Universidade Federal do Tocantins
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Wellington Pereira Braz

Uma Proposta de Ensino de Geometria com Álgebra Vetorial no Ensino Médio

Gurupi – TO
Outubro – 2014

Wellington Pereira Braz

Uma Proposta de Ensino de Geometria com Álgebra Vetorial no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Gurupi – TO

Outubro – 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

B794 Braz, Wellington Pereira
Uma Proposta de Ensino de Geometria com Álgebra Vetorial no Ensino Médio / Wellington Pereira Braz. - Gurupi, 2014.
78f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, 2014.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

1. Vetores. 2. Álgebra. 3. Geometria. I. Cruz, Pedro Alexandre da II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 516

Bibliotecário: Marcos Maia
CRB-2 / 1445

Wellington Pereira Braz

Uma Proposta de Ensino de Geometria com Álgebra Vetorial no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado, Gurupi – TO, 16 de Outubro de 2014

Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz
Orientador

Antonio Jeronimo Netto
Prof. Dr. Antônio Jerônimo Netto

Marcelo Lisboa Rocha
Prof. Dr. Marcelo Lisboa Rocha

Gurupi – TO

Outubro - 2014

Ao meu Deus toda Honra e Glória.

À minha querida esposa Kalini Cristina de Medeiros Melo Braz e filhos Karollyne Cristina de Medeiros Melo Braz, Fernanda Karla de Melo Braz e Thiago de Melo Braz; à minha mãe Luzia Pereira Matos;

Aos meus amigos do PROFMAT, em especial a Francisco Cláudio Lima Gomes e Leniedson Guedes dos Santos.

Ao meu grande amigo e irmão, em Cristo Jesus, Dr. Antônio Gomes da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT vinculados a UFT – Campus de Palmas, Gurupi e Arraias.

Agradeço ao IMPA pela iniciativa de proporcionar o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz, pelos conhecimentos transmitidos e pela incansável dedicação e comprometimento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro.

Ao meu grande amigo e colaborador Prof. Me. Francisco Cláudio Lima Gomes, pelo compartilhamento de seus conhecimentos e companheirismo.

Aos meus colegas e amigos do Mestrado, pelos bons momentos nos workshops e de descontração.

Agradeço, especialmente, à minha esposa Kalini Cristina de Medeiros Melo Braz pela compreensão da necessidade de minhas ausências nos momentos mais cruciais de nossas vidas. Pela dedicação e companheirismo tão presentes em sua vida.

“Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuição

sem conceitos são cegas…somente a partir

de sua união pode surgir a cognição.”

(GOMIDE., E.F. - 2008)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo geral apresentar uma proposta para o ensino de geometria plana, espacial e analítica para o ensino médio, usando a álgebra vetorial como principal instrumento para abordagem destes temas. Levando em consideração a forma como os livros de matemática desenvolvem o tratamento puramente algébrico e a ausência dos vetores no currículo do ensino médio, acreditamos que introduzindo esta ferramenta poderosíssima no contexto escolar, tanto pela sua aplicação na matemática pura e aplicada e na física, quanto pela facilidade na operacionalização algébrica, isto venha a facilitar aos alunos o desenvolvimento de suas habilidades cognitivas. Deste modo, o trabalho foi desenvolvido partindo do estudo geométrico, axiomático e analítico dos vetores, objetivando especificamente sua aplicação em modelagem matemática. A metodologia aplicada foi a pesquisa bibliográfica e a utilização de aplicativos que facilitem a transição da geometria para álgebra.

Palavras-chaves: Vetores, álgebra, geometria, ensino médio.

ABSTRACT

This work has as main objective to present a proposal for teaching plane, spatial and analytical geometry, for high school, using vector algebra as the main instrument for addressing these issues. Taking in consideration the way math books develop purely algebraic treatment and the absence of vectors in the high school curriculum, we believe that introducing this powerful tool in the school context, both for its application in pure and applied mathematics and physics, as the ease in algebraic operation, this will facilitate our students in developing their cognitive skills. Thus, we develop our work starting from the geometric, axiomatic and analytical study of vectors, specifically aiming their application in mathematical modeling. The methodology applied was research literature and software's applications that facilitate the transition from geometry to algebra.

Keywords: Vectors, algebra, geometry, high school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

$\mathcal{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathcal{R}^2$	Plano Cartesiano
$\mathcal{R}^3$	Espaço tridimensional
$\in$	Pertence a
$\notin$	Não pertence a
$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$	Vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B
$\vec{\boldsymbol{u}}$	Vetor **u**
$\lvert\vec{\boldsymbol{u}}\rvert$	Módulo, do vetor **u**
$\lVert\vec{\boldsymbol{u}}\rVert$	Norma do vetor **u**
$\langle\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}\rangle$	Produto Interno (ou Escalar) de **u** e **v**
$\vec{\boldsymbol{u}}$ x $\vec{\boldsymbol{v}}$	Produto Externo (ou Vetorial) de **u** e **v**
$\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$	Vetor Projeção do vetor **u** no eixo **x**
$\nexists$	Não Existe
$\exists$	Existe
$\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$	Ângulo entre os vetores **u** e **v**
$\Longrightarrow$	Implicação lógica
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se,
$\therefore$	Portanto, concluindo que
$\blacksquare$	Indica final da demonstração de um teorema
$\perp$	Perpendicular a
$//$	Paralelo a
$<$	Menor do que
$\leq$	Menor do que ou igual a
$>$	Maior do que
$\geq$	Maior do que ou igual a
$\neq$	Diferente de
$\forall$	Qualquer que seja

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino médio no Brasil tem revelado, há décadas, grave inadequação e anacronismo, demandando uma revisão profunda em sua concepção, capaz de torná-lo uma etapa escolar melhor estabelecida. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional estabeleceu o ensino médio como fase de conclusão da educação básica, como educação para a cidadania, que não se deve restringir a uma função estritamente propedêutica para o ensino superior nem a um simples treinamento profissional.

No que se refere aos objetivos característicos do ensino de ciências da natureza e da matemática e suas tecnologias, os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) elencam uma série de competências e habilidades que se esperam que sejam desenvolvidas no estudante do ensino médio. Resumidamente, os objetivos gerais dos PCNs, são:

Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.

- *Formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já enunciadas;*
- *Desenvolver modelos explicativos para sistemas tecnológicos e naturais;*
- *Utilizar instrumentos de medição e de cálculos;*
- *Formular hipóteses e prever resultados;*
- *Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais;*

Após uma análise sistemática e exaustiva dos conteúdos de geometria plana, espacial e analítica dos livros: IEZZI, G., & all., e. (2013). *Matemática: Ciência e Aplicação* (7 ed., Vol. 3). São Paulo, SP: Saraiva e SMOLE, K. S. (2013). *Matemática: Ensino Médio* (7 ed., Vol. 3). São Paulo, SP: Saraiva, constatou-se a ausência parcial, ou total, da álgebra vetorial como ferramenta auxiliadora no estudo de geometria. Acredita-se que o tratamento puramente algébrico como é tradicionalmente apresentado, não apenas na exposição dos conteúdos, mas na resolução de problemas, cuja modelagem matemática requer a geometria como o meio mais adequado para sua resolução, não seja o mais indicado, pois expressões algébricas excessivamente carregadas de informações não têm cumprido o propósito de facilitar a associação entre a interpretação geométrica e a descrição do método algébrico para resolver o problema, ou interiorizar o processo construtivo para a obtenção das equações. Essas dificuldades criadas no processo coordenativo dessas informações têm causado grandes danos no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é propor uma forma alternativa para desenvolver os estudos de geometria utilizando a álgebra vetorial, com o intuito de facilitar o processo ensino e aprendizagem. As demonstrações dos teoremas de geometria se tornam mais atraentes e reduzem, consideravelmente, o uso da álgebra. Assim, acredita-se na necessidade de serem incluídos no currículo do ensino médio tópicos de Álgebra Vetorial, não focalizando, apenas, a sua aplicabilidade na geometria, mas como uma ferramenta auxiliar para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e a possibilidade de vislumbrar caminhos alternativos na resolução de problemas, cuja aplicabilidade é palpável.

No capítulo 2 fizemos um breve contexto histórico sobre o ensino de geometria no ensino médio atualmente e o desenvolvimento da álgebra vetorial através dos anos.

No capítulo 3 apresentamos os conceitos básicos sobre vetores, bem como estruturamos axiomaticamente os espaços vetoriais.

No capítulo 4 estruturamos algebricamente os espaços vetoriais, demonstrando suas propriedades.

O capítulo 5 é dedicado às aplicações da álgebra vetorial na geometria plana, espacial analítica e na Física, onde fazemos as demonstrações dos principais teoremas associados a cada geometria.

No capítulo 6 apresenta-se uma série de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, usando os capítulos anteriores como ponto de partida para a resolução das questões. Aqui também é apresentado o clássico problema da mosca. Algumas atividades podem ser desenvolvidas em sala de aula como uma oficina, pois o uso de régua, esquadros, transferidor e compasso são bastantes explorados. O uso do aplicativo para celular: "*Math Helper Lite*", bem como o software GeoGebra são sugeridos com o intuito de visualização espacial e efetuar cálculos.

2 O CONTEXTO HISTÓRICO

2.1 O Propósito do Ensino de Geometria

A Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades semelhança de figuras planas. A figura 1 mostra Euclides, cujo grande feito foi: *Fundamentou a geometria no século 3 a.C.*

Figura 1 – Euclides
Fonte: http://2.bp.blogspot.com/…mKCq4/s400/euclides01.jpg

Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente.

A Geometria no ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas três unidades temáticas**: geometrias plana, espacial** e **analítica**. A figura 2 mostra René Descartes, cujo grande feito foi: *Criou a geometria analítica no século 17.*

Figura 2 – René Descartes
Fonte: http://www.citatecelebre.eu/…ene-descartes--167.jpg

As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em Geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes.

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

O processo de provar em Matemática deve, inicialmente, conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática.

A **Geometria plana e espacial**, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema. A composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas ou espaciais. (PCNs – Ciências da Natureza)

A **Geometria analítica**, por exemplo, tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. (PCNs – Ciências da Natureza)

As avaliações que são feitas pelos governos estaduais e federais com o objetivo de verificar o desempenho dos alunos do ensino médio estão estruturadas em duas dimensões: a primeira que é "objeto do conhecimento", foram elencados quatro tópicos, relacionados a habilidades desenvolvidas pelos estudantes. A segunda dimensão refere-se às "competências" desenvolvidas pelos estudantes. Dentro desta perspectiva, foram elencados descritores específicos para cada um dos quatro tópicos. Mostraremos a seguir os descritores da Matriz de Referência para terceiro ano do ensino médio.

D1 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidades.

D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D7 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D8 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D9 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 – Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

(BRSIL. MEC. SEF. PCN. 1998)

Como podemos observar os descritores que são parâmetro que o Saeb e o ENEM usam, estão descritos nos PCNs, e devem ser seguidos pelas escolas, isto nos leva a acreditar que a álgebra vetorial se faz necessária no currículo do ensino médio.

3 O ESTUDO DA ÁLGEBRA VETORIAL

Muitas grandezas mensuráveis, tais como: comprimento, área, volume, massa temperatura, ficam completamente compreendida pela especificação de sua magnitude. Essas grandezas são chamadas de *escalares*. Outras, no entanto, necessitam de mais informações para ficarem bem determinadas. Essas informações adicionais são: direção e sentido. As grandezas físicas que requerem a tripla-informação são as *vetoriais*, as quais poderíamos citar como exemplos: velocidade, força aplicada sobre um corpo, a aceleração de ponto material numa reta, plano, ou espaço.

Embora a ideia de vetor tenha sido introduzida no século XIX, suas aplicações em ciências físicas não foram percebidas até o século XX. Mais recentemente, vetores tiveram aplicações em ciências da computação, estatística, economia e ciências sociais. (RICH, B – 2003)

O cálculo diferencial e a geometria analítica estiveram sempre intimamente relacionados no decorrer do seu desenvolvimento histórico. Cada nova descoberta num dos assuntos conduzia a um progresso no outro. O problema de traçado de tangentes a curvas resolve-se com a descoberta da noção de derivada; o de área conduziu ao estabelecimento da integral; e as derivadas parciais foram introduzidas para estudar superfícies curvas no espaço. Juntamente com essas descobertas obtêm-se desenvolvimentos paralelos na mecânica e na física matemática. Em 1788 Lagrange publicava sua obra prima, *Mecanique Analytique*, que pôs em evidência a grande flexibilidade e a enorme eficácia alcançada pelo uso de métodos analíticos no estudo da mecânica. Mais tarde, no século XIX o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1925) estabelecia sua *Theory of Quaternions*, um novo método e um novo ponto de vista que muito contribuiu para a compreensão tanto da álgebra como da física. Os aspectos mais positivos da análise dos quaterniões e da geometria cartesiana fundiram-se mais tarde, graças em grande parte aos esforços de J. W. Gibbs (1839 - 1903) e O. Heaviside (1850 - 1925) para darem lugar a um novo domínio chamado de *Álgebra Vetorial*. Rapidamente se aperceberam que os vetores eram os instrumentos ideais para a exposição sintética de muitas ideias importantes na geometria e na física. (APOSTOL, T.M. – 1998)

3.1 – Três maneiras diferentes para o estudo da álgebra vetorial

Existem fundamentalmente três maneiras diferentes para se iniciar o estudo da álgebra vetorial: *geometricamente*, *analiticamente* e *axiomaticamente*.

