (ALMEIDA; PALHARINI, 2012, p.911).

No processo de modelagem como metodologia de ensino o professor deverá fazer o papel de mediador, promovendo a autonomia do aluno na medida em que ele direciona o próprio trabalho. Assim o professor deverá orientar e acompanhar o desenvolvimento do trabalho dos alunos.

Por fim o professor deve avaliar o processo tendo em vista os seguintes objetivos: A formação matemática do discente, sua capacidade de solucionar problemas, saber realizar uma pesquisa, capacidade de utilizar a tecnologia e a capacidade de trabalhar em grupo.

Observamos então que a modelagem matemática como metodologia de ensino apresenta portanto algumas vantagens para o ensino. Primeiramente ela pode ser utilizada em qualquer nível de ensino, do ensino infantil até a pós-graduação. Outra vantagem é que ela se relaciona muito bem com as novas tecnologias. O computador, como ferramenta tecnológica, pode auxiliar os discentes a elaborar e representar os seus modelos de um modo bastante elucidativo já que são vários os programas que já existem que utilizam a linguagem matemática. Além disso a utilização dessa metodologia mostra com nitidez ao aluno a importância da matemática na medida em que ele entra em contato com suas aplicações, seja em problemas do cotidiano como em problemas de natureza científica, bem como sua relação com as outras ciências promovendo assim um trabalho interdisciplinar.

Por fim é incentivado no aluno o desejo de se fazer pesquisa.

4.4 Uma Proposta de Modelagem

Será apresentada a seguir uma atividade utilizando-se a progressão geométrica e a música numa proposta de Modelagem Matemática.

Primeiramente o professor mostra aos alunos que possui um cano de PVC e que deseja construir com ele uma flauta Pã, porém não sabe em quais comprimentos deve cortar os tubos para que a flauta produza notas de verdade.

Figura 19 - Flautas Pã
Fonte: (JULIANI, 2003, p.33).

Deve-se observar que esse tipo de flauta é feito de um conjunto de tubos colados uns nos outros. É importante que o aluno perceber que os tubos são de diferentes tamanhos e colados em ordem decrescente (ou crescente).

Também é importante mostrar que outros instrumentos também possuem componentes colocado em ordem decrescente de tamanhos, como o xilofone, os tubos do órgão e etc. Dessa maneira cria-se a primeira hipótese: De que a relação que existe entre os comprimentos dos tubos de uma flauta Pã é a mesma da relação entre o tamanho dos tubos de um órgão ou dos componentes de um xilofone, e assim esta relação estaria presente em vários instrumentos.

Para essa última interação será necessário que o professor promova uma ou mais aulas com o objetivo de municiar os alunos com informações relevantes com relação a música. Essas aulas podem ser reforçadas por uma palestra de alguém que conheça o tema.

As aulas sugeridas acima não servirão para ensinar teoria musical ou leitura de partituras. O objetivo dessas aulas ou palestras serão apresentar aos estudantes a escala cromática, a natureza cíclica das notas, os intervalos musicais e o ciclo das quintas, além de fornecer algumas informações relevantes acerca da música, como as notas da escala musical, a física da onda, as propriedades do som e etc.

Nesse momento sugerimos que a escala pitagórica seja explicada, mesmo que não seja o objetivo da modelagem, para que posteriormente seja verificada se as medidas do violão obedecem ou não as medidas da escala pitagórica.

O conteúdo dessas aulas deverá contemplar o capítulo 3 desse trabalho do subcapítulo 3.1 ao 3.4.1.

Uma situação que deve ser provocada logo após se estudar a escala pitagórica é pedir para que o aluno encontre uma traste que divide a corda exatamente ao meio e, com a ajuda de um medidor de frequências, comparar a frequência que dá o som da corda inteira e a sua metade. Hoje, é muito fácil encontrar aplicativos gratuitos de celulares ou tablets que medem a frequência de um som emitido. Sugerimos o Afinador Cifra Club que usa a notação inglesa.