No método *geométrico* os vetores são representados por segmentos de reta orientados, ou por setas. As operações algébricas com vetores, tais como a adição, subtração e multiplicação por números reais são definidas e estudadas por métodos geométricos.

No método *analítico*, os vetores e correspondentes operações são completamente descritos em termos de sequências numéricas, cujos números desta sequência são chamados de *componentes* vetoriais. As propriedades das operações com vetores são, então, deduzidas a partir das propriedades correspondentes dos números. A descrição analítica dos vetores resulta naturalmente da descrição geométrica, desde que se introduza um sistema de coordenadas.

No método *axiomático* não se faz qualquer tentativa para descrever um vetor, ou as operações algébricas com vetores. Pelo contrário, vetores e operações vetoriais são considerados *conceitos não definidos*, relativamente aos quais nada sabemos a não ser que eles satisfazem a um certo conjunto de axiomas. Um tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se *espaço linear* ou um *espaço vetorial linear*

O estudo da álgebra vetorial de um ponto de vista axiomático é, talvez, o mais satisfatório matematicamente, uma vez que proporciona uma descrição dos vetores independentemente do sistema de coordenadas e de qualquer representação geométrica particular. (APOSTOL,T.M. - 1998)

3.1.1 - O Método Geométrico

A ideia de utilizar um número para localizar um ponto sobre uma reta já era conhecida dos antigos gregos. Em 1673 Descartes generalizou esta ideia, utilizando um par de números (a_1, a_2) para localizar um ponto no plano e um terno (a_1, a_2, a_3) de números para localizar um ponto no espaço. Os matemáticos A. Cayley (1821 - 1895) e H. G. Grassman (1808

– 1877) provaram que não era forçoso parar nos ternos de números para representar pontos. Podem, muito naturalmente, considerar-se um quaterno de números (a_1, a_2, a_3, a_4), e assim por diante, ou mais geralmente, um sistema de *n* números reais

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$. Um tal *n*-sistema diz-se um ponto *n*-dimensional ou *vetor n-dimensional*, sendo os números a_1, a_2, a_3, a_4, …, a_n as *coordenadas*, ou *componentes* do vetor.

Ao conjunto de todos os vetores *n*-dimensional formam o *espaço vetorial*, ou *espaço linear*, dos *n-sistemas*, ou mais simplesmente *n*-espaço. (APOSTOL, T.M. - 1998)

Para o proposito deste trabalho nos limitaremos ao 3-*espaço*, ou *espaço vetorial* $\mathcal{R}^3$.

Para dotar o *espaço vetorial* $\mathcal{R}^3$ de uma estrutura algébrica, vamos definir igualdades de vetores e duas operações com vetores chamadas de *adição* e *multiplicação por escalar*, ou seja, um número real.

DEFINIÇÃO 1. Dois vetores **U** $=(u_x, u_y, u_z)$ e **V** $=(v_x, v_y, v_z)$, são iguais, sempre que suas componentes correspondentes coincidem, isto é:

$$\mathbf{U}=\mathbf{V} \text{ se, e só se, } \begin{cases} u_x = v_x \\ u_y = v_y \\ u_z = v_z \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 2. A soma dos vetores **U** e **V**, denotado por **U + V**, é obtido pela adição de suas respectivas componentes, isto é:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z)$$

DEFINIÇÃO 3. Sendo α um escalar, definimos α**U**, como sendo o vetor obtido pela multiplicação de cada componente de **U** por α, isto é,

$$\alpha\mathbf{U} = (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z)$$

A partir das definições anteriores é fácil verificar as seguintes propriedades destas operações:

DEFINIÇÃO 4. A resultante **U** + **V**, de dois vetores **U** e **V**, geometricamente, é obtida pela *lei do paralelogramo*, ou seja, **U** + **V**, é a diagonal do paralelogramo formado por **U** e **V**.

TEOREMA 1. A operação de adição de vetores goza das propriedades *comutativa* e *associativa*, ou seja,

Comutativa: **U + V = V + U**

Associativa: **U + (V + W) = (U + V) + W**

A multiplicação por escalares é associativa: $\alpha(\beta \mathbf{U}) = (\alpha\beta)\mathbf{U}$

e satisfaz às duas propriedades distributivas:

$$\alpha(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha\mathbf{U} + \alpha\mathbf{V} \quad \textbf{e} \quad (\alpha + \beta)\mathbf{U} = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{U}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Faremos uma demonstração geométrica do Teorema 1, partindo da definição 4 (Adição geométrica de vetores). Para tanto considere os vetores **U**, **V** e **W**, na figura 3, a seguir:

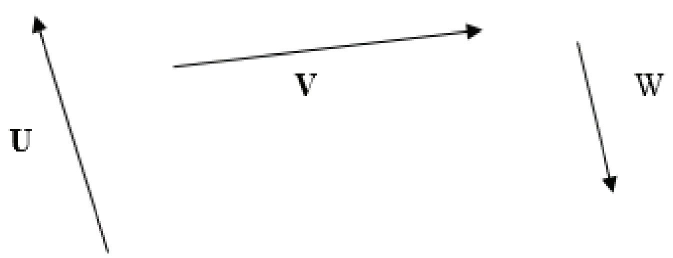


Figura 3
Fonte: Próprio Autor

Comutatividade: **U + V** e **V + U** estão representados na figura 4:

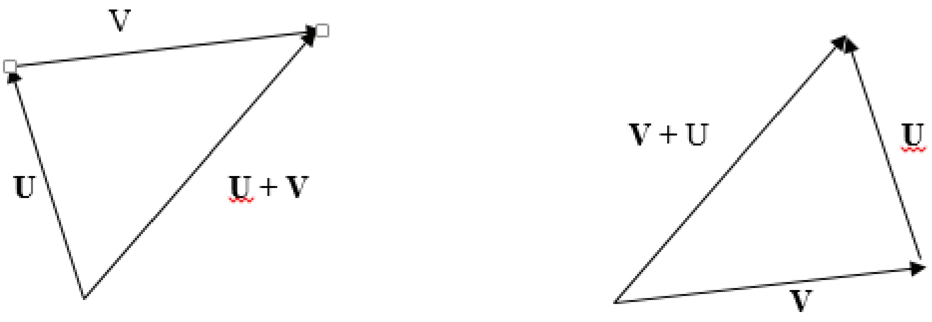


Figura 4
Fonte: Próprio Autor

Associativa: **U + (V + W)**

Os vetores **V** + **W**, **U + (V + W)** e **(U + V) + W** estão na figura 5:

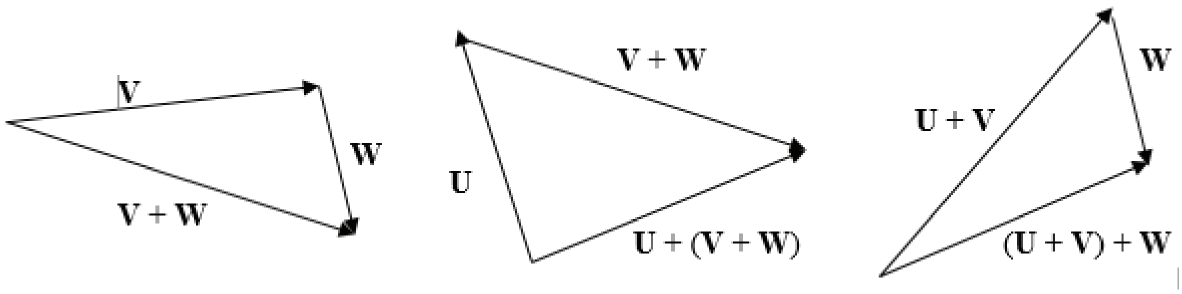


Figura 5
Fonte: Próprio Autor

A multiplicação por escalares é associativa:

Considere a figura 6, e o fato de que sendo $\boldsymbol{k}$ um escalar real, podemos escrever $\boldsymbol{k} = \alpha\beta$, e partindo do fato de que a multiplicação de números reais é comutativa, segue demonstração geométrica.

∎

Figura 6
Fonte: Próprio Autor

3.1.2 - O Método Analítico

O método analítico consiste na operacionalização com vetores quando estes estão representados num sistema de eixos ortogonais (que o objeto de nosso estudo), ou seja pelas suas projeções ortogonais. Neste caso as operações ficam reduzidas, apenas, a operacionalizar com suas coordenadas, conforme a formalização exposta na Definições 1 a 4, e do teorema 1, acima.

Faremos agora uma demonstração analítica (Método Analítico) do Teorema 1.

Vamos considerar a representação vetorial de Grassman para os vetores **U**, **V** e **W** no 3-espaço vetorial e os escalares α e β reais.

Comutatividade: $\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)$

$$= (u_x+v_x,\ u_y+v_y,\ u_z+v_z)$$

$$= (v_x+u_x,\ v_y+u_y,\ v_z+u_z)$$

$$= (v_x, v_y, v_z) + (u_x, u_y, u_z)$$

$$= \mathbf{V} + \mathbf{U}.$$

Associativa: $\mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (u_x, u_y, u_z) + [(v_x+w_x,\ v_y+w_y,\ v_z+w_z)]$

$$= (u_x, u_y, u_z) + [(v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z)]$$

$$= (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z)$$

$$= [(u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)] + (w_x, w_y, w_z)$$

$$= (u_x+v_x,\ u_y+v_y,\ u_z+v_z) + (w_x, w_y, w_z)$$

$$= (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W}$$

A multiplicação por escalares é associativa:

$$\alpha\,(\beta\mathbf{U}) = \alpha[\beta(u_x, u_y, u_z)]$$

$$= \alpha(\beta u_x, \beta\, u_y, \beta u_z)$$

$$= (\alpha\beta u_x, \alpha\beta\, u_y, \alpha\beta u_z)$$

$$= \alpha\beta(u_x, u_y, u_z)$$

$$= (\alpha\beta)\mathbf{U}$$

A multiplicação por escalares é distributiva:

$$\alpha\,(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha[(u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)]$$

$$= \alpha(u_x+v_x,\ u_y+v_y,\ u_z+v_z)$$
$$= (\alpha(u_x+v_x),\ \alpha\ (u_y+v_y),\ \alpha\ (u_z+v_z))$$
$$= (\alpha u_x+\alpha v_x,\ \alpha u_y+\alpha v_y,\ \alpha u_z+\alpha v_z)$$
$$= (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z) + (\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)$$
$$= \alpha\left(u_x, u_y, u_z\right) + \alpha\left(v_x, v_y, v_z\right)$$
$$= \alpha\mathbf{U} + \alpha\mathbf{V}$$

A multiplicação por escalares é distributiva:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{U} = (\alpha + \beta)\left(u_x, u_y, u_z\right)$$
$$= \left((\alpha + \beta)\, u_x, (\alpha + \beta)\ u_y, (\alpha + \beta)\ u_z\right)$$
$$= \left(\alpha u_x + \beta u_x, \alpha\, u_y + \beta u_y, \alpha\, u_z + \beta u_z\right)$$
$$= (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z) + (\beta u_x, \beta u_y, \beta u_z)$$
$$= \alpha\left(u_x, u_y, u_z\right) + \beta\left(u_x, u_y, u_z\right)$$
$$= \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{U} \qquad \blacksquare$$

Pelo que foi exposto até agora sobre as maneiras distintas de se estudar a álgebra vetorial, constatamos que os tratamentos geométrico e analítico se fundem de uma forma bastante natural quando associamos o ente geométrico que chamamos de vetor com os espaços lineares. Este tratamento igualitário dos métodos geométrico e analítico nos leva a construir modelos matemáticos para problemas físicos que usam essa ferramenta auxiliadora tanto nas geometrias quanto nas ciências.

3.1.3 - O Método Axiomático

Ao definirmos espaço linear, não se faz necessário especificar a natureza dos elementos (isto é se são matrizes, polinômios, vetores do $\mathcal{R}^n$) nem dizer como realizam entre elas as operações que acabamos de referir. Em vez disso, exige-se que as operações gozem de certas propriedades que se tornem como axiomas do espaço linear. É importante lembrar que, como já dissemos, o propósito deste trabalho está limitado aos espaços lineares R^3, devido a sua aplicação no Ensino Médio.

Os Axiomas a seguir formalizam toda a estrutura operacional deste novo conjunto o qual chamamos de *Espaços Lineares*, *ou Espaços Vetoriais*.

DEFINIÇÃO 5. Seja **V** um conjunto não vazio de objetos, que chamaremos de elementos. O conjunto **V** chama-se de *Espaço Vetorial* se satisfaz aos dez axiomas que seguem, divididos em três grupos:

I - *Axiomas de fecho*.

Axioma 1. (*Fecho a respeito da adição*) A todo par de elementos **x** e **y** de **V**, corresponde a um único elemento de **V** chamado soma de **x** e **y** e representado por **x** + **y**.

Axioma 2. (*Fecho a respeito da multiplicação por números reais*) A todo **x** de **V** e todo número real **α** corresponde um elemento de **V**, chamado o produto de **α** por **x** e representado por **αx**.

II – *Axiomas para a adição*

Axioma 3. (*Propriedade comutativa*) Para todo **x** e **y** de **V**, tem-se **x** + **y** = **y** + **x**.

Axioma 4. (*Propriedade associativa*) Para todo **x**, **y** e **z** de **V**, tem-se **x** + (**y** + **z**) = (**x** + **y**) + **z**.

Axioma 5. (*Existência de elemento neutro*) Existe um elemento em **V**, representado por **0**, tal que

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ em } \mathbf{V}.$$

Axioma 6. (*Existência de simétricos*) Para todo **x** em **V**, o elemento (-1)**x** tem a propriedade:

$$\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

III - *Axiomas para a multiplicação por números.*

Axioma 7. (*Propriedade associativa*) Para todo **x** em **V**, e todo par de números reais **α** e **β**, tem-se

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\mathbf{x}$$

Axioma 8. (*Propriedade distributiva para adição em V*) Para todo o par **x** e **y** de **V**, e todo o real **α**, tem-se

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{y}$$

Axioma 9. (*Propriedade distributiva para adição de números*) Para todo o **x** de **V** e todo par **α** e **β** tem-se

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{x}$$

Axioma 10. (*Existência de elemento neutro*) Para todo **x** em **V** tem-se

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

4 EXTRUTURANDO UM NOVO CONJUNTO: CONCEITOS BÁSICOS

Estruturar algebricamente um conjunto é definir um grupo de axiomas de modo que possamos operar com seus elementos, obtendo outros elementos do mesmo conjunto. Já iniciamos o processo de estruturação axiomática do nosso conjunto que chamamos de "*Espaço vetorial*", no capítulo 2.1.3. A ideia, agora, é caracterizar seus elementos e introduzir uma nova operação que possui grande significado prático. A definição de Produto Interno, Norma e Produto Vetorial, amplia o campo de atuação da álgebra vetorial para outros campos, principalmente das aplicações na física-matemática.

Portanto, por ser um objeto de estudo com grande aplicação em várias ramificações da física e matemática dedicaremos este capítulo ao estudo complementar da álgebra vetorial.

4.1 – Módulo, Direção e Sentido

DEFINIÇÃO 6. Um par de pontos A e B chama-se vetor geométrico se um dos pontos, seja A, é a origem do vetor e o outro ponto é a extremidade, B. Representamos este vetor por uma seta de A até B, e escrevemos $\overrightarrow{AB}$, conforme a figura 7.

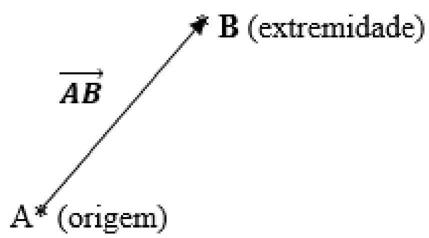


Figura 7
Fonte: Próprio Autor

Para que o vetor $\overrightarrow{AB}$, fique bem caracterizado, se faz necessário conhecer Módulo (Comprimento, ou magnitude), sua Direção (ângulo que ele forma com a horizontal), que é o mesmo da reta suporte do vetor, e seu Sentido, que podem ser apenas dois, isto é, de A para B, ou de B para A.

Muitas vezes vamos encontrar vetores na forma $\vec{u}$=(u_x, u_y), onde suas coordenadas representam sua extremidade, onde fica implícito sua origem é uma sequência de zeros. A quantidade de zeros está associado à dimensão do espaço linear que estamos trabalhando.

4.2 – Equipolência

DEFINIÇÃO 7. Diz-se que dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes quando eles conservam suas características, ou seja: seu Módulo (ou magnitude), sua Direção e seu Sentido.

Os vetores do *n-espaço* são definidos como uma classe de equipolência de segmentos orientados (LIMA, E.L. – 2002). Afim de que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sejam equipolentes, na definição 8, é necessário e suficiente que o ponto médio do segmento AD coincida com o ponto médio de BC. Com efeito, um quadrilátero cujas diagonais se cortam mutuamente ao meio é um paralelogramo. Veja a figura 8:

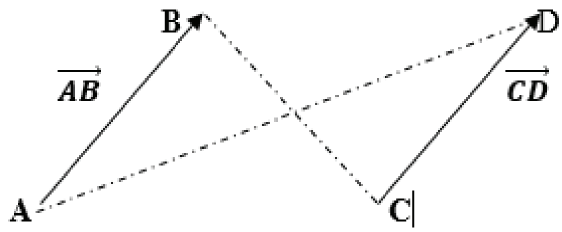


Figura 8
Fonte: Próprio Autor

Portanto, um vetor $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ do *3*-espaço fica determinado por qualquer seguimento orientado equipolente a $\overrightarrow{AB}$. Se quisermos ser um pouco mais formais, diremos que um vetor $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos de reta orientados que são equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ (classe de equipolência de $\overrightarrow{AB}$). (LIMA, E.L. – 2002)

Por extensão, admitiremos também que um ponto qualquer do *3-espaço*, como tem medida nula, representa o *vetor nulo*.

4.3 – O Produto Interno

DEFINIÇÃO 8. Consideremos dois vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ em $\mathcal{R}^3$. O Produto Interno, ou *Produto Escalar*, de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é denotado e definido por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

ou seja, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ é obtido multiplicando-se as componentes correspondentes e somando-se os produtos obtidos.

Note que o produto escalar (ou interno) associa a cada dois vetores um número real.

A interpretação geométrica do produto interno entre dois vetores é que ele representa a projeção ortogonal do primeiro vetor sobre o outro.

TEOREMA 2. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathcal{R}^3$, e qualquer escalar α em $\mathcal{R}$, temos:

(i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ se, e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{w} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(iv) $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO:

(i) Pela definição 8 de Produto Interno, temos:

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2$ e o lado direito da igualdade representa um número positivo, de modo que $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, só ocorre quanto as coordenadas do vetor $\vec{u}$ forem todas iguais a zero.

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

$= v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{w} + \vec{v} \rangle = u_x(v_x + w_x) + u_y(v_y + w_y) + u_z(v_z + w_z)$

$$= \boldsymbol{u_x v_x} + \boldsymbol{u_x w_x} + \boldsymbol{u_y v_y} + \boldsymbol{u_y w_y} + \boldsymbol{u_z v_z} + \boldsymbol{u_z w_z}$$

$$= \boldsymbol{u_x w_x} + \boldsymbol{u_y w_y} + \boldsymbol{u_z w_z} + \boldsymbol{u_x v_x} + \boldsymbol{u_y v_y} + \boldsymbol{u_z v_z}$$

$$= \langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}} \rangle + \langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle$$

(iv) $\langle \alpha \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = (\alpha \boldsymbol{u_x})\boldsymbol{v_x} + (\boldsymbol{\alpha u_y})\boldsymbol{v_y} + (\boldsymbol{\alpha u_z})\boldsymbol{v_z}$

$$= \alpha \boldsymbol{u_x v_x} + \boldsymbol{\alpha u_y v_y} + \boldsymbol{\alpha u_z v_z}$$

$$= \alpha(\boldsymbol{u_x v_x} + \boldsymbol{u_y v_y} + \boldsymbol{u_z v_z})$$

$$= \alpha \langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle$$

■

4.4 – Norma de um Vetor

DEFINIÇÃO 9. A *norma*, ou *comprimento*, de um vetor $\vec{\boldsymbol{u}}$ no $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3$, denotado por $|\vec{\boldsymbol{u}}|$, é definida como a raiz quadrada não negativa do produto interno $\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle$. Assim, sendo $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ temos que

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2} \text{ ou}$$

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle}$$

Ou seja, $|\vec{\boldsymbol{u}}|$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes de $\vec{\boldsymbol{u}}$.

TEOREMA 3. Para quaisquer vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ em $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3$, tem-se:

$$\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = |\vec{\boldsymbol{u}}|.|\vec{\boldsymbol{v}}|.\cos\theta$$

onde $\theta = \sphericalangle(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos os vetores $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$, como na figura 4 do capítulo 2.1.1

Como $\langle \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle + 2.\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle + \langle \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle$

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 + 2.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = |\vec{u} + \vec{v}|^2 \qquad \text{(II)}$$

Pela lei dos cossenos

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2.|\vec{u}||\vec{v}|.\cos\theta \qquad \text{(III)}$$

De (I), (II) e (III), temos:

$$|\vec{u}|^2 + 2.\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2.|\vec{u}||\vec{v}|.\cos\theta$$

Portanto, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$ ■

4.5 – Produto Vetorial

DEFINIÇÃO 10. Diremos que um vetor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ está escrito segundo os vetores diretores e unitários, quando ele for representado como uma combinação dos vetores unitários e ortogonais nas direções dos eixos coordenados do $\mathcal{R}^3$, isto é, na base canônica (que é um conjunto de vetores que geram o espaço vetorial, com uma condição importante de que nenhum vetor deste conjunto não pode ser obtido como soma dos outros dois, ou seja não é combinação linear dos outros) do $\boldsymbol{R}^3$. A figura 9 nos mostra os vetores diretores e unitários no $\boldsymbol{R}^3$.

{ **i**, **j**, **k**}, onde **i** =(1,0,0), **j** = (0,1,0) e **k** = (0,0,1)

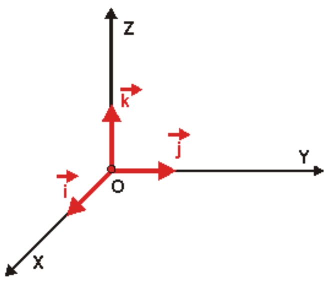


Figura 9
Fonte: www.mundofisico.joinville.udesc.br/

Assim, o vetor $\vec{u}$ na base canônica do $\mathcal{R}^3$, é: $\vec{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$

DEFINIÇÃO 11. O *Produto Vetorial*, ou *Produto Externo*, dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, é um outro vetor $\vec{w}$ que é perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, ou seja perpendicular ao plano formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é determinado pela regra da mão direita. Veja a figura 10.

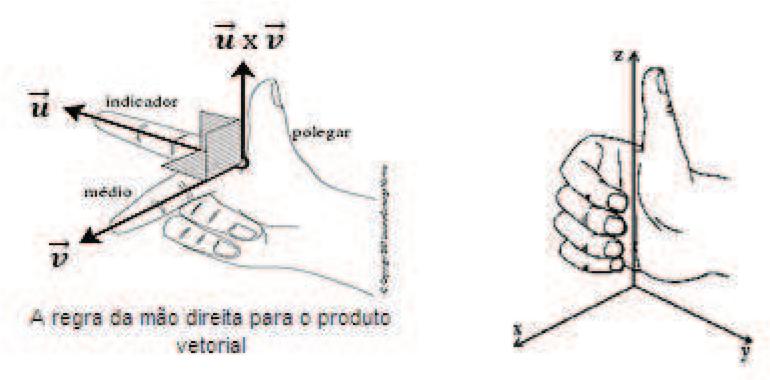


Figura 10
Fonte: www.mundofisico.joinville.udesc.br/

A regra da mão direita obedece ao processo construtivo para a obtenção de $\vec{u} \times \vec{v}$. Para tanto, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é obtido "resolvendo o determinante":

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

NOTA 1. O símbolo da direita de $\vec{u} \times \vec{v}$, não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores em vez de escalares. No entanto, usaremos esta notação pela facilidade de memorização que ela propicia no cálculo do produto vetorial. Na realidade o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é obtido calculando o determinantes de 2ª ordem como a seguir:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

TEOREMA 4. O comprimento do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é calculado por:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}\,\theta$$

onde $\theta = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos fazer uso da Identidade de Lagrange:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$$

Como

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^2$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_x v_z - u_z v_x)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2$$

$$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = [(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2]\ [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2] - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2$$

Mas $\quad |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(\cos\theta)^2$

$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - (\cos\theta)^2)$$

Portanto, $\quad |\vec{u} \times \vec{v}\,| = |\vec{u}\,|.\,|\vec{v}|.\text{sen}\,\theta$ ■

A interpretação geométrica do *Módulo do Produto Vetorial* é que ele nos fornece a área do paralelogramo que é formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, colocando-os com uma origem comum e tomando outros dois vetores equipolentes a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, em suas extremidades para compor o paralelogramo.

TEOREMA 5. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathcal{R}^3$, e qualquer escalar α em $\mathcal{R}$, temos:

(i)	$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$	(Não é Comutativo)
(ii)	$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$	(Não é Associativo)
(iii)	$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$	(Distributivo em relação a Adição)
(iv)	$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$	(Multiplicação por escalar é Associativa)

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração deste teorema é equivalente às propriedades dos determinantes, cujas demonstrações são imediatas. Faremos apenas referências ás propriedades. Daremos uma conotação geométrica e algébrica.

(i) Esta propriedade segue imediatamente do fato de que se permutarmos uma fila (linha ou coluna) numa matriz, seu determinante trocará de sinal. Analisando a figura 8 deste capítulo, vemos claramente que, pela regra da mão direita a comutação dos vetores no produto vetorial obtêm-se vetores de sentidos contrários ao plano formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(ii) Basta tomar como contraexemplo a seguinte situação: $\vec{\imath} \times (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \neq (\vec{\imath} \times \vec{\imath}) \times \vec{\jmath}$.

(iii) Esta propriedade segue imediatamente do fato de que se somarmos a uma fila de uma matriz uma outra fila (igual ou não a uma fila da matriz dada. Se for igual a alguma fila recaímos na propriedade (iv), então o determinante será igual à soma dos determinantes que obteríamos da matriz original com o determinante da matriz cuja fila seja 'substituída'.

(iv) Esta propriedade decorre das propriedades do determinante de uma matriz: "se multiplicarmos uma fila (linha ou coluna) de uma matriz por uma constante, então seu determinante ficará multiplicado por esta constante".

4.6 – Produto Misto

DEFINIÇÃO 12. Chama-se de *Produto Misto* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathcal{R}^3$ tomados nesta ordem ao número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ obtido como resultado do determinante:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

TEOREMA 6. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\mathcal{R}^3$, e qualquer escalar α em $\mathcal{R}$, temos

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$

(ii) Se os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem coplanares então $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$

(iii) Se dois dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem coplanares então $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração da propriedade (i) segue imediatamente das propriedades dos determinantes.