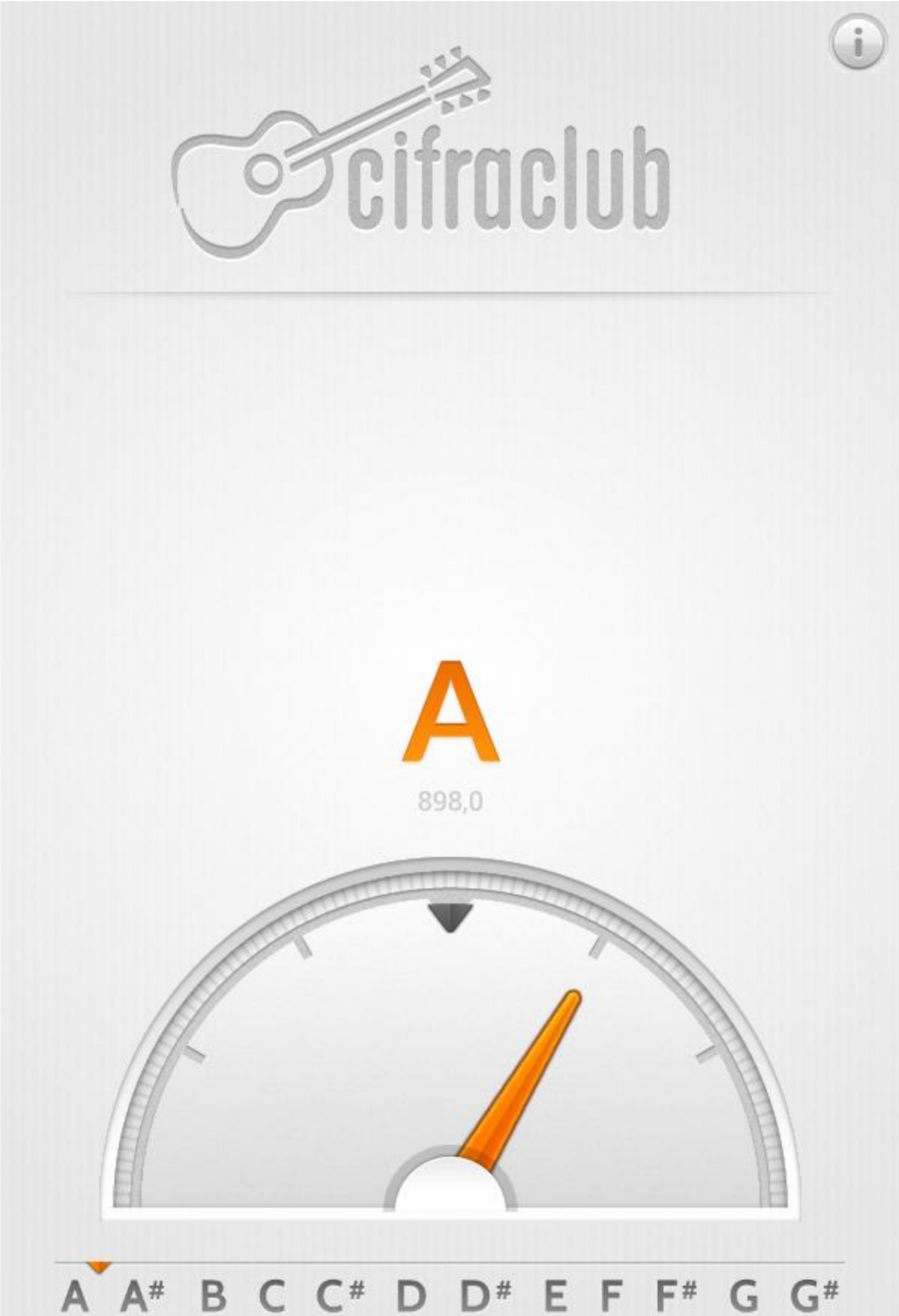

Figura 20 - Aplicativo Afinador Cifra Club
Fonte: Autoria Própria.

Na imagem acima vemos a frequência do som de 898 Hz. Acima este som é identificado com a nota Lá. Sabemos que a nota Lá mais próxima é a nota 880 Hz, pois é múltiplo de 440 Hz que é o Lá fundamental. Por isso a seta laranja do aplicativo está localizada entre o A e o A#, pois passou da frequência do Lá.

Nesse momento pede-se que os estudantes, com a ajuda de uma trena, meçam as distancias entre os trastes e o rastilho e anotem esses resultados. Eles deverão ser comparados com as relações fracionárias das escalas pitagóricas.

Quadro 7 - Distâncias Entre as Trastes do Violão e a Escala Pitagórica

Notas	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Distância Entre as Trates (cm)	65	57,78	51,36	48,76	43,31	38,52	34,24	32,5
Comprimento das Cordas na Escala Pitagórica (cm)	65	57,77	51,35	48,75	43,33	38,51	34,23	32,5

Fonte: Autoria própria.

Ao se constatar que a escala pitagórica não corresponde as medidas exatas do violão, será necessário que o professor elabore uma atividade para que os alunos, ao respondê-las percebam "defeitos" na escala pitagórica, surgindo assim uma necessidade histórica para substituí-la por outra.

Uma atividade interessante seria preencher, com a ajuda do professor que ensinará o procedimento, A Figura 19 e o Quadro 7 do item 3.4.1. Ao preenchere compará-los verão que o ciclo das quintas não fornecerá as frações exatas da escala pitagórica.

Para se estudar a relação entre o comprimento dos componentes dos instrumentos musicais poderemos propor a seguinte situação: Mostramos um violão para o aluno e mostramos para ele a distância entre os trastes (hastes metálicas que dividem o braço do violão) não é constante (observe a Figura 20). Na medida em que se afasta da cabeça do braço para o centro do violão as distâncias entre as trastes vão se reduzindo.

Pode-se pedir para que eles, com a ajuda de uma trena, meçam as distâncias entre as trastes e o final da corda (rastilho) e anotem os resultados. Assim os estudantes devem ser levados a perceberem que os valores anotados formam uma sequência numérica e devem ser levados a estudar tais sequências. Nesse momento é justificadoo estudo das principais sequências: as progressões.

O ideal é que os próprios alunos percebam sozinhos que os números resultantes da medida dos trastes, feita por eles, correspondam a uma progressão geométrica. Por isso é recomendável que este conteúdo seja apresentado, mesmo que sucintamente, antes da atividade de modelagem proposta.

Claramente os alunos perceberão de imediato que os números anotados são uma progressão geométrica. O que eles perceberão, ao dividir dois números consecutivos, é que a razão não é constante, mas quase constante, pois varia bem pouco, e portanto constatarão que não se trata de nenhuma das progressões estudadas.

Mas esses números, na realidade, fazem parte de uma progressão geométrica o problema de eles perceberem isso é que a sua razão é irracional. Dessa forma as medidas e os cálculos nunca serão exatos, mas sim próximos dos valores da progressão.

Para que eles percebam o professor deve pedir a eles que voltem a atenção novamente ao traste que divide a corda do violão na metade e que contem quantas trastes se passou. Assim verão que esse traste é exatamente o décimo terceiro. Usando o comprimento da corda como o primeiro de uma progressão geométrica e o comprimento do braço entre o décimo terceiro traste e o rastilho do violão como o décimo terceiro termo, pede-se que eles encontrem a razão dessa progressão e que interpolem os outros termos entre o primeiro e o décimo terceiro.

Ao encontrar a razão perceberão que se trata de um número irracional. Assim perceberão o motivo de encontrar algo aproximado com uma progressão geométrica nos valores encontrados.

Assim temos o problema definido: Determinar em quais comprimentos deve se cortar os tubos para que se possa construir uma Flauta Pã. Depois do problema definido passamos as hipóteses que serão seguidas para que o modelo seja construído.

A primeira hipótese que deve ser levada em consideração é que os comprimentos dos tubos deverão obedecer ao mesmo padrão das distâncias dos trastes no braço do violão. A segunda hipótese é de que a razão entre os comprimentos de tubos consecutivos é constante. Esta segunda hipótese deriva da primeira já que é isso que acontece com as distâncias entre os trastes do violão e, pela primeira hipótese, o tamanho dos tubos de uma Flauta Pã deve obedecer ao mesmo padrão.

Passamos para a matematização. A hipótese definida seria a de que a razão entre os comprimentos de tubos consecutivos seja constante. Essa hipótese nos remete a uma progressão geométrica ou uma função exponencial de domínio discreto.

Depois que os alunos identificarem se tratar de uma progressão geométrica outra atividade que poderá ser proposta é escrever a fórmula da função exponencial de domínio natural que represente essa progressão.

Nesse processo de matematização torna-se claro qual é a variável dependente (o comprimento do tubo) e qual é a variável independente (a posição de cada tubo na ordem crescente. primeiro, segundo, terceiro e etc.)

Com essa informação a mão pode-se agora calcular o comprimento dos tubos, desde que se saiba o comprimento do primeiro tubo. O tamanho do primeiro tubo não deve ser escolhido arbitrariamente, pois se deseja utilizar um medidor de frequência sonora para se validar o trabalho.