(ii) Sendo os três vetores coplanares então o produto vetorial de, por exemplo, $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, é perpendicular a $\vec{\boldsymbol{w}}$, e o produto interno de $\langle \vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\boldsymbol{w}} \rangle = 0$, pois sendo $\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\boldsymbol{w}}) = 90º$ e $\cos(90º) = 0$, segue que: $\langle \vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\boldsymbol{w}} \rangle = |\vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{v}}||\vec{\boldsymbol{w}}| \cos(90º) = 0$.

(iii) Suponhamos que $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ sejam coplanares, então $\vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{w}}$ é perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$, logo $\langle \vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{w}},\ \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = |\vec{\boldsymbol{u}}\ x\ \vec{\boldsymbol{w}}||\vec{\boldsymbol{v}}| \cos(90º) = 0$.

A interpretação geométrica do módulo do produto misto é que ele nos dá o volume de um prisma, cujas bases são paralelogramos. A partir desta interpretação podemos calcular o volume de muitos sólidos. O capítulo 5 trata da aplicação da álgebra vetorial na geometria.

5 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA VETORIAL

Iniciamos nosso estudo sobre aplicação da álgebra vetorial na geometria euclidiana plana. Demonstraremos alguns resultados que consideramos fundamental para os alunos do ensino médio, ou seja, são essenciais para o processo de construção de seus conhecimentos em geometria, seja ela espacial, ou analítica. A conotação que daremos é puramente vetorial, que é o propósito do nosso trabalho.

5.1 – Aplicações da Álgebra Vetorial na Geometria Plana

As origens da Geometria (do grego *medir a terra*) parecem coincidir com as necessidades do dia-a-dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C., refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

Pitágoras deu nome a um importante teorema sobre o triângulo-retângulo, que inaugurou um novo conceito de demonstração matemática. Mas enquanto a escola pitagórica do século VI a.C. constituía uma espécie de seita filosófica, que envolvia em mistério seus conhecimentos, os "Elementos" de Euclides representam a introdução de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências. Trata-se do sistema axiomático, que parte dos conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados - os axiomas) para construir de maneira lógica tudo o mais. Assim, três conceitos fundamentais - o ponto, a reta e o plano - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda Geometria chamada euclidiana, útil até hoje, apesar da existência de geometrias não-euclidianas (como a Reimanniana, Hiperbólica, Esférica) baseadas em postulados diferentes (e contraditórios) dos de Euclides.

Pitágoras nasceu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso na Grécia e provavelmente recebeu instrução matemática e filosófica de *Tales* e de seus discípulos. Após viver algum tempo entre jônicos, viajou pelo *Egito* e *Babilônia* - possivelmente indo até a Índia. Durante suas peregrinações, ele absorveu não só informações matemáticas e astronômicas como também muitas ideias religiosas. Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, na Magna Grécia (na costa sudoeste da atual Itália), onde fundou a *Escola Pitagórica* dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos. À Pitágoras são atribuídas várias descobertas sobre as propriedades dos números inteiros, a construção de figuras geométricas e a *demonstração do teorema* que leva seu nome (cujo enunciado já era conhecido pelos babilônios). Os próprios termos *Filosofia* (amor a sabedoria) e *Matemática* (o que é aprendido) seriam criações de Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais.

Os membros da *Escola Pitagórica* recebiam uma educação formal, onde constavam quatro disciplinas: Geometria, Aritmética, Astronomia e Música, que constituíram as artes liberais e cujo conteúdo tornou-se conhecido na Idade Média como o Quadrivum, que era considerado a bagagem cultural necessária de uma pessoa bem educada. Os pitagóricos elevaram a matemática à categoria das ciências liberais, isto é, tornaram-na independente das necessidades práticas e a transformaram em uma atividade puramente intelectual.

Na filosofia pitagórica afirmava-se que *Tudo é número*, ou seja, na concepção cosmogônica dos primeiros pitagóricos, a extensão era descontínua, constituída de unidades indivisíveis separadas por um intervalo. Esta ideia provinha do estudo dos números naturais, quando aplicada aos objetos geométricos requeria que todas as medidas pudessem ser expressas na forma de razão de inteiros, isto é, pudessem ser mensuradas, tendo por base um segmento fixado como unitário. Mas eles notaram que a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade é igual a $\sqrt{2}$ e que este número é incomensurável (hoje chamamos de números irracionais esses números). Esta descoberta foi recebida com grande consternação pelos pitagóricos, pois em certo sentido contrariava as crenças da escola e seria uma imperfeição da divindade.

Entre as descobertas sobre a matemática atribuídas aos pitagóricos podemos citar:

- A classificação dos números em: *primos e compostos, pares e ímpares, amigos, perfeitos e figurados;*

- *O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum*;
- Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos;
- Se um polígono tem n lados, então a soma dos ângulos internos do polígono é igual a (2n - 4) ângulos retos.

TEOREMA 7. (Condição de Existência de Triângulo) Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

DEMONSTRAÇÃO: Dado o triângulo ABC, na figura 11, provaremos que

$$|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$$

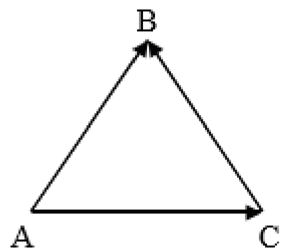


Figura (11)
Fonte: Autoria Própria

Assim, pela álgebra vetorial, podemos escrever:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB},$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle + |\overrightarrow{CB}|^2 < (|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|)^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 < (|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|)^2$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 8. (Desigualdade Triangular) Dados três pontos A, B e C do plano, tem-se:

$$\overline{\boldsymbol{AB}} \leq \overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CB}},$$

ou equivalentemente: $$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| \leq |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|$$

A igualdade ocorre se, e somente se, C pertence ao segmento $\overline{AB}$.

(*ou ainda, poderíamos escrever*: $|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}| \leq |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|$
que é a forma que a Desigualdade Triangular se apresenta nos livros de cálculo)

DEMONSTRAÇÃO: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CB}}$, o que não recorre em erro considerar que: $$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|$$

Elevando os dois membros ao quadrado, obteremos:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|^2 = (|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|)^2$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2 + 2|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}||\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|^2$$

Como $$2|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}||\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| = 2|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}||\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|1$$

$$2|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}||\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| = 2|\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}||\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = 1$$

$$\therefore \qquad \theta = \sphericalangle(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}) = 0^{\circ}$$

Portanto, poderemos escrever a expressão acima como:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2 + 2\langle\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}\rangle + |\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}|^2$$

$$\langle\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\rangle = \langle\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}\rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$$

E isso garante que os vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ *e* $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$, são colineares.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que os pontos A, B e C são colineares, com, precisamente o ponto C entre A e B, conforme a figura 12:

Figura (12)
Fonte: Autoria Própria

É claro que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$,

e que $\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 0º$

Logo $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \rangle$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle \cos\theta + |\overrightarrow{CB}|^2,$$

Mas $\cos\theta = 1$

Assim, $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|^2$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|)^2$$

Portanto, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$ ■

TEOREMA 9. (Teorema de Pitágoras) Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o triângulo retângulo da figura (13) a seguir.

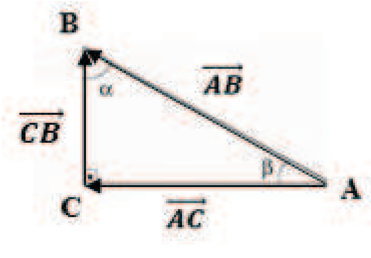


Figura (13)
Fonte: Próprio Autor

Na figura (13), podemos observar que:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Desta feita temos:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$\Rightarrow \qquad |\overrightarrow{AB}|^2 = \langle \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$\Rightarrow \qquad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}| \cos(90°) + |\overrightarrow{CB}|^2$$

Portanto, $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2$ ■

5.1.1 – História da Trigonometria

Não há uma precisão sobre a origem da trigonometria. No entanto, por volta do século V a.C., com os egípcios e babilônios, quando deparando-se com problemas associados com Navegações, Agrimensura e Astronomia, a trigonometria teve um desenvolvimento significante. No *Papiro Rhind*, é possível encontrar problemas envolvendo cotangente e também uma notável tábua de secantes na tábua cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

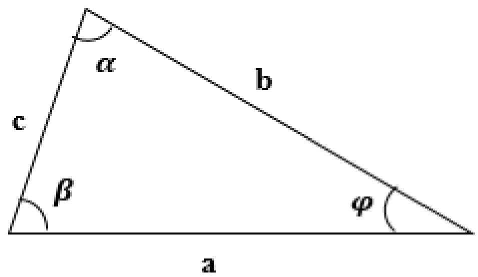
O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado de "o pai da Trigonometria", pois, na segunda metade do século II a.C. fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estrelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes – duração do mês e ano, o tamanho da Lua. A figura (14) a seguir nos mostra o *Papiro Rhind*, que se encontra no museu de Londres.

(GOMIDE, E.F. - 2008)

Figura (14): ***Papiro Rhind, Museu de Londres.***

Fonte: http://www.britishmuseum.org/

TEOREMA 10. (A Lei dos Cossenos) Em qualquer triângulo ABC, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados subtraído do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo subtendido por eles:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\varphi$$

Figura 15
Fonte: Próprio Autor

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a Figura (16) como uma equivalente vetorial da Fig.(15):

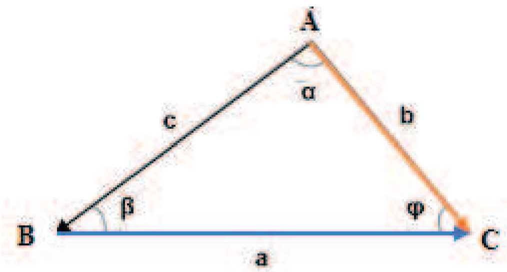


Figura 16
Fonte: Próprio Autor

Na figura (16), notamos que: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$= \langle -\overrightarrow{BC}, -\overrightarrow{BC} \rangle + 2\langle -\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}| \cos \varphi + |\overrightarrow{AC}|^2$$

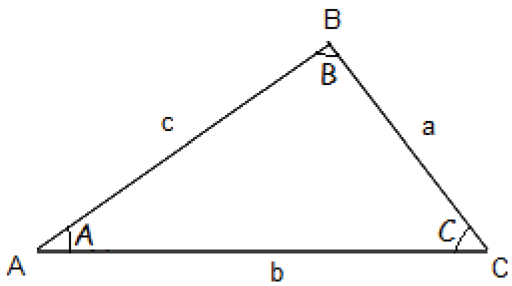
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}| \cos \varphi \qquad (10.1)$$

Como $|\overrightarrow{AB}| = \mathbf{c}$, $|\overrightarrow{AC}| = \mathbf{b}$ e $|\overrightarrow{BC}| = \mathbf{a}$, a relação (10.1), fica escrita na forma:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2.\mathbf{a}.\mathbf{b}.\cos \varphi \qquad \blacksquare$$

As demonstrações das outras igualdades seguem um raciocínio análogo.

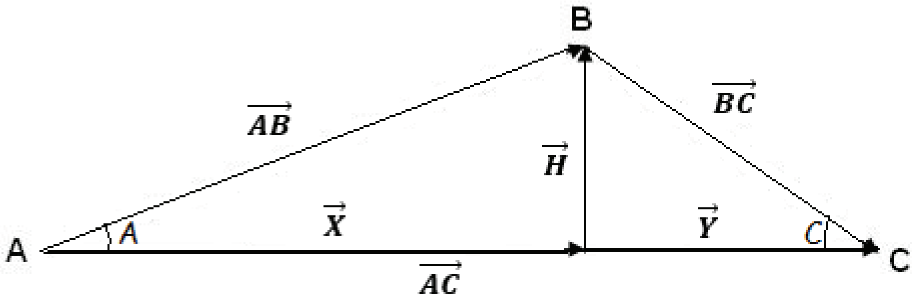
TEOREMA 11. (A lei dos Senos) Em qualquer triângulo ABC, a razão entre o lado e o seno do ângulo oposto a ele é constante.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Figura 17
Fonte: Próprio Autor

DEMONSTRAÇÃO: A Figura (18) nos mostra a equivalente vetorial da Figura (17).



$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

Figura 18
Fonte: Próprio Autor

Pela figura (18) podemos concluir que:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}, \text{ e} \qquad \text{(I)}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \qquad \text{(II)}$$

$$\overrightarrow{X} = \operatorname{Proj}(\overrightarrow{AB})_{\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB}\cos A \qquad \text{(III)}$$

$$\overrightarrow{Y} = \operatorname{Proj}(\overrightarrow{BC})_{\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{BC}\cos C \qquad \text{(IV)}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{H} \qquad \text{(V)}$$

$$\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{H} + \overrightarrow{BC} \qquad \text{(VI)}$$

De (V) podemos fazer:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{X} + \overrightarrow{H}, \overrightarrow{X} + \overrightarrow{H} \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{X}|^2 + 2|\overrightarrow{X}||\overrightarrow{H}|\cos 90° + |\overrightarrow{H}|^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{X}|^2 + |\overrightarrow{H}|^2$$

De (III), vem $\quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2\cos^2 A + |\overrightarrow{H}|^2$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2(1 - \operatorname{sen}^2 A) + |\overrightarrow{H}|^2$$

$$|\overrightarrow{H}| = |\overrightarrow{AB}|\operatorname{sen} A \qquad (11.1)$$

E mais, de (VI) temos que:

$$\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle = \langle \overrightarrow{BC} + \vec{H}, \overrightarrow{BC} + \vec{H} \rangle$$

$$|\vec{Y}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}||\vec{H}| \cos(90° + C) + |\vec{H}|^2$$

$$|\vec{Y}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\vec{H}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}||\vec{H}|(\text{-sen } C)$$

De (IV), vem

$$|\overrightarrow{BC}|^2\cos^2 C = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\vec{H}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\vec{H}|\text{sen } C$$

Como $|\vec{H}| = |\overrightarrow{BC}|\text{sen } C$,

temos $|\overrightarrow{BC}|^2(1 - \text{sen}^2 C) = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\vec{H}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\vec{H}|\text{sen } C$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2\text{sen}^2 C = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\vec{H}|^2 - 2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BC}|\text{sen}^2 C$$

$$|\vec{H}| = |\overrightarrow{BC}|\text{sen } C \qquad (11.2)$$

De (11.1) e (11.2) segue que:

$$|\overrightarrow{AB}|\text{sen } \hat{A} = |\overrightarrow{BC}|\text{sen } C$$

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\text{sen } C} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{\text{sen } A} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{\text{sen } B}$$ ■

A segunda igualdade segue de maneira análoga.

TEOREMA 12. A área de um paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial entre os vetores que formam os lados adjacentes deste paralelogramo.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o paralelogramo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não colineares, sendo $\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$, conforme a figura (19):

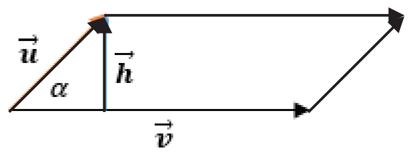


Figura 19
Fonte: Próprio Autor

Observando a figura (19), é fácil perceber que

$$|\vec{h}| = |\vec{u}| \operatorname{sen} \alpha$$

Como a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de um lado pelo comprimento da altura relativa àquele lado, então multiplicando a igualdade acima por $|\vec{v}|$, obteremos:

$$A = |\vec{v}||\vec{h}| = |\vec{v}||\vec{u}| \operatorname{sen} \alpha$$

Mas, por definição: $$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$$

Portanto, $$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$ ■

TEOREMA 13. A área de um triângulo é igual à metade do módulo do produto vetorial dos vetores adjacentes que formam o triângulo.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos considerar o triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$, conforme a figura (20):

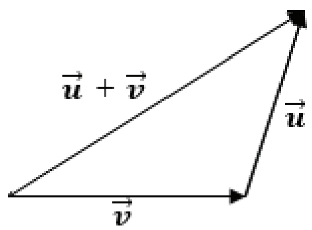


Figura 20
Fonte: Próprio Autor

É fácil notar que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes, portanto de mesma área. Sendo assim, a área de cada triângulo corresponde à metade da área do paralelogramo. Portanto, a relação a seguir conclui a demonstração do teorema 7:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 14. A área de um trapézio é igual à metade do produto vetorial entre o vetor soma dos vetores das bases (maior e menor) e o vetor altura do trapézio.

DEMONSTRAÇÃO: Para demonstrar este teorema faremos referências a figura (21) e aos resultados obtidos pela análise dos vetores que compõem o trapézio.

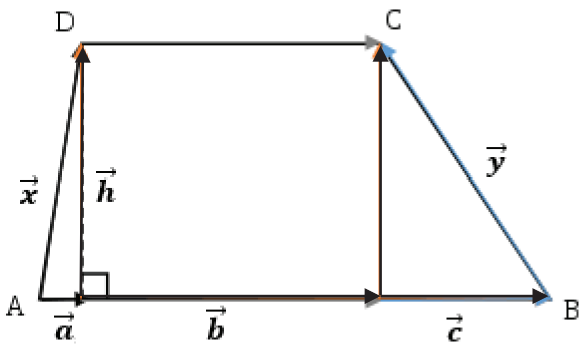


Figura 21
Fonte: Próprio Autor

A área do trapézio da figura (21) é dada pela soma das áreas dos triângulos $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ e da área do retângulo **Ret**, cujos vetores formadores são:

($\mathbf{T_1}$): $\vec{a}$, $\vec{x}$ e $\vec{h}$;

($\mathbf{T_2}$): $\vec{c}$, $\vec{y}$ e $\vec{h}$;

(**Ret**) : $\vec{b}$ e $\vec{h}$.

Claro que: $A_1 = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{h}|}{2}$; $\quad A_2 = \dfrac{|\vec{c} \times \vec{h}|}{2}$ e $\quad A_{Ret} = |\vec{b} \times \vec{h}|$

E mais, $\quad A_{Trap} = A_1 + A_2 + A_{Ret}$

$$A_{Trap} = \frac{|\vec{a} \times \vec{h}|}{2} + \frac{|\vec{c} \times \vec{h}|}{2} + |\vec{b} \times \vec{h}|$$

$$A_{Trap} = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|+|\vec{\boldsymbol{c}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|+2|\vec{\boldsymbol{b}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|}{2}$$

$$A_{Trap} = \frac{|(\vec{\boldsymbol{a}}+2\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}) \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|}{2}$$

$$A_{Trap} = \frac{|[(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}})+\vec{\boldsymbol{b}}] \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|}{2}$$

Chamemos de: $\vec{\boldsymbol{B}}= \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}$, na figura (21), para obter,

$$A_{Trap} = \frac{|(\vec{\boldsymbol{B}}+\vec{\boldsymbol{b}}) \text{ x } \vec{\boldsymbol{h}}|}{2} \qquad \blacksquare$$

5.2 – Aplicações da Álgebra Vetorial na Geometria Espacial

TEOREMA 15. O volume de um prisma reto é dado pelo módulo do Produto Vetorial Misto:

$$V = |\langle \vec{\boldsymbol{u}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{v}} , \vec{\boldsymbol{w}} \rangle|$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o prisma oblíquo, cuja base seja um paralelogramo formado pelos vetores $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ e a outra aresta representada pelo vetor $\vec{\boldsymbol{w}}$, cuja altura do paralelepípedo é representado pelo vetor $\vec{\boldsymbol{h}}$, onde seu módulo é dado por: $|\vec{\boldsymbol{w}}|.\cos\theta$. Note que θ = $\measuredangle(\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{u}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{v}})$, a figura (22) mostra os vetores geradores do paralelepípedo:

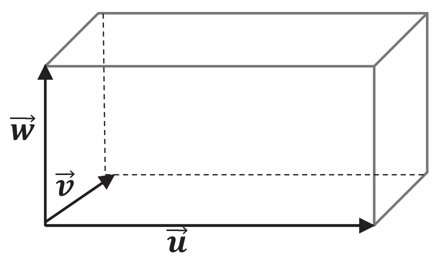


Figura 22
Fonte: Próprio Autor

Como o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, temos que:

- A base é formada pelo paralelogramo, cujos lados são representados pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme a figura (22).
- A área da base é calculada pelo módulo do vetor 'produto vetorial': $A_{Paral} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Assim, multiplicando a expressão acima pela altura do paralelepípedo, obteremos:

$$|\vec{h}|.A_{Paral} = |\vec{u} \times \vec{v}|.\ |\vec{w}|.\cos\theta$$

$$V = |\vec{h}|.A_{Paral} = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle| \qquad \blacksquare$$

Outras construções podem ser obtidas por decomposições dos resultados básicos que já obtivemos até aqui, como por exemplo o volume de um prisma de base poligonal regular, ou até a obtenção da área total de sua superfície. Por este motivo não estenderemos o assunto, para não torna-lo repetitivo.

5.3 – Aplicações da Álgebra Vetorial na Geometria Analítica

Uma das ideias mais poderosas de toda a matemática é a compreensão de como representar formas por equações, uma área que agora chamamos de *geometria analítica*. Sem essa ponte entre a geometria e a álgebra, não existiria o cálculo para a ciência, nem tomografia computadorizada para a medicina, nem ferramentas automatizadas para a indústria, nem computação gráfica para a arte e divertimento. Muitas coisas que tomamos como certas simplesmente não existiriam.

Quando se pensa em geometria analítica, a primeira coisa que vem à mente para muitas pessoas é um par de eixos ortogonais, chamado de *sistema de coordenadas cartesianas*, "Cartesianas" refere-se ao matemático/filósofo francês René Descartes, a quem é creditado o nascimento da geometria analítica. A questão fundamental é a conexão entre expressões algébricas – isto é, equações e funções - e formas em um plano ou no espaço.

Cerca de 300 anos a.C., Manaechmus um dos tutores de Alexandre, O grande, relacionou um tipo de curvas, que chamamos de *seções cônicas*, com a solução de proporções numéricas. Isso estabeleceu o trabalho de base para a exploração das seções cônicas por Apolônio de Perga, aproximadamente um século mais tarde. Apolônio e outros matemáticos de sua época estavam interessados em questões de *lugares geométricos*; quais pontos satisfazem um conjunto de condições. As figuras geométricas construídas por Apolônio estavam associadas a relações numéricas, por meio de razões e palavra. Com o intuito de descrever o lugar geométrico a que pertenciam. Porém, só no fim do século XVI, François Viéte, tentou destilar a essência da análise geométrica dos gregos antigos representando quantidade com letras e relações com equações. Ao fazer isso, ele deu um enorme passo na direção de concentrar o poder da álgebra sobre os problemas da geometria.

Essa visão veio independentemente e quase simultaneamente de dois franceses na primeira metade do século XVII: Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), são os responsáveis por esse grande avanço na fusão da álgebra com geometria.

A geometria de coordenadas (ou analítica) é um elo proeminente na cadeia histórica de grandes progressos matemáticos. Assim como o desenvolvimento da álgebra simbólica abriu caminho para a geometria analítica, também, por sua vez, a geometria analítica abriu caminho para o cálculo. O cálculo por sua vez, abriu as portas para a física moderna e muitas outras áreas da ciência e da tecnologia. Nas últimas décadas esse modo algébrico de descrever formas também se combinou sinergicamente com velocidade de cálculo dos computadores modernos, produzindo imagens visuais cada vez mais assombrosas visando a uma ampla gama de aplicações. Tudo isso repousa sobre a ideia verdadeiramente simples de dar a cada ponto do espaço um endereço numérico, de modo que possamos descrever formas por números. (GOMIDE, E.F. - 2004)

5.3.1 – Distância entre dois pontos

DEFINIÇÃO 13. Dados os pontos A e B do $\mathcal{R}^3$, chamamos de distância euclidiana entre os pontos A e B, e denotamos por $\overline{AB}$, ou ainda d(A,B), o menor caminho, comprimento, que une o ponto A ao ponto B.

TEOREMA 16. (Distância entre dois Pontos) Dados os pontos A e B $\in \mathcal{R}^3$, então o comprimento $\overline{AB}$, é calculado pela expressão:

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2}$$

DEMONSTRAÇÃO: Na figura (23) mostra os vetores: $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$, possuem as seguintes coordenadas cartesianas:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (X_A, Y_A, Z_A)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = (X_B, Y_B, Z_B) \text{ e}$$

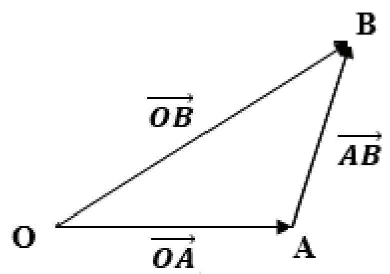


Figura 23
Fonte: Próprio Autor

Como $\quad \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$$

Daqui segue que: $\quad \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{\langle \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \rangle}$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \qquad \blacksquare$$

5.3.2 – Ponto médio

TEOREMA 16. (Ponto Médio) Sejam A, B e M $\in \mathcal{R}^3$. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, então:

$$M = \left(\frac{XA + XB}{2}, \frac{YA + YB}{2}, \frac{ZA + ZB}{2}\right)$$

DEMONSTRAÇÃO: Na figura (24) a seguir:

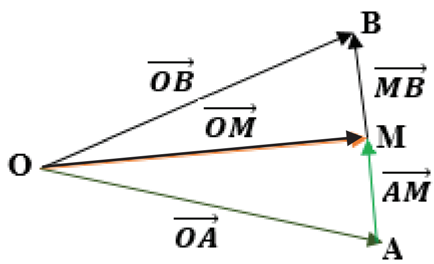


Figura 24
Fonte: Próprio Autor

Como M é ponto médio de $\overrightarrow{AB}$, temos que os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ são equipolentes. Analisando a figura, concluímos, pela álgebra vetorial que:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA} \qquad \text{(I)}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo I em II, obteremos:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Portanto, $$M = \left(\frac{XA + XB}{2}, \frac{YA + YB}{2}, \frac{ZA + ZB}{2}\right) \quad \blacksquare$$

5.3.3 – Condição de Alinhamento de Três Pontos

TEOREMA 17. (Condição de Alinhamento de Três Pontos) Se os três pontos A, B e C $\in \mathcal{R}^3$, estão alinhados, então, tem-se: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ X $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \vec{\mathbf{0}}$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que A, B e C estejam alinhados e nesta ordem. Veja a figura (25), a seguir:

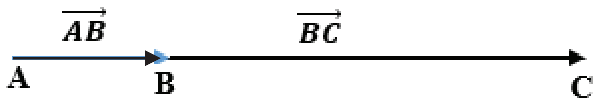


Figura 25
Fonte: Próprio Autor

É claro que existe $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$, tal que, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$.