Assim utilizaremos, para o tubo de PVC de 1/4 de polegada a medida, o comprimento de 33,59 cm que produzirá a nota Dó 256 Hz. Dessa forma os outros comprimentos serão obtidos multiplicando 33,59 por uma potência natural da razão que já sabemos ser aproximadamente 0,9438.

Dessa forma os comprimentos dos tubos das outras notas serão:

Quadro 8 - Comprimento dos Tubos da Flauta Pã

Nota	Comprimento do Tubo
Dó	33,59
Dó #	31,7
Ré	29,92
Ré #	28,23
Mi	26,65
Fá	25,15
Fá #	23,74
Sol	22,4
Sol #	21,14
Lá	19,95
Lá #	18,83
Si	17,77
Dó	16,79

Fonte: Autoria própria.

Descoberto os comprimentos dos tubos o próximo passo é construir a Flauta Pã. Nesse momento pode-se dividir a classe em grupos e fornecê-los material necessário para a construção da Flauta. Cada grupo vai precisar de: aproximadamente 2 metros e meio de cano de 1/4 de polegada, Uma lixa d' água 220, serrinhas, adesivo plástico, 8 tampões de plásticoda largura do cano, trena, um pedaço de papelão (de preferência rígido), calculadora, lápis ou caneta, e papel.

O material acima foi pensado de forma a construir uma Flauta Pã de uma oitava da escala diatônica apenas. Para a escala cromática ou Flauta Pã de mais de uma oitava será necessário uma maior quantidade de materiais.

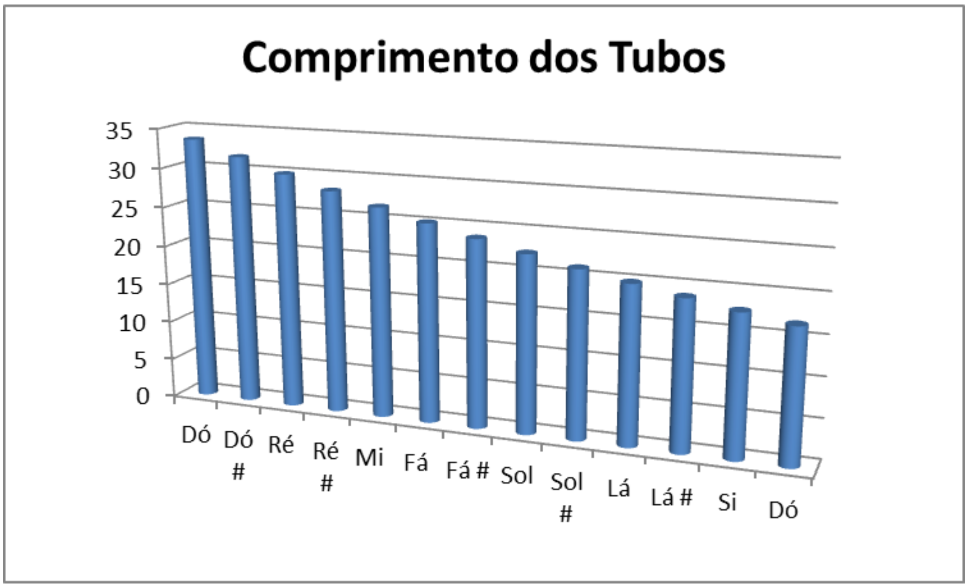

Figura 21 - Comprimento dos tubos
Fonte: Autoria própria.

A atividade acima descrita foi aplicada com êxito no XIV Encontro Baiano de Educação Matemática na cidade de Amargosa-Ba no ano de 2011 em forma de uma oficina para estudantes de cursos de licenciatura em matemática e professores de matemática do ensino básico. Na ocasião foram utilizados canos de largura diferente da proposta acima e, portanto, os comprimentos dos tubos são diferentes da proposta acima. A justificativa para a mudança é que na época não houve a preocupação de validar o trabalho com a medida das frequências das notas.

Figura 22 - Marcação do Comprimento Para que o Cano Seja Cortado
Fonte: Autoria própria.

A figura acima mostra um participante da oficina marcando tubos no local a ser cortado. Podemos perceber tubos já cortados ao seu lado bem como um pedaço de papelão onde serão colados os tubos.

Figura 23 - Cano Sendo Cortado
Fonte: Autoria própria.