Portanto, $$\boldsymbol{\alpha} = \measuredangle\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right) = 0°$$

Mas, $$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \text{ X } (\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}})\right| = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right|\left|\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right| \text{ sen } \boldsymbol{\alpha}$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \text{ X } (\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}})\right| = |\boldsymbol{t}|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right| \text{ sen } \mathbf{0}°$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \text{ X } (\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{BC}})\right| = 0$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \text{ X } \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \blacksquare$$

5.3.4 – Equação Vetorial da Reta

TEOREMA 18. (A Equação Vetorial da Reta) Consideremos um ponto A $\in \mathcal{R}^3$, um escalar positivo, $\boldsymbol{t} \in \mathcal{R}$, e uma reta $\boldsymbol{r}$. A equação da reta que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, tem equação paramétrica dada por:

$$(\boldsymbol{r}): \left| \begin{array}{l} x = x_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_x \\ y = y_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_y \\ z = z_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_z \end{array} \right. \qquad (18.1)$$

DEMONSTRAÇÃO: Veja a figura (26) a seguir:

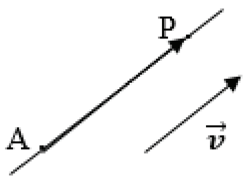


Figura 26
Fonte: Próprio Autor

Como os vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, são paralelos e tem o mesmo sentido, podemos afirmar que existe um número real positivo $\boldsymbol{t}$, tal que a identidade a seguir é verdadeira:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{v}}$$

A expressão acima é chamada de *Equação Vetorial da reta* $\boldsymbol{r}$, que foi obtida passando por um ponto A e tem $\vec{\boldsymbol{v}}$ como o vetor diretor.

Mas $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}$, ou ainda, $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = (x,y,z) - (x_A, y_A, z_A)$, sendo assim poderemos escrever:

$$(x, y, z) - (x_A, y_A, z_A) = \boldsymbol{t}.(\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z)$$
$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = (\boldsymbol{t}.\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{t}.\boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{t}.\boldsymbol{v}_z)$$

Portanto,
$$(\boldsymbol{r}): \left| \begin{array}{l} x = x_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_x \\ y = y_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_y \\ z = z_A + \boldsymbol{t}.\ \boldsymbol{v}_z \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

A equação (18.1) é chamada de equação paramétrica da reta $\boldsymbol{r}$, onde $\boldsymbol{t}$, é o parâmetro.

O papel do parâmetro $\boldsymbol{t}$, é determinar um ponto qualquer sobre a reta $\boldsymbol{r}$, ou seja, para cada valor de $\boldsymbol{t}$ obtemos um, e apenas um, ponto sobre a reta. Assim, pelo exposto anteriormente, podemos concluir que há uma correspondência biunívoca entre cada ponto sobre a reta e o valor do parâmetro.

Uma observação importante quanto ao sentido do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$, é que se o sentido fosse contrário ao de $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$, bastava tomar o parâmetro $\boldsymbol{t}$ negativo, ou então inverter o sentido do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ para $\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}$ e as considerações seriam as mesmas, ou seja, obteríamos a mesma reta $\boldsymbol{r}$, cuja equação vetorial foi mostrada acima.

DEFINIÇÃO 13. Diremos que um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é um '*vetor diretor*' de uma reta $\boldsymbol{r}$, quando ambos tiverem mesma direção, ou seja, que $\vec{\boldsymbol{v}}$ é o vetor que determina a direção da reta $\boldsymbol{r}$.

5.3.5 – Condição de Paralelismo de Retas

TEORAMA 19. (Condição de Paralelismo de Retas) Sejam $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ duas retas do $\mathcal{R}^3$. Se $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas, então vale a igualdade:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \text{ onde } \vec{\boldsymbol{u}} \text{ é o vetor diretor de } \boldsymbol{r} \text{ e } \vec{\boldsymbol{v}} \text{ é o vetor diretor de } \boldsymbol{s}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são retas paralelas e, $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, seus vetores diretores, respectivamente, então dados A em $\boldsymbol{r}$, e B em $\boldsymbol{s}$, tal que:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BQ}} = \boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \text{ X } \overrightarrow{\boldsymbol{BQ}} &= (\boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}) \text{ x } (\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}) \\ &= |\boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}|.|\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}|.\text{sen } \alpha \\ &= |\boldsymbol{t}.\boldsymbol{k}|.\ |\vec{\boldsymbol{u}}|.\ |\vec{\boldsymbol{v}}|.\text{sen } \alpha\end{aligned}$$

Mas, $|\vec{\boldsymbol{u}}|.\ |\vec{\boldsymbol{v}}|.\text{sen } \alpha = 0$, pois $\alpha = 0$ rad, ou π rad.

Portanto, $\vec{\boldsymbol{u}} \text{ x } \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ ■

5.3.6 – Condição de Perpendicularismo entre retas

TEOREMA 20. (Condição de Perpendicularismo de Retas) Sejam ***r*** e ***s*** duas retas do $\mathcal{R}^3$. Se ***r*** e ***s*** são perpendiculares, então vale a igualdade:

$$\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = 0, \text{ onde } \vec{\boldsymbol{u}} \text{ é o vetor diretor de } \boldsymbol{r} \text{ e } \vec{\boldsymbol{v}} \text{ é o vetor diretor de } \boldsymbol{s}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como ***r*** e ***s*** são retas perpendiculares e, $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, seus vetores diretores, respectivamente, então dados A em ***r***, e B em ***s***, tal que:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{BQ}} = \boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BQ}} \rangle &= \langle \boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}} \rangle \\ &= |\boldsymbol{t}.\vec{\boldsymbol{u}}|.|\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}|.\cos\alpha \\ &= |\boldsymbol{t}.\boldsymbol{k}|.\,|\vec{\boldsymbol{u}}|.\,|\vec{\boldsymbol{v}}|.\,\cos\alpha\end{aligned}$$

Mas, $\quad |\vec{\boldsymbol{u}}|.\,|\vec{\boldsymbol{v}}|.\,\cos\alpha = 0$, pois $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

Portanto, $\quad \langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = 0 \quad$ ■

5.3.7 – Distância de Ponto a Reta

TEOREMA 21. (Distância entre Ponto e Reta) Sejam **A** e ***r*** um ponto e uma reta do $\mathcal{R}^3$, respectivamente. A distância entre a reta ***r*** e o ponto **A**, não pertencente a ***r***, denotado por d(A, ***r***), é dada pela relação:

$$d(A, \boldsymbol{r}) = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}\ X\ \vec{\boldsymbol{v}}\,|}{|\vec{\boldsymbol{v}}\,|}$$

onde $\vec{v}$ é o vetor diretor da reta r.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a figura (27) a seguir:

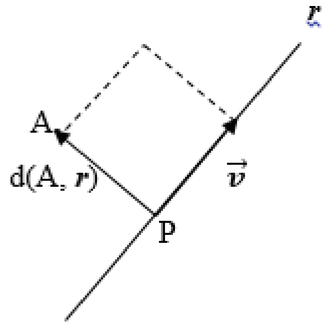


Figura 27
Fonte: Próprio Autor

Observando a figura (27) temos que a área do paralelogramo formado pelos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\vec{v}$, é obtido pelo módulo do produto vetorial a seguir:

$$A_{Paral} = \left|\overrightarrow{PA} \text{ X } \vec{v}\right| \qquad (21.1)$$

Por outro lado, como $\vec{h}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares temos então:

$$A_{Paral} = \left|\vec{h}\right||\vec{v}| \qquad (21.2)$$

Mas, $\left|\vec{h}\right|$ = d(A, r), então comparando (21.1) e (21.2), temos:

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \; X \; \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} \qquad \blacksquare$$

5.3.8 – Ângulo entre duas Retas

TEOREMA 22. Sejam **r** e **s** duas retas no $\mathcal{R}^3$. Vamos supor que estas retas sejam coplanares, isto é, pertençam ao mesmo plano. Assim o ângulo entre elas é dado pela expressão:

$$\theta = \text{arcsen}\left[\frac{|\vec{u} \text{ x } \vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right],$$

Onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são os vetores diretores de **r** e **s**, respectivamente.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$, os vetores diretores de **r** e **s**, respectivamente, então

$$|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}|.\,|\vec{v}|.\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{u} \text{ x } \vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\therefore \qquad \theta = \text{arcsen}\left[\frac{|\vec{u} \text{ x } \vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right] \qquad \blacksquare$$

5.3.9 – A Equação Vetorial do Plano

DEFINIÇÃO 14. Consideremos duas retas no 3-espaço, ortogonais entre si, ***r*** e ***s***, de modo que a reta ***r*** seja fixa, e a reta ***s*** execute um giro em torno de ***r*** mantendo o mesmo ângulo de inclinação entre elas. A região formada por ***s*** é o que chamamos *plano gerado por **r** e **s***. A essa região do espaço poderíamos, também, dizer que ela é um conjunto de pontos que obedecem a uma propriedade específica, ou seja é um lugar geométrico descrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\pi} = \{P \in \mathcal{R}^3; \mathbf{P} = \mathbf{A} + t.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + h.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \text{ onde } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{C} \in \mathcal{R}^3, \text{ são dados e } t, h \in \mathcal{R}\}$$

A figura (28) nos mostra o plano $\boldsymbol{\pi}$, gerado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ortogonais entre si, que são os vetores diretores das retas ***r e s***, cuja equação discutiremos a seguir.

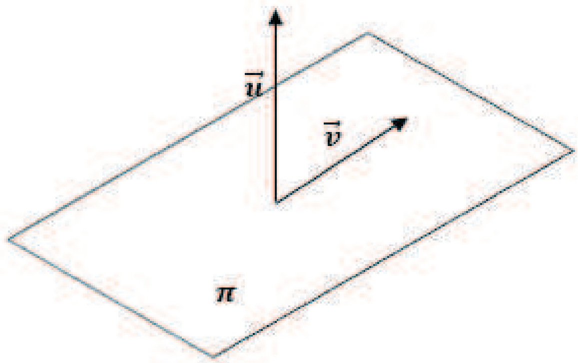


Figura 28
Fonte: Próprio Autor

Para encontrarmos a equação vetorial de um plano poderemos fazer isso de várias formas, dependendo das informações que nos foi fornecida. Assim vamos considerar algumas situações:

I – São dados três pontos (fixo): **A, B** e **C**, não colineares e um ponto **P** (dinâmico), qualquer, existem escalares reais t e h, tal que (figura 29):

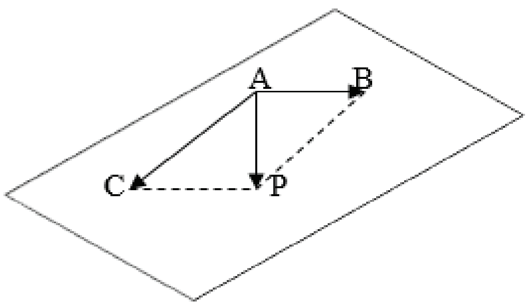


Figura 29
Fonte: Próprio Autor

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = t.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + h.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \qquad (\textit{Equação Vetorial do Plano})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + t.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + h.\,\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

$$\left|\begin{array}{l} X = X_A + \mathbf{t}.X_{AB} + h.X_{AC} \\ Y = Y_A + t.Y_{AB} + h.Y_{AC} \\ Z = Z_A + t.Z_{AB} + h.Z_{AC} \end{array}\right. \qquad (14.1)$$

A equação (14.1) é chamada de *Equação Paramétrica do Plano*. Usando a equação paramétrica do plano é possível encontrar um ponto do plano atribuindo valores aos parâmetros t e h, bem como construir retas que pertencem a este plano, bastando para isso usar o processo construtivo do TEOREMA 18.

II – Dado um ponto **A** no plano e o vetor $\vec{u}$, perpendicular ao plano. Sendo **P** um ponto qualquer deste plano, então a *equação reduzida* do plano é dada por (figura 30):

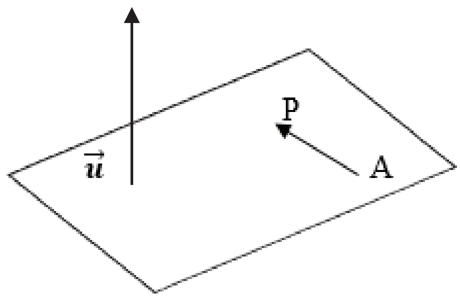


Figura 30
Fonte: Próprio Autor

É claro que o produto interno de $\overrightarrow{AP}$, e $\vec{u}$ é igual a zero, ou seja:

$$\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$u_x(X - X_A) + u_y(Y - Y_A) + u_z(Z - Z_A) = 0$$

Reduzindo a expressão acima obteremos a *equação geral do plano* conforme a seguir:

$$u_xX + u_yY + u_zZ + K = 0,$$

onde a constante K, é: $K = -(u_xX_A + u_yY_A + u_zZ_A)$

Como podemos perceber na equação geral do plano, os coeficientes de X, Y e Z, são as coordenadas do vetor ortogonal ao plano.

Outros temas poderiam ser abordados explicitamente, como por exemplo: distância entre dois planos, posições relativas entre dois planos, distância de um ponto, ou uma reta) a um plano, ângulo entre dois planos, no entanto, já o fizemos quando fizemos o estudo da reta. Aqui é, apenas, uma extensão, e para não tornar o estudo exaustivo decidimos por “omiti-lo”.

5.3.10 – A Equação da Circunferência

DEFINIÇÃO 15. Chamamos de circunferência $\boldsymbol{\lambda}$, ao lugar geométrico formado pelos pontos que distam r unidades de comprimento de um ponto fixo, chamado de centro. Designemos por r o raio e C(a,b) o centro da circunferência. Veja a figura 31:

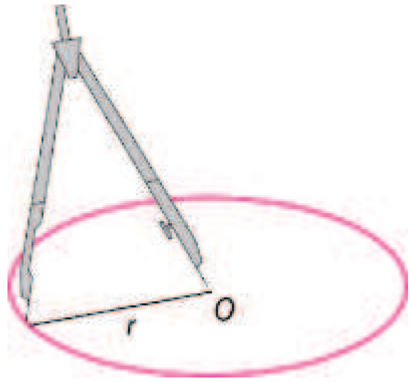


Figura 31
Fonte: http://4.bp.blogspot.com/

Em linguagem de conjunto e com notação vetorial, o lugar geométrico que representa a circunferência $\boldsymbol{\lambda}$, de centro C(h,k) e raio r, será:

$$\boldsymbol{\lambda} = \{ P(x,y) \in \ \in \mathcal{R}^2;\ |\overrightarrow{CP}| = r, \text{ com } r \in \mathcal{R}_+ \}$$

TEOREMA 23. Seja C(h, k) o centro da circunferência $\boldsymbol{\lambda}$ de raio r, então sua equação terá a forma algébrica:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

DEMONSTRAÇÃO: A figura (31) mostra o lugar geométrico que representa a circunferência $\boldsymbol{\lambda}$, de centro C(h, k) e raio r, cuja a notação vetorial, é:

$$|\overrightarrow{CP}| = r$$

$$\sqrt{\langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP} \rangle} = r, \text{ mas } \overrightarrow{CP} = ((x - h), (y - k))$$

$$\sqrt{(x - h)(x - h) + (y - k)(y - k)} = r$$

$$\therefore \qquad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \blacksquare$$

A esta equação chamamos de *equação reduzida da circunferência* $\boldsymbol{\lambda}$ *de centro C(h,k) e raio r*.

A obtenção da equação geral de $\boldsymbol{\lambda}$ é feita desenvolvendo o produto notável do primeiro membro, ou seja:

$$(\lambda): X^2 + Y^2 + AX + BY + C = 0$$

onde, $A = -2h$; $B = -2k$ e $C = h^2 + k^2 - r^2$.

É importante ressaltar que problemas de posições relativas entre ponto e circunferência, ou de reta e circunferência, são feitas mediante a álgebra vetorial tratado nos capítulos 4.3.1 e 4.3.7, respectivamente.

6 PROPOSTA DE ATIVIDADES

As atividades que propomos para serem trabalhada em sala de aula tem como objetivo geral desenvolver os fatores diversos como o pensamento, a linguagem, a percepção, a memória e o raciocínio, que fazem parte do desenvolvimento intelectual dos nossos alunos.

Para estas atividades usamos o método construtivista, pois entendemos que *a importância do que se faz é igual ao como e porque fazer*, assim buscamos delinear os diversos estágios por que passam os nossos alunos em suas ações para aquisição dos novos conhecimentos, cujo objeto é que ele desenvolva sua inteligência e se torna autônomo, ou seja o construtor de seu próprio conhecimento.

Assim essas atividades foram desenvolvidas levando em consideração de o professor deve levar o aluno a tornar-se independente e estimular o seu potencial com atividades cujo grau de dificuldade seja crescente até o momento em que se perceba que os conceitos fundamentais que são o propósito de seus estudos sejam alcançados.

Assim, o professor pode fazer isso estimulando o trabalho com grupos e utilizando técnicas para motivar, facilitar a aprendizagem e permitir que este aluno construa seu conhecimento em grupo com participação ativa e a cooperação de todos os envolvidos. Sua orientação deve possibilitar a criação de ambientes de participação, colaboração e constantes desafios.

Com esse intuito foi que optamos por seguir a Taxonomia de Bloom do Domínio Cognitivo que é estruturada em níveis de complexidade crescente – do mais simples ao mais complexo – e isso significa que, para adquirir uma nova habilidade pertencente ao próximo nível, o aluno deve ter dominado e adquirido a habilidade do nível anterior.

Só após conhecer um determinado assunto alguém poderá compreendê-lo e aplicá-lo. Nesse sentido, a taxonomia proposta não é apenas um esquema para classificação, mas uma possibilidade de organização hierárquica dos processos cognitivos de acordo com níveis de complexidade e objetivos do desenvolvimento cognitivo desejado e planejado.

Os processos categorizados pela Taxonomia dos Objetivos Cognitivos de Bloom, além de representarem resultados de aprendizagem esperados, são cumulativos, o que caracteriza uma relação de dependência entre os níveis e são organizados em termos de complexidades dos processos mentais.

Encerrando um modo de utilização bastante prático, uma vez que permite, a partir da utilização de uma tabela *Domínio Cognitivo* perceber qual o verbo a utilizar / aplicar, em função do comportamento esperado, organizando os objetivos de aprendizagem em seis níveis, os quais são, por ordem crescente de complexidade os seguintes:

CONHECIMENTO	**COMPREENSÃO**	**APLICAÇÃO**	**ANÁLISE**	**SÍNTESE**	**AVALIAÇÃO**
Apontar	Descrever	Aplicar	Analisar	Armar	Ajuizar
Arrolar	Discutir	Demonstrar	Calcular	Articular	Apreciar
Definir	Esclarecer	Dramatizar	Classificar	Compor	Avaliar
Enunciar	Examinar	Empregar	Comparar	Constituir	Eliminar
Inscrever	Explicar	Ilustrar	Contrastar	Coordenar	Escolher
Marcar	Expressar	Interpretar	Criticar	Criar	Estimar
Recordar	Identificar	Inventariar	Debater	Dirigir	Julgar
Registrar	Localizar	Manipular	Diferenciar	Reunir	Ordenar
Relatar	Narrar	Praticar	Distinguir	Formular	Preferir
Repetir	Reafirmar	Traçar	Examinar	Organizar	Selecionar
Sublinhar	Traduzir	Usar	Provar	Planejar	Taxar
Nomear	Transcrever		Investigar	Prestar	Validar
			Experimentar	Propor	Valorizar
				Esquematizar	

Tabela: 1

Fonte: http://penta2.ufrgs.br/edu/bloom/bloom.htm

ATIVIDADE 1

6.1 - OPERAÇÕES COM VETORES. EQUIPOLÊNCIA E CARACTERIZAÇÃO

1. A figura 1 é constituída de nove quadrados congruentes, isto é, de mesmo tamanho. Decida se é verdadeira, ou falsa, cada uma das afirmações a seguir:

a) $\overrightarrow{AB}$ é equipolente a $\overrightarrow{OF}$ b) $\overrightarrow{AC}$ é equipolente a $\overrightarrow{MO}$ c) $\overrightarrow{BE}$ é equipolente a $\overrightarrow{GH}$

d) $\overrightarrow{OP}$ é equipolente a $\overrightarrow{JI}$ e) $\overrightarrow{GD}$ é equipolente a - $\overrightarrow{HK}$ f) $|\overrightarrow{NK}| = |\overrightarrow{CF}|$

f) $|\overrightarrow{IK}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|$ g) $|\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{PA}|$ h) $|\overrightarrow{IL}| = 3|\overrightarrow{MA}|$

i) $\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{CK}$ j) $\overrightarrow{IK} \perp (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DH})$ k) $\overrightarrow{AH} // \overrightarrow{CK}$

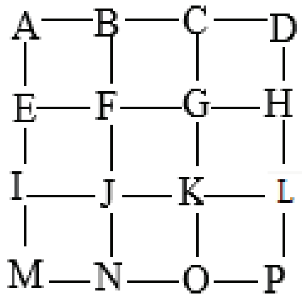


Figura: 32
Fonte: Próprio Autor

2. A figura 2 a seguir nos mostra vários vetores. Use uma folha de papel milimetrado para construir, geometricamente os vetores indicados em cada item.

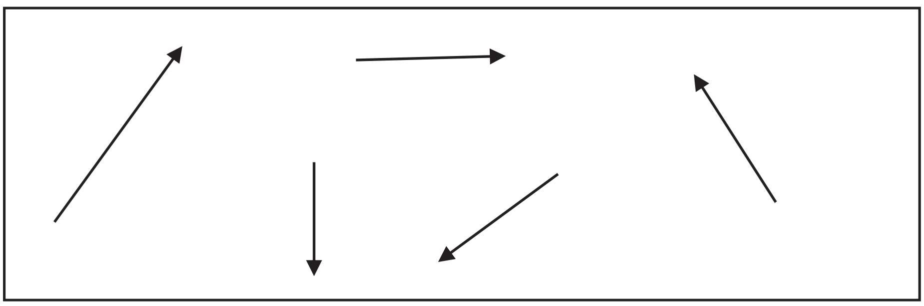


Figura: 33
Fonte: Próprio Autor

Nesta atividade você vai comprovar, geometricamente, as propriedades de adição de vetores. Dê nomes aos vetores, use uma régua para encontrar, aproximadamente seus módulos. Use um transferidor e indique, aproximadamente a direção de cada um. Qual o sentido de cada um? Comece preenchendo a tabela de caracterização de cada vetor.

Vetor	Módulo (cm)	Direção (graus)	Sentido	Módulo da Componente Horizontal (eixo X)	Módulo da Componente Vertical (eixo Y)

Tabela: 2
Fonte: Próprio Autor

a) Propriedade Comutativa (Adição)

b) Propriedade Associativa (Adição)

c) Propriedade Comutativa (Multiplicação por escalar)

d) Propriedade Associativa (Multiplicação por escalar)

3. Usando a tabela de valores trigonométricos do seno, cosseno e tangente abaixo para encontrar o a medida da direção de cada vetor do $\mathcal{R}^2$. Em seguida preencha a tabela abaixo, que é a caracterização de cada vetor dado:

Vetor	Módulo	Direção	Sentido	Módulo da Componente Horizontal (u_x)	Módulo da Componente Vertical (u_y)
$\vec{u}$**(3,4)**					
$\vec{v}$**(2,-1)**					
$\vec{z}$**(-3,0)**					
$\vec{r}$**($\frac{1}{2}$, -2)**					

Tabela: 3
Fonte: Próprio Autor

4. Preencher a tabela a segui com a caracterização de cada vetor dado na primeira coluna. Considere os vetores: $\vec{u}$**(1,4)**, $\vec{v}$**(-2, 3)**, $\vec{z}$**(2,1)** e $\vec{r}$**($\frac{1}{2}$, 0)**

Vetor	Módulo	Direção	Sentido	Módulo da Componente Horizontal (eixo X)	Módulo da Componente Vertical (eixo Y)
$\vec{u}+\vec{v}$					
$\vec{v}$ - $\vec{u}$					
$2\vec{z}+3\vec{r}$					
$\vec{r}$ - $\frac{1}{2}\vec{u}$					

Tabela: 4
Fonte: Próprio Autor

ATIVIDADE 2

6.2 - ÁREA E VOLUME

1. Consideremos os vetores dados na tabela a seguir e construa no $\mathcal{R}^3$ as seguintes figuras. É importante que você use papel milimetrado para visualizar cada uma das figuras que você vai construir. Para cada figura construa num sistema de eixos diferentes.

Vetor	Paralelogramo	Triângulo	Produto Vetorial	Prisma	Produto Interno
$\vec{u}(3, 4, 0)$	$\vec{u}$ e $\vec{v}$	$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$	$\vec{u}$ x $\vec{v}$	$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u}$ x $\vec{v}$	$\vec{u}$ e $\vec{v}$
$\vec{v}(3, 2, 1)$	$\vec{v}$ e $\vec{r}$	$\vec{v}, \vec{r}$ e $\vec{v}+\vec{r}$	$\vec{v}$ x $\vec{r}$	$\vec{v}, \vec{r}$ e $\vec{v}$ x $\vec{r}$	$\vec{v}$ e $\vec{r}$
$\vec{r}(2, 1, 2)$	$\vec{z}$ e $\vec{u}$	$\vec{z}, \vec{u}$ e $\vec{z}+\vec{u}$	$\vec{z}$ x $\vec{u}$	$\vec{z}, \vec{u}$ e $\vec{z}$ x $\vec{u}$	$\vec{z}$ e $\vec{u}$
$\vec{z}(-3, 0, 4)$	$\vec{v}$ e $\vec{z}$	$\vec{v}, \vec{z}$ e $\vec{v}+\vec{z}$	$\vec{v}$ x $\vec{z}$	$\vec{v}, \vec{z}$ e $\vec{v}$ x $\vec{z}$	$\vec{v}$ e $\vec{z}$

Tabela: 5
Fonte: Próprio Autor

2. Usando a tabela da questão 1, calcule. (Sugestão: use o aplicativo "*Math helper lite*" para o cálculo dos produtos vetoriais e produtos internos). O GeoGebra vai auxiliá-lo na construção no $\mathcal{R}^3$. O exercício manual é fundamental.

a) A área de cada paralelogramo;

b) A área de cada triângulo;

c) A área total de cada prisma;

d) O volume de cada prisma.

3. Use os vetores da tabela da questão 1 para verificar se eles são ortogonais, ou paralelos, ou nenhum deles. Lembre-se que é preciso usar o Produto vetorial e o Produto Interno para tal verificação.

4. Verifique se os prismas obtidos na questão 1 são paralelepípedos retangulares. Se a resposta for afirmativa encontre o volume usando o método que você aprendeu no estudo de geometria espacial.

5. Mostre que a soma dos ângulos internos dos triângulos da questão 1 é, realmente, 180º, comprovando assim a veracidade do teorema de Thales. Faça esta atividade usando geometria plana, isto é construa os triângulos e, com o transferidor, comprove. Use também o método analítico, isto é, o produto interno, ou vetorial, para encontrar os ângulos entre os vetores e comprovar o teorema de Thales.