Após marcar o local em que o cano será cortado os alunos deverão cortar os tubos com a serra. Nesse momento se faz necessário lembrar que se deve tomar cuidado para manusear objetos cortantes como a serra.

Logo depois os tubos deverão ser fechados, para que haja ressonância, com as tampas de plástico.

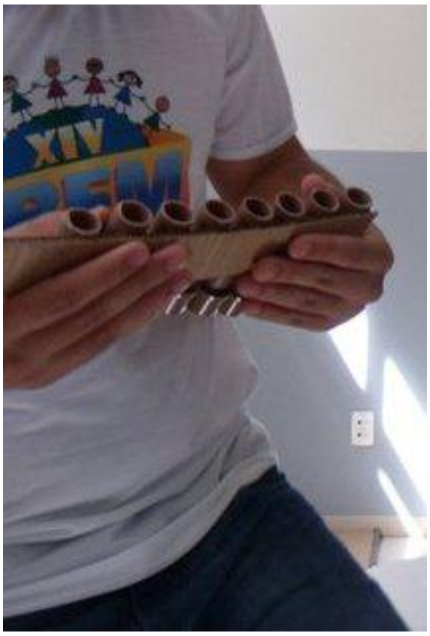

Figura 24 - Flauta Pã Quase Pronta
Fonte: Autoria própria.

Depois de cortados, os tubos deverão ser colados no papelão em ordem de tamanho (do maior para o menor) de modo em que a extremidade superior dos canos estejam no mesmo nível e as extremidades inferiores tenham um formato triangular.

A conclusão do trabalho se dará com a interpretação e validação, etapa iniciada logo após se construir o instrumento. Essa etapa pode ser feita de dois modos, o primeiro modo é comparando a Flauta Pã construída com outra já pronta medindo se o comprimento dos tubos desta última. O outro modo é utilizar um medidor de frequência sonora para verificar se realmente cada tubo emite a nota de frequência esperada.

Abaixo apresentamos um quadro resumo da proposta de modelagem descrita acima.

Quadro 9 - Proposta de Modelagem

Situação Inicial	Construção de Uma Flauta Pã
Iteração	- Medir a distância entre os trastes do violão -Aula sobre introdução a teoria musical -Medir a frequência das notas de um violão
Problematização	Determinar em quais comprimentos devem ser cortados os tubos para que se possa construir uma Flauta Pã.
Matematização e Resolução	
Definição de Hipóteses	- Os comprimentos dos tubos obedecem ao mesmo padrão das distânciasdos trastes do violão - A razão entre os comprimentos de dois tubos consecutivos é constante
Definição de Variáveis	- Variável dependente: o comprimento dos tubos - Variável independente: A ordem das notas
Modelo Matemático da Situação	A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $f(n) = x_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^{n-1}$
Matemática Utilizada na Atividade	- Funções exponenciais - Funções Discretas - Progressões Geométricas -Números Irracionais
Interpretação e Validação	- Comparação da construção feita com uma Flauta pronta - Medição da frequência das notas produzidas pela flauta construída
Situação Final	Determinação do comprimento dos tubos

Fonte: Autoria própria.

Uma forma de trabalhar sucintamente o tema música relacionado com a matemática pode ser sintetizada na seguinte questão:

> Pitágoras, que estudou a geração dos sons, observou que duas cordas vibrantes, cujos comprimentos estivessem na razão 1 para 2, soariam em uníssono. Hoje sabemos que a razão das frequências dos sons emitidos por causa das cordas seria a razão inversa dos seus comprimentos, isto é, de 2 para 1 e que duas cordas vibram em uníssono se e só se a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de 2. A frequência da nota lá-padrão (o lá central do piano) é 440 Hz (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de frequência que significa ciclo por segundo). A escala musical ocidental (de J.S. Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das frequências de notas consecutivas é constante.Sabendo que essas notas são LÁ - LÁ# - SI – DÓ - DÓ# - RÉ- RÉ# - MI – FÁ-FÁ# - SOL - SOL# - LÁ, determine: a) As frequências dessas notas, o primeiro lá sendo o lá-padrão. b) A frequência do sinal de discar de um telefone, que é o sol anterior ao lá padrão. c) A notação cuja frequência é 185 Hz. (MORGADO; SANI; WAGNER, 2001, p.41)

Obviamente a questão acima se trata da relação entre as frequências das notas musicais enquanto que a proposta de modelagem trata dos comprimentos dos canos de uma Flauta Pã, Relações completamente inversas.

A maneira sucinta de trabalhar a questão é interessante, porém optamos pela aplicação da modelagem já que esta habitua os estudantes ao processo da pesquisa.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo a proposição de uma atividade didática que utilize a música no ensino das progressões geométricas. Através de uma pesquisa bibliográfica a respeito das progressões geométricas, música e modelagem matemática esta atividade foi elaborada a fim de municiar o professor dematemática com propostas concretas que possibilite a aproximação do aluno como essa área de conhecimento, área esta que os estudantes tanto temem.

Como resultado dessa pesquisa tivemos a posição das Orientações Curriculares Nacionais bem como autores da Sociedade Brasileira de Matemática que claramente defendem queo ensino das progressões seja realizado em conjunto com as funções (progressão aritmética com a função afim e a progressão geométrica com a função exponencial).

Outro ponto importante que se relaciona com o estudo das progressões e que claramente não é seguido na maior parte do ensino de matemática é a ênfase que deve ser dada na caracterização das funções. Mas o que infelizmente percebemos é que no ensino médio a ênfase é dada nas fórmulas das funções promovendo assim a dificuldade do aluno em associar a função matemática a uma situação real.

Dentro de todas essas recomendações percebemos a relevância do papel da modelagem matemática em todo esse processo. A modelagem promove a adequação da situação real a um modelo matemático, reforçando assim que o ensino das funções deve ser feito tendo como base as características particulares de cada função.

Além disso, percebemos que nessas recomendações a palavra modelo é citada diversas vezes, o que mostra o reconhecimento destes autores a da orientação oficial a este tipo de metodologia.

A interdisciplinaridade está presente a todo o momento nessa proposta. Vimos ao longo do trabalho tópicos de História da Matemática, Física, Frações, Funções, Música entre outros assuntos.

Mas o maior legado da metodologia da modelagem matemática é, sem dúvida nenhuma, a pesquisa. Com a modelagem o aluno obedece a regras básicas para que se realizem pesquisas e isso despertará no estudante a vontade de continuar seus estudos, fazendo com que ele não sinta muitas dificuldades ao ingressar na universidade.

Em suma, acreditamos que a realização do trabalho atingiu seus objetivos iniciais, além de ter abordado questões que não estavam previstas na origem da pesquisa. Cabe sempre ressaltar que a música se relaciona com a matemática de maneira muito íntima e por isso diversas são as possibilidades de se trabalhar essas duas áreas do conhecimento, cabendo sempre ao professor àpesquisa necessária para viabilizar novos projetos, criatividade e boa vontade para realizá-los.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. **Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática**. Bolema, Rio Claro, v.26, n.43, p.907-934, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012. 157p.

BARBOSA, J. C. **Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Ciêntífica**. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v.2, n.2, p.69-85, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2000. 127p.

CARVALHO*et al.***A Matemática do Ensino Médio volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 237p.

CARVALHO*et al.***A Matemática do Ensino Médio volume 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 372p.

HALLIDAY, R. **Fundamentos de Física, vol3**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1993. 350p.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar vol1**. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977. 316p.

JULIANI, J. P. **Matemática e Música**. 2003. 85f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

LIMA, E. L. **Logarítmos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasielira de Matemática, 2010. 118p.

LIMA, E. L. **Curso de análise vol.1**. 13. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011. 431p.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**. 6ª. ed. São Paulo: Cortez , 2005. 103p.

MORGADO, A. C.; SANI, S. C.; WAGNER, E. **Progressões e Matemática Financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 121p.

PEREIRA, M. C. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de Hoje**. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

PRADO, F. B. **Uma proposta de Construção de Gráficos de Composições da Função Afim com Funções Trigonométricas e Uma Aplicação em Música** . 2013. 120f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006. 135p.

SILVA, G. P. **Matemática e Música: Práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares**. 2009. 146f. Monografia (Bacharelado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.

60 + 60 = 63?. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/v1/novopion/index.php/publicacoes/artigos/471-60-60-63> Acesso em: 29 ago. 2014

Modelagem Matemática. Disponível em: <http://pdecianorte-suzamber.blogspot.com.br/2010/08/modelagem-matematica.html> Acesso em: 10 mar. 2008

Oficina de Violões. Disponível em: <http://oficinadevioloes.blogspot.com.br/p/apostila-do-curso.html> Acesso em: 15 set. 2014