6. (O Problema Clássico da Mosca) Uma mosca se encontra num dos vértices de uma sala de dimensões 3,5 metros de largura, 4,0 metros de comprimento e 4,0 metros de altura (até o forro). Vértice diametralmente oposto encontram-se restos de bolachas deixadas por um garotinho no momento em que estava lanchando. Sabendo-se que a mosca demorou, aproximadamente, 5 segundos para sair de onde estava até os restos de migalhas, e que ela usou o menor caminho para se deslocar, qual foi sua velocidade média nas seguintes situações:

a) Ela foi andando;

b) Ela foi voando.

7. (Aplicações na Física) Um garoto puxa uma caixa de 10 kg, sobre uma superfície plana e sem atrito. Supondo que a força aplicada pelo garoto num sistema ortogonal é representado pelo vetor $\vec{\boldsymbol{f}}$ (3,0,5), o que faz com que a caixa se desloque até o ponto $\vec{\boldsymbol{d}}$ (5,0,0). Sabendo-se que o trabalho $\vec{\boldsymbol{T}}$, realizado pela força $\vec{\boldsymbol{f}}$ para deslocar a caixa de $|\vec{\boldsymbol{d}}|$ é dado pelo produto interno:

$$|\vec{\boldsymbol{T}}| = \langle \vec{\boldsymbol{f}}, \vec{\boldsymbol{d}} \rangle.$$

Encontre:

a) Faça uma figura, em 3-D, mostrando a situação.

b) O ângulo de inclinação de $\vec{\boldsymbol{f}}$ com os eixos coordenados.

c) Qual o trabalho $\vec{\boldsymbol{T}}$ realizado por $\vec{\boldsymbol{f}}$?

d) O trabalho $\vec{\boldsymbol{T}}$ é resistivo($\langle \vec{\boldsymbol{f}}, \vec{\boldsymbol{d}} \rangle < 0$), ou motor ($\langle \vec{\boldsymbol{f}}, \vec{\boldsymbol{d}} \rangle > 0$)?

ATIVIDADE 3

6. 3 - RETAS E PLANOS

1. Encontre a equação paramétrica do feixe de retas paralelas ao vetor $\vec{u}(3, 4)$, e que passe pelos pontos dados, em cada caso. Faça sua representação geométrica em papel milimetrado.

a) A(3,4), B(-1,-2), C(0,0), D(-2,4) e E(0,5)

b) A(0,4), B(3,-2), C(5,0), D(-1,-4) e E(0,-5)

2. Atribua os seguintes valores para o parâmetro t, para encontrar pontos que pertence a cada reta que você obteve na questão 1: t =1, t =2, t = -1 e t = -2.

3. Encontre as equações gerais das retas que você obteve na questão 1.

4. Vamos agora sair do $\mathcal{R}^2$ e vamos para o $\mathcal{R}^3$. Para isso você vai acrescentar mais uma coordenada ao vetor diretor do feixe de retas paralelas e aos pontos dados. Lembre-se que esta nova coordenada é a *cota* (**z**). Não atribua z = 0, senão você volta pro $\mathcal{R}^2$. Assim procedendo, refaça a questão 1 observando as alterações que terá que fazer.

5. Use as retas do feixe de paralelas do $\mathcal{R}^2$ que você construiu na questão 1 para calcular a distância entre cada uma delas.

6. Use as retas do feixe de paralelas do $\mathcal{R}^3$ que você construiu na questão 4 para calcular a distância entre cada uma delas. O que você observou? Que conclusão você tira disso? Anote no seu caderno suas conclusões.

7. Encontre a equação paramétrica do plano π que contém o ponto A(2,2,-1) e é paralelo aos vetores: $\vec{u}(2,-3,1)$ $\vec{v}(-1,5,-3)$. Faça a representação geométrica do plano π no $\mathcal{R}^3$.

8. Atribua três valores para o parâmetro ***t*** na equação do plano da questão 7 para obter três pontos do plano. Aproveite e encontre as equações paramétricas das três retas que passam pelos pontos dados e que estejam contidas no plano.

9. Considere o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, com A=(2,4) e B(3,6). Sabendo-se que uma circunferência λ tem cento em A e raio igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, encontre sua equação reduzida e geral. Faça uma figura no $\mathcal{R}^2$. Faça uma figura no $\mathcal{R}^3$, claro que as cotas dos pontos dados são iguais a zero.

10. Considere o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, com A=(2,4,1) e B(3,6,2). Sabendo-se que uma circunferência λ tem cento em A e raio igual ao módulo do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, encontre sua equação reduzida. Faça uma figura.

OFICINAS

As oficinas foram elaboradas com o objetivo de auxiliar na aprendizagem dos nossos alunos. A sugestão é de executar essas atividades no Laboratório de Geometria, ou em sala de aula. Para sua execução são necessários a utilização dos instrumentos de geometria: Régua (30cm), esquadros (30º,45º e 60º), transferidor, compasso, gabaritos de figuras geométricas básicas, papel milimetrado, cartolinas e papel cartão Paraná (2mm).

6.4 - OFICINA I – Vetores no $\mathcal{R}^3$

Construção do espaço $\mathcal{R}^3$**.** Com o papel cartão Panamá o aluno deverá cortar três quadrados de 30cm de lado e, usando uma régua desenhar quadrinhos com 1 cm de lado nas três peças cortadas anteriormente. Colar as três peças planas, compondo os três planos: XY (base), XZ e YZ, obedecendo os eixos padrões. Este é o primeiro octante.

- **Atividade I**: Identificar os sinais de cada coordenada dos pontos pertencentes a cada octante.
- **Atividade II**: Identificar os sinais das coordenadas dos pontos colocados sobre os eixos coordenados.
- **Atividade III**: Identificar visualmente a que octante, ou eixo, pertence um ponto apresentado pelo professor.
- **Atividade IV**: Usando o WinPlot, construir vetores no $\mathcal{R}^3$, sendo dadas suas coordenadas.
- **Atividade V**: Usando a cartolina, construir, numa folha de papel milimetrado, vetores com módulo, sentido e direção previamente determinados pelo professor. Colar tais vetores no espaço $\mathcal{R}^3$. Aqui é necessário o uso do transferidor para marcar os ângulos do vetor com cada plano do $\mathcal{R}^3$ (ângulos diretores).

6.5 - OFICINA II – Operações com Vetores no $\mathcal{R}^2$

Nesta oficina faremos uso dos instrumentos de desenho geométrico: Régua, transferidor, esquadros, compasso e papel milimetrado. O uso de uma calculadora científica será bem vinda, ou o aplicativo "*Math Helper Lite*".

- **Atividade I**: Desenhar três vetores quaisquer no papel milimetrado. Usando régua e compasso, identificar os módulos e direções de cada vetor.
- **Atividade II**: Usando o método geométrico de soma de vetores, construir um novo vetor como soma de dois dos três que foram desenhados. Encontrar suas características (módulo, direção e sentido) geométricas.
- **Atividade III**: Qual a área dos triângulos da Atividade II? Aqui o aluno deverá o método da aproximação, por falta e por excesso.
- **Atividade IV**: Calcular a área de cada triângulo usando o produto vetorial. Comparar os resultados obtidos na Atividade III.
- **Atividade V**: Usando os vetores da Atividade I, encontrar um outro vetor que é a diferença de dois quaisquer. Caracterizá-los (módulo, direção e sentido)
- **Atividade VI**: Calcular a área aproximada, por excesso, e por falta. Calcular a área usando o cálculo vetorial.
- **Atividade VII**: Comprovar o teorema de Thales que diz: "*A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º* ".
- **Atividade VIII**: Transferir todos os vetores da Atividade I para o plano Cartesiano. Representá-los na forma pontual e canônica. Comprove os resultados obtidos geometricamente nas Atividades II e V, procurando justificar analiticamente seus resultados.

6.6 - OFICINA III – Operações com Vetores no $\mathcal{R}^3$

Nesta Oficina faremos uso do sistema tridimensional que o aluno construiu com papel cartão Panamá na Oficina I.

- **Atividade I**: Com um tablete de sabão na forma de um paralelepípedo inseri-lo no primeiro octante. Anotar todas as coordenadas de seus vértices, indicando-as por letras maiúsculas do nosso alfabeto.
- **Atividade II**: Representar cada aresta por um vetor e caracterizá-los quanto ao módulo, direção e sentido.
- **Atividade III**: Calcular a diagonal do tablete de sabão.
- **Atividade IV**: Calcular as áreas laterais e total do tablete de sabão. Usar a álgebra vetorial.
- **Atividade V**: Calcular o volume do tablete de sabão. Usar a álgebra vetorial.
- **Atividade VI**: Comprovar a validade dos resultados obtidos nas Atividades IV e V, usando o cálculo de área e volume de um paralelepípedo na geometria espacial tradicional.
- **Atividade VII**: Executar as mesmas atividades anteriores, só que duas superfícies opostas do tablete de sabão deverão sofrer dois cortes planos paralelos, porém oblíquos.

Considerações Finais

O que nos motivou para a realização deste trabalho foi, a assustadora constatação da grande lacuna existente na formação do modo matemático de pensar dos alunos do ensino médio, de uma forma precisa e na utilização de resultados que, em sua grande parte foi sonegada a oportunidade da construção de demonstrações que fossem, ao mesmo tempo, fáceis de entender todas as etapas da demonstração, porém sem perder o rigor que é exigido em matemática. O aluno é treinado para usar fórmulas prontas, mas incapaz de deduzi-las e isso pode ser a grande distância entre o aprendizado efetivo e a "decoreba", ou seja, os alunos são expostos quase exclusivamente aos algoritmos de matemática para executá-los mecanicamente, sem compreender o seu real significado e com absoluto descaso por suas condições de validade, cujos resultados o ENEM, Saeb, OBMEP e outros instrumentos que os órgãos governamentais usam para avaliar o ensino médio, demonstram ser baixos.

Desta forma, expomos uma proposta para o ensino médio, a Álgebra Vetorial, com o intuito de resgatar na sala de aula os princípios básicos de argumentação, levantar hipótese, usar axiomas, ou postulados, como base para demonstrações, ou seja desenvolver um raciocínio lógico dedutivo. Estes são processos elementares usados em geometria e análise matemática. Acreditamos que a Álgebra Vetorial vem suprir esta lacuna, tornando as demonstrações fáceis e sofisticadas.

Aqui apresentamos os principais resultados de geometria plana, espacial e analítica, cujas demonstrações se tornaram acessíveis aos alunos do ensino médio. Suas aplicações em física e engenharia são puras extensões dos resultados obtidos.

Estendemos os resultados da geometria espacial e analítica do $\mathcal{R}^2$ para o $\mathcal{R}^3$, por compreendermos que aí o aluno irá desenvolver um grau de abstração, ou visão espacial, maior, cuja aplicação é mais palpável, pois tudo o que fazemos é no 3-espaço, e isso facilita no processo construtivo de seu aprendizado.

As atividades e oficinas que foram desenvolvidas, tem como objetivo auxiliá-los no processo construtivo de sua aprendizagem, pois elas foram elaboradas levando em consideração a Taxionomia de Bloom, onde tentamos associar uma situação-problema com uma atividade prática, passando de um exercício para outro com grau de dificuldade mais elevado.

Fica o desafio de buscar novas maneira de incrementar o processo de ensino-aprendizagem que tanto motiva o professor enquanto educador. É sabido que, o que fora exposto, não esgota, obviamente, todas as possibilidades de explorar o conteúdo e sua metodologia para facilitar o aprendizado, mas que sirva de motivação para a busca incessante por aperfeiçoamento profissional.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. (1988). *Cálculo I - Cálculo com funções de uma variável, com introdução a álgebra linear* (2ª ed.). Barcelona, España: Reverté.

BARBOSA, J. L. (2006). *Geometria Euclidiana Plana* (10ª ed.). Rio de Janeiro, RJ: SBM.

BEER, F., & al, e. (2009). *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática* (9ª ed.). Porto Alegre, RS: Bookman.

BONJORNO, J. R. (2013). *Física: Mecânica - 1° Ano* (2.ed ed.). São Paulo, SP: FTD.

BRASIL. MEC. INEP. Exame Nacional do Ensino Médio: Documento Básico. Brasília, 1998.

BRASIL. MEC. SEF. Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Brasília, 1998.

FILHO, B. B., & SILVA, C. X. (2013). *Física: aula por aula. Mecânica* (2ª ed., Vol. 1). São Paulo, SP: FTD.

GOMES, F. C. (2014). *Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio da Criptografia RSA e sua Estrutura Matemática* (1ª ed.). Gurupi, TO: UFT.

GOMIDE, E. F. & CASTRO, H., (2008). *A Matemática Através dos Tempos*. São Paulo, SP: Edgard BLUCHER.

IEZZI, G., & all., e. (2013). *Matemática: Ciência e Aplicação* (7 ed., Vol. 3). São Paulo, SP: Saraiva.

LIMA, E. L. (2002). *Coordenadas no Plano.* Rio de Janeiro, RJ: SBM.

MOYER, R. E., & JUNIOR, F. A. (2003). *Trigonometria* (3ª ed.). Porto Alegre, RS: Bookman.

POOLE, D. (2004). *Álgebra Linear.* São Paulo, SP: Thomson.

RICH, B. (2003). *Teoria e Problemas de Geometria: Plana, Analítica e Transformação* (3ª ed.). Porto Alegre, RS: Bookman.

SMOLE, K. S. (2013). *Matemática: Ensino Médio* (7 ed., Vol. 3). São Paulo, SP: Saraiva.

SPIEGEL, M., LIPSCHUTZ, S., & SPELLMAN, D. (2009). *Vector Analysis* (2ª ed.). New York, DC: McGraw Hill.